

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 3. zárthelyi
2023. december 18.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.

Az 5. feladat (elméleti kérdés) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. (12 pont) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

2. Tekintsük az alábbi W alteret és x vektort \mathbb{R}^4 -ben:

$$W := \text{Span}((1, 1, -1, 1), (3, 1, 2, 2), (3, -3, 3, -1)), \quad x = (4, 7, 7, -8)$$

- (a) (2 pont) Döntsük el, hogy a W altér fent megadott generátorrendszere ortogonális rendszer-e.
- (b) (8 pont) Adjunk meg ortogonális és ortonormált bázist a W altérben.
- (c) (4 pont) Bontsuk fel az x vektort a W altér szerint párhuzamos és merőleges komponensekre.

3. (9 pont) Adottak az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények:

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 5, \quad (x \in (-\infty, 2])$

(b) $f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x^2 + 1}, \quad (x \in (-3, 6))$

Döntsük el, hogy a fent megadott f függvények közül melyik invertálható (indoklás!). Amelyik invertálható, annál adjuk meg a $D_{f^{-1}}$ és $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $y \in D_{f^{-1}}$ esetén az $f^{-1}(y)$ függvényértéket.

4. (8 pont) A definíció alapján igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^3 - 22x^2 + 18x + 2}{x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x - 1} = 3$$

5. (1+1+5 pont) (elméleti kérdés, a feladatlap hátoldalára)

- (a) Defináljuk egy $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.
- (b) Mikor mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény plusz végtelenben vett határértéke plusz végtelen?
- (c) Mondjuk ki, és bizonyítsuk be az ortogonális rendszerek függetlenségéről szóló tételt.