GENERÁTORPOLINOMOK / -FÜGGVÉNYEK

2025-10-13

VOLT: KOCKA: $g(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^2 + \dots + \frac{1}{6}x^6$

polinom $\Leftrightarrow$ hatványsor

$x^4 + 6x^5$ $\qquad 1 + x + x^2 + \dots \quad \dots$

véges $\qquad \infty$

Fibonacci: $F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$G(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots + F_n x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n$$

NEM ANALÍZIS

$$G(x) = ?$$

$$+\quad G(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots + F_n x^n + \dots$$

$$-\quad x \cdot G(x) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \dots + F_{n-1} \cdot x^n + \dots$$

$$-\quad x^2 \cdot G(x) = F_0 x^2 + F_1 x^3 + \dots + F_{n-2} \cdot x^n + \dots$$

$$(1 - x - x^2)\, G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \underbrace{(F_2 - F_1 - F_0)}_{0} x^2 + \dots + \underbrace{(F_n - F_{n-1} - F_{n-2})}_{0} x^n$$

$$= F_0 + (F_1 - F_0)x$$

$$= x$$

$$\boxed{G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}} \Rightarrow F_n = ???$$

$$1-x-x^2 : (1-\varphi \cdot x)\cdot(1-\psi x)$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{A}{1-\phi x} + \frac{B}{1-\psi x}$$

A, B: kockrét számok:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

egyszerűbb

$$\frac{1}{1-\phi x} = 1+\phi x+\phi^2 x^2+\phi^3 x^3+ \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi x)^n$$

$$\Rightarrow F_n = A\cdot\phi^n + B\cdot\psi^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ÁLT TÉTEL: $G(x)$ konvergenciasugara α

$$\text{együttható}_n \approx \alpha^{-n}$$

$$\mathrm{Fib}_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ kb. mértani sorozat

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

PÉNZVÁLTÁS: Hányféleképp 10000 Ft-ot

5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10000 címlettel fizetni?

Illusztráció: 5, 10, 20 Ft-os

65-öt ?-féle

x^{65} együttható

$$f(x) = (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)$$
$$g(x) = (1 + x^{10} + x^{20} + \ldots)$$
$$h(x) = (1 + x^{20} + x^{40} + \ldots)$$

$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = \ldots \boxed{} \cdot x^{65}$

$5 + 2 \times 10 + 2 \times 20$

5, 20, 40

$$f(x) = \frac{1}{1-x^5} \qquad g(x) = \frac{1}{1-x^{10}} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^{20}}$$

$$f \cdot g \cdot h = \frac{1}{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \frac{}{} + \frac{}{\dots} + \frac{}{} + \frac{}{}$$

PARCIÁLIS TÖRTEK

elsőfokú

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

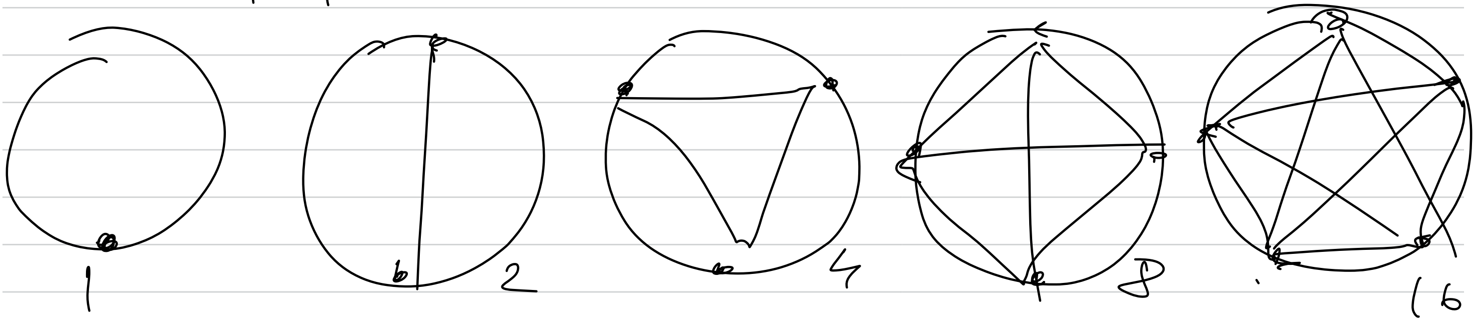
0, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 7, 13, 24

TRIBONACCI

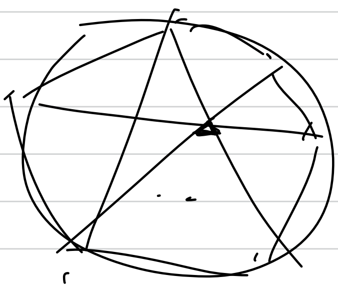
$$G(x) = \frac{}{1-x-x^2-x^3}$$

gyöktényezők

1, 2, 4, 8, 16, ... ?



Hány tartomány keletkezik?



6 pont → 31 tartomány

↑

RANDOM

4-edfokú polinom.

PERRIN - SOROZAT

$P_0 = 3, \; P_1 = 0, \; P_2 = 2,$

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17	22	29	39

PRÍMEK

Sejtés: n prím $\Rightarrow$ P_n osztható n-nel

$\Leftarrow$???

$n = 271441$ „$= 521^2$" tagja:

$P_n = 33$ ezer jegy

$n \mid P_n$, de nem prím

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1-2^{-n}} = 1 + 2^{-n} + 2^{-2n} + 2^{-3n} + \dots$$

$$\frac{1}{1-3^{-n}} = 1 + 3^{-n} + 3^{-2n} + \dots$$

$$(1 + 2^{-n} + \dots)(1 + 3^{-n} + \dots)(1 + 5^{-n}) \dots = ?$$

PRIMEK

$$(1 + \dots + 2^{-3n})(\dots + 3^{-2n}) = \dots 72^{-n}$$

8^{-n} 9^{-n}

$$\prod_{p \text{ prím}} \frac{1}{1-p^{-n}} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} =: \zeta(n)$$

↑ zéta

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\parallel$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$\zeta(n)$: Riemann: valahogy a prímekkel összefügg

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

???↓

$$\sum \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

k db (titkos) szám $\longrightarrow \binom{k}{2}$ összeg párokat

? $\longleftarrow$ 12, 15, 17

$k=3$

$a+b=12$

$a+c=15$

$b+c=17$

? $\longleftarrow$ 5, 103, 104, 106, 107, 205

$k=4$

2, 3, 101, 104

1, 4, 102, 103

k: MIKOR LEHET BIZTOSAN KIDILALNI?