Problémától a diszkrét modellig

2. óra: Gráfok, mátrixok, Markov-láncok

Burcsi Péter

ELTE IK

2025-09-15

A korábbi részek tartalmából

- Pénzfeldobásos játék: kinek jön ki előbb a sorozata?
- Modell: gráf, véletlen lépegetés a gráfon
- Modell elemzése: gráf mátrixának vizsgálata (hatványok)
- Cél: a fenti ad hoc ötletből legyen módszer, további alkalmazásokkal

Mai óra

- Markov-folyamatok, Markov-láncok
- Kapcsolat mátrixokkal
- Néhány fogalom és tétel Markov-láncokra
- Pár probléma, melyek Markov-láncokkal modellezhetők
- A modell bővítései

Markov-féle folyamatok

- Példa:
  - Társasjáték, ahol egy kocka dobása határozza meg, mennyit lépünk előre
  - Időnként portálra lépünk, ami vissza- vagy előredob minket.
- Informális definíció: minden időpillanathoz tartozik egy valószínűségi változó (X_t: hol vagyunk a táblán), és ezek kapcsolatban állhatnak
- A kapcsolat lényegi eleme, hogy a távolabbi múltra nem emlékszik, csak a közvetlen múltra
- Mindegy, hogyan jutottunk el az adott pontba, a jövőbeli valószínűségek már csak azon múlnak, hogy itt vagyunk.

Markov-lánc definíciója

- Megjegyzés: az idő lehet folytonos (integrálás stb.) vagy diszkrét.
- Diszkrét: $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Minden n időre X_n egy valószínűségi változó (az „állapot''), mely csakis a közvetlenül előtte levő megvalósult értéktől függ(het).
- $\forall e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$:

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_0 = e_0, X_1 = e_1, \ldots, X_n = e_n) = \mathrm{P}(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_n = e_n)$$

- Ezt a mennyiséget átmeneti valószínűségnek nevezzük (és csak e_n és e_{n+1} értékektől függ)
- Véges állapottérben mátrixba (P átmeneti mátrix) rendezhető
- P (jobb-) sztochasztikus mátrix (a sorok összege 1).

Véges Markov-láncok, definíciók

- Tulajdonképpen gráfok, az éleken valószínűséggel
- X_n valószínűségi változó: hol leszünk n lépés múlva, ha véletlen sétát követünk?
- Egyéb kérdések: mikor térünk várhatóan vissza, hosszú távon átlagosan mennyi időt töltünk itt vagy ott stb.
- Tulajdonság: **reducibilis** / **irreducibilis**
- Irreducibilis: bármelyik állapotból bármelyik állapotba eljuthatunk pozitív valószínűséggel
- Tulajdonság: **periodikus** / **aperiodikus**
- Periódus: a lehetséges $i \to i$ séták hosszának lnko-ja. Aperiodikus: lnko $= 1$.
- **Stacionárius**: X_n eloszlása n-től független.

Két kérdés

- Mi a helyzet, ha NULLA előző állapotra emlékszik a rendszer?
- Mi a helyzet, ha KÉT előző állapotra emlékszik a rendszer?

Hosszú távú viselkedés

- Periodikus:

- Reducibilis

- Tétel (Perron-Frobenius-tétel és következményei)
- Ha aperiodikus és irreducibilis a Markov-lánc, akkor pontosan egy darab stacionárius eloszlás létezik. Továbbá

$$\lim_{n \to \infty} P^n = S$$

- ahol S minden sora a stacionárius eloszlás értékeiből áll (és ez egyúttal P bal-sajátvektora az 1 sajátértékhez)

Zárójel: mátrix hatványai és jelentésük

- Séták száma, eljutási valószínűség, nem égő ház eloltása

1. példa: séták száma egy kétcsúcsú gráfban

- Valószínűségek nélkül, séták száma

2. példa: kockadobások összegének maradéka

- Egy szabályos kockával 100-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobások összege osztható 5-tel?

3. példa: véletlen kattintások sorozat a weben

- Google PageRank

4. példa: Markov és MI (mese)

- Zenegenerálás
- LLM

További alkalmazások és a modell bővítései

- Sorbanállási rendszerek
- Természettudományok (akár kémia, dinamikus egyensúly stb.)
- Bővített modell: rejtett Markov-modellek, HMM (pl. beszédfelismerés)
- Bővített modell: Markov Döntési Folyamatok, MDP: jövő alkalom. Ágensek optimális mozgása stb.