

Problémától a diszkrét modellig

4. óra: Hazudós barkóba, hibajavító kódok

Burcsi Péter

ELTE IK

2025-09-29

Második témakör: keresés hibatűréssel

- Hazudós barkóba (Rényi–Ulam-játék)
- Csoporttesztelés
- Hibajavító kódok
- Kis információelmélet

- Hazudós barkóba konkrét példán
- Alsó becslés
- Hibajavító kódokkal való kapcsolat, Hamming-korlát
- Paramétertér mérése, stratégia a játékhoz

Barkóba hazugsággal

- Gondoltam egy számra 1 és 10 között, mi lehet az? Igen-nem kérdések
 - Hagyományos játék: legalább $\log_2 N$ kérdés, ha 1 és N között
 - Akkor is, ha előre el kell küldeni a kérdéseket (adaptív / non-adaptív változat)?
- Most: a válaszadó hazudhat (legfeljebb egyszer)
- Kérdések: „Eleme-e a szám a H részhalmaznak?”
- Érvénytelen: „Hazudtál-e már?”
- Biztosan jó: 3-szor megkérdezek minden
- Picit jobb: 2-szer kérdezek minden, csak inkompatibilis válasznál kérdezek rá harmadszor

Alsó becslés a kérdések számára

- Alsó becslés hagyományos barkóba esetén:
- Különböző szám \implies különböző válaszsorozat
- Ha n hosszú bináris sorozatok száma legalább N , akkor $n \geq \log N$
 - Most: minden számra írjuk fel, mi lenne a HELYES válasz az n kérdésre.
 - minden kapott sorozat különböző, SÖT:
 - minden kapott sorozat eltér legalább 3 helyen
 - (Miért nem elég kettő helyen?)
- Hány ilyen sorozat lehetséges $N = 10$ esetén?

Hamming-korlát

- n hosszú bitsorozatok
- Egy helyen elrontott (hazug) sorozatok is különbözők
- Egy igaz sorozathoz n hazug tartozik

$$(n + 1) \cdot 10 \leq 2^n$$

- $n \geq 7$
- Általánosan (t hazugságnál):

$$N \cdot \sum_{k=0}^t \binom{n}{k} \leq 2^n$$

Hibajavító kódolás

- El kell küldenem egy üzenetet (pl. 1-től 10-ig egy szám), n bitet használhatok
- Az üzenet egy helyen megsérülhet, de még el akarjuk olvasni
- Általánosabban: t helyen sérülhet.
- Ehhez bármelyik két kódszó távolsága legyen $2t + 1$ legalább

Zárójel: négyelemű test

- Cél: három hosszúságú üzenet elküldése
- Plusz két betűt használhatunk
- Egy hibát ki kell tudni javítani
- Hamming-korlát: binárisan nem megy
- Modulo 5: rendben
- Modulo 4: elvileg működhetne, de nem megy lineárisan
- Négyelemű test: pont elég („tökéletes kód”)

Vissza: barkóba hazugsággal

- Rögzítsük, hogy q kérdésünk van
- Hogy állunk, miután feltettünk pár kérdést?
 - Maradt még néhány kérdésünk
 - Életben maradt néhány szám
 - NAGYON életben maradt néhány szám
- Csak az a fontos, hogy melyikből mennyi:
- x_0 darab számhoz még nem kellett hazudni
- x_1 darab szám már csak akkor lehet, ha hazudtunk egyet
- Hogy mennyi munka van még hátra: SÚLY

$$w_q(x_0, x_1) = (q + 1) \cdot x_0 + x_1$$

Súlyfüggvény és stratégia

- Mi történik a számokkal, ha választunk egy új kérdésre:
- Az x_0 szám közül mondjuk a_0 -ra igaz
- Az x_1 szám közül a_1 -re.
- Igen válasz esetén az új helyzet:

$$(y_0, y_1) = (a_0, a_1 + (x_0 - a_0))$$

- Nem válasz esetén:

$$(z_0, z_1) = (x_0 - a_0, x_1 - a_1 + a_0))$$

- mindenkorban teljesül (bármilyen a_0, a_1 esetén):

$$w_q(x_0, x_1) = w_{q-1}(y_0, y_1) + w_{q-1}(z_0, z_1)$$

- Cél: lehető legjobb kérdést felenni, ami (kb.) felezi a súlyt

Stratégia, kis példával

- Mi legyen az első kérdés $N = 10$ esetén?