Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok 2. zárthelyi
2023. november 24.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.
A 6. feladat (elméleti kérdés) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. *(7+4 pont)* (a) Tekintsük a $z_1 = 20 + 14i, \quad z_2 = 3 + 17i, \quad z_3 = -2 + 23i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 \cdot (\overline{z_3 - z_2})$$

(b) Oldjuk meg a $z^3 + z^2 - 2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

2. *(6+4 pont)* Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ és $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Határozzuk meg a következő számolások eredményét.
(a) $(A \cdot B^T)^{-1} \cdot (A + B) =?$
(b) $\det(A^T \cdot A) =?$

3. *(3+2 pont)* Tekintsük a következő halmazt, mely az $n \in \mathbb{N}$ és $c \in \mathbb{R}$ értékektől függ:

$$H_{n,c} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^n + y^n + z^n = c\}$$

(a) Adjunk példát olyan n és c értékre, hogy $H_{n,c}$ altere legyen $\mathbb{R}^3$-nak (indoklás!).
(b) Adjunk példát olyan n és c értékre, hogy $H_{n,c}$ ne legyen altere $\mathbb{R}^3$-nak (indoklás!).

4. *(4+4 pont)* Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi alterét:

$$W = \{(x-y+3z, 2x-y+3z+u, -x-3z+2u, x+3y-3z-2u) | x, y, z, u \in \mathbb{R}, 2x-u = -y-z\}$$

(a) Adjunk meg egy generátorrendszert W-ben.
(b) Hány dimenziós a W altér?

5. *(5+1+3 pont)* Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss–Jordan-eliminációval, adjuk meg az együtthatómátrix rangját és az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldáshalmazának egy bázisát.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 13 \end{aligned}$$

6. *(1+1+5 pont) (elméleti kérdés, a feladatlap hátoldalára)*

(a) Hogyan definiáljuk az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a kanonikus egységvektorokat?
(b) Tétel kimondás formájában adjon meg egy szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy négyzetes mátrixnak létezzen inverze.
(c) Bizonyítsa be, hogy minden véges dimenziós nemzéró vektortérben van bázis.