

Diszkrét matematika II. feladatok

Első alkalom (2023.09.11-15.)

1. Bizonyítsa be, hogy 6 osztója az $n(n+1)(2n+1)$ -nek, ahol n egész szám!
2. Jelöljön m egész számot. Bizonyítsa be, hogy $m^5 - m$ osztható 5-tel! (*Szorgalmi:* Bizonyítsa be, hogy $m^7 - m$ osztható 7-tel!)
3. Bizonyítsa be, hogy ha a 4-gyel nem osztható páros szám, akkor $a(a^2 - 1)(a^2 - 4)$ osztható 960-nal.
4. Bizonyítsa be, hogy három egymás után követő egész szám köbének összege osztható
 - a) a középső szám 3-szorosával;
 - b) 9-cel.
5. Bizonyítsa be, hogy ha a tízes számrendszerben ábrázolt bármelyik háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írjuk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal.
6. Állapítsa meg, milyen maradékot adnak a természetes számok négyzetei 3-mal és 5-tel osztva.
7. Bizonyítsa be, hogy ha n tetszőleges egész szám, akkor n^5 és n ugyanarra a számjegyre végződik.
8. Végezze el a megadott műveleteket az adott számrendszerben:
 - a) $10011001_{(2)} + 101011010_{(2)}$; d) $1234_{(5)} + 4321_{(5)}$; g) $10011001_{(2)} : 101_{(2)}$;
 - b) $1001_{(2)} \cdot 1101_{(2)}$; e) $1234_{(5)} \cdot 4321_{(5)}$; h) $110110010101101_{(2)} : 101111001_{(2)}$;
 - c) $1221_{(3)} \cdot 2112_{(3)}$; f) $1236_{(7)} + 6321_{(7)}$; i) $12011_{(3)} : 201_{(3)}$;
9. Mi 2^{400} utolsó számjegye a tízes számrendszerben?
10. Az euklideszi algoritmussal számolja ki az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és addja meg a legkisebb közös többszörösüket is.
 - a) $a = 86, b = 31$; e) $a = 139, b = 102$; i) $a = 255, b = 111$; m) $a = 332, b = 88$;
 - b) $a = 675, b = 471$; f) $a = 432, b = 300$; j) $a = 756, b = 333$; n) $a = 504, b = 150$;
 - c) $a = 420, b = 154$; g) $a = 1080, b = 285$; k) $a = 2016, b = 880$; o) $a = 30, b = 22$;
 - d) $a = 430, b = 300$; h) $a = 2355, b = 450$; l) $a = 300, b = 132$; p) $a = 518, b = 154$.

Szorgalmi feladatok

11. Bizonyítsuk be, hogy öt egymás követő szám négyzetének összege sosem lesz négyzetszám.
12. Bináris lnko: Igazoljuk az alábbi összefüggéseket: $(a, b) = (|a|, |b|)$, $(2a, 2b) = 2(a, b)$, $(a, b) = (a - b, b)$ továbbá páratlan b esetén $(2a, b) = (a, b)$. Az észrevételek felhasználásával írjon hatékony programot bináris számítógépre, mely kiszámolja a legnagyobb közös osztót.