Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

Programtervező Informatikus Szak

MATEMATIKAI ALAPOK

oktatási segédanyag

Összeállította: Csörgő István és Filipp Zoltán

Budapest, 2024. ŐSZI FÉLÉV

Tartalomjegyzék

Bevezetés **8**

1. Algebrai és gyökös kifejezések I. **9**
1.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 9
1.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 10
1.2. Feladatok . . . 12
1.2.1. Órai feladatok . . . 12
1.2.2. További feladatok . . . 16

2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek **22**
2.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 22
2.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 22
2.2. Feladatok . . . 24
2.2.1. Órai feladatok . . . 24
2.2.2. További feladatok . . . 27

3. Algebrai és gyökös kifejezések II. **29**
3.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 29
3.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 29
3.2. Feladatok . . . 30
3.2.1. Órai feladatok . . . 31
3.2.2. További feladatok . . . 34

4. Exponenciális, logaritmusos kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek **38**
4.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 38
4.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 38
4.2. Feladatok . . . 39
4.2.1. Órai feladatok . . . 39
4.2.2. További feladatok . . . 42

5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek **45**
5.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 45
5.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 46
5.1.2. További kérdések az elmélethez . . . 47
5.2. Feladatok . . . 47
5.2.1. Órai feladatok . . . 47
5.2.2. További feladatok . . . 50

6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései 54
6.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 54
6.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 55
6.2. Feladatok . . . 56
6.2.1. Órai feladatok . . . 56
6.2.2. További feladatok . . . 59

7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I. 61
7.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 61
7.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 65
7.2. Feladatok . . . 67
7.2.1. Órai feladatok . . . 67
7.2.2. További feladatok . . . 70

8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II. 74
8.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 74
8.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 74
8.2. Feladatok . . . 76
8.2.1. Órai feladatok . . . 76
8.2.2. További feladatok . . . 80

9. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások III. 85
9.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 85
9.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 85
9.2. Feladatok . . . 88
9.2.1. Órai feladatok . . . 88
9.2.2. További feladatok . . . 90

10. Teljes indukció 93
10.1. Kiegészítés az elmélethez . . . 93
10.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 100
10.2. Feladatok . . . 100
10.2.1. Órai feladatok . . . 100
10.2.2. További feladatok . . . 103

11. Komplex számok 107
11.1. Az elméleti anyag . . . 107
11.1.1. A komplex szám fogalma . . . 107
11.1.2. Komplex számok szemléltetése a Gauss-féle számsíkon . . . 108
11.1.3. Műveletek algebrai alakú komplex számokkal . . . 109
11.1.4. Valós együtthatós polinomok és komplex gyökök . . . 111
11.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 113
11.1.6. További kérdések az elmélethez . . . 114
11.2. Feladatok . . . 115
11.2.1. Órai feladatok . . . 115
11.2.2. További feladatok . . . 118

12. Mátrixok 121
12.1. Az elméleti anyag . . . 121
12.1.1. Mátrix fogalma . . . 122
12.1.2. Műveletek mátrixokkal . . . 123
12.1.3. Sormátrixok, oszlopmátrixok . . . 127
12.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 128
12.1.5. Bizonyítandó tételek . . . 129
12.2. Feladatok . . . 129
12.2.1. Órai feladatok . . . 129
12.2.2. További feladatok . . . 131

13. Determinánsok 132
13.1. Az elméleti anyag . . . 132
13.1.1. Determináns fogalma . . . 132
13.1.2. Inverz mátrix . . . 134
13.1.3. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 136
13.1.4. Bizonyítandó tételek . . . 137
13.2. Feladatok . . . 137
13.2.1. Órai feladatok . . . 137
13.2.2. További feladatok . . . 138

14. Vektorok, vektorterek 139
14.1. Az elméleti anyag . . . 139
14.1.1. Vektortér fogalma . . . 139
14.1.2. A $\mathbb{K}^n$ vektortér . . . 142
14.1.3. Síkbeli forgatómátrixok . . . 144
14.1.4. Alterek . . . 146
14.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 148
14.1.6. Bizonyítandó tételek . . . 149
14.2. Feladatok . . . 149
14.2.1. Órai feladatok . . . 149
14.2.2. További feladatok . . . 150

15. Generált alterek 151
15.1. Az elméleti anyag . . . 151
15.1.1. Lineáris kombináció . . . 151
15.1.2. Generált altér fogalma . . . 151
15.1.3. Véges dimenziós vektortér . . . 154
15.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 155
15.1.5. Bizonyítandó tételek . . . 155
15.2. Feladatok . . . 156
15.2.1. Órai feladatok . . . 156
15.2.2. További feladatok . . . 157

16. Lineáris függetlenség **158**
16.1. Az elméleti anyag . . . 158
16.1.1. Lineáris függetlenség fogalma . . . 158
16.1.2. Tételek vektorrendszerekről . . . 160
16.1.3. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 163
16.1.4. Bizonyítandó tételek . . . 163
16.2. Feladatok . . . 164
16.2.1. Órai feladatok . . . 164
16.2.2. További feladatok . . . 164

17. Bázis, dimenzió **165**
17.1. Az elméleti anyag . . . 165
17.1.1. Bázis . . . 165
17.1.2. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 168
17.1.3. Bizonyítandó tételek . . . 169
17.2. Feladatok . . . 169
17.2.1. Órai feladatok . . . 169
17.2.2. További feladatok . . . 170

18. Rang, lineáris egyenletrendszerek **171**
18.1. Az elméleti anyag . . . 171
18.1.1. Vektorrendszer rangja . . . 171
18.1.2. Mátrix rangja . . . 172
18.1.3. Lineáris egyenletrendszerek . . . 174
18.1.4. Lineáris egyenletrendszer gyakorlati megoldása . . . 180
18.1.5. Három példa . . . 186
18.1.6. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 198
18.1.7. Bizonyítandó tételek . . . 198
18.2. Feladatok . . . 199
18.2.1. Órai feladatok . . . 199
18.2.2. További feladatok . . . 200

19. Kapcsolat az inverz mátrixszal **201**
19.1. Az elméleti anyag . . . 201
19.1.1. Négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer . . . 201
19.1.2. Inverz mátrix és lineáris egyenletrendszer . . . 201
19.1.3. Az inverz mátrix meghatározása Gauss-Jordan módszerrel . . . 203
19.1.4. Determináns számítás Gauss-Jordan módszerrel . . . 205
19.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez . . . 206
19.1.6. Bizonyítandó tételek . . . 207
19.2. Feladatok . . . 207
19.2.1. Órai feladatok . . . 207
19.2.2. További feladatok . . . 208

20. Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai **209**
20.1. Az elméleti anyag 209
20.1.1. Lineáris transzformációk a $\mathbb{K}^n$ téren 209
20.1.2. Alapfogalmak 212
20.1.3. Sajátvektorokból álló bázis (S.B.) 215
20.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez 216
20.1.5. Bizonyítandó tételek 217
20.2. Feladatok 218
20.2.1. Órai feladatok 218
20.2.2. További feladatok 218

21. Mátrixok diagonalizálhatósága **220**
21.1. Az elméleti anyag 220
21.1.1. Mátrixok hasonlósága 220
21.1.2. Diagonalizálhatóság 220
21.1.3. Két példa 222
21.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez 225
21.1.5. Bizonyítandó tételek 226
21.2. Feladatok 226
21.2.1. Órai feladatok 226
21.2.2. További feladatok 227

22. Valós euklideszi terek I. **228**
22.1. Az elméleti anyag 228
22.1.1. Valós euklideszi tér fogalma 228
22.1.2. Vektor hossza (normája) 230
22.1.3. Merőlegesség (ortogonalitás) 231
22.1.4. Fourier-kifejtés 234
22.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez 237
22.1.6. Bizonyítandó tételek 237
22.2. Feladatok 238
22.2.1. Órai feladatok 238
22.2.2. További feladatok 239

23. Valós euklideszi terek II. **240**
23.1. Az elméleti anyag 240
23.1.1. A felbontási tétel 240
23.1.2. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás 242
23.1.3. Háromszög-egyenlőtlenség 244
23.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez 245
23.1.5. Bizonyítandó tételek 246
23.2. Feladatok 246
23.2.1. Órai feladatok 246
23.2.2. További feladatok 247

24. Függvények, elemi függvények, műveletek függvényekkel 248
24.1. Kiegészítés az elmélethez 248
24.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez 258
24.1.2. További kérdések az elmélethez 259
24.2. Feladatok 260
24.2.1. Órai feladatok 260
24.2.2. További feladatok 265

25. Kép, őskép, értékkészlet, inverz függvény 270
25.1. Kiegészítés az elmélethez 270
25.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez 275
25.2. Feladatok 276
25.2.1. Órai feladatok 276
25.2.2. További feladatok 277

26. Korlátosság, szélsőérték, végtelenben vett határérték 281
26.1. Kiegészítés az elmélethez 281
26.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez 284
26.1.2. További kérdések az elmélethez 285
26.2. Feladatok 286
26.2.1. Órai feladatok 286
26.2.2. További feladatok 289

27. Függelék 294
27.1. Gyöktényező kiemelése 294
27.2. Gyöktényező kiemelése Horner-táblázattal 295
27.3. Nagyságrend-őrző (NR) becslések 297
27.4. Komplex számok 300
27.4.1. Ponthalmazok a komplex számsíkon 300
27.4.2. Gyakorló kérdések és feladatok 303
27.5. Példa végtelen dimenziós vektortérre 305
27.6. 4×4-es mátrix inverze és determinánsa 306
27.7. Rangot adó részmátrix 308
27.8. A determináns geometriai jelentése 312

Bevezetés

Ezt a tananyagot a Programtervező Informatikus Szak „Matematikai alapok” tantárgyának oktatásához állítottuk össze. Felhasználtuk benne a szakon korábban oktatott „Matematikai alapozás” tantárgy segédanyagát is.

Az 1–5 fejezetek a középiskolai ismeretekre alapoznak.

A 6. fejezet már új anyag, a nagyságrend-őrző becslésekről szól.

A 7–9 fejezetek a középiskolában elkezdett logikai alapismereteket fejlesztik tovább.

A 10. fejezetben a hallgatók megismerkednek a teljes indukcióval (aki már tanulta, kiváló alkalom az ismétlésre)

A 11. fejezet a komplex számok alapvető ismereteiről szól. E téma későbbi félévekben még részletes tárgyalásra kerül.

A 12–23 fejezetek lineáris algebrai alapismereteket tartalmaznak. E témakör szintén folytatódik majd a későbbi félévekben.

A 24–26 fejezetek pedig függvénytani alapismeretek oktatásának segédanyagai. Ez a téma is folytatódni fog majd a felsőbb félévekben.

Az 1–11 fejezeteket, a 24–26 fejezeteket, valamint a Függelék 27.4 szakaszát
Filipp Zoltán írta.

A 12–23 fejezeteket, valamint a Függelék 27.1–27.2 és 27.5–27.7 szakaszait
Csörgő István írta.

Néhány jelölés:

- a valós számok halmaza: $\mathbb{R}$;
- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$;
- a pozitív egész számok halmaza: $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N}\}$;
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \ \mid \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}$;
- a komplex számok halmaza: $\mathbb{C} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ \Big| \ x, y \in \mathbb{R}\}$ (i az imaginárius egység) ;
- Az intervallumok nyíltságát gömbölyű zárójellel, és nem kifelé fordított szögletes zárójellel fogjuk jelölni.
- Részhalmaz jelölésére a $\subseteq$ jelet fogjuk használni.

1. Algebrai és gyökös kifejezések I.

1.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Nevezetes azonosságok.
2. Hatványok (pozitív egész hatványok, negatív egész hatványok, racionális hatványok) és műveletek hatványokkal.
3. Gyökök és műveletek gyökökkel.
4. Szorzattá alakítás, polinomok, polinomok gyökei.

Néhány nevezetes azonosság

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (a, b, c \in \mathbb{R});$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$

Polinomok, polinomok gyökei

Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén *n-edfokú polinom*on értjük az alábbi kifejezést:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

ahol a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 adott valós számok (a polinom *együtthatói*), $a_n \neq 0$. Az a_n együttható neve: a polinom *főegyütthatója*. x jelöli a polinom ún. *változó*ját, ami tetszőleges valós szám lehet. Az $n = 0$ esetben konstans polinomról beszélünk. Ezek tehát a nem nulla valós számokkal azonosíthatók. A 0-át is tekinthetjük polinomnak, e polinom fokát és főegyütthatóját azonban nem értelmezzük.

Az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot a P polinom *gyök*ének nevezzük, ha $P(\alpha) = 0$. Az $x - \alpha$ elsőfokú polinom az α gyökhöz tartozó *gyöktényező*.

Az $a^n - b^n$ különbség szorzattá alakítási szabályának segítségével bebizonyítható, hogy az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor gyöke a P polinomnak, ha az $x - \alpha$ gyöktényező kiemelhető P-ből, azaz, ha van olyan Q polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az említett azonosság segítségével a kiemelés a gyakorlatban is végrehajtható (ld. Függelék 27.1. szakasz).

Gyakran használt módszer a gyöktényező kiemelésére a Horner-féle táblázat alkalmazása (ld. Függelék 27.2. szakasz).

Legyen α a P polinom gyöke. Ekkor az előzőek szerint van olyan van olyan Q_1 polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q_1(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha α gyöke a Q_1 polinomnak is, akkor van olyan van olyan Q_2 polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \alpha) \cdot Q_2(x) = (x - \alpha)^2 \cdot Q_2(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Az eljárást addig folytatjuk, amíg lehet. Így azt kapjuk, hogy van olyan $m \in \mathbb{N}^+$ szám és Q_m polinom, hogy

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q_m(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és α már nem gyöke Q_m-nek, azaz $Q_m(\alpha) \neq 0$.

Az m számot az α gyök multiplicitásának nevezzük (a P polinomban).

A gyöktényezők most vázolt sorozatos kiemelésével belátható, hogy egy n-edfokú polinomnak legfeljebb n db gyöke van.

1.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Végezze el a következő hatványozást: $(a - 2b + c)^2$, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Alakítsa szorzattá a következő kifejezést, ha $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2.$$

3. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő polinomot:

$$P(x) := (2x - 1)^3 - 2 \cdot (2 + x)^3 + x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Alakítsa elsőfokú polinomok szorzatává az alábbi polinomot:

$$P(x) := 3x^3 + 3x^2 - 6x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Egyszerűsítse a következő algabrai törtet:

$$E(x) := \frac{x^3-1}{1-x^5} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

6. Egyszerűsítse a következő algabrai törtet:

$$E(x) := \frac{x^4+x^2+1}{x^6-1} \quad (\pm 1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

7. Egyszerűsítse a következő algabrai törtet:

$$E(x) := \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

8. Végezze el a következő műveleteket és hozza a legegyszerűbb alakra a kapott kifejezést:

$$\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x+y}\right) : \left(\frac{x-y}{x^2+xy}-\frac{x}{y^2+xy}\right) \quad (x; y \in \mathbb{R}; x \neq 0; |x| \neq |y|).$$

9. Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét:

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{3-\sqrt{2}}-1}$.

   (b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$.

10. Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét:

   (a) $\left(\sqrt{9+6\sqrt{2}}-\sqrt{9-6\sqrt{2}}\right)^2$.

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

11. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^3.$$

12. Végezze el a következő műveleteket:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right) \quad (a; b > 0; ab \neq 0; a \neq b).$$

13. Végezze el a következő műveleteket:

$$\frac{\left(a^{1/2}\cdot b^{2/3}\right)^{-3/4}\cdot\left(a^{1/3}\cdot b^{1/4}\right)^{2}}{\left(a^{1/12}\right)^{-1/2}}\quad (a>0;b\geq 0).$$

14. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x):=\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}\quad (x\in[0;+\infty))\,.$$

Hozza az f utasítását a legegyszerűbb alakra.

15. Legyenek $x,y,z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olyan valós számok, melyekre teljesül, hogy:

$$x+y+z=1\ \wedge\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

Mennyi lesz az alábbi kifejezés pontos értéke:

$$x^2+y^2+z^2\,?$$

1.2. Feladatok

1.2.1. Órai feladatok

Algebrai átalakítások, azonosságok

1. Mutassuk meg, hogy minden $a,b\in\mathbb{R}$ esetén

$$a^2+ab+b^2=3\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Számítsuk ki ennek alapján a^3-b^3 pontos értékét, ha $a-b=2$ és $a+b=\sqrt{5}$.

2. Az $x>0$ valós számra teljesül, hogy $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$. Bizonyítsuk be, hogy $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ is egész szám.

3. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{2}{ab(a+b)^2}=\dfrac{1}{a^2b^2}$;

(b) $\dfrac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\dfrac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\dfrac{1}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a^2+b^2}-\dfrac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=0$;

(c) $\dfrac{1}{a(a-b)(c-a)} + \dfrac{1}{b(a-b)(b-c)} + \dfrac{1}{c(c-a)(b-c)} = -\dfrac{1}{abc}$;

(d) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{b^2-ac}{(a+b)(b+c)} + \dfrac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)} = 0.$

4. Igazoljuk, hogy ha

(a) $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a+b+c=0$, akkor $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$;

(b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a+b+c=0$, akkor $a^3+b^3+c^3 = 3abc$;

(c) $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$, akkor $a=b=c$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z pozitív valós számokra:

$$x + 2y + 3z = 6 \quad \wedge \quad \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 1$$

akkor

$$(x-6)\cdot(y-3)\cdot(z-2) = 0.$$

6. Egyszerűsítsük a következő kifejezést az x, y változók olyan valós értékei mellett, melyekre $x \neq y$:

$$E(x,y) = \frac{x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2y}{x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2y}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a fenti egyszerűsített kifejezésben az x, y változóknak az alábbi értékeket adva az új kifejezés nem függ a z paramétertől:

$$x = \frac{k(1-z^2)}{1+z^2}; \quad y = \frac{2kz}{1+z^2} \qquad (k, z \in \mathbb{R}).$$

7. Alakítsuk szorzattá az

$$(a^2+b^2-c^2)^2 - (a^2-b^2+c^2)^2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

különbséget!

8. Számítsuk ki az alábbi összeget, ahol az utolsó tagban n darab 1$-$es jegy szerepel ($1 \leq n \in \mathbb{N}$):

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{1\cdots1}_{n \text{ jegy}} = ?$$

9. Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x) := \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}); \quad g(x) := \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ valós szám esetén:

$$f(g(x)) \cdot g(f(x)) + 1 = 0.$$

10. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ függvényt, úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén:

$$\frac{x^n+1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^{n-k} + f(x) \quad (1 \leq k \leq n; 1 \leq k, n \in \mathbb{N}).$$

Gyökös kifejezések, átalakítások

11. Lássuk be, hogy

(a) $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \qquad (a, b \geq 0);$

(b) $a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$

(c) $a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$

12. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

(a) $\dfrac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b < a).$

(b) $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b, a).$

(c) $\left(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \dfrac{2\sqrt{xy}}{x - y}\right) \quad (0 < x \neq y).$

13. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést, a változók megengedett értékei mellett $(0 < x, y;\ x \neq y)$:

$$E(x,y) := \left(\frac{x^{-1/6} - \dfrac{5}{\sqrt[6]{y}}}{\dfrac{1}{x^{1/3}} - y^{-1/3}} - 5 \cdot \frac{x^{-1/6} - y^{-1/6}}{x^{-1/3} - \sqrt[3]{y^{-1}}} \right)^{-1} \cdot \frac{6\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}.$$

14. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezést, és számítsuk ki az értékét, ha $x = 0,5$:

$$E(x) := \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1 + x} \right) \cdot \left(\sqrt{x^{-2} - 1} - \frac{1}{x} \right) \qquad (0 < x < 1)\ .$$

15. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi számot:

$$\sqrt{7 - \sqrt{48}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}.$$

16. Számítsuk ki az alábbi *"teleszkópikus"* összegeket:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

17. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \quad (x \in [1; +\infty))\ .$$

Hozza az f utasítását a legegyszerűbb alakra.

Polinomok

18. Alakítsuk szorzattá az alábbi polinomokat:

(a) $P(x) := x^3 + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $Q(x) := x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

19. Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt $P-$ből:

(a) $x_0 = 2, \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$;

(b) $x_0 = 3, \quad P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 18$;

(c) $x_0 = -1, \quad P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.

20. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

(a) $(2x^2 + x + k)-$ból $(x+3)-$at $\quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $(4x^2 - 6x + k)-$ból $(x-3)-$at $\quad (x \in \mathbb{R})$

kiemelni? Emeljük is ki!

21. Legyen x_1, x_2 az $x^2 + px + 1$ másodfokú polinom, x_3 és x_4 pedig az $x^2 + qx + 1$ másodfokú polinom két−két valós gyöke. Írjuk fel az alábbi szorzatot p és q függvényében:

$$(x_1 - x_3) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_1 + x_4) \cdot (x_2 + x_4).$$

22. Bizonyítsuk be, hogy a következő polinom értéke minden egész x−re egész:

$$P(x) = \frac{1}{315} \cdot x^9 - \frac{2}{21} \cdot x^7 + \frac{13}{15} \cdot x^5 - \frac{164}{63} \cdot x^3 + \frac{64}{35} \cdot x\ .$$

23. Határozza meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az

$$P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$$

polinom $(x-1)$−gyel, $(x-2)$−vel, $(x-3)$−mal való osztási maradéka rendre $1, 2$, illetve 3 legyen.

1.2.2. További feladatok

Algebrai átalakítások, azonosságok

1. Hozzuk a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a+b} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq |b|).$$

2. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$\left(\frac{a}{a+2b} - \frac{a+2b}{2b}\right)\left(\frac{a}{a-2b} - 1 + \frac{8b^3}{8b^3 - a^3}\right) = \frac{a}{2b-a}$$

$(a, b \in \mathbb{R},\ |a| \neq 2|b|,\ b \neq 0)$.

3. Lássuk be, hogy minden $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (a+b)(b+c)(c+a)$;

(b) $\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2$;

(c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(a+c) = 2(a^3+b^3+c^3-3abc)$;

(b) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 - 3(a-b)(b-c)(c-a) = 0$;

(c) $(a^2-bc)^3 + (b^2-ac)^3 + (c^2-ab)^3 - 3(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab) =$
$= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$;

(d) $(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 - 3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) =$
$= 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

5. Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c > 0$ és $abc = 1$, akkor

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1\,.$$

6. Tegyük fel, hogy az a, b, c valós számok teljesítik az alábbi feltételeket:

$$a+b+c = 1 \quad \wedge \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1\,.$$

Számítsuk ki a következő kifejezés értékét:

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}\,.$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ és

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1,$$

akkor $xyz = 0$.

8. Adjuk meg

$$a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$$

értékét, ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a + b = 1$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha két egész szám különbsége 2, akkor a köbeik különbsége felbontható három egész szám négyzetének összegére!

10. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\left(\frac{4}{3x} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{3(x-2)}{2(x-1)}\right) \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0; 1)\,.$$

11. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

(a) $\dfrac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)}$, ha $a=10$;

(b) $\left(\dfrac{8+b^3}{x^2-y^2} : \dfrac{4-2b+b^2}{x-y}\right)\left(x+\dfrac{xy+y^2}{x+y}\right)$, ha $b=8,\ x=997,5,\ y=-0,75$;

12. Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x) := 2x+3 \quad (x \in \mathbb{R}); \quad g(x) := 4x+9 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazoljuk, hogy:

$$f(g(x)) = g(f(x)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Tegyük fel, hogy $x+\dfrac{1}{x}=a$. Fejezzük ki az $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ kifejezés értékét a segítségével.

14. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{0;1\} \to \mathbb{R}$ függvényt, úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ esetén:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}\cdot f(x) \quad (1 \le n \in \mathbb{N}).$$

Hogyan definiálhatnánk az $f(0)$ értéket, hogy az azonosság fennálljon $x=0-$ra is? Mennyi az $\dfrac{1}{f(2018)}$ érték?

Gyökös kifejezések, átalakítások

15. Mutassuk meg, hogy

(a) $\sqrt{a}-\sqrt{b} = (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}) \qquad (a,b \ge 0)$;

(b) $a\sqrt{a}-b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b) \qquad (a,b \ge 0)$;

(c) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(a-\sqrt{ab}+b\right) \qquad (a,b \ge 0)$.

16. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{a-b}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{a^2+ab}{a^2-2ab+b^2}} \quad (a,b \in \mathbb{R},\ 0<b<a).$$

17. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét:

$$\frac{2\sqrt{xy}+4\sqrt{y}-3\sqrt{x}-6}{2-2y} : \left(\frac{4y+19-2\sqrt{y}}{2+2\sqrt{y}}-5\right),$$

ha $x=16,\ y=9$.

18. Igazoljuk, hogy

(a) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

(b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

(c) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

(d) $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$

egész számok!

19. Számítsuk ki az alábbi *"teleszkópikus"* összegeket:

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

$$\text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

20. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$E(x,y):=\left(\frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{(x+y)^{1/2}}-\frac{(x+y)^{1/2}}{x^{1/2}+\left(\dfrac{1}{y}\right)^{-1/2}}\right)^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}};\qquad (0<x,y).$$

21. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést a változók megengedett értékei mellett:

$$E(a,b):=\frac{(ab)^{3/2}-(a-b)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)}{ab\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{ab}\right)+(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{ab}\right)}.$$

Polinomok

22. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

(a) $4x^2-9b^2$;

(b) y^3+1;

(c) $8a^3-27$;

(d) $27a^3 + 8$;

(e) $8a^3 + b^6$;

(f) $27a^6x^{12} - 64b^9y^{15}$;

(g) $x^3 + 18x^2 + 108x + 216$.

23. Igazoljuk, hogy a megadott x_0 szám a mellette álló P polinom gyöke, majd emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt $P-$ből:

(a) $x_0 = 1, \quad P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 10$;

(b) $x_0 = -2, \quad P(x) = 3x^3 + 10x^2 + 8x$.

24. Milyen $k \in \mathbb{R}$ mellett lehet

(a) $(x^3 - 4x + 2k)-$ból $(x - 4)-$et;

(b) $(x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 3k)-$ból $(x + 1)-$et

kiemelni? Emeljük is ki!

25. Hány különböző megoldása van az alábbi egyenletnek a valós számhalmazon

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + \frac{1}{x_k^2}) = 2n \text{ ?}$$

26. Bizonyítsa be, hogy ha x, y, z különböző egész számok, akkoraz alábbi kifejezés értéke is egész szám:

$$\frac{x^{2008}}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^{2008}}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^{2008}}{(z-y)(z-x)} \, .$$

27. Igazoljuk, hogy ha a k egész szám gyöke a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

egész együtthatós polinomnak (tehát k, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$), akkor k osztója a_0-nak!

28. Határozzuk meg az alábbi polinomok egész gyökeit:

(a) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 4$;

(b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 6$;

(c) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

(d) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

(e) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$.

Megjegyzés: Igazolható, hogy ha a polinom főegyütthatója $a_n = 1$ vagy $a_n = -1$, akkor a polinom valós gyökei vagy egész számok, vagy pedig irracionális számok.

29. Adott a $P(x) := x^2+ax+b \quad (x \in \mathbb{R})$ polinom, ahol a, b tetszőleges valós paraméterek. Határozzuk meg a következő kifejezést:

$$P(-P(x)) - P(P(-x))) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

2.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Másodfokú egyenletek, megoldóképlet, egyenlőtlenségek.
2. Gyöktényezős felbontás, teljes négyzetté alakítás.
3. Másodfokú függvények, polinomok és tulajdonságaik.
4. Másodfokú függvények ábrázolása, parabolák, kapcsolatuk a másodfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel.
5. Paraméteres egyenlőtlenségek.

2.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ rögzített valós számok. Az
$$ax^2 + bx + c = 0$$
másodfokú egyenletnek mik leszenek a gyökei és a diszkrimináns függvényében tárgyalja a gyökök természetét.

2. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$ rögzített valós számok. Írja fel a
$$cx^2 + bx + a = 0$$
másodfokú egyenlet gyökeinek összegére és szorzatára vonatkozó Viéte−formulákat.

3. Adott a $2x^2 - 3x - 8 = 0$ másodfokú egyenlet. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1},$$
ha x_1, x_2 jelölik a megadott egyenlet gyökeit.

4. Írja fel azt a másodfokú egyenletet, melynek főegyütthatója 1 és gyökei $\sqrt{2} - 1$ és $\sqrt{2} + 1$. Mik a további együtthatók ebben az egyenletben?

5. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:
$$px^2 - x + 1 = 0\,?$$

6. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz igaz az alábbi egyenlőtlenség minden valós x esetén:

$$px^2 - (p+2)x + 3 > 0\,?$$

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter. Milyen p értékek esetén lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:

$$\frac{p}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 = 0\,?$$

Mikor lesz pontosan egy megoldása az egyenletnek?

8. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x + 1} < 1.$$

9. Tekintsük az

$$f(x) := x^2 - 4x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Írja fel a teljes négyzet alakot, ábrázolja a függvényt, és adja meg az f minimumának helyét és értékét. Hol metszi el f grafikonja az y tengelyt?

10. Milyen $(x; y)$ valós számpárok elégítik ki az alábbi egyenletet?

$$x^2 - 3xy + y^2 = 0\,?$$

Hol helyezkednek el a síkon ezek az $(x; y)$ pontok?

11. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) := 2 - \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad (x \in [-3; 2]).$$

Hol veszi fel ezeket az f?

12. Bizonyítsa be, hogy minden a, b nemnegatív valós szám esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Mikor van itt egyenlőség?

13. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{|x|}{x^2 + 4} \leq \frac{1}{4}.$$

Mikor van itt egyenlőség?

14. Adja meg az alábbi függvény szélsőértékeit és azok helyeit:

$$f(x) := -2x^2 + x - 1 \quad (x \in D := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1/2| \leq 1/2\}).$$

15. Adottak az $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ valós együtthatók és a

$$P(x) := ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

másodfokú polinom. Írja fel ennek gyöktényezős alakját, ha x_1 és x_2 jelölik a valós gyököket. Mikor teljesül, hogy ez a gyöktényezős alak egy teljes négyzet (ekkor hogy néz ki) ?

2.2. Feladatok

2.2.1. Órai feladatok

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

a) $P(x) = x^2 - 6x + 3;$ *b)* $P(x) = 2x^2 + 7x - 1.$

2. A *Viète*−képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

(a) $x^2 - 5x + 6 > 0\,;$

(b) $\dfrac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2\,;$

(c) $\dfrac{x - 1}{x + 1} > \dfrac{3x + 4}{1 - 2x}\,;$

(d) $\dfrac{x + 2}{x + 1} + \dfrac{3x - 2}{1 - 2x} \leq 0$

egyenlőtlenség?

4. Adjuk meg azokat a $p \in \mathbb{R}$ paramétereket, amelyekre

(a) az $x^2 + 6x + p > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(b) az $x^2 - px > \dfrac{2}{p}$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(c) az $(p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

(d) az $\dfrac{x^2 - px + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz!

5. Valamely $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett a $2x^2 - 3(p-1)x + 1 - p^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\dfrac{5}{4}$. Mi a p?

6. Adjuk meg a p paraméter értékeit úgy, hogy az $(1-p)x^2 + 2px = p + 3$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke legyen!

7. Legyen $p \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $x^2 - (p-2)x + p - 3 = 0$ másodfokú egyenletet! Határozzuk meg a p paramétert úgy, hogy az egyenlet gyökeinek a négyzetösszege minimális legyen!

8. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek p is gyöke és q is gyöke?

9. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén:

$$\frac{7 - \sqrt{52}}{3} \le \frac{x+3}{x^2 - x + 1} \le \frac{7 + \sqrt{52}}{3}.$$

10. Határozzuk meg a következő függvény legnagyobb és legkisebb értékeit:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

11. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy mértani sorozat különböző, egymást követő tagjai, akkor érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{3} \le \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \le 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

12. Egy másodfokú egyenlet x_1, x_2 gyökei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$x_1 - x_2 = \frac{4\sqrt{a-1}}{a-2}; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}},$$

ahol $a \in [1; +\infty) \setminus \{2\}$ paraméter.

a) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a fenti x_1 és x_2.

b) A megadott a paraméter függvényében tárgyaljuk a gyökök természetét (valósak vagy komplexek) és a valós esetekben azok előjelét.

13. Mutassuk meg, hogy

(a) $\dfrac{2}{1/a+1/b} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \quad (a, b \in (0; +\infty));$

(b) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$.

(c) $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \ge 2 \quad (a \ne 0).$

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

14. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge 8abc$$

egyenlőtlenség! Mikor van itt egyenlőség?

15. Igazoljuk, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $\left|\dfrac{1}{a-b}\right| < \dfrac{2}{|a|} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 2|b| < |a|);$

(b) $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \ge 2 \quad (a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\});$

(c) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2 \quad (x \in \mathbb{R});$

(d) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R});$

(e) $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \ge 0 \quad (a, b \in \mathbb{R});$

(f) $2 < \left(\dfrac{a+2b}{a+b}\right)^2 \quad (a, b \in (0, +\infty),\ a^2 < 2b^2)$.

16. Bizonyítsuk be, hogy minden $a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ *(Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség)*;

(b) $\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2}$ *(Minkowski egyenlőtlenség)*;

A fenti egyenlőtlenségekben pontosan akkor van egyenlőség, ha létezik olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy

$$(x = \lambda a \text{ és } y = \lambda b) \quad \text{vagy} \quad (a = \lambda x \text{ és } b = \lambda y)\ .$$

Mi a geometriai jelentése ezeknek az egyenlőtlenségeknek?

2.2.2. További feladatok

1. Végezzük el a teljes négyzetté kiegészítést, majd oldjuk meg ennek segítségével a $P(x) = 0$ másodfokú egyenletet:

$$P(x) = x^2 + 10x + 26; \qquad P(x) = -x^2 + 2x + 3; \qquad P(x) = -3x^2 + 8x + 5.$$

2. A *Viète–* képletek segítségével számítsuk ki a fenti polinomok esetén a gyökök

(a) összegét;

(b) szorzatát;

(c) négyzetösszegét;

(d) különbségének abszolút értékét;

(e) reciprokának összegét.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\dfrac{2x^2+5x-18}{x-2} \leq 0;$

(b) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} \geq 0\ .$

4. Milyen $p, q \in \mathbb{R}$ együtthatókkal lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek

(a) olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke?

(b) minden gyöke olyan, hogy annak a reciproka is gyöke?

(c) minden gyökének a négyzete is gyöke?

(d) minden gyökének az ellentettje is gyöke?

5. Adott $p \in \mathbb{R}$ paraméter mellett oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

(a) $x(x+3)+p(p-3)=2(px-1)$;

(b) $\dfrac{x(x-p)}{x+p}-x+p=\dfrac{10x}{x+p}-10.$

6. Milyen $m \in \mathbb{R}$ esetén lesz az $(m-1)x^2-2mx+m-2=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke?

7. Határozzuk meg $\mathbb{R} \ni m-$et úgy, hogy az $x^2+2(m-3)x+m^2-4=0$ egyenletnek két pozitív gyöke legyen!

8. Mi lehet a $p \in \mathbb{R}$ paraméter, ha az $(1-p)x^2-4px+4(1-p)=0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van?

9. Adjuk meg $\mathbb{R} \ni q-$t úgy, hogy az $x^2-4x+q=0$ egyenletnek

(a) legyen olyan gyöke, amelynek a háromszorosa is gyöke;

(b) egyetlen gyöke legyen!

10. Melyek azok a $k \in \mathbb{R}$ számok, amelyekkel az

$$x^2+kx+1=0 \quad \text{és az} \quad x^2+x+k=0$$

egyenletnek van közös gyöke?

11. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$(2x^2+7x-8)\cdot(2x^2+7x-3)-6=0$$

egyenletet!

12. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Tudjuk, hogy az $x^3+ax^2+x+b=0$ egyenletnek $x_1=-2$ a gyöke és van olyan gyöke, amelynek a reciproka is gyöke. Határozzuk meg az a, b paramétereket!

13. Egy másodfokú egyenlet x_1, x_2 gyökei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$4x_1x_2-5x_1-5x_2+4=0; \quad (x_1-1)\cdot(x_2-1)=\frac{1}{1+a},$$

ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ valós paraméter.

a) Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei a fenti x_1 és x_2.

b) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a gyökökre teljesüljön az alábbi egyenlőség

$$x_1^2+x_2^2=11.$$

3. Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.1. Kiegészítés az elmélethez

Abszolút érték és tulajdonságai, háromszög egyenlőtlenségek

Idézzük fel az abszolút érték definícióját: legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós szám, ekkor:

$$|x| := \begin{cases} -x \text{ , ha } x < 0; \\ x \quad \text{, ha } x \geq 0 \end{cases}$$

az x valós szám abszolút értéke. Világos, hogy $|x|$ jelenti egyben a számegyenesen az x valós szám távolságát az origótól.

Ha $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok, akkor $|x - y|$ nemnegatív valós szám méri az x és y geometriai távolságát.

Könnyű a definíció alapján meggondolni, hogy:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ \ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

illetve

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0: \ \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Mindez azonban nem mondható el az összeg és különbség esetén, de érvényesek az alábbi nevezetes egyenlőtlenségek:

Tétel: (*Háromszög egyenlőtlenségek*) Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok esetén:

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

3.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy valós x szám abszolút értékét.
2. Az $x \in \mathbb{R}$ értékeitől függően "bontsa fel" $|x^2 - 1|$−et.
3. Írja le a valós számokra vonatkozó *háromszög egyenlőtlenségeket*.
4. Hol vannak a síkon azok az $(x; y)$ pontpárok, melyekre: $|y - |x|| < 1$?
5. Oldja meg az $|x + 2| = x - 1$ egyenletet.
6. Mely valós számok elégítik ki az $||x - 1| - 2| > 1$ egyenlőtlenséget?

7. Egyszerűsítse az alábbi racionális törtet:

$$\frac{x^3-1}{x^4-1}.$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{x}.$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}<x+\sqrt{x}-1.$$

10. Milyen x valós számokra igaz, hogy:

$$|2-\sqrt{1-x}|<1?$$

11. Milyen x valós számokra igaz, hogy:

$$\sqrt{x^2}=x+1?$$

12. Adjon meg olyan különböző x, t valós számokat (ha léteznek), amelyekre:

$$(x-2)^2+|x-1|=(t-2)^2+|t-1|.$$

13. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+1|<1/2$. Milyen határok közt változhat $|x-1|$?

14. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, melyekre:

$$|x|<2 \quad \wedge \quad |1-x|>1\ .$$

15. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x-3|<2$. Adjunk egy felső becslést $|x^2-9|$–re.

3.2. Feladatok

Valamennyi feladatban alapértelmezés, hogy a formulákban szereplő betűk olyan számokat jelentenek, amelyekre a kifejezések értelmesek (kifejezés értelmezési tartománya). Természetesen ez a halmaz tovább szűkülhet, ha a feladatban feltételeket adunk meg ezekre a betűkre.

3.2.1. Órai feladatok

Algebrai átalakítások, egyszerűsítések

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$;

(b) $\dfrac{x^4+5x^2+4}{x^4-16}$;

(c) $\dfrac{2x^2-13x-7}{8x^3+1}$;

(d) $\dfrac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{x^5+x^3}$;

(e) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$;

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket:

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x^3-1}$;

(b) $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}+1}-1}$;

(c) $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$;

(d) $\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{\sqrt{x}-1}-1}\quad (x>4)$.

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek ill. egyenlőtlenségek?

(a) $|2x-7|+|2x+7|=14$;

(b) $|2x-7|+|2x+7|=x+15$;

(c) $|x^2-4x-5|+|x-2|=7$;

(d) $|x^2+3x|=|2x-6|$;

(e) $|x^2-9|+|x^2-4|=5$;

(f) $|x-2|<3$;

(g) $|2x-1|<|x-1|$;

(h) $|x(1-x)| < \dfrac{1}{4}$;

(i) $\dfrac{1+|x-2|}{|x-3|} \le \dfrac{1}{2}$;

4. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+2| < 1$. Milyen határok közt változhat $|x+1|$?

5. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x-2| < 2$. Adjunk egy felső becslést $|x^2-4|$–re.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;

(b) $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x-1$;

(c) $x-1 = \sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$;

(d) $\sqrt{6x^2+8x-8} - \sqrt{3x-2} = 0$;

(e) $\sqrt{x^2-p} + 2\cdot\sqrt{x^2-1} = x \quad (p \in \mathbb{R})$;

(f) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

(g) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 12$;

(h) $\sqrt{|1-x^2|} = \dfrac{x}{2}+1$;

(i) $\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3}$;

(j) $A)$ $\sqrt{3x+13} = x+1$; $B)$ $\sqrt{3x+13} \le x+1$;

(k) $A)$ $\sqrt{x^2+4x} = 2-x$; $B)$ $\sqrt{x^2+4x} > 2-x$;

(l) $\sqrt{x^2-1} < 5-x$;

(m) $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$;

(n) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$;

(o) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$;

(p) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} > \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Függvények, sorozatok, nagyságrendi átalakítások

7. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \quad (x \in [2;17]).$$

8. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\dfrac{5n^3-3n^2+2n+7}{8n^3+7n-3}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{n+1}+3\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^2+2}}{\sqrt[3]{n^2}-1}$.

9. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$;

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n-1}}$;

(c) $\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n^2+n+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$.

10. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados−sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \dfrac{3^n\cdot n^2}{(n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(d) $x_n = \dfrac{n^n\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(e) $x_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{(1+\sqrt{1})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(1+\sqrt{n})} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

11. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök−sorozatot:

(a) $x_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n^2+1)^{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{1-n}+2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$.

3.2.2. További feladatok

Algebrai átalakítások, egyszerűsítések

1. Egyszerűsítsük a következő algebrai törtkifejezéseket:

(a) $\dfrac{x^2+2x-3}{5x^2+16x+3}$;

(b) $\dfrac{x^4+8x^2+15}{x^4+6x^2+9}$;

(c) $\dfrac{27x^3-1}{6x^2+x-1}$;

(d) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}$.

2. Gyöktelenítsünk, majd egyszerűsítsük a kapott törteket, ha lehet:

(a) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3+5}-2}$;

(b) $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}+4}-2}$;

(c) $\dfrac{x^2-26x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$;

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

3. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek, egyenlőtlenségek?

(a) $\left|\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}\right| = 2$;

(b) $||x+1|-2| = ||x-2|+1|$;

(c) $|x+3|+|x-1| = 3x-5$;

(d) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2| = x+2$;

(e) $|x+3|+\sqrt{x^2-2x+1} = 8$.

(f) $\left|\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{2}{3}\right| \le \dfrac{|x-2|}{1+|x-2|}$;

(g) $x^2-6|x|-7<0$;

(h) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \le 2$;

(i) $|\,|x+1|-|x-1|\,|<1$;

(j) $|x|>|x-1|$;

(k) $|x+2|-|x| \ge 1$.

4. Bizonyítsuk be, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

(a) $0 < a+b-ab < 1 \quad (a,b \in (0,1))$;

(b) $a^2+b^2 \ge 2|ab| \quad (a,b\in\mathbb{R})$;

(c) $2x^4-2x^3-x^2+1 \ge 0 \quad (x\in\mathbb{R})$;

(d) $ab-5a^2-3b^2 \le 0 \quad (a,b\in\mathbb{R})$;

(e) $|a+b| < |1+ab| \quad (a,b\in\mathbb{R},\ |a|,|b|<1)$;

(f) $|a+b|+|a-b| \ge |a|+|b| \quad (a,b\in\mathbb{R})$;

(g) $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \ge |a+b|+|b+c|+|c+a| \quad (a,b,c\in\mathbb{R})$;

(h) $\left(\dfrac{a+2b}{a+b}\right)^2-2<2-\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \quad (a,b\in(0,+\infty),\ a^2<2b^2)$.

5. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+5|<3$. Milyen határok közt változhat $1/|x-2|$?

6. Az x valós számról tudjuk, hogy $|x+1|<1/2$. Adjunk egy felső becslést $|1/x^2-1|$–re.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{5+\sqrt{x+1}}+\sqrt{3-\sqrt{x+1}} = \sqrt{7}+1$;

(b) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}} = \sqrt{x}$.

(c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+3} = 1$;

(d) $\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{4x^2-12x+9} = 4$;

(e) $\sqrt{\dfrac{x-3}{2}}+\sqrt{2x} = \sqrt{x+3}$;

(f) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$;

(g) $\sqrt{3x^2-|x|-1}=3-2x$;

(h) $\sqrt{3x+10}\leq x+4$;

(i) $\sqrt{3x+7}<x-1$;

(j) $\sqrt{5x+16}>x+2$;

(k) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\leq 5$;

(l) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\leq 5$.

8. Van−e olyan x racionális szám, amelyre

(a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-10}}=\dfrac{\sqrt{3x+22}}{\sqrt{3x-14}}$;

(b) $\sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}}=2x$?

9. Mutassuk meg, hogy minden $1\leq n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül az

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenség!

10. Lássuk be, hogy minden $1\leq n\in\mathbb{N}$ esetén teljesül a

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

egyenlőtlenségpár!

Függvények, sorozatok, nagyságrendi átalakítások

11. A domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\dfrac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\dfrac{3n^4+5n^3-7n+4}{5n^4-10n^2+2}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{2n^2+5n}}{\sqrt{n^2+6}+3n+1}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}+\sqrt[3]{n^2+6}}{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^2-1}}$;

12. Gyöktelenítsünk, majd a domináns taggal való leosztás után írjuk fel az alábbi törteket $\frac{1}{n}$ függvényeként, azaz $f\left(\frac{1}{n}\right)$ alakban:

(a) $\sqrt{n^4+n^2+5}-\sqrt{n^4-2n^2-7}\,;$

(b) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n^2+2}-\sqrt{n^3-n^2+3}}\,;$

(c) $\sqrt[3]{n^3+n^2+3}-n\,;$

13. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)$ hányados–sorozatot:

(a) $x_n=\dfrac{5^{n+2}}{(n+1)!} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\;;$

(b) $x_n=\dfrac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\;;$

(c) $x_n=\dfrac{(n+2)!}{4^n\cdot(n^2+3)} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\;;$

(d) $x_n=\dfrac{(-n-2)^n}{(2n+2)!} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\;;$

14. Adottak az alábbi (x_n) sorozatok. Írjuk fel, és hozzuk a legegyszerűbb alakra az $(\sqrt[n]{|x_n|})$ gyök–sorozatot:

(a) $x_n=\dfrac{3^{2n-1}}{(n^3+1)^{5n}} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\;;$

(b) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{2-n}+3^n} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\;;$

(c) $x_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{3n^2-n} \qquad (n\in\mathbb{N}^+)\,.$

4. Exponenciális, logaritmusos kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek

4.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

1. Racionális kitevőjű hatvány.
2. Exponenciális azonosságok, kifejezések használata.
3. Exponenciális függvények és tulajdonságaik.
4. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek.
5. Logaritmus definíciója, azonosságok.
6. Logaritmusfüggvények és tulajdonságaik.
7. Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek.

4.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja $\log_a b-$t, megadva az $a, b-$re vonatkozó feltételeket is.
2. Milyen x valós számra igaz, hogy $2^x = 3$?
3. Milyen x valós szám esetén teljesül, hogy : $\frac{1}{2^{\sqrt{3x}}} = 4^{-3/2}$?
4. Írja fel a szorzat logaritmusára vonatkozó képletet és a hozzá tartozó feltételeket.
5. Írja fel a hányados logaritmusára vonatkozó képletet és a hozzá tartozó feltételeket.
6. Írja át az $\log_5 2$ számot $3-$as alapú logaritmusok segítségével.
7. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$$13^{\frac{\lg(\ln 13)}{\lg 13}}.$$
8. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:
$$\sqrt[4]{x^{4+\log_x 36}} \quad (1 \neq x \in (0; +\infty)).$$

9. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\ln^2 x - \ln x^3 + \ln e^2 = 0.$$

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x + \log_2(9 - 2^x) = 3.$$

11. Milyen valós x számokra igaz, hogy:

$$|\lg(x-1) - 10| < 1\,?$$

12. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := e^{1-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := 3^{|x|+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

14. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := \log_2 x^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

15. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyeit:

$$f(x) := \sqrt{\ln x + 1} - \sqrt{\ln x - 1} \quad (x \in [e; e^2]).$$

4.2. Feladatok

4.2.1. Órai feladatok

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$2^x = 128; \qquad 2^x \geq 128; \qquad 2^x < 128; \qquad \left(\frac{1}{27}\right)^x = 81; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{25}{9}.$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33.$$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $9 \cdot 3^{x-2} + 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1} + 18\,;$

(b) $16 \cdot 3^x = 9 \cdot 2^{2x}\,;$

(c) $3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0\,;$

(d) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}\,;$

(e) $\sqrt{(17-12\sqrt{2})^x} + \sqrt{(17+12\sqrt{2})^x} = \frac{10}{3}\,;$

(f) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0\,.$

4. Oldjuk meg a következő egyenletet az $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} (t \in \mathbb{R})$ helyettesítés felhasználásával:

$$4x^3 - 3x - a = 0 \quad (a > 1).$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$e^x + e^{-x} > 3.$$

6. Határozza meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét és ezek helyeit:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2^x+2} - \sqrt{2^x-2}} \quad (x \in [1; 2]).$$

Logaritmus tulajdonságai, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

7. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$5^2 \cdot 5^{\log_{25} 36 - 1} + 5^{1+\log_{125} 8}.$$

8. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4}.$$

9. Hozza a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\log_x \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \cdot y^{-1}}}}} \quad (1 \neq x \in (0; +\infty); y > 0).$$

10. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\frac{1}{2} \cdot \lg 52 + 3 \cdot \lg 2 + \lg 125 + \lg \sqrt{325} - \lg 13.$$

11. Fejezze ki $x-$et az a, b, c segítségével, ha:

$$\log_a x = 3 \cdot (\log_a b - \log_{a^2} c) \quad (1 \neq a > 0; b, c > 0).$$

12. Tudva, hogy $\log_{16}(54) = a$ fejezzük ki a segítségével $\log_{12}(18)-$at.

13. Tudva, hogy $20x^2 - y^2 + 8xy = 0$ teljesül számítsuk ki $\lg x - \lg y$ pontos értékét.

14. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\log_5 x = -1; \qquad \log_5 x \leq -1; \qquad \log_5 x \geq -1;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x > -2; \qquad \log_{\frac{1}{3}} x = -2.$$

15. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_3 (\log_2 (\lg(2x))) = 0\,;$

(b) $\log_{25} \left[\frac{1}{5} \cdot \log_3 \left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = -\frac{1}{2}\,;$

(c) $\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2\log_3 4{,}5 - 4\,;$

(d) $\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 1 + 2\log_4 3\,;$

(e) $\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3\,;$

(f) $\log_x(8) - \log_{4x}(8) = \log_{2x}(16)\,;$

(g) $x^{(2\cdot\lg^2 x - 1{,}5\cdot\lg x)} = \sqrt{10}$

(h) $\log_3 \dfrac{3x-1}{x+2} > 1\,;$

(i) $\log_3 \dfrac{3x-1}{x+2} < 1\,;$

(j) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0\,;$

(k) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{3-x}{3x-1}\right) \leq 0\,;$

(l) $\log_x(\lg(x)) > 0\,;$

(m) $\log_{1/x} \dfrac{2x-1}{x-1} \leq -1\,.$

16. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb értékét és annak helyét:

$$f : [1; 64] \to \mathbb{R} \quad f(x) = (\log_2 x)^4 + 12 \cdot (\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \frac{8}{x}.$$

17. Milyen x valós számok esetén értelmezhető a következő kifejezés:

$$E(x) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{1-x}}}{\ln(x^2-1)}\ ?$$

18. Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$f(x) := \ln\frac{1}{x} \quad (x \in (0; +\infty)).$$

19. Igazolja, hogy tetszőleges a, b pozitív valós számok esetén:

$$\ln\frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}.$$

Mit fejez ki ez az egyenlőtlenség geometriailag?

20. Igazolja, hogy tetszőleges a, b valós számok esetén:

$$\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{(a+b)/2}.$$

Mit fejez ki ez az egyenlőtlenség geometriailag?

4.2.2. További feladatok

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Adjuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ valós számokat, amelyekre

(a) $8^{x-1} - 2^{3x-2} + 8 = 0$;

(b) $2^{3x+1} + 3^{2x+2} = 11$.

(c) $2^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 0.01^{-x}$;

(d) $2^x - 0.5^x = 3.75$;

(e) $3^x + 3^{-x} = p \quad (p \in \mathbb{R}$ paraméter);

(f) $(x-1)^x = \sqrt[3]{x-1}$.

(g) $5^{3x-4} < \dfrac{1}{25}$;

(h) $\dfrac{3}{7}^{4-3x} \geq \dfrac{49}{9}$;

(i) $2^x + 2^{1-x} < 3$.

Logaritmus tulajdonságai, logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

2. Tudva, hogy $\log_{12}(27) = a$ fejezzük ki a segítségével $\log_6(16)$−ot.

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\ln(10x) = \lg(ex).$$

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^{\ln x} = e.$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2^x + 2)^{1/x} = 4.$$

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket:

(a) $\log_{4-x}(x^2+16) + \log_{4-x}(2x+1) = \log_{4-x}(2x) + \log_{4-x}(x^2+21)$;

(b) $\log_{x+1}(2x^2+8x+6) = 2$;

(c) $\log_3(x^3-1) - \log_3(x^2+x+1) = 2$;

(d) $\lg(x^4) + \lg(x^2) = 6$;

(e) $\log_{x-1}(x^2-2x+1) = 2$;

(f) $\lg(x+24) = 2 - 2\lg(\sqrt{x+3})$;

(g) $4\log_a(x) - 4\log_{a^2}(x) + 4\log_{a^4}(x) = 3 \quad (a \in \mathbb{R})$;

(h) $\lg(x) + \lg(x-3) = 1$;

(i) $2 \cdot \lg(2) + \lg(2x+1) - \lg(-12x) = \lg(1-2x)$;

(j) $\dfrac{\log_3(2x)}{\log_3(4x-15)} = 2$;

(k) $\log_x(x^3+3x^2-27) = 3$;

(l) $\log_2(x) + 2\cdot\log_4(x) = 3\cdot\log_8(x) + 1$;

(m) $(\log_2(x))\cdot(\log_4(2x)) = 2\cdot\log_4(2)$;

(n) $\log_2(17-2^x) + \log_2(2^x+15) = 8$;

(o) $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$;

(p) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$;

(q) $x^{\lg(x)} = 0.1\cdot x^2$;

(r) $\log_3\left(\log_3^2(x) - 3\cdot\log_2(x) + 5\right) = 2$.

(s) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+x-30) < 0$;

(t) $\log_{1-x}\dfrac{2x+3}{4(2x+1)} \geq 1$;

(u) $\log_3 x \geq \log_x 3$.

7. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\log_{1/2}(x^2-1) + \log_2(x-1) < \log_4(x+1).$$

8. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\ln(x-1) - \ln(x+1) \geq -\ln x.$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(\ln x)^x > e^x.$$

10. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\log_2(\pi)} + \frac{1}{\log_\pi(2)} > 2.$$

11. Mutassuk meg, hogy

$$\log_a(a^2+1) + \log_{a^2+1}(a^2) > 3 \quad (a \in (1,+\infty)) .$$

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in (0;1)$, akkor :

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

13. Igazoljuk, hogy:

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

14. Milyen x valós számok esetén értelmezhető a következő kifejezés:

$$E(x) = \frac{\sqrt{2^x - 1}}{\log_x(|x| - 3)} \ ?$$

15. Legyen adott az $a \in (0;1)$ paraméter és az $f(x) := a^x + (1-a)^x \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvény. Igazoljuk, hogy:

(a) Ha $x > 1 \implies f(x) < 1$;

(b) Ha $x < 1 \implies f(x) > 1$.

16. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b \in (0;+\infty)$ valós számokra:

$$a^a \cdot b^b > a^b \cdot b^a.$$

17. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a \neq b \in (0;+\infty)$ és $\alpha \in (0;1)$ valós számokra:

$$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} < a + b.$$

18. Bizonyítsuk be, hogy :

$$\exists!\, x \in [1;+\infty) : 1 + 2 \cdot \ln x = e^{1-x}.$$

19. Határozza meg az alábbi függvény legkisebb értékét és helyét:

$$f(x) := \log_2^2 x + \log_x^2 2 \quad (x \in (0;+\infty) \setminus \{1\}).$$

20. Milyen valós x, y számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{\log_x(\pi - \sqrt{y})} + 2\cos(3\pi \cos\sqrt{y}) + \sqrt{\log_{\pi-\sqrt{y}} x} \leq 0?$$

5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

5.1. Kiegészítés az elmélethez

Ajánlott átnézni az alábbiakat:

Középszint:

1. Szög, forgásszög, szögmérés (fok, ívmérték).
2. Szögfüggvények értelmezése (hegyesszög, tompaszög).
3. Nevezetes szögek szögfüggvényei.
4. Egyszerű trigonometrikus azonosságok (ide tartozik a pitagoraszi azonosság, valamint a tangens kifejezése a sinus és a cosinus hányadosaként).

Emelt szint:

1. Szögfüggvények értelmezése tetszőleges szög esetén.
2. Trigonometrikus függvények értelmezése, grafikonjaik, jellemző tulajdonságaik:
$$\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}.$$
3. További trigonometrikus azonosságok.

Az alábbi azonosságokat tudni kell:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\quad \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
2. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$
3. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$
4. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$;
5. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$;
6. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;
7. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
8. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad$ (*Linearizáló formulák*).

Itt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valós számok, azaz ívmértékben megadott szögek, vagy pedig α, β fokban megadott szögek.

5.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mekkora radiánban kifejezve a $120^\circ-$os szög?
2. Adja meg a következő kifejezések pontos értékét:
$$\sin\pi/3;\ \ \cos\pi;\ \ \sin\pi/4;\ \ \cos\pi/2;\ \ \mathrm{tg}\,\pi/4;\ \ \mathrm{ctg}\,\pi/6;\ \ \mathrm{tg}\,\pi/3.$$
3. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$(\sin\pi/7+\cos\pi/7)^2-\sin 2\pi/7.$$
4. Számítsa ki $\sin^3\pi/3-\cos^3\pi/3$ pontos értékét.
5. Milyen $a\in\mathbb{R}$ valós számmal teljesül az alábbi azonosság a megadott x valós számokra:
$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{a}{\sin^2(2x)}\quad(\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi/2\mid k\in\mathbb{Z}\})?$$
6. Számítsa ki az addíciós tétellel $\sin(x-y)$ értékét.
7. Számítsa ki az addíciós tétellel $\cos(x+y)$ értékét.
8. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:
$$\sin\pi/7\cdot\cos\pi/42+\sin\pi/42\cdot\cos\pi/7.$$
9. Számítsa ki $\sin\pi/8$ pontos értékét.
10. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\cos^2 x=1+\sin^2 x.$$
11. Ábrázolja az $f(x):=\sin^4 x-\cos^4 x\quad(x\in[0;\pi])$ függvényt.
12. Hozza a legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:
$$E(x):=(\sin x+\cos x)^4-(\sin x-\cos x)^4\quad(x\in\mathbb{R}).$$
Milyen x valós számokra teljesül, hogy:
$$E(x)=-2\,?$$
13. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a $[\pi/2;\pi]$ intervallumon:
$$\sin 2x>\cos x.$$

14. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legkisebb értékét és annak helyeit.

15. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\frac{\sin^2 \dfrac{4037\pi}{4}}{1 - \cos^3 7\pi}.$$

5.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Ábrázolja az $f(x) := \sin x \quad (x \in [0; 3\pi])$ függvényt.
2. Ábrázolja a $g(x) := \cos x \quad (x \in [-\pi; 3\pi])$ függvényt.
3. Definiálja és ábrázolja a tg függvényt.
4. Írja le a *linearizáló* formulákat.
5. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét:

$$\cos 9\pi/20 \cdot \cos \pi/5 + \sin 9\pi/20 \cdot \sin \pi/5.$$

5.2. Feladatok

5.2.1. Órai feladatok

Azonosságok, egyenletek

1. Számítsa ki $\operatorname{tg} \pi/12$ pontos értékét.

2. Vezessünk le linearizáló formulát a $\cos^3 \alpha$ kifejezésre, ha $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \quad \sin x = -\frac{1}{2}; \qquad b) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad c) \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$d) \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \qquad e) \quad \operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1; \qquad f) \quad \operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{3}$$

4. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

(a) $\sin 4x = \sin x$;

(b) $\cos 10x = \cos 2x$;

(c) $\cos 4x = \sin 3x$;

(d) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;

(e) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$;

(f) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{3}{2}$;

(g) $\dfrac{4}{\cos^2 x} - 5\operatorname{tg}^2 x = 1$;

(h) $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$;

(i) $\sqrt{2} \cdot \sin x \cos \dfrac{x}{2} = \sqrt{1 + \cos x}$;

(j) $2\sin^2 x + \sin x + \dfrac{1}{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2\sin x} = 1$;

(k) $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \cdot \sin^2 3x$;

(l) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$?

(m) $\cos 2x = \cos x - \sin x$?

Egyenlőtlenségek

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$\sin x < -\frac{1}{2}; \qquad \sin x > -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \le -\frac{1}{2}; \qquad \cos x \ge -\frac{1}{2}.$$

6. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz

$$-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}\ ?$$

7. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$;

(b) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;

(c) $\dfrac{2\sin x + 1}{2\cos x} \le 0$;

(d) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x} > 1$;

(e) $\left|\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| \le 1$.

8. Keressük meg a $0 \le x \le 2\pi$ intervallumba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a kövtkező egyenlőtlenséget:

$$2\cos x \le |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \le \sqrt{2}.$$

$\boxed{\textit{Egyéb típusok}}$

9. a) Egyszerűsítsük a következő kifejezést a valós x változó megengedett értékei mellett, amikor is a nevező nem 0:

$$E(x) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) + \cos 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{\sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \sin 5x}.$$

b) Oldjuk meg a fenti egyszerűsített $E(x)$ kifejezéssel az alábbi egyenletet:

$$E(x) + \frac{1}{E(x)} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény konstans a megadott halmazon:

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\cos^2 x - \sqrt{\cos 2x}} \quad (x \in [-\pi/4; \pi/4]).$$

11. Határozzuk meg azt a legbővebb D halmazt, melynek x elemeire értelmezhető az alábbi kifejezés:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \quad (x \in D).$$

Az így kapott f függvény utasítását hozzuk a legegyszerűbb alakra, majd oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$f(x) + (2+\sqrt{3})f(-x) = 0.$$

12. A cos függvény tulajdonságait felhasználva határozzuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$f(x) := \cos\frac{1}{x} \quad \left(x \in \left[\frac{3}{2\pi}; \frac{2}{\pi}\right)\right).$$

13. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := (\sqrt{\operatorname{tg}} - \sqrt{\operatorname{ctg} x})^2 \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legnagyobb és legkisebb értékét és annak helyeit a $[\pi/8; 5\pi/12]$ intervallumon.

14. Határozza meg az $f(x) := \sin^2 \dfrac{x}{2} \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2}$ $(x \in [0; \pi/4])$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét. Hol veszi fel ezeket a függvény?

15. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre és bármely $x \neq \dfrac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \dots, n; \lambda$ tetszés szerinti egész szám) valós számra érvényes az alábbi azonosság:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

16. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét, ahol $1 \le n \in \mathbb{N}$ darab négyzetgyök szerepel a kifejezésben:

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}} \quad (1 \le n \in \mathbb{N}).$$

5.2.2. További feladatok

Azonosságok, egyenletek

1. Fejezze ki $\operatorname{tg}(x+y)$ értékét $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg} y$ segítségével.

2. Számísa ki $\operatorname{tg} \pi/8$ pontos értékét.

3. Számítsa ki $\operatorname{tg} \pi/16 + \operatorname{ctg} \pi/16$ pontos értékét.

4. Vezessen le *linearizáló* formulát a $\sin^3 \alpha$ kifejezésre. (Fejezze ki $\sin 3\alpha$ értékét $\sin \alpha$ segítségével.)

5. Igazoljuk, hogy azon a halmazon, ahol az alábbi egyenlőség mindkét oldala értelmes, az egyenlőség azonosság:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}$;

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \cos 4x$.

(c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;

(d) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$;

(e) $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $0 < z < \dfrac{\pi}{2}$ valós szám, hogy

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5} \cdot \sin(z + x) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

7. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

(a) $4\cos^3 x + 3\cos(\pi - x) = 0$;

(b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$;

(c) $\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x$;

(d) $\sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x - 3\cos^2 x = 0$;

(e) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$;

(f) $2\cos 2x + 4\sin x + 1 = 0$;

(g) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2$.

8. Az $y \in \mathbb{R}$ paramétertől függően oldjuk meg a

$$2 \cdot \sin x = y + \frac{1}{y}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

9. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \cdot x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x} \, .$$

10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin(\pi/4 - x)}{\sqrt{2}\cos x}} \, .$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2^{\cos^2 x} = \sin x.$$

Egyenlőtlenségek

13. Határozzuk meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre

$$\cos x < \cos^4 x \, .$$

14. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $|\sin x - \cos x| \le \sqrt{2}$;

(b) $\sin^4 x + \cos^4 x \ge \frac{1}{2}$;

(c) $\frac{1}{4} \le \sin^6 x + \cos^6 x \le 1$;

(d) $\sin x \cos 6x > \cos x \sin 6x$;

(e) $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \cdot |\sin x| + \frac{\sqrt{6}}{4} < 0.$

Egyéb típusok

15. **a)** Egyszerűsítsük a következő kifejezést a valós x változó megengedett értékei mellett, amikor is a nevező nem 0:

$$E(x) = \frac{\sin 6x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) + 2\sin x \cos x}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} + 2x\right) + \cos 6x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}.$$

b) Oldjuk meg a fenti egyszerűsített $E(x)$ kifejezéssel az alábbi egyenletet:

$$E(x) - \frac{1}{E(x)} = -2.$$

16. Adja meg azt a *legbővebb* D halmazt, amellyel az alábbi függvény definiálható:

$$f(x) := \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \quad (x \in D).$$

Határozza meg a fent definiált függvény legkisebb értékét és annak helyét a $[0; \pi/4]$ intervallumon.

17. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb értékét és annak helyét:

$$f(x) := \sin\frac{\pi}{x} \cdot \cos\frac{x}{\pi} + \sin\frac{x}{\pi} \cdot \cos\frac{\pi}{x} \quad (x \in [\pi; 2\pi]).$$

18. Ábrázolja az $f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in [0; \pi/2])$ függvényt.

19. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

$$f(x) = \mathrm{tg}\frac{\pi\cos^2 x}{4} + \mathrm{tg}\frac{\pi\sin^2 x}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

20. Valamely x értékre teljesül az alábbi egyenlet:

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az

$$a = 4, b = 2, c = -1$$

esetben.

21. Egy háromszög α, β, γ szögei olyanok, hogy $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ egymást követő természetes számok. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

22. Legyenek $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ valós állandók és x jelentsen valós változót, végül pedig

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(a_k + x)}{2^{k-1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$, akkor van olyan m egész szám, hogy $x_2 - x_1 = m\pi$.

6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései

Az óra első felében a polinomok és racionális törtfüggvények növekedési ütemével foglalkozunk: úgynevezett nagyságrend-őrző becsléseket adunk.

Az óra második felében pedig az analízisben is fontos szerepet játszó további becsléseket fogunk átnézni néhány függvény esetében.

6.1. Kiegészítés az elmélethez

Ismétlés: polinomok

Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén *n-edfokú polinom*on értjük az alábbi kifejezést:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0,$$

ahol a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 adott valós számok (a polinom *együtthatói*), $a_n \neq 0$. Az a_n együttható neve: a polinom *főegyütthatója*. x jelöli a polinom ún. *változó*ját, ami tetszőleges valós szám lehet. Az $n = 0$ esetben konstans polinomról beszélünk. Ezek tehát a nem nulla valós számokkal azonosíthatók. A 0-át is tekinthetjük polinomnak, e polinom fokát és főegyütthatóját azonban nem értelmezzük.

Polinomok nagyságrendi becslése

Tekintsünk egy *pozitív főegyütthatós* polinomot.
Érzéseink azt sugallják, hogy ha az x változó „nagy" pozitív szám, akkor a polinom „nagyságrendileg úgy viselkedik", mint a legmagasabb fokú tagja. Ezen pontosabban a következőt értjük. Ha

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (a_n > 0),$$

akkor megadhatók olyan $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok, hogy minden $x \geq R$ esetén

$$m \cdot x^n \leq P(x) \leq M \cdot x^n.$$

Kissé lazábban fogalmazva: Elég nagy x-ek esetén $P(x)$ értéke az x^n hatvány konstansszorosai közé esik.

Az $m \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) a *P nagyságrend-őrző alsó becslésének* (NRA-becslésének), az $M \cdot x^n$ polinomot (az $R > 0$ szám megadásával együtt) pedig a *P nagyságrend-őrző felső becslésének* (NRF-becslésének) nevezzük. Nevezzük e két becslés együttesét NR-becslésnek (*nagyságrend-őrző becslés*).
A becslés végrehajtására (vagyis az $R > 0$, $m > 0$, $M > 0$ számok megkeresésére) a Függelék 27.3. szakaszában adunk módszert és példát.

Racionális törtkifejezések becslése

Két polinom hányadosát racionális törtkifejezésnek (röviden: törtkifejezésnek) nevezzük. Az ilyen típusú kifejezésekre is adhatunk nagyságrend-őrző (NR) becsléseket. Ha ugyanis P_1 n-edfokú és P_2 k-adfokú pozitív főegyütthatós polinomok, melyeknek NR-becsléseit már előállítottuk:

$$m_1 \cdot x^n \le P_1(x) \le M_1 \cdot x^n \qquad (x \ge R_1) \qquad \text{és}$$

$$m_2 \cdot x^k \le P_2(x) \le M_2 \cdot x^k \qquad (x \ge R_2),$$

akkor $x \ge \max\{R_1, R_2\}$ esetén nyilvánvalóan

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \le \frac{M_1 \cdot x^n}{m_2 \cdot x^k} = \frac{M_1}{m_2} \cdot x^{n-k},$$

továbbá

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \ge \frac{m_1 \cdot x^n}{M_2 \cdot x^k} = \frac{m_1}{M_2} \cdot x^{n-k}.$$

6.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy alkalmas P polinom *NRA becslését.*
2. Definiálja egy alkalmas P polinom *NRF becslését.*
3. Felhasználva a P, Q polinomok NR becsléseit definiálja a P/Q racionális tört NR becsléseit.
4. Adjon NRA és NRF becslést a $P(x) := x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 21$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomra.
5. Adjon NRA és NRF becslést az $f(x) := \dfrac{2x^7 - 3x^4 + 5x^2 - x + 6}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ racionális törtfüggvényre.
6. Adjon NRA és NRF becslést az $x_n := n^4 - 2n^3 - +7n^2 - n + 13$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra.
7. Adjon NRA és NRF becslést az $x_n := \dfrac{n^5 - 2n^4 + 3n^3 - 4n^2 + 5n + 111}{n^3 - 2n + 3}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra.
8. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$
teljesüljön, ha $x > K$.
9. Tekintsük az $f(x) := x^4 + 2x^2 + x - 5000$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy
$$f(x) > 80000$$
teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4+2x^3-x+12}{x^2+x+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K>0$ számot, hogy
$$f(x) > 1000$$
teljesüljön, ha $x>K$.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk felső becslést az
$$|f(x)-f(1)|$$
eltérésre, ha $|x-1| < \dfrac{1}{100}$.

12. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk felső becslést az
$$|f(x)-f(2)|$$
eltérésre, ha $|x-2| < \dfrac{1}{100}$.

13. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K>0$ számot, hogy
$$|f(x)-f(2)| \leq K \cdot |x-2|$$
teljesüljön, ha $|x-2| < \dfrac{1}{100}$.

14. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $\delta > 0$ számot, hogy
$$|f(x)-f(2)| \leq \frac{1}{1000}$$
teljesüljön, ha $|x-2| < \delta$.

6.2. Feladatok

6.2.1. Órai feladatok

NR-becslések

1. Adjunk NRF−becslést az alábbi polinomokra!

(Azaz: adjunk meg olyan $M>0$ és $R>0$ számokat, hogy minden $x \geq R$ esetén igaz legyen a $P(x) \leq M \cdot x^n$ egyenlőtlenség! Más szóval: adjunk meg olyan $M>0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \leq M \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,.$

2. Adjunk NRA−becslést az alábbi polinomokra!

(Azaz: adjunk meg olyan $m > 0$ és $R > 0$ számokat, hogy minden $x \geq R$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség! Más szóval: adjunk meg olyan $m > 0$ számot, hogy minden elég nagy $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz legyen a $P(x) \geq m \cdot x^n$ egyenlőtlenség!)

(a) $P(x) = 6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3\,;$

(b) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 7\,;$

(c) $P(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5\,.$

3. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 6}{5x^2 - 3x - 10}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 10x^2 + 20x - 15}{7x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 9}\,.$

4. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = 7n^3 - 4n^2 + 5n - 17 \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{3n^4 + 7n^3 - 10n^2 - 13n + 6}{2n^5 - 8n^3 + 5n^2 + 9n - 7} \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

5. Tekintsük az $f(x) := 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Mit tudunk mondani az $f(x)$ függvényértékekről (alsó és felső becslés), ha

$$|x - 2| < \frac{1}{10}?$$

Hogy tudjuk felírni ezt a becslést $|f(x) - 7| < \varepsilon$ alakban alkalmas $\varepsilon > 0$ szám segítségével?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - 7|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x - 2| < \delta$?

6. Tekintsük az $f(x) := x^2 + x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(-1)|$ eltérésre, ha $|x + 1| < \dfrac{1}{100}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(-1)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x + 1| < \delta$.

7. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{2x+1}{x-3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(2)|$ eltérésre, ha $|x - 2| < \dfrac{1}{10}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(2)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x - 2| < \delta$.

8. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x+1}{x^4 + x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{1000}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := x^3 - 2x^2 + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 200$$

teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 100$$

teljesüljön, ha $x > K$.

11. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{1000}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

6.2.2. További feladatok

1. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi polinomokra:

(a) $P(x) = 7x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x - 10\,;$

(b) $P(x) = 12x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 6x - 20\,;$

(c) $P(x) = x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 10^2 + 11x + 33\,;$

(d) $P(x) = 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 10x + 5\,;$

(e) $P(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 20\,;$

(f) $P(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - 99x^4 - 88x^3 - 67x^2 - 61x - 60\,.$

2. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi racionális törtekre:

(a) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 7x^2 + x + 8}{3x^2 - 5x - 7}\,;$

(b) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 9x^2 + 8x - 12}{4x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 11x^2 + 3x + 6}\,.$

3. Adjunk NRF− és NRA−becslést az alábbi sorozatokra:

(a) $a_n = n^3 - 7n^2 + 9n - 13 \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,;$

(b) $a_n = \dfrac{5n^4 + 3n^3 - 14n^2 - 9n + 7}{2n^5 + 11n^3 - 4n^2 + 5n - 17} \;\; (n \in \mathbb{N}^+)\,.$

4. Tekintsük az $f(x) := 5x - 2 \;\; (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Mit tudunk mondani az $f(x)$ függvényértékekről (alsó és felső becslés), ha

$$|x - 1| < \frac{1}{100}?$$

Hogy tudjuk felírni ezt a becslést $|f(x) - 3| < \varepsilon$ alakban alkalmas $\varepsilon > 0$ szám segítségével?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - 3|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x - 1| < \delta$?

5. Tekintsük az $f(x) := 4 - x^2 \;\; (x \in \mathbb{R})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(-1)|$ eltérésre, ha $|x + 1| < 1$?

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(-1)|$ eltérés kisebb legyen mint $\dfrac{1}{10}$, hacsak $|x + 1| < \delta$?

6. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1-3x}{x+2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$ függvényt. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Adjunk felső becslést az $|f(x) - f(1)|$ eltérésre, ha $|x-1| < \dfrac{1}{100}$.

b) Adjunk meg egy alkalmas $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy az $|f(x) - f(1)|$ eltérés legyen kisebb mint $\dfrac{1}{100}$, hacsak $|x-1| < \delta$.

7. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^2+x+8}{x^3+2x^2+1}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

8. Tekintsük az $f(x) := 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 2018$$

teljesüljön, ha $x > K$.

9. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4 - x + 13}{x^2 + x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$f(x) > 1000$$

teljesüljön, ha $x > K$.

10. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x^2+1} - x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Adjunk meg olyan $K > 0$ számot, hogy

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}$$

teljesüljön, ha $x > K$.

7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

7.1. Kiegészítés az elmélethez

Kijelentések

Az „*állítás*” és a „*kijelentés*” szavakat azonos értelemben használjuk, és alapfogalomnak tekintjük. Jelölésben gyakran használjuk a $p, q, r \ldots$ vagy az $A, B, C \ldots$ betűket. Szintén alapfogalomnak tekintjük az állítások *igazságtartalmá*nak, más szóval *logikai értéké*nek fogalmát, ami kétféle lehet: igaz, hamis. Néhány példa:

1. $5 > 4$. Logikai értéke: igaz. Más szóval: az állítás *igaz.*

2. $10 \geq 25$. Ez az állítás *hamis.*

Néha a kijelentés egy vagy több változótól függ, amely változók egy megadott halmazból (ez az ún. *alaphalmaz*) vehetik értéküket. Például:

1. $x + 3 \leq 5 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

2. $x^2 + y^2 > 1 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$.

Az ilyen kijelentéseket *nyitott*nak is szokás nevezni. A nyitott kijelentés igazságtartalma attól függ, hogy a változója helyére milyen értéket írunk. Például az előbb felírt $x+3 \leq 5$ állítás $x = 1$ esetén igaz, $x = 8$ esetén hamis.

A változók azon értékeinek halmazát, amelyre a kijelentés igaz, *igazsághalmaz*nak nevezzük.

Műveletek kijelentésekkel, igazságtábla

Kijelentésekkel újabb kijelentéseket definiálhatunk a következő alaműveletek segítségével: *tagadás* vagy *negáció* ($\neg$), *konjunkció* ($\wedge$), *diszjunkció* ($\vee$),*implikáció* ($\Longrightarrow$) és *ekvivalencia* ($\Longleftrightarrow$). Ezeket szokás egy úgynevezett *igazságtábla* segítségével bevezetni, ahol az oszlopokban megadjuk a műveletekben előforduló logikai állítások és az új kijelentések logikai értékét, figyelembe véve a szóbanforgó kijelentések összes lehetséges értékét.

p	q	¬ p	p ∧ q	p ∨ q	p ⟹ q	p ⟺ q
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

Az igazságtáblát jól fogjuk tudni használni összetettebb kijelentések kiértékeléséhez is (lásd órai feladatok).

Kvantorok

Vezessük be a $\forall$ jelet a „minden”, a $\exists$ jelet a „létezik” („van olyan”) szó rövidítésére. Ezeket a jeleket *kvantorjelek*nek, röviden *kvantorok*nak nevezzük. A kvantorok segítségével egy nyitott kijelentésből új állítások képezhetőek. Példák:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x^2 + 1 > 0.$

   Logikai értéke nyilvánvalóan igaz.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Logikai értéke hamis, mivel pl. $x = 6$ esetén nem igaz.

3. $\exists\, x \in \mathbb{R}: \quad x + 3 \leq 5.$

   Ez az állítás igaz, mivel pl. $x = 0$ esetén igaz.

4. $\exists\, x \in [7, +\infty): \quad x + 3 \leq 5.$

   Az állítás hamis, mivel $x \geq 7$ esetén $x + 3 \geq 10$.

5. $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   Logikai értéke: hamis, mivel pl. $(x, y) = (0, 0)$ esetén nem igaz.

6. $\forall\, y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   Az állítás nyitott, változója $x \in \mathbb{R}$.

7. $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2 > 1.$

   E kijelentés logikai értéke: igaz. Ugyanis pl. $x = 2$ esetén az egyenlőtlenség így néz ki:
   $$4 + y^2 > 1,$$
   ami minden $y \in \mathbb{R}$ esetén igaz.

8. $\forall\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5 \qquad (y \in \mathbb{R}).$

   Az állítás nyitott, változója y.

9. $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5.$

   A kapott kijelentés már nem nyitott, logikai értéke eldönthető, mégpedig: hamis. Vegyünk ugyanis egy $y \in \mathbb{R}$ számot. Ha $y \leq 2$, akkor pl. $x := 3$ választással $3 \in [y, +\infty)$, de $3 + 3 \leq 5$ nem igaz. Ha pedig $y > 2$, akkor pl. $x := y + 1$ választással $y + 1 \in [y, +\infty)$, de $y + 1 + 3 \leq 5$ nem igaz. Tehát valóban nem létezik ilyen $y \in \mathbb{R}$.

Kvantoros kifejezések tagadása

Tekintsük az utolsó példában szereplő
$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 \leq 5$$

állítást. Könnyen meggondolható, hogy ennek tagadása:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in [y, +\infty): \quad x + 3 > 5.$$

Formálisan: a kvantorjeleket megcseréljük, s a végén az állítás tagadását vesszük.

„Ha-akkor" szerkezetű állítások (következtetések, implikációk)

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol az x változó az Ω alaphalmazból veheti az értékeit. Ekkor a

„ha az $A(x)$ állítás igaz, akkor a $B(x)$ állítás is igaz"

kijelentést *következtetés*nek nevezzük, és röviden így jelöljük:

$$A(x) \Longrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazásai:

- „Az $A(x)$ állításból következik a $B(x)$ állítás."
- „$A(x)$-ből következik $B(x)$."
- „Az $A(x)$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $B(x)$ igaz legyen."
- „$A(x)$ elégséges feltétele $B(x)$-nek." Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ bal oldalán áll az elégséges feltétel.
- „A $B(x)$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $A(x)$ igaz legyen."
- „$B(x)$ szükséges feltétele $A(x)$-nek." Vegyük észre, hogy formailag a $\Longrightarrow$ jobb oldalán áll a szükséges feltétel.
- „Minden olyan $x \in \Omega$ esetén, amelyre az $A(x)$ állítás igaz, igaz a $B(x)$ állítás is."

  Ezt tömören is felírhatjuk a $\forall$ kvantorral:

  $$\forall\, x \in \Omega,\ A(x): \quad B(x).$$

Megjegyezzük, hogy a „ha-akkor" szerkezetű állításnak a $\forall$ kvantorral való átfogalmazása sokszor megkönnyíti a megértést, a bizonyítást, továbbá az állítás tagadását.

Például: tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ következtetést. Ennek néhány megfogalmazása:

- Ha $x \geq 3$, akkor $x > 1$.
- $x \geq 3$-ból következik, hogy $x > 1$.
- Az $x \geq 3$ feltétel elégséges ahhoz, hogy $x > 1$ igaz legyen.
- $x \geq 3$ elégséges feltétele $x > 1$-nek.

- Az $x > 1$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $x \geq 3$ igaz legyen.
- $x > 1$ szükséges feltétele $x \geq 3$-nak.
- Minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre az $x \geq 3$ állítás igaz, igaz az $x > 1$ állítás is. Tömör felírása:
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 : \quad x > 1.$$

Nyilvánvaló, hogy a vizsgált következtetés igaz.

„Akkor és csak akkor" szerkezetű állítások (ekvivalenciák):

Legyen $A(x)$ és $B(x)$ két nyitott kijelentés, ahol $x \in \Omega$. A „$B(x) \Longrightarrow A(x)$" állítást az „$A(x) \Longrightarrow B(x)$" állítás *megfordításá*nak nevezzük. Ha egy igaz következtetés megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy a következtetés *megfordítható.*

Példaként tekintsük az előbbiekben vizsgált

$$x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$$

(igaz) következtetést. Ennek megfordítása az $x > 1 \Longrightarrow x \geq 3$ állítás, ami szintén sokféleképpen fogalmazható meg. Például így:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 1 : \quad x \geq 3.$$

Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy hamis állításhoz jutottunk, mivel pl. $x = 2$ esetén $2 \in \mathbb{R}$ és $2 > 1$ is teljesül, azonban $2 \geq 3$ már nem igaz. Tehát az $x \geq 3 \Longrightarrow x > 1$ állítás nem fordítható meg.

Ha az $A(x) \Longrightarrow B(x)$ következtetés is és a megfordítása is igaz, akkor azt mondjuk, hogy

„$A(x)$ *ekvivalens* $B(x)$-szel".

Ez tehát az alábbit jelenti:

$$(\, A(x) \Longrightarrow B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\, B(x) \Longrightarrow A(x)\,).$$

Az így kapott állítást *ekvivalenciá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x).$$

Más megfogalmazások:

- „$A(x)$ és $B(x)$ ekvivalensek."
- „Az $A(x)$ állítás *akkor és csak akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."
- „Az $A(x)$ feltétel *szükséges és elégséges* ahhoz, hogy a $B(x)$ állítás igaz legyen."
- „Az $A(x)$ állítás *pontosan akkor* igaz, ha a $B(x)$ állítás igaz."

Mivel az ekvivalencia két „ha-akkor” szerkezetű állításból épül fel, a „ha-akkor” szerkezetű állítások pedig megfogalmazhatóak a $\forall$ kvantorjellel, ezért az ekvivalencia is megfogalmazható kvantorjelekkel. Az

$$A(x) \Longleftrightarrow B(x)$$

ekvivalencia így fogalmazható át:

$$(\,\forall\, x \in \Omega,\ A(x): \quad B(x)\,) \quad \text{és} \quad (\,\forall\, x \in \Omega,\ B(x): \quad A(x)\,).$$

Ez az átfogalmazás különösen az ekvivalenciák bizonyításánál hasznos.

Példaként tekintsük ($x \in \mathbb{R}$ esetén) az

$$x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$$

következtetést. Ennek megfordítása az $x^2 > 0 \Longrightarrow x \neq 0$ állítás. Könnyen megmutatható, hogy az állítás is és a megfordítása is igaz. Tehát igaz az alábbi ekvivalencia:

$$x \neq 0 \Longleftrightarrow x^2 > 0\ .$$

Néhány megfogalmazása:

- Az $x \neq 0$ és az $x^2 > 0$ állítások ekvivalensek.
- $x \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $x^2 > 0$.
- Az $x \neq 0$ feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy $x^2 > 0$ igaz legyen.
- $x \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x^2 > 0$.

7.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \wedge q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
2. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \Longrightarrow q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
3. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \Longleftrightarrow q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
4. Adja meg a p állítás esetén a $\neg p$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.
5. Adja meg az A, B állítások esetén az $A \vee \neg B$ állítás igazságtábláját (lehetséges logikai értékeit). Az alapműveletek közül melyik állítással ekvivalens a most megadott

   $$A \vee \neg B$$

   kijelentés?
6. Adottak az $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) := 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(x)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

(a) $f(x) = g(x) \iff A(x)$;

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x) \iff A(x)$;

(c) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x) \iff A(x)$.

7. Adott az alábbi nyitott kijelentés a természetes számok halmazán (azaz $n \in \mathbb{N}$):

$$A(n): \quad 3^n \geq n^2 + 2n + 1.$$

Igazak-e az allábbi állítások:

(a) $A(0), A(1), A(2)$.

(b) $\exists\, N \in \mathbb{N} :\ A(N)$ hamis.

(c) $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\, n \geq N :\ A(n)$ igaz.

8. Adja meg a fenti (c) állítás tagadását, azaz tagadja le az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n \geq N : 3^n \geq n^2 + 2n + 1.$$

9. Adja meg az alábbi állítás tagadását és döntse el, hogy az állítás, vagy a tagadása igaz:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ \exists\, y \in [x; +\infty) : y - 5 < 21.$$

10. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy az $A(0; 1), B(1; 0), C(-1; 0)$ és $D(x+y; x-y)$ pontok egy $ABCD$ négyzetet alkossanak.

11. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy a $C(x; y)$ pont egyenlő távolságra legyen az $A(-1; 0)$ és $B(1; 2)$ pontoktól.

12. Írja le matematikai jelöléssekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

(a) Két négyzetszám összege pontosan akkor nulla, ha mindkét szám nulla;

(b) Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két megfelelő oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.

(c) Egy szám 6−tal való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy osztható legyen 2−vel is és 3−mal is.

(d) Egy $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pont akkor és csak akkor van rajta az origó középű 2 sugarú körvonalon, ha koordinátáinak négyzetösszege 4.

(e) Ha egy szám négyzete 4, akkor ez a szám 2.

(f) Egy szám négyzete ponotsan akkor 4, ha ennek a számnak az abszolút értéke 2.

(g) Egy valós szám távolsága 1−től akkor és csak akkor legfeljebb 3, ha a szám legalább −2 és legfeljebb 4.

(h) A természetes számok halmazának van legkisebb eleme.

13. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\Box$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

    (a) $x = \sqrt{16} \quad \Box \quad x = 4;$

    (b) $4x^2 = 16 \quad \Box \quad x = -2;$

    (c) $x^2 > 0 \quad \Box \quad x \neq 0;$

14. Írja fel kvantorokkal az alábbi állítást és döntse el, hogy igaz-e a kapott állítás. Írja fel ennek tagadását is.

    Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy:

$$\frac{n^4 - n^2}{n+1} > 4000.$$

15. Döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás. Írja fel ennek tagadását is.

$$\exists\, K > 0 \ \forall\, x \in (K; +\infty) : \ \frac{x^2 + x}{x^3 + 10} < \frac{1}{1000}.$$

7.2. Feladatok

7.2.1. Órai feladatok

Kijelentések kvantorok

1. Igazságtábla segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $(A \wedge B) \vee C \ = \ (A \vee C) \wedge (B \vee C);$

(b) $(A \vee B) \wedge C \ = \ (A \wedge C) \vee (B \wedge C);$

(c) $\neg(\neg A) \ = \ A;$

(d) $\neg(A \wedge B) \ = \ \neg A \vee \neg B;$

(e) $\neg(A \vee B) \ = \ \neg A \wedge \neg B;$

(f) $A \Rightarrow B \ = \ \neg A \vee B;$

(g) $\neg A \Rightarrow \neg B \ = \ B \Rightarrow A;$

(h) $(\neg A \vee B) \Rightarrow B \ = \ A \vee B;$

2. Legyen $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ és $D(x)$ a következő négy nyitott kijelentés az $\mathbb{R}$ alaphalmazon:

$A(x):$ x pozitív valós szám;

$B(x):$ x olyan valós szám, amelyre igaz, hogy $x^2 + x - 6 = 0$;

$C(x):$ $x = -3$;

$D(x):$ $x = 2$.

Fogalmazzuk meg különféle módokon az alábbi állításokat, és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

1. $C \Longrightarrow B$;	2. $C \Longrightarrow \neg A$;	3. $D \Longrightarrow A$;
4. $D \Longrightarrow B$;	5. $B \Longrightarrow (C \vee D)$;	6. $B \iff (C \vee D)$;
7. $(A \wedge B) \iff D$;	8. $\neg(\neg A \wedge D)$;	9. $(\neg A \wedge B) \iff C$.

3. Tekintsük az alábbi következtetéseket (minden változó a valós számok halmazából veszi az értékét):

(a) $x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$;

(b) $xy = xz \Longrightarrow y = z$;

(c) $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$;

(d) $x^2 + y^2 = 12x + 16y - 75 \Longrightarrow 25 \le x^2 + y^2 \le 225$.

Fogalmazzuk meg ezeknek az állításoknak a megfordítását! Mindegyik esetben döntsük el, hogy a következtetés vagy a megfordítása igaz-e, esetleg egyik sem!

4. Tekintsük az

i) $n \ge 5$ $(n \in \mathbb{N})$;

ii) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03$ $(n \in \mathbb{N})$;

iii) $x^2 + x - 1 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

nyitott kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

5. Tekintsük az

$$\frac{1}{n} < 0,01 \;\; (n \in \mathbb{N}^+)$$

nyitott kijelentést!

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\forall\, n \geq N: \;\; \frac{1}{n} < 0,01 \;\; (N \in \mathbb{N}^+).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Tekintsük az alábbi állítást:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}^+ \; \forall\, n \geq N: \;\; \frac{1}{n} < 0,01.$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

6. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat! Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz$-$e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

Megjegyzés: A (c) pontbeli állítást az alábbi két megfogalmazásban is szokás mondani:

a) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n^2}{10n-7} > 100$.

b) Az $\dfrac{n^2}{10n-7}$ *tört nagyobb* $100-$*nál, ha n elég nagy természetes szám.*

7. Fogalmazzuk meg kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntsük el, hogy igazak$-$e vagy sem! Írjuk fel tagadásukat is!

(a) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$n^4 - 35n^3 - 15n^2 + 13n + 10 > 2000.$$

(b) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0,05.$$

(c) Minden elég nagy n természetes számra igaz az, hogy

$$\frac{2n^6-20n^5+3n^4-6n^3+3}{13n^3+100n^2+200} > 230.$$

7.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok

1. Igazságtábla segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

(a) $A \wedge \neg(B \wedge A) \;=\; A \wedge \neg B$;

(b) $A \vee \neg(B \vee A) \;=\; A \vee \neg B$;

(c) $\neg((A \vee B) \wedge \neg A) \;=\; A \vee \neg B$;

(d) $A \Leftrightarrow B \;=\; (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$;

(e) $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A \;=\; A \vee \neg B$;

(f) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B \;=\; \neg A$;

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén tekintsük az alábbi kijelentéseket:

$A(n):$ n osztható 10-zel;

$B(n):$ n osztható 5-tel;

$C(n):$ n osztható 2-vel.

Fogalmazzuk meg különféle módokon a következő állításokat és vizsgáljuk meg, hogy igazak-e:

(a) $A \Longrightarrow B$;

(b) $A \iff B \vee C$.

(c) $A \iff B \wedge C$.

(d) $A \Longrightarrow C$.

Ellenőrizzük, hogy az első állítás megfordítása, azaz a $B \Longrightarrow A$ következtetés nem igaz!

Mi a helyzet a $C \Longrightarrow A$ következtetéssel?

3. Fogalmazzuk meg különféle módokon a megadott állításokat (*ha-akkor*, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

(a) Két valós szám egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a négyzetük is egyenlő legyen.

(b) Egy másodfokú egyenlet diszkriminánsának a pozitivitása elégséges ahhoz, hogy az egyenletnek legyen valós gyöke.

(c) Egy négyszög oldalainak egyenlősége szükséges ahhoz, hogy az illető négyszög négyzet legyen.

(d) Egy négyszög szögeinek egyenlősége elégséges ahhoz, hogy a szóban forgó négyszög deltoid legyen.

(e) Három szakasz hosszának az egyenlősége elégséges ahhoz, hogy ebből a három szakaszból, mint oldalakból háromszöget szerkeszthessünk.

(f) Ahhoz, hogy két valós szám összege hét legyen, elégséges, de nem szükséges, hogy az egyik szám öt, a másik pedig kettő legyen.

4. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

(a) egy valós szám négyzete pozitív legyen?

(b) az $ax^2 + bx + c$ másodfokú kifejezés minden x valós szám esetén pozitív (nem-negatív) (negatív) (nem-pozitív) legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok.

(c) az a, b befogójú és c átfogójú háromszög derékszögű legyen?

(d) valamely konvex négyszög érintőnégyszög legyen?

(e) adott szakasz egy térbeli pontból derékszög alatt látsszék?

(f) az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke legyen? Itt a, b, c rögzített valós számok és $a \neq 0$.

(g) az x valós számhoz legyen olyan y valós szám, hogy $y^2 = x$?

Fogalmazzuk meg különféle módokon a kapott állításokat (*ha-akkor*, $\Longrightarrow$, szükséges, elégséges, $\forall$ kvantorjel, stb.)!

5. Az ebben a feladatban szereplő nyitott kijelentések közös alaphalmaza $\mathbb{R}$. Írjuk a $\square$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

(a) $x = \sqrt{4} \quad \square \quad x = 2;$

(b) $x^2 = 4 \quad \square \quad x = 2;$

(c) $x^2 > 0 \quad \square \quad x > 0;$

(d) $x^2 < 9 \quad \square \quad x < 3;$

(e) $x(x^2 + 1) = 0 \quad \square \quad x = 0;$

(f) $x(x + 3) < 0 \quad \square \quad x > -3\,.$

6. Tekintsük az

$$\frac{n^2}{2n+1} > 100 \quad (n \in \mathbb{N})$$

nyitott kijelentést!

(a) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz!

(b) Adjuk meg a változó néhány olyan értékét, amelyre a kijelentés hamis!

(c) Adjuk meg a változó összes olyan értékét, amelyre a kijelentés igaz (az igazsághalmazt)!

(d) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(e) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Mi az így kapott állítás logikai értéke? Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

7. Tekintsük az

i) $\dfrac{1}{n+5} < 0,03 \quad (n \in \mathbb{N});$

ii) $\dfrac{n^2+5}{2n-1} > 213 \quad (n \in \mathbb{N});$

iii) $\dfrac{n^2}{2n+1} > 308 \quad (n \in \mathbb{N});$

iv) $\dfrac{73+10n-n^2}{2n+1} < -157 \quad (n \in \mathbb{N});$

kijelentéseket! Mindegyikük esetében oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) Képezzünk új kijelentést a $\forall$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(b) Képezzünk új kijelentést a $\exists$ kvantorral! Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

(c) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:

$$\forall n \geq N: \quad A(n) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

Milyen kijelentést kaptunk?

(d) Ha rendre $A(n)$ jelöli az i), ..., iv) pontban szereplő kijelentést, akkor képezzük az alábbi állítást:

$$\exists N \in \mathbb{N}^+ \; \forall n \geq N: \quad A(n).$$

Állapítsuk meg a kapott állítás logikai értékét! Írjuk fel a kapott állítás tagadását!

8. Írjuk fel kvantorokkal az alábbi állításokat. Adjuk meg az állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz-e!

(a) Van olyan n természetes szám, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(b) Minden n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(c) Van olyan természetes szám, hogy minden nála nagyobb n természetes szám esetén $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(d) Minden elég nagy természetes szám esetén igaz, hogy $\dfrac{n-2}{n^2-4n+2} < 0,07$.

(e) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{1}{2}n^3 - 25n^2 - 14n + 9 > 1000.$$

(f) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{n^3 + 4n^2 - 3n + 20}{3n^5 - 7n^4 + 4n^3 - 12n^2 - 12n + 5} < 0,01.$$

(g) Minden elég nagy n természetes szám esetén igaz, hogy

$$\frac{2n^5 - 25n^4 - 17n^3 + 4n^2 + 5n - 4}{18n^3 + 17n^2 - 16n + 15} > 185.$$

8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

8.1. Kiegészítés az elmélethez

Lásd a **7. fejezet** elméleti összefoglalóját.

8.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Adja meg a p, q állítások esetén a $p \vee q$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.

2. Adja meg a p, q állítások esetén a $q \Longrightarrow p$ állítás definícióját az igazságtábla segítségével.

3. Adja meg a p, q állítások esetén a $\neg p \vee q$ állítás igazságtábláját (lehetséges logikai értékeit). Az alapműveletek közül melyik állítással ekvivalens a most megadott $\neg p \vee q$ kijelentés?

4. Adottak az $f(x) := x^2 - 2x + 2 \ (x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) := a \ (x \in \mathbb{R})$ függvények, ahol a tetszölegesen rögzített valós paraméter. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(a)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\} = \emptyset \iff A(a)$;

   (b) $\exists\, !\, x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) \iff A(a)$;

   (c) Az $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ halmaz pontosan kételemű $\iff A(a)$.

5. Adott az alábbi nyitott kijelentés a természetes számok halmazán (azaz $n \in \mathbb{N}$):

$$A(n) : \quad \frac{n^4 + n + 1}{n^2 + 2} > 100.$$

   Igazak-e az allábbi állítások:

   (a) $A(0); A(1); A(2)$.

   (b) $\exists\, N \in \mathbb{N} : \ A(N)$ igaz.

   (c) $\exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in \mathbb{N}\, n \geq N : \ A(n)$ igaz.

6. Adja meg az alábbi állítás tagadását:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n \in N\, n \geq N : \frac{1+n}{1+n^2} < \varepsilon.$$

7. Igaz-e az alábbi állítás:

$$\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in (-\infty; y] : x - 5 < 21?$$

8. Adja meg az alábbi állítás tagadását és döntse el, hogy az állítás vagy a tagadása igaz:

$$\exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} : x \leq K.$$

9. Adjon meg szükséges és elégséges feltételt az $x, y \in \mathbb{R}$ számokra nézve úgy, hogy az $A(-1; 0), B(1; 0)$ és $C(x; y)$ pontok egy ABC szabályos háromszöget alkossanak.

10. Legyen $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter és tekintsük az $x^2 + y^2 = 1$ és az $y = x + a\ \ (x, y \in \mathbb{R})$ egyenletű görbéket. Adjunk meg szükséges és elégséges $A(a)$ feltételeket, az alábbi ekvivalenciák teljesüléséhez:

    (a) A fenti két görbének nincs közös pontja $\iff A(a)$;

    (b) A fenti két görbének pontosan egy közös pontja van $\iff A(a)$;

    (c) A fenti két görbének pontosan két közös pontja van $\iff A(a)$;

11. Írja le matematikai jelöléssekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

    (a) Az $x > 1$ egyenlőtlenség elégséges feltétele annak, hogy az x abszolút értéke $1-$nél nagyobb legyen. Igaz-e az állítás megfordítása?

    (b) Egy szám $5-$tel való oszthatósága szükséges feltétele annak, hogy $10-$zel is osztható legyen ez a szám. Igaz-e a megfordított állítás?

    (c) Ha egy valós szám nagyobb mint 2, akkor ezen szám négyzete legalább 4.

    (d) Ha egy valós szám nagyobb mint 2, akkor reciproka legfeljebb 2^{-1}. Igaz-e a megfordított állítás?

    (e) Vannak olyan x, y valós számok, melyekre $3x + 2y$ éppen -1.

    (f) Vannak olyan x, y valós számok, melyeknek a négyzetösszege kisebb mint 9.

    (g) Az $x^2 - y^2 = 0$ egyenlőség teljesülése szükséges feltétele annak, hogy az $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ pont rajta legyen $y = -x$ egyenletű egyenesen. Igaz-e a megfordítás?

12. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\Box$-be a $\Longrightarrow, \Longleftarrow, \iff$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\iff$ írható, oda csak azt írjuk):

    (a) $x^2 < 1 \quad \Box \quad x < 1;$

    (b) $x^3 - 4x = 0 \quad \Box \quad x = 2;$

    (c) $x(x - 2) < 0 \quad \Box \quad x < 2\ ;$

13. Igaz-e az alábbi állítás (itt x valós számot jelöl):

$$|x-1|<x \iff x>\frac{1}{2}.$$

14. Igaz-e az alábbi implikáció (x valós szám):

Ha $|x-2|<1 \implies \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$?

15. Tagadja le az alábbi állítást és döntse el, hogy az eredeti állítás igaz, vagy a tagadása:

$$\exists\, K>0\ \forall\, x\in(K;+\infty):\ \frac{x^3+2x^2+x+10}{x^2+x+1}>2018.$$

8.2. Feladatok

8.2.1. Órai feladatok

Kijelentések, kvantorok logikai állítások

1. Legyenek a, b, x, y tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) $a+b=0 \iff a^2+b^2=-2ab$?

(b) $a+b=1 \iff a^2+b^2=1-2ab$?

(c) $x=-1 \iff x^2+x=0$?

(d) $x=\sqrt{2} \iff x^2=2$?

(e) $x^2+y^2-2(x-y)=7 \iff$

$\iff$ (x,y) rajta van az $(1;-1)$ közepű 3 sugarú körvonalon ?

(f) $\exists\, a\in\mathbb{R} : e=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax\ \ (x\in\mathbb{R})\} \iff$ Az e síkbeli ponthalmaz egy origón átmenő egyenes ?

(g) Legyenek a és b nemnegatív valós számok. Ekkor:

$$a^2+b^2=0 \iff \sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\,?$$

(h) $x\geq 2 \iff |1-x|=x-1$?

(i) $|x-5|<2 \iff 3<x<7$?

(j) $y-x=|x| \iff y=x\cdot(1+\operatorname{sign}(x))$?

(k) $\exists\ \log_{x^2-1/4}(1-x^2)\in\mathbb{R} \iff \left[\frac{1}{|x|}\right]=1$,

(ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli)?

(l) $a = b \vee a = 3b \Longleftrightarrow a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3 = 0$?

(m) $x = 0 \vee x = \dfrac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \Longleftrightarrow 27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 8^x = 0$?

(n) $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \vee \operatorname{tg} x = 3 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 3\cos^3 x = 0 \ ?$$

(o) $a + b + c = 0 \Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3abc$?

Ha nem igaz valamelyik ekvivalencia, állapítsuk meg, hogy melyik "irány" helytálló.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem. Ha nem igazak, fogalmazzuk át a feltételeket/a kijelentést úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Válaszoljunk a feltüntetett további kérdésekre is.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x-12)^2 \geq 62$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 6$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x-5| + |x-12| \geq 11$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 5$.

(c) Tekintsük az $f(x) := x + |x| \ \ (x \in [-1; 1])$ függvényt. Ekkor:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : 0 \leq f(x) \leq 2$;

b) $f(x) = 2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 1$; illetve

c) f értéke akkor és csak akkor minimális, ha $x = 0$ vagy $x = -1$.

(d) Tekintsük az $a_n := \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ \ (n \in \mathbb{N})$ geometriai sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2} =$ állandó (a sorozat hányadosa, vagy kvóciense);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2 - 2^{-n}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \ 0 < a_n \leq 1$ (a sorozat korlátos);

e) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja.

f) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban.

g) A sorozat legkisebb értéke a 0.

h) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall n \in \mathbb{N}\ n > N$ indexre $a_n < \dfrac{1}{1000}$.

(e) Tekintsük az $a_n := 2 + 3n \ \ (n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = 3 =$ állandó (a sorozat különbsége, vagy differenciája);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{3n^2+7n+4}{2}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (a sorozat szigorúan monoton nő) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 2 \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, K \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le K$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_N > K$;

g) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja;

h) A 0 indexű tag a legkisebb elem a sorozatban;

i) A sorozat legkisebb értéke a 0;

j) $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ n > N$ indexre $a_n > K$.

(f) Tekintsük az $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatot. Ekkor:

a) $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le a_{n+1})$ vagy $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \ge a_{n+1})$ (azaz a sorozat monoton)

b) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

c) Ha $b_n := a_{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ b_n > b_{n+1}$;

d) Ha $c_n := a_{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ c_n < c_{n+1}$;

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_n \le a_m$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$;

g) $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_l \le a_n$;

h) $\exists\, K \in \mathbb{R}^+\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ |a_n| \le K$.

i) $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > m :\ |a_n - 0| < \dfrac{1}{1000}$.

j) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ n > m :\ |a_n - 0| < \varepsilon$.

(g) Tekintsük az $f_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + px + 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol p valós paraméter. Ekkor:

a) Az $f_p(x) = 0$ egyenletnek mindkét gyöke valós $\iff |p| \ge \sqrt{2}$.

b) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mennyi ez a p érték és ekkor mi az egyenlet gyöke?

c) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 2 legyen. Mennyi ez a p érték?

d) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 0 legyen. Mennyi ez a p érték?

e) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = 3$ a függvény minimumhelye legyen. Mennyi ez a p érték?

f) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = 3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték?

g) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény maximumhelye 3 legyen. Mennyi ez a p érték?

h) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege 2 legyen. Mennyi ez a p érték?

i) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke egész szám $\Longleftrightarrow\ p = \pm\dfrac{3}{2}$.

j) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény grafikonjának az $y = 3x \ \ (x \in \mathbb{R})$ egyenes érintője legyen. Mennyi a p értéke? Mely pontban érinti a megadott egyenes az f_p grafikonját?

k) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

l) $\exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $\forall\, p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

m) Az $(x_p; y_p) \in \mathbb{R}^2$ síkbeli pontok akkor és csak akkkor lesznek az $f_p \ \ (p \in \mathbb{R})$ parabolák "csúcspontjai" , ha az $(x_p; y_p) \ \ (p \in \mathbb{R})$ pontok befutják az

$$y = 1 - \frac{x^2}{2} \ \ (x \in \mathbb{R}) \text{ egyenletű parabolát.}$$

n) Rögzítsünk egy p valós paramétert. Ekkor

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} \text{ esetén } f_p(m) \in \mathbb{Z} \iff p + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

(h) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad (x \in (0; +\infty))$ függvényt. Ekkor:

$$\forall\, x, t \in [1; +\infty) : \ |f(x) - f(t)| \le \frac{1}{2} \cdot |x - t|.$$

Milyen felső becslés adható az $|f(x) - f(t)|$ eltérésre, ha $x, t \in [4; +\infty)$? Igaz-e, hogy:

$$\exists\, K > 0 \ \forall\, x, t \in (0; +\infty) : \ |f(x) - f(t)| \le K \cdot |x - t|?$$

3. Adott a következő függvény:

$$f(x) = |1 - |x|| \ \ (x \in [-3; 2)).$$

Vizsgáljuk meg a következő állítások igazságértékét:

(a) $\forall\, x \in D_f : f(x) \ge 0.$

(b) $\forall\, x \in D_f : f(x) \le 2.$

(c) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \le f(x)$.

(d) $\exists\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \le f(x)$.

(e) $\exists!\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(x) \le f(a)$.

(f) $\exists!\, b \in D_f$ úgy, hogy $f(b) = 1$.

(g) $\exists\, c \in D_f$ úgy, hogy $f(c) = 0$.

(h) $\exists!\, x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = x$.

(i) $\forall\, c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása.

(j) Az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása $\iff c \in [0;2]$.

(k) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 4 darab megoldása, ha $c \in (0;1)$.

(l) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 3 darab megoldása, ha $c = 1$.

(m) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 2 darab megoldása, ha $c = 0$.

(n) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 1 darab megoldása, ha $c \in (1;2]$.

4. Adottak az alábbi x valós számokra vonatkozó állítások:

(a) $A \,:\, x \ge 3$;

(b) $B \,:\, |x| = 4$;

(c) $C \,:\, x^2 = 16$;

(d) $D \,:\, \sqrt{x} = 2$;

(e) $E \,:\, x^2 - 4x = 0$;

(f) $F \,:\, 3 \cdot \ln x = \ln(16x)$.

a) Állítsunk fel logikai kapcsolatokat a fenti állítások között.

b) A fenti állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanarra az x valós számra vonatkozóan?

8.2.2. További feladatok

Kijelentések, kvantorok logikai állítások

1. Legyenek a, b, x, y tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) $\sqrt{a^2} = -a \iff a \le 0$?

(b) $2a + 1 = 0 \iff \sqrt{a^2} = a + 1$?

(c) $a < 0 \iff \sqrt{a^2+1} > a+1\,?$

(d) $a + b = 0 \iff a^3 + b^3 = 0\,?$

(e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = -9 \iff (x, y)$ rajta van az $(-2; 3)$ középű 2 sugarú körvonalon ?

(f) $|x| + |y| < 1 \iff (x, y)$ benne van az $(1; 0); (0; 1); (-1; 0); (0; -1)$ csúcspontú négyzetlap belsejében?

(g) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc\,?$

(h) $|x - 3| < 4 \iff$ ha az x valós szám a 3 számtól 4−nél kisebb távolságra van $\iff -1 < x < 7\,?$

(i) $|x - 4| > 3 \iff$ ha az x valós szám a 4 számtól 3−nál nagyobb távolságra van $\iff (x < 1) \vee (x > 7)\,?$

(j) $\neg(|x - 2| > 1) \iff x \in [1; 3]\,?$

(k) $x^2 + y^2 + x + y = 2\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \iff x^4 + y^4 = 0\,?$

(l) $[\sin x] - 1 \geq 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\,?$

(m) $[\sin x] = -1 \iff x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\,?$

(n) $xy(1 + 2y) = y^3 + 2x^2 \iff$ az $(x; y)$ pont rajta van az origón átmenő 2 meredekségű egyenesen, vagy az

$$f(x) = \sqrt{x} \ \ (x \geq 0)$$

függvény grafikonján?

(o) $\exists \ln \dfrac{x}{\sin x} \in \mathbb{R} \iff x \in \bigcup_{k=0}^{+\infty}(2k\pi; (2k+1)\pi) \bigcup \bigcup_{k=0}^{+\infty}(-(2k+1)\pi; -2k\pi)\,?$

Ha nem igaz valamelyik ekvivalencia, állapítsuk meg, hogy melyik "irány" helytálló és adjunk meg szükséges és elégséges feltételt/feltételeket a fenti jobb oldalak teljesüléséhez.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem. Ha nem igazak és lehetséges fogalmazzuk át a feltételeket/a kijelentést úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Válaszoljunk a feltüntetett további kérdésekre is.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 - (x + 5)^2 - (x - 2)^2 \leq -28$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = -2$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| \geq 4$ és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 2 \vee x = 3$.

(c) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1 + x}{1 - |x|}$ $(x \in (-1; 1))$ függvényt. Ekkor:

a) $\forall\, x \in (-1; 1) : 1 \leq f(x);$

b) $f(x) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$;

c) $\exists\, K > 0$ melyre $f(x) < K \quad (\forall\, x \in (-1; 1))$.

(d) Tekintsük az $a_n := \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ geometriai sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ állandó (a sorozat hányadosa, vagy kvóciense);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{5 \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n}{2 \cdot 5^n}$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 0 < a_n < 1$ (a sorozat korlátos);

e) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja.

f) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban.

g) A sorozat legkisebb értéke a 0.

h) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall n \in \mathbb{N}\; n > N$ indexre $a_n < \dfrac{1}{100}$.

(e) Tekintsük az $a_n := 3 - 2n \quad (n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatot. Ekkor:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n =$ állandó (a sorozat különbsége, vagy differenciája);

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n + 1) \cdot (3 - n)$;

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$ (a sorozat szigorúan monoton fogy) ;

d) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_N < K$;

g) A sorozatnak van legkisebb illetve legnagyobb tagja;

h) A 0 indexű tag a legnagyobb elem a sorozatban;

i) A sorozat legnagyobb értéke a 0;

j) $\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ n > N$ indexre $a_n < K$.

(f) Tekintsük az $a_n := (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$ sorozatot. Ekkor:

a) $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \le a_{n+1})$ vagy $(\forall\, n \in \mathbb{N} :\ a_n \ge a_{n+1})$ (azaz a sorozat monoton)

b) Ha $b_n := a_{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ b_n < b_{n+1}$; (a páros indexű tagokból képzett sorozat monoton növő)

c) Ha $c_n := a_{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor $\forall n \in \mathbb{N} :\ c_n > c_{n+1}$; (a páratlan indexű tagokból képzett sorozat monoton fogyó)

d) $\exists\, K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ K \le a_n$ (a sorozat alulról korlátos);

e) $\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq M$ (a sorozat felülről korlátos);

f) ($\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, k \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_k < K$) $\wedge$ ($\forall\, M \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy $a_m > M$);

g) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ index, melyre $a_n \leq a_m$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$;

h) $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_l \leq a_n$;

i) $\exists\, K \in \mathbb{R}^+\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq K$.

(g) Tekintsük az $f_p(x) = x^2 + (2-p)x - 2p$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol p valós paraméter. Ekkor:

a) Az $f_p(x) = 0$ egyenletnek mindkét gyöke valós $\iff p \in \mathbb{R}$.

b) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van. Mennyi ez a p érték és ekkor mi az egyenlet gyöke?

c) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke a 3 legyen. Mennyi ez a p érték?

d) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ f_p(x) \geq 0$ legyen.

e) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, x \in \mathbb{R}: \ f_p(x) < 0$.

f) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x = 3$ a függvény minimumhelye legyen. Mennyi ez a p érték?

g) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = 3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték?

h) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y = -3$ a függvény minimuma legyen. Mennyi ez a p érték? Hol veszi fel a minimumát az f?

i) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f_p(x) = 0$ egyenlet valós gyökeinek köbösszege -8 legyen. Mennyi ez a p érték?

j) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke egész szám $\iff p \in \mathbb{Z}$.

k) $\exists\, p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a függvény grafikonjának az $y = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes érintője legyen. Mennyi a p értéke? Mely pontban érinti a megadott egyenes az f_p grafikonját?

l) $\forall\, p \in \mathbb{R}\, \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

m) $\exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $\forall\, p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén az (a, b) pont rajta van az f_p parabola grafikonján.

n) Az $f_p(x) = 0$ egyenlet mindkét gyöke akkor és csak akkor negatív, ha $p < 0$.

3. Adott a következő függvény:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}} \ \ (x \in [0; 1]).$$

Vizsgáljuk meg a következő állítások igazságértékét:

(a) $\forall\, x \in D_f : f(x) \geq 0$.

(b) $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq 1$.

(c) $\exists !\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(a) \leq f(x)$.

(d) $\exists !\, a \in D_f$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f : f(x) \leq f(a)$.

(e) $\exists\, c \in D_f$ úgy, hogy $f(c) = 0$.

(f) $\exists\, x \in D_f$ úgy, hogy $f(x) = \sqrt{x}$.

(g) $\forall\, x, t \in [1/8; 1/4] :\ |f(x) - f(t)| \leq |x - t|$.

4. Adottak az alábbi x valós számokra vonatkozó állítások:

(a) $A\ :\ x \leq 0$;

(b) $B\ :\ \sqrt{x^2} = -x$;

(c) $C\ :\ \ln(-x) > 1$;

(d) $D\ :\ |x - 1| > 3$;

(e) $E\ :\ x^3 = 25x$;

(f) $F\ :\ \ln^2(\sin(\pi x)) + \left(x^3 + x^2 - \dfrac{3}{4}x\right)^2 = 0$.

a) Állítsunk fel logikai kapcsolatokat a fenti állítások között.

b) A fenti állítások közül hány lehet egyszerre igaz ugyanarra az x valós számra vonatkozóan?

9. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások III.

Cél: kvantoros kifejezések, következtetések, ekvivalenciák megértése, használata.

9.1. Kiegészítés az elmélethez

Lásd a **7. fejezet** elméleti összefoglalóját.

9.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Írja le matematikai jelölésekkel, kvantorokkal az alábbi állításokat, majd döntse el, hogy igazak-e:

   (a) A természetes számok halmazának van legnagyobb eleme.

   (b) A $(0;1]$ intervallumnak van legnagyobb eleme.

   (c) A $(0;1]$ intervallumnak van legkisebb eleme.

   (d) Nem minden természetes szám osztható $3-$mal.

   (e) Nincs (nem létezik) olyan valós szám melynek a négyzete -1 lenne.

   (f) Van olyan valós szám, amelyik nem racionális.

   (g) Bármely valós szám reciproka is valós szám.

   (h) Bármely pozitív természetes szám reciproka racionális szám.

2. Tekintsük az alábbi nyitott kijelentéseket a valós számok halmazán. Írjuk a $\Box$ -be a $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ szimbólumok valamelyikét úgy, hogy igaz állítást kapjunk (ahova $\Longleftrightarrow$ írható, oda csak azt írjuk):

   (a) $x^2 + x < 0 \quad \Box \quad x > -1$;

   (b) $x^2 + y^2 \leq 0 \quad \Box \quad (x = 0 \ \wedge \ y = 0)$;

   (c) $(x + y)^2 = (x - y)^2 \quad \Box \quad (x = 0 \ \vee \ y = 0)$;

3. Írja le kvantorok segítségével az alábbi állítást:

   Van olyan pozitív K szám, hogy minden nála nagyobb x pozitív valós szám esetén teljesül az, hogy $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ kisebb mint 100^{-1}.

   Igaz-e a kapott állítás?

4. Írja le kvantorok segítségével az alábbi állítást:

   Minden ε pozitív számhoz van olyan pozitív K szám, hogy minden nála nagyobb x pozitív valós szám esetén teljesül az, hogy $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ kisebb mint ε.

   Igaz-e a kapott állítás?

5. Fogalmazza meg kvantorokkal a matematika nyelvén az alábbi implikációt:

   Minden olyan x, t valós számra az $[1;2]$ intervallumból, melyek távolsága kevesebb mint $1/3$ a négyzetgyökeik eltérése kisebb mint $1/6$.

   Igaz-e a kapott állítás?

6. Fogalmazza meg kvantorokkal a matematika nyelvén az alábbi állítást:

   Majdnem minden n természets szám esetén

$$\frac{2^n}{3^n} < \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

   Igaz-e a kapott állítás?

7. Igaz-e az alábbi állítás, ha x valós számot jelöl:

$$\exists\, A \subseteq \mathbb{R} : \ (|x^2 - 4| = 1 \iff x \in A)\,?$$

8. Igaz-e az alábbi állítás, ha x valós számot jelöl:

$$\exists\, A \subseteq \mathbb{R} : \ ((|x-1| < 1/2 \ \wedge \ |x - 1/3| < 3/4|) \iff x \in A)\,?$$

9. Pozitív formában tagadja az alábbi állítást, majd döntse el, hogy melyik az igaz:

$$\forall\, A \subseteq \mathbb{R} \ \exists\, x \in A : \ |x-2| > 3\,.$$

10. Fogalmazza meg kvantorokkal a matematika nyelvén az alábbi állítást:

    Majdnem minden n természets szám esetén $\dfrac{3n+1}{n+2}$ eltérése $3-$tól kevesebb, mint $\dfrac{1}{10}$. Igaz-e a kapott állítás?

11. Helyes-e az alábbi levezetés (x valós számot jelöl):

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{1-x} > 1 \iff \sqrt{x-2} > 1 + \sqrt{1-x} \iff \sqrt{1-x} < x - 2 \iff$$

$$\iff x^2 - 3x + 3 > 0 \iff x \in \mathbb{R}\,?$$

12. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \frac{x^2+1}{x} \quad (x > 0).$$

Igaz-e, hogy:

$$\forall\, y \in [2;+\infty)\ \exists\, x \in (0;+\infty) : f(x) = y\,?$$

13. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \cos x \quad (x \in (-\pi/2;+\pi/2)).$$

Igaz-e a következő implikáció?

$$\text{Ha } x \in \mathbb{R} \text{ olyan, hogy } |2x| < 1 \implies f(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Írja fel a megfordított állítást is és vizsgálja meg annak igazságtartalmát.

14. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen irányú implikációk és ekvivalenciák igazak az alábbi állítások között:

(a)

$$A(x) : f(x) > 0;$$

(b)

$$B(x) : \exists\, k \in \mathbb{N}\ \ x \in (2k\pi; (2k+1)\cdot\pi;$$

(c)

$$C(x) : x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi; (2k+1)\cdot\pi).$$

15. Vizsgáljuk meg, hogy milyen irányú implikációk és ekvivalenciák igazak az alábbi állítások között:

(a)

$$A(x) : x \in \cap_{n=1}^{+\infty}(-1/n; 1/n);$$

(b)

$$B(x) : \forall\, k \in \mathbb{N}^+ :\ \ |k\cdot x| < 1;$$

(c)

$$C(x) : x = 0.$$

9.2. Feladatok

9.2.1. Órai feladatok

Egyenletek, egyenlőtlenségek levezetése

1. Helyesek-e az alábbi levezetések a valós számok halmazán tekintve a megfelelő átalakításokat:

(a) $\ln x^6 = 6 \Longleftrightarrow 6 \cdot \ln x = 6 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$?

(b) $\sqrt{2x^2-2} > x \quad (x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty))) \Longleftrightarrow 2x^2 - 2 > x^2 \Longleftrightarrow x^2 > 2 \Longleftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$?

(c)
$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad (4x-1)+(4-x)+3\cdot\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}\cdot(\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{4-x}) = -3 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (4x-1) + (4-x) + 3 \cdot \sqrt[3]{(4x-1)(4-x)} \cdot (-\sqrt[3]{3}) = -3 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x + 2 = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-4x^2 + 17x - 4} \Longleftrightarrow x^3 + 18x^2 - 39x + 20 = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \cdot (x+20) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = 1 \ \wedge \ x_3 = -20 \ ?$$

(d) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{y} - 3 = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{y} = 1 \vee \frac{x}{y} = -3\right) \quad \Longleftrightarrow$
$$\Longleftrightarrow (y = x \vee x = -3y) \ ?$$

(e) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x+y)^2 - 4y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-y) \cdot (x+3y) = 0 \Longleftrightarrow$
$$\Longleftrightarrow (y = x \vee x = -3y) \ ?$$

(f) Ha $x, y \in Z$ akkor:
$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 5 \Longleftrightarrow (x-y) \cdot (x+3y) = 5 \Longleftrightarrow (x; y) \in \{(2; 1); (-4; 1)\} \ ?$$

(g) Ha $x, y \in Z$ akkor:
$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 3 \Longleftrightarrow (x-y) \cdot (x+3y) = 3 \Longleftrightarrow (x; y) \in \emptyset \ ?$$

Implikációk, ekvivalenciák

2. Állapítsuk, meg, hogy az alábbi állítások közé milyen jel tehető a $\star$ szimbólum helyére a következő halmazból
$$\{\Longrightarrow; \Longleftarrow; \Longleftrightarrow\}$$
úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Ahol ekvivalencia érvényes, ott csak az $\Longleftrightarrow$ jelet tegyük ki. Ahol csak az "egyik irány igaz" ott cáfoljuk meg egy példával az állítás megfordítását. Az előforduló változók valós számokat jelölnek.

(a) $x^2 = 25 \ \star \ x = 5.$

(b) $x^2 = 25 \ \star \ x = -5.$

(c) $a^2 + b^2 = 0 \ \star \ ab = 0.$

(d) $a < b \ \star \ a^2 < b^2.$

(e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \ \star \ x = 1.$

(f) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0 \ \star \ x \in \{-1; 2\}.$

(g) $x^2 - 3x = 0 \ \star \ x = 3.$

(h) $\ln x < 1 - \sqrt{x} \ \star \ x \in (0; 1].$

(i) $|x| = x \ \star \ x \geq 0.$

(j) $\sin 2x = \operatorname{tg} x \ \star \ x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(k) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x}{1 - |x|} \quad (x \in (-1; 1))$ függvényt.

Ekkor : $f(x) = f(t) \ \star \ x = t.$

(l) Tekintsük az $f(x) := |x - 1| + |x + 2| \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

Ekkor : $f(x) = f(t) \ \star \ x = t.$

3. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt jelentő A (ekvivalens) kijelentést az alábbi állításokhoz:

(a) $\sqrt[4]{x} = x^4 \iff A(x).$

(b) $\sqrt[3]{x} = x^3 \iff A(x).$

(c) $\sqrt{1 - \cos x} = -2 \cdot \sin \dfrac{\pi}{4} \cdot \sin \dfrac{x}{2} \iff A(x).$

(d) $\sqrt{\cos x} > 1 - \sin^2 x \iff A(x).$

(e) $\cos x = x^2 - 4\pi \cdot x + 4\pi^2 + 1 \iff A(x).$

(f) $\dfrac{x \cdot 2018^{1/x} + \dfrac{1}{x} \cdot 2018^x}{2} = 2018 \iff A(x).$

(g) $\operatorname{tg}(x - y) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \iff A(x; y).$

(h) $x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y \iff A(x; y).$

(i) $|x| + |y| < 1 \iff A(x; y)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a kétdimenziós síkbeli koordináta rendszerben.

(j) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 2} < 3 \iff A(x; y; z)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a háromdimenziós térbeli koordináta rendszerben.

(k) $max\{a, b\} = \dfrac{|a - b| + a + b}{2} \iff A(a; b).$

(l) Tekintsük az $f(x) := ax - 2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol a valós paraméter. Ekkor:

$$(f(x) = f(t) \implies x = t) \iff A(a).$$

(m) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$ függvényt. Ekkor:

Az $f(x) = y$ egyenlet megoldható (x−re nézve) $\iff A(y)$.

(n) Tekintsük az $f(x) := x^2 - 4x$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt.

($\emptyset \neq D \subset D_f$ tovább nem bővíthető halmaz, melyre

$$\forall x \neq t \in D \Rightarrow f(x) \neq f(t)) \iff A(D).$$

9.2.2. További feladatok

Egyenletek levezetése

1. Helyesek-e az alábbi levezetések a valós számok halmazán tekintve a megfelelő átalakításokat:

(a) $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x} = 0 \iff \sin^2 x + x^2 = 0 \iff (\sin x = 0 \wedge x = 0) \iff x = 0$?

(b) $\sqrt{x-3} - \sqrt{2-x} > 0 \iff \sqrt{x-3} > \sqrt{2-x} \iff x - 3 > 2 - x \iff x > \dfrac{5}{2}$?

(c) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \iff \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{x}{y} + 2 = 0 \iff \left(\dfrac{x}{y} = 2 \vee \dfrac{x}{y} = 1\right) \iff$

$$\iff (y = x \vee x = 2y) \text{ ?}$$

(d) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \iff (x-y)^2 + y^2 - xy = 0 \iff$

$$\iff (x-y)^2 - y \cdot (x-y) = 0 \iff (x-y) \cdot (x-2y) = 0 \iff (y = x \vee x = 2y) \text{ ?}$$

(e) Ha $x, y \in Z$ akkor:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 2 \iff (x+y)^2 + y \cdot (x+y) = 2 \iff (x+y) \cdot (x+2y) = 2 \iff$$

$$\iff (x; y) \in \{(0; 1); (3; -1); (0; -1); (-3; 1)\} \text{ ?}$$

Implikációk, ekvivalenciák

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közé milyen jel tehető a $\star$ szimbólum helyére a következő halmazból

$$\{\Longrightarrow; \Longleftarrow; \Longleftrightarrow\}$$

úgy, hogy igaz állítást kapjunk. Ahol ekvivalencia érvényes, ott csak az $\iff$ jelet tegyük ki. Ahol csak az "egyik irány igaz" ott cáfoljuk meg egy példával az állítás megfordítását. Az előforduló változók valós számokat jelölnek.

(a) $x^3 = -8 \ \star \ x = \sqrt[3]{-8} = -2.$

(b) $x^4 = 4 \ \star \ x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$

(c) $\sqrt[4]{x^6} = -x \cdot \sqrt[4]{x^2} \ \star \ x < 0.$

(d) $\dfrac{a}{b} = 0 \ \star \ ab = 0.$

(e) $ab > 0 \ \star \ (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$

(f) $\dfrac{a}{b} \leq 0 \ \star \ ab \leq 0.$

(g) $\ln(ab) = \ln a + \ln b \ \star \ (ab > 0).$

(h) $\ln^2(ab) = \ln^2 a + \ln^2 b \ \star \ (a, b > 0 \wedge (a = 1 \vee b = 1)).$

(i) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \ \star \ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

(j) $\dfrac{1}{x+1} \leq e^x \ \star \ x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$

(k) $|x| = -x \ \star \ x \geq 0.$

(l) $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \ \star \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

(m) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $(x \in [0; 1))$ függvényt. Ekkor :

$$f(x) = f(t) \ \star \ x = t \ .$$

(n) Tekintsük az $f(x) := (x-3)^2 + |1-x|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt. Ekkor :

$$f(x) = f(t) \ \star \ x = t \ .$$

3. Adjunk meg szükséges és elégséges feltételt jelentő A (ekvivalens) kijelentést az alábbi állításokhoz:

(a) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = x^3 \iff A(x).$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt{x^2} \iff A(x).$

(c) $\sqrt{1 + \cos x} = \cos \dfrac{x}{2} \iff A(x).$

(d) $\sqrt{\sin x} = 1 - \cos^2 x \iff A(x).$

(e) $\sqrt{\sin x} > 1 - \cos^2 x \iff A(x).$

(f) $\sqrt{\cos x} < 1 - \sin^2 x \iff A(x).$

(g) $x^2 + \sin x + \pi \cdot x + \dfrac{\pi^2}{4} = -1 \iff A(x).$

(h) $\dfrac{e^x}{x} + x \cdot e^{-x} = 2 - (e^x - x)^2 \iff A(x).$

(i) $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \iff A(x;y)$.

(j) $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} < 2 \iff A(x;y)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a kétdimenziós síkbeli koordináta rendszerben.

(k) $|x-3|+|y-2| < 1 \iff A(x;y)$. Az ekvivalens feltételt fogalmazzuk meg a geometria "nyelvén" és a megengedett pontok halmazát szemléltessük a kétdimenziós síkbeli koordináta rendszerben.

(l) $min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2} \iff A(a;b)$.

(m) Tekintsük az $f(x) := x-1+ax \ (x \in \mathbb{R})$ függvényt, ahol a valós paraméter. Ekkor :

$$(f(x)=f(t) \implies x=t) \iff A(a).$$

(n) Tekintsük az $f(x) := \dfrac{3x+2}{x+1} \ (x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$ függvényt. Ekkor:

Az $f(x)=y$ egyenlet megoldható ($x-$re nézve) $\iff A(y)$.

(o) Tekintsük az $f(x) := 1-x^2 \ (x \in (-\infty;1]\ )$ függvényt.

($\emptyset \neq D \subset D_f$ tovább nem bővíthető halmaz, melyre

$$\forall x \neq t \in D \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(t)) \iff A(D)\ .$$

10. Teljes indukció

10.1. Kiegészítés az elmélethez

Teljes indukció:

Tétel: *(A teljes indukció elve)* Tegyük fel, hogy adottak az $A(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ természetes számokra vonatkozó állítások. Ha

1. $A(0)$ igaz és
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \; A(n+1)$ is igaz , akkor

$A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

Megjegyzések:

1. A fenti tételben az "$A(0)$ igaz" feltételt *kezdő lépésnek* nevezzük.
2. A "Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \; A(n+1)$ is igaz" feltételben $A(n)$ az úgynevezett *indukciós feltevés*, és az itteni implikáció az *indukciós lépés*, vagy az indukciós tulajdonság öröklődése.
3. Igen gyakrori a feladatokban, hogy az indukció kezdő lépése nem $0-$ról indul, hanem például 1 vagy $2-$ről, vagy egy a feladat által megadott $m \in \mathbb{N}$ értékről. Így is megfogalmazva az állítást:

   Tétel: *(A teljes indukció elve)* Tegyük fel, hogy adottak az $A(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ természetes számokra vonatkozó állítások és $m \in \mathbb{N}$ egy rögzített természetes szám. Ha

   (a) $A(m)$ igaz és
   (b) Minden $n \in \mathbb{N}, \; n \geq m$ természetes számra: $A(n)$ igaz $\Longrightarrow \; A(n+1)$ is igaz , akkor

   $A(n)$ igaz minden $m \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

4. Egy további kiterjesztés is lehetséges, amivel most nem fogunk dolgozni, nevezetesen a természetes számok halmaza kicserélhető a fenti állításban $\mathbb{Z}-$re, azaz az egész számok halmazára.

Binomiális együtthatók:

Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ és

$$0! := 1 \;, \qquad n! := \prod_{j=1}^{n} j \quad (1 \leq n) \;, \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \;.$$

A binomiális együtthatók nevezetes tulajdonságai:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

továbbá

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad (k = 1, \ldots, n)\ .$$

Példák:

Egyenlőségek igazolása

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $2 \le n$ természetes szám esetén igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Megoldás: Ellenőrizzük a kezdő lépést $n = 2-$re:

$$A(2): \quad 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} \iff \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $2 \le n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is:

$$A(n+1): \quad \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

A bizonyítandó fenti állításban a bal oldalból indulva írjuk be az indukciós feltevésben szereplő szorzat helyére a neki megfelelő "jobb oldalt", azaz:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \underline{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = A(n) \text{ (ind.felt.)} =$$

$$= \underline{\frac{n+1}{2n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n \cdot (n+2)}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{2n+2}\ \surd.$$

Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $2 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

Megjegyzés: A feladat megoldható indukció nélkül is az alábbi észrevétellel (teleszkópikus szorzat):

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\cdot(k+1)}{k^2}=$$
$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $1\le n$ természetes szám esetén igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n):\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

Megoldás: Ellenőrizzük a kezdő lépést $n=1$−re:

$$A(1):\quad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}\iff\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $1\le n\in\mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés). Belátjuk, hogy ez maga után vonja az $A(n+1)$ teljesülését is:

$$A(n+1):$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2\cdot(n+1)}=\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2\cdot(n+1)}\iff$$
$$\iff 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}.$$

A bizonyítandó fenti állításban a bal oldalból indulva írjuk be az indukciós feltevésben szereplő összeg helyére a neki megfelelő ”jobb oldalt”, azaz:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\text{ind.felt.}=$$
$$=\left(\underline{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\underline{\frac{1}{2n+2}}=$$
$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\quad\surd.$$

A teljes indukció elve alapján tehát $A(n)$ igaz minden $1\le n\in\mathbb{N}$ természetes szám esetén.

Megjegyzés: A fenti összefüggést *Catalan* egyenlőségnek nevezik.

Egyenlőtlenségek igazolása

1. Adjuk meg az összes $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, melyre igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad 2^n > n^2 + 4n + 5.$$

Megoldás: Ellenőrizve $n = 7-$re teljesül először, azaz:

$$A(7): \quad 2^7 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 \iff 128 > 82 \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy $A(n)$ igaz valamely tetszőlegesen rögzített $7 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad 2^n > n^2 + 4n + 5$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is, azaz:

$$A(n+1): \quad 2^{n+1} > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5.$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalából indulva, az indukciós feltevést is használva becsüljünk az alábbiak szerint:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (\text{ind.felt.}) > 2 \cdot (n^2 + 4n + 5) = 2n^2 + 8n + 10.$$

Összevetve a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt belátnunk, hogy:

$$2n^2 + 8n + 10 > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5.$$

Ez utóbbit tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$2n^2 + 8n + 10 > n^2 + 6n + 10 \iff n^2 + 2n > 0,$$

ami bőven teljesül, ha $n \geq 7$. Ezt összevetve a korábbiakkal, az alábbi becsléslánc adódik:

$$2^{n+1} > 2n^2 + 8n + 10 > (n+1)^2 + 4 \cdot (n+1) + 5 \implies A(n+1) \ \surd.$$

Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $7 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra:

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{5n-2}{2n}.$$

Megoldás: Nézzük az induló lépést $n = 1-$re:

$$A(1): \quad \frac{1}{1!} \leq \frac{3}{2} \iff 1 \leq \frac{3}{2} \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy $A(n)$ igaz valamely tetszőlegesen rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz:

$$A(n): \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!} \leq \frac{5n-2}{2n}.$$

Ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $A(n+1)$ is, azaz:

$$A(n+1): \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}.$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalából indulva, az indukciós feltevést is használva becsüljünk az alábbiak szerint:

$$\underline{\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdot + \frac{1}{n!}\right)} + \frac{1}{(n+1)!} \leq (\text{ind.felt.}) \leq \underline{\frac{5n-2}{2n}} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Összevetve ezt a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt belátnunk, hogy:

$$\frac{5n-2}{2n} + \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2}.$$

Ez utóbbit ekvivalens módon tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{5n+3}{2n+2} - \frac{5n-2}{2n} = \frac{4}{4n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \iff$$

$$\iff n \cdot (n+1) \leq (n+1)! \iff 1 \leq (n-1)!,$$

ami nyilván teljesül, ha $n \geq 1$. Beláttuk tehát, hogy valahányszor igaz az $A(n)$, akkor igaz $A(n+1)$ is. Ezzel együtt a teljes indukció elve alapján $A(n)$ igaz minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0; +\infty)$ pozitív valós számok esetén, melyekre:

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$$

igaz az alábbi $A(n)$ állítás:

$$A(n): \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

Megoldás: Bizonyítsuk az állítást a megadott pozitív számok számára (n-re) vonatkozó indukcióval. Ellenőrizzük a kezdő lépést $n = 1-$re, tehát tekintsünk egyetlen $x_1 > 0$ pozitív valós számot, melyre igaz az, hogy $x_1 = 1$. Ekkor a bizonyítandó állítás az alábbi:

$$A(1): \quad x_1 \geq 1 \iff 1 \geq 1. \ \surd.$$

Tegyük fel, hogy igaz $A(n)$ valamely tetszőlegesen rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltevés), azaz bárhogyan is választunk n darab pozitív valós számot, melyeknek a szorzata 1 igaz lesz, hogy az összegük legalább n. Belátjuk, hogy ez maga után vonja az $A(n+1)$ teljesülését is, vagyis azt, hogy, ha az

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} > 0$$

számok szorzata 1, akkor:

$$A(n+1): \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \geq n+1.$$

Két eset lehetséges. Az egyik esetben mind az $n+1$ darab szám egyenlő 1−el. Ekkor készen vagyunk az $A(n+1)$ állítással is, hiszen ez azt jelenti ebben az esetben, hogy

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ darab}} = n+1 \geq n+1,$$

ami nyilván igaz.

A második eset az, amikor nem mindegyik szám 1. Ekkor lesz köztük legalább egy olyan szám amelyik kisebb mint 1. Legyen ez x_n. Ekkor azonban kell olyan számnak is lennie, amelyik nagyobb mint egy (ha ilyen nem lenne a többiek közt, akkor a szorzatuk − itt használjuk, hogy pozitívak a számaink− kisebb lenne mint 1, ami nem lehet) . Legyen tehát ez az 1−nél nagyobb szám például az x_{n+1}. Tehát adottak most az

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} > 0$$

számok úgy, hogy

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \ \wedge \ x_n < 1 \ \wedge \ x_{n+1} > 1.$$

Alkalmazzuk most az indukciós feltevést az alábbi n darab pozitív számra, melyeknek a szorzata nyilván 1:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}.$$

Ezekre tehát igaz az $A(n)$, azaz:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n.$$

Induljunk ki a bizonyítandó $A(n+1)$ állítás bal oldalából és a fenti egyenlőtlenségből becsüljük az első $n-1$ tag összegét az alábbiaknak megfelelően:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n+1} = \underline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})}+x_n+x_{n+1} \geq \underline{n - x_n \cdot x_{n+1}}+x_n+x_{n+1}.$$

Ezt összevetve a bizonyítandó állítással *elég* már csak azt igazolnunk, hogy:

$$n - x_n \cdot x_{n+1} + x_n + x_{n+1} \geq n+1.$$

Ez utóbbi pedig ekvivalens tovább az alábiakkal:

$$-x_n \cdot (x_{n+1} - 1) + x_{n+1} - 1 \geq 0 \iff (1 - x_n) \cdot (x_{n+1} - 1) \geq 0.$$

A korábban x_n és x_{n+1}−re tett feltételeket figyelembe véve:

$$1 - x_n > 0 \ \wedge \ x_{n+1} - 1 > 0,$$

tehát a szorzatuk pozitív, így nemnegatív is egyben. Ezzel beláttuk az $A(n+1)$ állítást. A teljes indukció elve alapján tehát $A(n)$ igaz minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám és mondott tulajdonságú pozitív valós számok esetén.

Megjegyzés: a bizonyításból az is könnyen kiderül, hogy egyenlőség pontosan akkor áll elő, ha mindegyik szám 1. Formálisan tehát, ha $x_1, x_2 \cdots x_n > 0$ számok szorzata 1, akkor:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1.$$

Alkalmazás: Legyen $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0; +\infty)$ tetszőlegesen rögzített pozitív valós számok. Alkalmazzuk a most bizonyított állítást az alábbi n darab pozitív számra, melyeknek a szorzata nyilván 1:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}; \cdots; \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}.$$

Ekkor a **2.** feladat alapján azt állíthatjuk, hogy:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} \ge n$$

továbbá, itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{x_3}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \cdots = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = 1 \iff$$

$$\iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Az itt kapott állításokat kicsit átrendezve és összefoglalva: tetszőleges $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám és

$$x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$$

pozitív valós számok esetén:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Könnyű meggondolni ha a fenti számokat a *nemnegatív* számkörből választjuk és ha valamelyik szám (akár mindegyik) esetleg 0, akkor is fennáll a fenti egyenlőtlenség és az egyenlőségre tett ekvivalencia, tehát igaz az alábbi tétel:

Tétel: (Számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség)

Tetszőleges $1 \le n \in \mathbb{N}$ természetes szám és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0; +\infty)$ nemnegatív valós számok esetén:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

10.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét.
2. Definiálja az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatót.
3. Számítsa ki $\binom{5}{2}$ pontos értékét.
4. Számítsa ki $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ pontos értékét.
5. Határozza meg $\binom{n+2}{n}$−et .
6. Mennyi lesz $\binom{2018}{1111}\Big/\binom{2018}{907}$?
7. Mennyi lesz $\binom{100}{2}+\binom{100}{3}+\binom{101}{4}+\binom{102}{5}$?
8. Mennyi lesz $\binom{1}{0}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\dots\cdot\binom{2018}{2017}$?
9. Hogyan szól a számtani−mértani közepek közti egyenlőtlenség?
10. Fejtsük ki az $(a-2b)^3 \quad (a,b\in\mathbb{R})$ hatványt.
11. Számítsuk ki a $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^3$ hatványozást.
12. Végezze el a következő binomiális kifejtést $(a+b)^5 \quad (a,b\in\mathbb{R})$, kiszámolva az együtthatókat is.

10.2. Feladatok

E szakasz feladatait teljes indukcióval oldjuk meg. Megjegyezzük, hogy köztük több feladat is van, ami teljes indukció nélkül is megoldható, sőt olyan is, melynek az indukció nélküli megoldása még egyszerűbb is. Adott esetben bemutatjuk az indukciótól eltérő megoldást is, ha annak tanulsága fontos lehet a későbbiekben.

10.2.1. Órai feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ $(1 \le n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

2. (**Binomiális tétel.**)

(a) Bizonyítsuk be a binomiális tételt: Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \, .$$

(b) A binomiális tétel alkalmas szereposztásával lássuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \; ; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}^+) \, .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $q \in \mathbb{R}$, $q \ne 1$, akkor

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(a mértani sorozat első n tagjának összege)!

$\boxed{\textit{Egyenlőtlenségek igazolása}}$

4. Igazoljuk, hogy

(a) $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n} - 1$ $(n \in \mathbb{N}^+)$;

(b) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$ $(n \in \mathbb{N}^+)$;

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$;

(d) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots \dfrac{1}{3n+1} > 1$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$;

(e) $|\sin(nx)| \le n \cdot |\sin x|$ $(\forall x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$.

5. (**Bernoulli–egyenlőtlenség.**) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$, akkor
$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$
Következmény: Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $h := \frac{1}{n}$ szereposztással kapjuk, hogy
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

6. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli–egyenlőtlenség $-2 \leq h < -1$ valós számokra is igaz!

Megjegyzés: Itt nem működik a klasszikus indukciós bizonyítási módszer.

Sorozatok

7. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{2}$ és $a_{n+1} := \sqrt{2 \cdot a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ :\ a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < 2$.

Adjunk explicit formulát a sorozat n indexű tagjának kiszámolására, majd bizonyítsuk teljes indukcióval **is** a formula helyességét! Az explicit formulát használva igazoljuk a (b) állítást.

8. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{2}$ és $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ :\ a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < 2$;

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

"Vezessük le" a fenti explicit formulát felhasználva, hogy $2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ és, hogy $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$.

Igazoljuk a (c) $\Longrightarrow$ (b) implikációt.

9. Tekintsük az $a_1 := \frac{1}{2}$; $a_2 := \frac{1}{3}$ és $a_{n+2} := \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot.

Bizonyítsuk be, hogy:
$$a_n = \frac{1}{1 + 2^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Egyéb típusok

10. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az alábbi szám osztható 23−mal:
$$2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}.$$

11. Tegyük fel, hogy az $A_2, A_3, \dots, A_n$ független eseményekre
$$P(A_k) = \frac{1}{2k^2} \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$
Mennyi annak a valószínűsége, hogy $A_2, A_3, \dots, A_n$ közül páratlan sok következik be?

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén, ha $x = (2 + \sqrt{3})^n$, akkor $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{12}$ teljes négyzet.

13. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:
$$a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

10.2.2. További feladatok

Egyenlőségek igazolása

1. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén igazak:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1;$

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = n + 1;$

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)2k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$;

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2} \cdot \cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ $(1 \le n \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

2. Lássuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + 2^{2^k}) = 2^{2^{n+1}} - 1\ .$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá a_1, $d \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}\,[\,2a_1 + (n-1)d\,]$$

(a számtani sorozat első n tagjának összege)!

Egyenlőtlenségek igazolása

4. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $2^n > n^2 \quad (4 < n \in \mathbb{N});$

(b) $3^n > n^3 \quad (4 \le n \in \mathbb{N});$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{2n-1}{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N});$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{1}{2} \quad (2 \le n \in \mathbb{N});$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{13}{24} \quad (2 \le n \in \mathbb{N});$

(f) $\dfrac{n}{2} < \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} < n \quad (2 \le n \in \mathbb{N});$

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N});$

(h) $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)! > ((n+1)!)^n \quad (2 \le n \in \mathbb{N});$

(i) $2^n > 1 + n \cdot \sqrt{2^{n-1}} \quad (2 \le n \in \mathbb{N}).$

5. (**Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség**). Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_n \in [-1, +\infty)$, továbbá az $x_1, \ldots, x_n$ számok azonos előjelűek, akkor

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \, .$$

6. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N})$;

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \qquad (3 \leq n \in \mathbb{N})$.

Sorozatok

7. Tekintsük az $a_1 := \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ és $a_{n+1} := \sqrt{\dfrac{1}{2} \cdot a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \; a_n > a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \dfrac{1}{2} < a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Adjunk explicit formulát a sorozat n indexű tagjának kiszámolására, majd bizonyítsuk teljes indukcióval **is** a formula helyességét!

8. Tekintsük az $a_1 := \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $a_{n+1} := \sqrt{\dfrac{1}{2} + a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ rekurzióval definiált sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \; a_n < a_{n+1}$;

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : a_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$;

9. Legyen az (a_n) sorozat első három eleme $a_0 = a_1 = a_2 = 1$. A sorozat további elemeit az alábbi szabály segítségével képezzük:

$$a_n \cdot a_{n+3} - a_{n+1} \cdot a_{n+2} = n! \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Adjuk meg a sorozat a_n elemét n függvényében.

Egyéb típusok

10. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az alábbi szám osztható 9−cel

$$4^n + 15n - 1.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy ha α olyan valós szám, melyre $\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{3}$, akkor α irracionális.

11. Komplex számok

11.1. Az elméleti anyag

11.1.1. A komplex szám fogalma

A másodfokú egyenletek megoldásánál találkoztunk azzal a problémával, hogy ha a diszkrimináns negatív, akkor a gyök alatt negatív szám áll és így nincs valós megoldása a kérdéses egyenletnek. Például az

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenlet ilyen. Tehát a valós számok körében nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, melynek a négyzete -1 lenne. Vajon ez akkor is igaz marad, ha valamilyen más számhalmazra térnénk át a valós számok helyett? Az eddigi középiskolai ismereteink szerint a valós számok kimerítették a legbővebb számhalmazt. Egy merész gondolattal vezessük be az úgynevezett imaginárius egységet: egy i-vel jelölt objektumot, melyről tételezzük fel, hogy éppen azt tudja, amit a fent említett x valós számok nem teljesítettek, nevezetesen, hogy:

$$i^2 = -1.$$

Ezzel az imaginárius egységgel tudunk definiálni új típusú számokat, úgynevezett komplex számokat az alábbiak szerint:

Definíció: Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok és i a fent bevezetett imaginárius egység, tehát $i^2 = -1$. Ekkor a

$$z := x + i \cdot y$$

alakú kifejezéseket *komplex (összetett) számoknak* fogjuk nevezni. A komplex számokra gyakran használjuk a $z, w, \varepsilon, ...$ vagy az indexelt $z_1, z_2, w_1, ...$ jelöléseket.

Például:

$$z = 1 + 2 \cdot i; \;\; w = -3 - \sqrt{2} \cdot i; \;\; \varepsilon = \frac{2}{3} - i;$$

$$z_1 = 2 + 0 \cdot i = 2; \;\; z_2 = 0 - 6 \cdot i = -6 \cdot i; \ldots$$

Ha például

$$z = x + i \cdot y$$

egy komplex szám, akkor azt mondjuk, hogy x a z *valós része* és y a z *képzetes része.* Jelölésben

$$z = x + i \cdot y \Longleftrightarrow x = \mathrm{Re}(z) \;\; \wedge \;\; y = \mathrm{Im}(z).$$

A fenti példákban

$$\mathrm{Re}(1 + 2 \cdot i) = 1 \;\; \wedge \;\; \mathrm{Im}(1 + 2 \cdot i) = 2;$$

$$\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(-3 - \sqrt{2} \cdot i) = -3 \;\; \wedge \;\; \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(-3 - \sqrt{2} \cdot i) = -\sqrt{2};$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{3} - i\right) = \frac{2}{3} \ \wedge\ \mathrm{Im}(\varepsilon) = \mathrm{Im}\left(\frac{2}{3} - i\right) = -1;$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(2 + 0 \cdot i) = 2 \ \wedge\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(2 + 0 \cdot i) = 0;$$

Látható, hogy itt a képzetes rész 0, ilyenkor $z = x + 0 \cdot i = x \quad (x \in \mathbb{R})$ valós szám. Ennek megfelelően tehát a valós számok is speciális komplex számoknak tekinthetőek, nevezetesen a képzetes részük 0.

$$\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(0 - 6 \cdot i) = 0 \ \wedge\ \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(0 - 6 \cdot i) = -6.$$

Ebben az esetben a valós rész 0. Az ilyen komplex számokat, tehát amelyek

$$z = 0 + y \cdot i = yi \quad (y \in \mathbb{R})$$

alakúak, tiszta vagy tisztán *képzetes számoknak* nevezzük. Jelölje $\mathbb{C}$ a fent bevezetett komplex számok halmazát, vagyis:

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y \ \big|\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A komplex számok precíz bevezetésére és a $\mathbb{C}$ számhalmaz mélyebb vizsgálatára a későbbi tanulmányaikban fognak kitérni. Jelenlegi célunk mindössze annyi, hogy a komplex számokat bevezessük, néhány fontos tulajdonságukat megmutassuk, illetve a velük végzett algebrai számolásokat begyakoroljuk. A fenti észrevételt formálisan is megfogalmazva, a valós számok egyben komplex számok is, tehát:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

de $\mathbb{C}$ bővebb halmaz mint az $\mathbb{R}$, ugyanis például $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Két komplex számot pontosan akkor tekintünk egyenlőnek, ha valós és képzetes részeik rendre megegyeznek, tehát ha $z = x + iy$ és $w = a + ib \quad (x, y, a, b \in \mathbb{R})$ komplex számok, akkor:

$$z = w \iff x + iy = a + ib \iff (x = a \ \wedge\ y = b).$$

Ez lehetővé tesz számunkra egy egyértelmű megfeleltetést a $z = x + iy$ komplex számok és az ennek megfelelő $(x; y)$ rendezett párok között. Ez utóbbi pontok (síkbeli vektorok) már ismertek a koordináta geometria köréből és szemléletes tartalmuk átvihető a komplex számok szemléltetéséhez és a Gauss-féle komplex számsík modellezéséhez.

11.1.2. Komplex számok szemléltetése a Gauss-féle számsíkon

Tekintsünk egy $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex számot. Ekkor a valós és a képzetes részek $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok. Ábrázoljuk ezeket egy Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer vízszintes és függőleges tengelyein (mint valós számegyeneseken). A vízszintes tengelyen jelöljük a valós részt és a függőleges tengelyen a képzetes részt. Mivel egy $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ rendezett számpárhoz egyértelműen hozzárendelhető egy és csakis egy komplex szám (nevezetesen $z = x + iy$), illetve egy és csakis egy pont a Descartes-féle koordináta síkunkon, ezért feleltessük meg ennek egy (x, y) pontját a Gauss-sík $z = x + iy$ komplex pontjának.

A vektorok hosszának mintájára vezessük be a komplex szám hosszát (modulusát, abszolút értékét) és a komplex szám konjugáltját (a valós tengelyre vett tükörképét):

Definíció: Legyen $z = x + iy \ \ (x, y \in \mathbb{R})$ tetszőleges komplex szám. Ekkor a hossza, vagy abszolút értéke (modulusa) a

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0; +\infty)$$

nemnegatív valós szám, illetve a konjugáltja a

$$\overline{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

komplex szám.

Például:

$$|7 - 4i| = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}; \ \ |-1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \ \ |i| = \sqrt{1} = 1;$$

$$\overline{1 - 2i} = 1 + 2i; \ \ \overline{-1 + 2i} = -1 - 2i; \ \ \overline{-5i} = 5i;$$

Megjegyzés: A bevezetésben felvetett analógia a vektorok és a komplex számok között, illetve a megfelelő szemléltetés lehetőséget ad a komplex számok további átírására egy másik alakra, amit *trigonometrikus alaknak* nevezünk, de jelen tárgy keretei között erre nem fogunk kitérni. Itt és most a komplex számokat csupán a bevezetett, úgynevezett *algebrai alakjukban* fogjuk használni.

11.1.3. Műveletek algebrai alakú komplex számokkal

Definíció: Vezessük be a négy alapműveletet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás). Legyenek ehhez $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2 \ \ (x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ komplex számok. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i;$$

$$z_1 - z_2 := (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) := (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i;$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i;$$

$$z_1/z_2 := \frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} := \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i;$$

A műveletek eredményét : az új komplex számot (összeg, különbség, szorzat, hányados) algebrai alakban tüntettük fel (leolvasható a valós és a képzetes részük). Vajon hogyan jött ki ez a definíció?

Például: Legyenek $z_1 := 2 + 3i$ és $z_2 := -1 + 5i$. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 + 5i) = 1 + 8i; \ \wedge \ z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (-1 + 5i) = 2 + 3i + 1 - 5i = 3 - 2i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (-1 + 5i) = -2 + 10i - 3i + 15i^2 = -2 + 7i - 15 = -17 + 7i;$$

$$z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{-1+5i} = \frac{(2+3i)\cdot(-1-5i)}{(-1+5i)\cdot(-1-5i)} = \frac{13-13i}{1-25i^2} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i;$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i;$$

$$3z_1 := 3\cdot z_1 = 3\cdot(2+3i) = 6+9i;$$

$$iz_1 := i\cdot z_1 = i\cdot(2+3i) = 2i+3i^2 = -3+2i;$$

$$z_1^2 = (2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = -5+12i;$$

$$2z_1 = 2\cdot(2+3i) = 4+6i;$$

$$\frac{1}{z_1+2z_2} = \frac{1}{(2+3i)+2\cdot(-1+5i)} = \frac{1}{13i} = \frac{i}{13i^2} = -\frac{1}{13}\cdot i;$$

Megjegyzés: Megfigyelhető, hogy a komplex számok összeadása és kivonása, illetve a valós skalárral (számmal) való szorzása megfeleltethető a vektoroknál tanult hasonló műveleteknek. Más a helyzet a szorzással. A vektoroknál tanult skaláris és vektoriális szorzás nincs kapcsolatban a megfelelő komplex számok szorzásával. Osztásról a vektorok esetében nem is beszélhetünk.

Egy érdekes összefüggés vezethető le a komplex szám, annak hossza és konjugáltja között, ami sokszor használható a számolások során is. Legyen ehhez $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ a szokásos jelölésű komplex számunk. Ekkor:

$$z\cdot\overline{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - y^2\cdot i^2 = x^2+y^2 = |z|^2 \ \ (z\in\mathbb{C}),$$

tehát bármely z komplex szám esetén:

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2 \ \ (z\in\mathbb{C}),$$

vagy

$$|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} \ \ (z\in\mathbb{C}).$$

Speciálisan, ha $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$ valós szám, akkor a fenti azonosság az alábbi ismerős alakot ölti:

$$|z| = |x| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{x^2},$$

azaz

$$\sqrt{x^2} = |x| \ \ (x\in\mathbb{R}).$$

Kérdés: Mit jelent geometriailag az alábbi nemnegatív szám, ha z_1 és z_2 két tetszőlegesen rögzített komplex szám:

$$|z_1 - z_2|\,?$$

11.1.4. Valós együtthatós polinomok és komplex gyökök

Végül egy utolsó pontban térjünk vissza a kiindulásként felvetett problémához, nevezetesen például olyan valós együtthatós másodfokú egyenletekhez és megoldásaikhoz, ahol a diszkrimináns negatív. Például oldjuk meg az

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

másodfokú egyenletet. Alkalmazva a tanult megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

Ahogy annak idején megállapítottuk a gyök alatt nem állhat negatív szám (ezért nincs valós megoldás) és mit értsünk akkor a $\sqrt{-3}$ szám alatt?

Most, hogy bevezettük az i imaginárius egységet, melyre $i^2 = -1$ alakítsuk az alábbi módon a fenti egyenletet (teljes négyzet alak):

$$(x+1)^2+3 = 0 \iff (x+1)^2 = -3 \iff (x+1)^2 = 3\cdot i^2 \iff (x+1)^2-(\sqrt{3}\cdot i)^2 = 0 \iff$$

$$\iff (x + 1 - \sqrt{3} \cdot i) \cdot (x + 1 + \sqrt{3} \cdot i) = 0.$$

Innen már leolvasható a két gyök:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i.$$

Látható, hogy ilyenkor a két megoldás egymásnak komplex konjugáltja. Összevetve a kapott megoldásokat a megoldóképletben kapott eredménnyel egy kérdés marad: mit értsünk a $\sqrt{-3}$ szám alatt? Ez itt a komplex gyökvonás fogalmát igényli, amit a későbbi tanulmányok során fognak tanulni. Jelenleg egyezzünk meg abban, hogy

$$\sqrt{-1} = i$$

és, hogy

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i.$$

Ezzel az "egyezménnyel" kikerülhető a szorzattá alakításos levezetés és használhatjuk az ismert megoldóképletet.

Megjegyzések:

1. A komplex gyökvonás bevezetésével látni fogjuk, hogy például -1–nek a négyzetgyöke két érték lehet, nevezetesen: $\pm i$, hiszen mindkettőre igaz, hogy

   $$(\pm i)^2 = i^2 = -1.$$

   Egyezzünk meg jelenleg abban, hogy $\sqrt{-1} = i$.

2. A $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ egyenlőség általában nem igaz a komplex számok körében, azaz ha $z, w \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számok, akkor általában **nem igaz**, hogy

$$\sqrt{z \cdot w} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}.$$

A minket érintő mostani témakörben előforduló $x > 0$ valós esetekben igazolható az alábbi egyenlőség:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1}.$$

Az általános esethez, legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ rögzített valós számok és tekintsük az ezekkel képzett másodfokú egyenletet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (x \in \mathbb{C}),$$

ahol tehát x most a komplex számok köréből vehet fel értékekeket és tegyük fel, hogy a diszkrimináns negatív, tehát:

$$b^2 - 4ac < 0.$$

A korábban megismert megoldóképlet teljesen analóg módon vezethető le és a fenti egyezménnyel az alábbi (konjugált) komplex gyököket kapjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot \sqrt{-1}}{2a} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Megjegyzés:

1. Jegyezzük meg, hogy a magasabb fokú valós együtthatós polinomok első vagy a valós számhalmazon tovább nem bontható másodfokú tényezők szorzatára bonthatóak (hogyan?) és ha ez megvan innen már könnyű a valós és a komplex gyökök megadása.

   Például oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0.$$

   Megoldás: Vegyük észre (nem mindig egyszerű), hogy:

$$x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0 \iff x^4 - 9x^2 - x^3 + 9x + x^2 - 9 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 \cdot (x^2 - 9) - x \cdot (x^2 - 9) + (x^2 - 9) = 0 \iff (x^2 - 9) \cdot (x^2 - x + 1) = 0 \iff$$

$$\iff x^2 = 9 \ \vee \ x^2 - x + 1 = 0.$$

   Tehát a keresett megoldások az alábbiak:

$$x_{1,2} = \pm 3; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

11.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mikor igaz, hogy $z = w$, ha $z, w \in C$ komplex számok?
2. Definiálja a $\mathbb{C}$ *komplex számhalmazt.*
3. Definiálja egy z komplex szám *konjugáltját.*
4. Adja meg az $\dfrac{2i-1}{5+3i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
5. Ha $z = x + iy \in C$ komplex szám $(x, y \in \mathbb{R})$, akkor adja meg a z^2 komplex szám valós és képzetes részét.
6. Adottak a $z_1 \neq 0$ és $z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számok. Adja meg a $\dfrac{z_2}{z_1}$ komplex szám valós és képzetes részét.
7. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} : \ \ |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \,?$$
8. Milyen z komplex számokra igaz, hogy
$$z^2 + \overline{z}^2 = 0\,?$$
9. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$\mathrm{Re}(\,z - 1 + i) = 2\,?$$
10. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$-1 < \mathrm{Re}\, z \leq 3\,?$$
11. Határozza meg a $z = (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt[4]{3})^2$ komplex szám modulusát.
12. Melyek azok a z komplex számok (és ábrázoljuk őket), amelyekre z^3 valós szám?
13. Mennyi $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$?
14. Mennyi lesz $1 + \dfrac{1+i}{1-i} \cdot i$?
15. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^3 - 1 = 0.$$

11.1.6. További kérdések az elmélethez

1. Számítsa ki a $(2-i)^3$ komplex számot.
2. Adja meg a $\dfrac{2}{3-i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
3. Adja meg a $\dfrac{3-i}{i}$ komplex szám valós és képzetes részét.
4. Adja meg a $\dfrac{1}{z}$ komplex szám valós és képzetes részét, ha $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
5. Adja meg az $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$ komplex szám valós és képzetes részét.
6. Definiálja egy z komplex szám *abszolút értékét.*
7. Igaz-e minden z komplex számra, hogy $|z^2| = |z|^2$?
8. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} : \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}\,?$$
9. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0 : \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\,?$$
10. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0 : \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\,?$$
11. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} : \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}\,?$$
12. Igaz-e, hogy
$$\forall\, z, w \in \mathbb{C} : \quad |z + w| = |z| + |w|\,?$$
13. Mikor igaz, hogy $z = \overline{z}$?
14. Fejezzük ki egy z komplex szám valós és képzetes részét z és $\overline{z}$ segítségével.
15. Mit fejez ki geometriailag a $|z - \sqrt{3} + i|$ szám ?
16. Mennyi lesz $|z - \overline{z}|$?
17. Mennyi lesz $|z + \overline{z}|$?
18. Igaz-e, hogy:
$$\forall\, z \in \mathbb{C} : \quad \overline{\overline{z}} = z\,?$$
19. Mennyi lesz $\overline{z - \overline{z}}$?

20. Mit ad meg a komplex számsíkon az alábbi ponthalmaz, ha $z \in \mathbb{C}$ egy rögzített komplex szám :
$$L := \{c \cdot z \mid c \in \mathbb{R}\} \,?$$

21. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$|\mathrm{Im}\, z| > 2 \,?$$

22. Melyek azok a z komplex számok a Gauss−féle számsíkon, amelyekre
$$|\mathrm{Im}\, z + 1| < 1 \quad \wedge |\mathrm{Re}\, z - 1| \leq 2 \quad ?$$

23. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

24. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^3 + 1 = 0.$$

25. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^2 + 8 = 0.$$

26. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^4 - 16 = 0.$$

27. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet:
$$x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

11.2. Feladatok

11.2.1. Órai feladatok

1. Határozzuk meg az $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek teljesüljenek (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $(1 - 2i) \cdot x + (1 + 2i) \cdot y = 1 + i$;

(b) $(2 + i) \cdot x - (2 - i) \cdot y = x - y + 2i$;

(c) $(4 - 3i) \cdot x^2 + (3 + 2i) \cdot xy = 4y^2 - \dfrac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2) \cdot i$;

(d) $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i.$

2. Végezzük el az alábbi műveleteket és hozzuk algebrai alakra a kapott kifejezéseket (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $\dfrac{1}{2-3i}$;

(b) $\dfrac{1+5i}{3+2i}$;

(c) $(1-2i)\cdot(5+i)$;

(d) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+i}}}$;

(e) $(2-i)^2+(2+i)^3$;

(f) $(3-\sqrt{2}i)^3\cdot(3+\sqrt{2}i)$;

(g) $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{3-i}{1+i}$;

(h) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}+\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^2}$;

(i) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2019}.$

3. Igazoljuk, hogy a megadott egyenletnek a felsorolt komplex számok megoldásai (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $x^3-x^2+8x+10=0;\quad z_1:=1+3i\ \wedge\ z_2:=1-3i;$

(b) $x^4+x^2+1=0;\quad z_1:=-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \wedge\ z_2:=-\dfrac{1}{2}-i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

4. Adottak az alábbi komplex számok:

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}\ \wedge\ z_2=\frac{i}{-2\sqrt{2}+2i}.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

$$z_1+z_2;\ \ z_1\cdot z_2;\ \ \frac{z_1}{z_2};\ \ z_1^2+z_2^2;\ \ z_1^3+z_2^3;\ \ z_1^4+z_2^4;\ \ z_1^{-3}\cdot z_2^5.$$

5. Számítsuk ki az alábbi összegeket:

(a) $S_{2018} = \sum_{k=0}^{2018} i^k;$

(b) $S_{2019} = \sum_{k=0}^{2019} (-1)^k \cdot i^k.$

6. Tegyük fel, hogy a $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számokra $|z| = |w| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$\frac{z+w}{1+z\cdot w} \in \mathbb{R}.$$

7. Határozzuk meg $|z|$−et, ha:

$$z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4.$$

8. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss−féle számsíkon, amelyekre z^3 tisztán képzetes szám.

9. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex számok elégítik ki az alábbi egyenleteteket:

(a) $z^2 = 1 + i;$

(b) $z^3 = \overline{z}\,?$

Ábrázoljuk a kapott megoldásokat a komplex síkon.

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számok esetén igaz az alábbi azonosság:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\cdot(|z|^2 + |w|^2).$$

Mi a geometriai jelentése a fenti azonosságnak?

11. Mi lesz $|z - i - 1|$ legkisebb és ha van legnagyobb értéke és mely z komplex számok esetén veszi ezt fel, ha:

(a) $\operatorname{Im} z = -2$?

(b) $\operatorname{Im} z = 2\cdot\operatorname{Re} z$?

(c) $|z+1| = 1$?

Valós együtthatós polinomok, komplex gyökök

12. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $x^3 - 1 = 0$;

(b) $x^4 - 1 = 0$;

(c) $x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 5 = 0$;

(d) $x^3 - 9x^2 + 18x + 28 = 0$;

(e) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

11.2.2. További feladatok

1. Határozzuk meg az $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat úgy, hogy az alábbi egyenlőségek teljesüljenek (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $2x + i + x \cdot i \cdot (x + y) = 3 + y \cdot (1 - i)$;

(b) $3 \cdot \sqrt{x^2 - 2y} + (1 - i)x^2 = 2 \cdot (1 + 2i)y + 4 - 19i$;

(c) $\dfrac{2}{3x + iy} - \dfrac{3}{5 + i} = 2$.

(d) $\dfrac{x - 1}{1 + i} + \dfrac{y + 1}{1 - i} = \dfrac{i}{2}$.

2. Végezzük el az alábbi műveleteket és hozzuk a legegyszerűbb alakra a kapott kifejezéseket (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2 = -1$):

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{2} - i}$;

(b) $\dfrac{i - \sqrt{5}}{i + \sqrt{5}}$;

(c) $(i^2 - 7i) \cdot (2 + i)$;

(d) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{i - 1}}}$;

(e) $(2 + i)^2 + (2 - 3i)^3$;

(f) $\dfrac{i - 6}{2 + 5i} + \dfrac{2 - i}{2 + i}$;

(g) $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6$;

(h) $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^5$;

(i) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^6$;

(j) $\dfrac{(1/\sqrt{2}+i)^3-(1/\sqrt{2}-i)^3}{(1/\sqrt{2}+i)^2-(1/\sqrt{2}-i)^2}$;

(k) $\left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^4+\left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^4$.

3. Igazoljuk, hogy a megadott egyenletnek a felsorolt komplex számok megoldásai (i az imaginárius egységet jelöli, azaz $i^2=-1$):

(a) $x^3-3\sqrt{2}\cdot x^2+7x-3\sqrt{2}=0;\quad z_1:=\sqrt{2}-i\ \wedge\ z_2:=\sqrt{2}+i;$

(b) $x^4-2x^3+(6+\sqrt{2})x^2-8x+4\cdot(\sqrt{2}+2)=0;\quad z_{1,2}:=\pm 2i\ \wedge\ z_{3,4}:=1\pm i\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}.$

4. Adottak az alábbi komplex számok:

$$z_1=\frac{5i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i}\ \wedge\ z_2=\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot i}.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket és az eredményt adjuk meg algebrai alakban:

$$z_1+z_2;\ z_1\cdot z_2;\ \frac{z_1}{z_2};\ z_1^2+z_2^2;\ z_1^3+z_2^3;\ z_1^4+z_2^4;\ z_1^3\cdot z_2^{-3}-z_1^{-3}\cdot z_2^3\,.$$

5. Milyen $n\in\mathbb{N}^+$ pozitív természetes szám esetén igaz, hogy:

$$(1+i)^n=(1-i)^n\ ?$$

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ természetes szám esetén igaz, hogy:

$$(1+i)^n+(1-i)^n\in\mathbb{R}\,.$$

7. Számítsuk ki az alábbi összegeket:

(a) $S_{2018}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2018}(1+i)^k;$

(b) $S_{2019}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2019}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{3k}.$

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a\in\mathbb{R}$ valós paraméter esetében az alábbi komplex szám abszolút értéke 1:

$$z:=\frac{1+ia}{1-ia}.$$

9. Határozzuk meg $|z|$–et, ha:

$$z = \frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^4}.$$

10. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss–féle számsíkon, amelyekre z^4 valós szám.

11. Határozzuk meg azokat a z komplex számokat és szemléltessük őket a Gauss–féle számsíkon, amelyekre z^4 tisztán képzetes szám.

12. Határozzuk meg az alábbi feltételeknek eleget tevő z komplex számokat:

(a) $|z+i| = |\overline{z}-1| = |z-iz|$;
(b) $|z+1-i| = 1 \;\wedge\; |z-1+i| = \sqrt{5}$;
(c) $|z+2+i| = 1 \;\wedge\; |z| = \sqrt{5}-1$;
(d) $|z-1| = |1+iz| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$.

13. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex számok elégítik ki az alábbi egyenleteteket:

(a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$;
(b) $z^3 = \dfrac{i}{\overline{z}}$?

Ábrázoljuk a kapott megoldásokat a komplex síkon.

14. Mi lesz $|z-1+i|$ legkisebb és ha van legnagyobb értéke és mely z komplex számok esetén veszi ezt fel, ha:

(a) $\operatorname{Im} z = 2$;
(b) $\operatorname{Re} z = -1$;
(c) $|z-i| = 1$;

Valós együtthatós polinomok, komplex gyökök

15. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

(a) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
(b) $x^3 + 1 = 0$;
(c) $x^6 + 1 = 0$;
(d) $x^3 - \sqrt{2}\cdot x^2 + 4x - 4\sqrt{2} = 0$;
(e) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 20x + 25 = 0$.

12. Mátrixok

A tantárgy eddigi részében alapvetően valós számokkal számoltunk. A valós számok halmazát $\mathbb{R}$ jelöli.

Az előző alkalmakon megismerkedtünk a komplex számokkal: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. A komplex számokkal való alapművelet-végzés lényege az, hogy úgy számolunk velük, mint kéttagú algebrai kifejezésekkel, és ahol lehet, ott felhasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

A komplex számok egy lehetséges egzakt felépítése (konstruktív definíciója) a Függelék ... fejezetében olvasható.

Ebben a fejezetben valós, illetve komplex számokból felépített táblázatokkal fogunk számolni. Lényegében e táblázatokat fogjuk mátrixoknak nevezni.

Annak érdekében, hogy ne kelljen külön valós számtáblázatokkal és külön komplex számtáblázatokkal foglalkozni, bevezetjük a $\mathbb{K}$ jelölést, ami a valós számok halmazának és a komplex számok halmazának egyikét jelöli. Így nem kell mindent külön megfogalmazni a valós és külön a komplex számok esetére, a két eset „párhuzamosan” tárgyalható.

12.1. Az elméleti anyag

Mint azt a bevezetőben leírtuk, $\mathbb{K}$ jelöli a valós számok halmazának ($\mathbb{R}$) és a komplex számok halmazának ($\mathbb{C}$) egyikét, azaz $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

$\mathbb{K}$-ban érvényesek az összeadásra ($x + y$) és a szorzásra ($x \cdot y$, xy) vonatkozó alábbi szabályok, melyeket testaxiómáknak nevezünk:

I.
1. $\forall\, x, y \in \mathbb{K}: \quad x + y \in \mathbb{K}$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{K}: \quad x + y = y + x$
3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}: \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\exists\, 0 \in \mathbb{K} \quad \forall\, x \in \mathbb{K}: \quad x + 0 = x$
   Bebizonyítható, hogy 0 egyértelmű, neve: nulla (zérus).
5. $\forall\, x \in \mathbb{K} \quad \exists\, (-x) \in \mathbb{K}: \quad x + (-x) = 0.$
   Bebizonyítható, hogy $(-x)$ egyértelmű, neve: x ellentettje.

II.
1. $\forall\, x, y \in \mathbb{K}: \quad xy \in \mathbb{K}$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{K}: \quad xy = yx$
3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}: \quad (xy)z = x(yz)$
4. $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad \forall\, x \in \mathbb{K}: \quad x \cdot 1 = x$
   Bebizonyítható, hogy 1 egyértelmű, neve: egy.
5. $\forall\, x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad \exists\, x^{-1} \in \mathbb{K}: \quad x \cdot x^{-1} = 1.$
   Bebizonyítható, hogy x^{-1} egyértelmű, neve: x reciproka. A reciprok jelölésére inkább az $\dfrac{1}{x}$ jelölés használatos.

III. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K}: \quad x(y+z) = xy + xz$

$\mathbb{K}$-ban természetesen igazak azok az azonosságok, szabályok is, amelyek a testaxiómákból levezethetők.

12.1.1. Mátrix fogalma

12.1. Definíció. Legyenek m és n pozitív egész számok. Az

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$$

függvényeket ($\mathbb{K}$ feletti) $m \times n$-es mátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathbb{K}^{m \times n}$ jelöli. Az A mátrix (i, j) helyen felvett $A(i, j)$ helyettesítési értékét az i-edik sor j-edik elemének (a j-edik oszlop i-edik elemének) nevezzük, jelölése: a_{ij}, vagy pedig $(A)_{ij}$.

A mátrixot n-edrendű négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük, ha $m = n$, vagyis ha ugyanannyi sora van, mint amennyi oszlopa.

Az $m\times n$-es mátrixokat $m\times n$-es táblázatként szokás megadni, innen ered a definícióbeli „sor-oszlop” szóhasználat is:

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \ldots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \ldots & A(2,n) \\ & & \vdots & \\ A(m,1) & A(m,2) & \ldots & A(m,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A)_{11} & (A)_{12} & \ldots & (A)_{1n} \\ (A)_{21} & (A)_{22} & \ldots & (A)_{2n} \\ & & \vdots & \\ (A)_{m1} & (A)_{m2} & \ldots & (A)_{mn} \end{bmatrix}.$$

Az A mátrix a_{11}, a_{22}, $\ldots$ elemeit diagonális elemeknek, a táblázatban ezeket összekötő képzeletbeli egyenest a mátrix főátlójának (diagonálisának) nevezzük. A főátló persze csak négyzetes mátrix esetén felel meg a táblázat „igazi” átlójának.

Megemlítünk néhány nevezetes mátrixot:

- Nullmátrixnak nevezzük azt a mátrixot, melynek minden eleme 0. Ha nem okoz félreértést, a nullmátrixot a 0 szimbólummal fogjuk jelölni.
- Sormátrixnak nevezzük az egyetlen sorból álló mátrixot, tehát $\mathbb{K}^{1\times n}$ elemeit. A sormátrixokat sorvektoroknak is szokás nevezni,
- Oszlopmátrixnak nevezzük az egyetlen oszlopból álló mátrixot, tehát $\mathbb{K}^{m\times 1}$ elemeit. Az oszlopmátrixokat oszlopvektoroknak is szokás nevezni.

  A „sorvektor”, „oszlopvektor” elnevezések okára később fogunk vissztérni (14.8 megjegyzés)
- Egy A négyzetes mátrixot alsó háromszögmátrixnak nevezünk, ha főátlója felett minden elem 0, azaz ha $j > i$ esetén $a_{ij} = 0$.
- Egy A négyzetes mátrixot felső háromszögmátrixnak nevezünk, ha főátlója alatt minden elem 0, azaz ha $j < i$ esetén $a_{ij} = 0$.

- Egy A négyzetes mátrixot diagonálmátrixnak nevezünk, ha egyszerre alsó és felső háromszögmátrix, tehát, ha a főátlón kívüli elemei nullák: $a_{ij} = 0$ ha $i \neq j$.

A négyzetes mátrixok körében fontos szerepet játszik az egységmátrix:

12.2. Definíció. Az $I \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixot (n-edrendű) egységmátrixnak nevezzük, ha:

$$(I)_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{ha} \quad i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

12.3. Megjegyzés. Az egységmátrix nyilvánvalóan diagonálmátrix.

12.1.2. Műveletek mátrixokkal

Mátrixokkal többféle művelet végezhető. A legegyszerűbb az összeadás és a számmal való szorzás. Ezeket „elemenként” végezzük:

12.4. Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Az

$$A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \qquad (A + B)_{ij} := (A)_{ij} + B_{ij}$$

mátrixot az A és B mátrixok összegének, a

$$\lambda A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \qquad (\lambda A)_{ij} := \lambda \cdot (A)_{ij}$$

mátrixot pedig az A mátrix λ-szorosának nevezzük.

12.5. Tétel. *Az összeadás és a számmal való szorzás legfontosabb tulajdonságai az alábbiak:*

I.
1. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}$
2. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad A + B = B + A$
3. $\forall\, A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad (A + B) + C = A + (B + C)$
4. $\exists\, 0 \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad A + 0 = A$
   (nevezetesen: 0 legyen a nullmátrix)
5. $\forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \exists\, (-A) \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad A + (-A) = 0$
   (nevezetesen legyen $(-A)_{ij} := -(A)_{ij}$)

II.
1. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad \lambda A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
2. $\forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
3. $\forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
4. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}: \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
5. $\forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}: \quad 1A = A$

12.6. Megjegyzés. Az imént felsorolt 10 tulajdonságot vektortér-axiómáknak nevezzük (v.ö. 14.1 definíció). $\mathbb{K}^{m\times n}$-ben tehát teljesülnek a vektortér-axiómák.

A következő művelet, a mátrixok szorzása, már bonyolultabb.

12.7. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Az

$$AB \in \mathbb{K}^{m\times p}, \qquad (AB)_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

mátrixot az A és B mátrixok (ebben a sorrendben vett) szorzatának nevezzük.

A szorzás alábbi műveleti tulajdonságai egyszerű számolásokkal igazolhatók:

12.8. Tétel. *1. asszociativitás:*

$$(AB)C = A(BC) \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ B \in \mathbb{K}^{n\times p},\ C \in \mathbb{K}^{p\times q});$$

2. disztributivitás:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ B, C \in \mathbb{K}^{n\times p});$$

$$(A+B)C = AC + BC \qquad (A, B \in \mathbb{K}^{m\times n},\ C \in \mathbb{K}^{n\times p});$$

3. szorzás egységmátrixszal: jelölje I a megfelelő méretű egységmátrixot, ekkor:

$$AI = A \quad (A \in \mathbb{K}^{m\times n}), \qquad IA = A \quad (A \in \mathbb{K}^{m\times n}).$$

4. szorzat szorzása számmal:

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B) \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n},\ B \in \mathbb{K}^{n\times p},\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

A szorzás kommutativitásának kérdése: A fenti jelöléseket megtartva BA akkor és csak akkor értelmes, ha $p = m$, azaz az $AB = BA$ egyenlet mindkét oldala akkor és csak akkor értelmes, ha $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Az egyenlőség fennállásának szükséges feltétele, hogy a két oldalon azonos méretű mátrixok álljanak, azaz $m = n$. Azonban még $m = n$ esetben sem igaz mindig az egyenlőség, amint azt az alábbi példa mutatja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ilyen példa minden $n \geq 2$ méretben adható, tehát $n \geq 2$ esetén $\mathbb{K}^{n\times n}$-ben a szorzás nem kommutatív.

Négyzetes mátrixokat hatványozhatunk is. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$A^0 := I, \quad A^1 := A, \quad A^2 := A \cdot A, \quad A^3 := A^2 \cdot A, \quad \ldots,$$

sőt polinomba is helyettesíthetünk:

12.9. Definíció. Legyen $f(x) := c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots c_1 x + c_0$ egy polinom, $\mathbb{K}$-beli együtthatókkal. Ekkor $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ esetén

$$f(A) := c_k A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \ldots c_1 A + c_0 I$$

Fontos művelet a transzponálás (ami a sorok és az oszlopok felcserélését jelenti) és az adjungálás.

12.10. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Az

$$A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}, \qquad (A^T)_{ij} := (A)_{ji}$$

mátrixot az A transzponáltjának, az

$$A^* \in \mathbb{K}^{n\times m}, \qquad (A^*)_{ij} := \overline{(A)_{ji}}$$

mátrixot pedig az A adjungáltjának nevezzük.

A felülvonás a komplex konjugáltat jelenti. Itt érdemes megállapodni abban, hogy a konjugálást valós számokra is értelmezzük: valós szám konjugáltja önmaga (összhangban a valós tengelyen lévő komplex szám konjugáltjával). Ezért rögtön látható, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a transzponálás és az adjungálás művelete ugyanaz.

E műveletek tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze:

12.11. Tétel. *1.*

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (A+B)^* = A^* + B^* \qquad (A,\, B \in \mathbb{K}^{m\times n})$$

2.

$$(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T, \quad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} \cdot A^* \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n},\, \lambda \in \mathbb{K})$$

3.

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^* = B^* A^* \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n},\, B \in \mathbb{K}^{n\times p})$$

4.

$$(A^T)^T = A, \quad (A^*)^* = A \qquad (A \in \mathbb{K}^{m\times n}).$$

Időnként előfordul, hogy egy mátrixot a sorai ill. az oszlopai közé képzelt egyenesekkel kisebb mátrixokra, ún. blokkokra bontunk. Ez az eljárás a blokkosítás. A blokkosított mátrixokkal a műveletek az eddigiekhez hasonlóan végezhetők, csupán arra kell ügyelni, hogy

1. A blokkokat mátrixelemeknek felfogva, az így kapott „mátrixok” között a műveletek elvégezhetők legyenek. (Az idézőjel arra utal, hogy a mátrixelemek itt már nem $\mathbb{K}$-ból valók, hanem maguk is mátrixok.)

2. A blokkok közt is elvégezhetők legyenek a kijelölt mátrixműveletek.

Ebben az esetben a művelet eredménye egy olyan blokkosított mátrix lesz, amely éppen az eredeti mátrixokkal elvégzett művelet eredményének blokkosítása.

Fontos mátrixművelet még az invertálás. Ez a valós ill. a komplex számoknál tanult reciprok képzésnek felel meg.

12.12. Definíció. Legyen $A,\ C \in \mathbb{K}^{n\times n}$. C-t az A inverzének nevezzük, ha

$$AC = CA = I$$

(Itt I az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli.) Az A inverzét így jelöljük: A^{-1}.

12.13. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(a) Az A mátrixot regulárisnak (invertálhatónak) nevezzük, ha létezik inverze, azaz ha $\exists\, A^{-1}$.

(b) Az A mátrixot szingulárisnak (nem invertálhatónak) nevezzük, ha nincs inverze, azaz ha $\nexists A^{-1}$.

Az inverz egyértelműsége könnyen igazolható:

12.14. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ reguláris mátrix, és tegyük fel, hogy $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is és $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ is az A inverze, azaz fennáll:*

$$AC = CA = I \qquad \textit{és} \qquad AD = DA = I\,.$$

Ekkor $C = D$.

Bizonyítás.

$$D = DI = D(AC) = (DA)C = IC = C\,.$$

□

Tehát egy négyzetes mátrixnak vagy nincs inverze (szinguláris eset), vagy pedig egyetlen inverze van (reguláris eset).

12.15. Tétel. *Legyenek $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ reguláris mátrixok.*

Ekkor az $AB \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A^T \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A^* \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixok is regulárisak, továbbá:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \qquad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*\,.$$

Bizonyítás. A szorzat inverzére vonatkozó állítást igazoljuk, a másik kettő igazolása hasonló.

$$(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I\,;$$

$$(B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\,.$$

□

Az inverz létezésének feltételeivel, kiszámításának módszereivel később foglalkozunk, itt csak egy példát említünk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ugyanis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezzel azt is megmutattuk, hogy az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix reguláris.

12.1.3. Sormátrixok, oszlopmátrixok

A sormátrixok (sorvektorok) az egyetlen sorból álló mátrixok, az oszlopmátrixok (oszlopvektorok) pedig az egyetlen oszlopból álló mátrixok. Ezeket – mint minden mátrixot – jelölhetjük a szokásos nagybetűkkel, de elterjedt a kisbetűkkel, vastagított kisbetűkkel, aláhúzott kisbetűkkel való jelölésmód is:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times n}; \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times 1}$$

Egy sorvektor és egy vele azonos hosszúságú oszlopvektor mindkét sorrendben összeszorozható. Tantárgyunkban azzal a sorrenddel fogunk foglalkozni, amikor a bal oldali tényező a sorvektor, a jobb oldali tényező pedig az oszlopvektor:

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times 1}$$

Az eredmény egy 1×1-es mátrix, mely azonosítható a benne lévő egyetlen számmal, mely számot az u sorvektor és a v oszlopvektor (ebben a sorrendben vett) skaláris szorzatának nevezzük.

12.16. Definíció. Az $u = \begin{bmatrix} u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times n}$ sorvektor és a $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ oszlopvektor ebben a sorrendben vett skaláris szorzatának nevezzük az $u \cdot v$ mátrix-szorzat egyetlen elemét, azaz a

$$\sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \in \mathbb{K}$$

számot.

12.17. Megjegyzés. A mátrixok szorzásának értelmezéséből azonnal adódik, hogy a szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme egyenlő a bal oldali tényező i-edik sorában álló sorvektor és a jobb oldali tényező j-edik oszlopában álló oszlopvektor ebben a sorrendben vett skaláris szorzatával.

A szakasz hátralévő részében tegyük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Értelmezni fogjuk két $\mathbb{R}$ feletti, azonos hosszúságú oszlopvektor skaláris szorzatát, amely a jobb oldali tényező transzponálásával kapott sorvektornak a bal oldali tényezővel ebben a sorrendben vett skaláris szorzata lesz:

12.18. Definíció. Az $u,\ v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ valós elemű oszlopvektorok skaláris szorzatának nevezzük a $v^T u$ skaláris szorzatot, azaz a $v^T u$ mátrix-szorzat egyetlen elemét.

12.19. Megjegyzés. A mátrix-szorzás szabálya alapján könnyen igazolható, hogy

$$v^T u = u^T v$$

vagyis az $\mathbb{R}$ feletti, azonos hosszúságú oszlopvektorok skaláris szorzása kommutatív. Így itt felesleges az „ebben a sorrendben vett” jelző használata.

Valóban:

$$v^T u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = u^T v$$

A skaláris szorzatról részletesebben tananyagunk euklideszi terekről szóló fejezeteiben lesz majd szó.

12.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a mátrix fogalmát.
2. Definiálja az alábbi speciális mátrixokat: nullmátrix, sormátrix, oszlopmátrix, felső háromszögmátrix, alsó háromszögmátrix, diagonálmátrix.
3. Definiálja a mátrixok összeadását és számmal való szorzását.
4. Sorolja fel a mátrixok összeadásának és számmal való szorzásának a 10 fontos tulajdonságát.
5. Definiálja a mátrixok szorzását, és sorolja fel e művelet lefontosabb tulajdonságait.
6. Definiálja a mátrix transzponáltját és adjungáltját. Sorolja fel e műveletek legfontosabb tulajdonságait.

7. Definiálja a négyzetes mátrix inverzét.

8. Mondja ki az inverz egyértelműségéről szóló állítást.

9. Definiálja a reguláris mátrix és a szinguláris mátrix fogalmát.

10. Mondja ki a szorzat, transzponált, adjungált inverzéről szóló állítást.

11. Definiálja egy sorvektor és egy oszlopvektor ebben a sorrendben vett skaláris szorzatát.

12. Definiálja két valós elemű oszlopvektor skaláris szorzatát.

12.1.5. Bizonyítandó tételek

1. Az inverz mátrix egyértelműségéről szóló állítás.

2. Szorzat inverzéről szóló állítás.

3. Igazolja, hogy két valós elemű oszlopvektor skaláris szorzata kommutatív.

12.2. Feladatok

12.2.1. Órai feladatok

1. Milyen méretűek az alábbi mátrixok, és közülük melyik nullmátrix, sormátrix (sorvektor), oszlopmátrix (oszlopvektor), alsó háromszögmátrix, felső háromszögmátrix, diagonálmátrix, egységmátrix?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ;$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad E = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \; ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Számítsuk ki (amennyiben létezik az eredmény):

$$A+B\,; \quad A-B\,; \quad 2A-3B\,; \quad A+C\,; \quad A\cdot B\,; \quad A^\top\,; \quad A^\top\cdot C\,; \quad C^2.$$

3. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, és f az alábbi polinom:

$$f(x) := 2x^3 - x^2 - 5x + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

   Számítsuk ki az $f(A)$ mátrixot.

4. Döntsük el, hogy C inverze-e A-nak.

$$a) \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \; ; \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \; ; \qquad C = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Igazoljuk, hogy ha $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ reguláris, továbbá $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor cA is reguláris. Mi lesz cA inverze?

6. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^{4\times 1}$-beli oszlopvektorok skaláris szorzatát:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad\qquad v = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7. Melyik mátrixszal való megszorzást jelenti a Gauss-számsíkon a $w = 5-6i$ komplex számmal való megszorzás?

8. Az alábbi mátrixszal való megszorzás jelent-e a Gauss-számsíkon komplex számmal való megszorzást? Ha igen, melyik ez a komplex szám?

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad b) \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Igazoljuk a 12.5 tétel, 12.8 tétel és a 12.11 tétel állításait.

12.2.2. További feladatok

1. Milyen méretűek az alábbi mátrixok, és közülük melyik nullmátrix, sormátrix, oszlopmátrix, alsó háromszögmátrix, felső háromszögmátrix, diagonálmátrix, egységmátrix?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

2. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Számítsuk ki

$$A + 2B - C, \quad A^T B, \quad (AB^T)C$$

3. Legyen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, és f az alábbi polinom:

$$f(x) := 4x^3 - 5x^2 + 7x + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   Számítsuk ki az $f(A)$ mátrixot.

4. Döntsük el, hogy C inverze-e A-nak.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^{4\times 1}$-beli oszlopvektorok skaláris szorzatát:

$$u = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6. Melyik mátrixszal való megszorzást jelenti a Gauss-számsíkon a $w = -7-3i$ komplex számmal való megszorzás?

7. Az alábbi mátrixszal való megszorzás jelent-e a Gauss-számsíkon komplex számmal való megszorzást? Ha igen, melyik ez a komplex szám?

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad b) \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Igazoljuk a 12.5 tétel, 12.8 tétel és a 12.11 tétel állításait.

13. Determinánsok

Ebben a fejezetben megismerkedünk a determinánsokkal, mint négyzetes mátrixokhoz rendelt számokkal. A determináns ismeretében pedig visszatérünk a mátrixokhoz, s vizsgáljuk az inverz mátrix létezését, meghatározását.

13.1. Az elméleti anyag

Korábbi megállapodásunknak megfelelően, $\mathbb{K}$ jelöli a valós számok halmazának ($\mathbb{R}$) és a komplex számok halmazának ($\mathbb{C}$) egyikét, azaz $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

13.1.1. Determináns fogalma

A determináns értelmezéséhez szükség lesz az egy sor és egy oszlop törlésével kapott részmátrixokra:

13.1. Definíció. Legyen $n \geq 2$ és $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ egy négyzetes mátrix, továbbá (i, j) egy sor-oszlop indexpár ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$). Töröljük A-ból az i-edik sort és a j-edik oszlopot. A visszamaradó $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixot az A mátrix (i, j) indexpárjához tartozó részmátrixának nevezzük, és A_{ij}-vel jelöljük.

Ezek után rekurzív módon értelmezzük a $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ függvényt:

13.2. Definíció. 1. Ha $A = [a_{11}] \in \mathbb{K}^{1\times 1}$, akkor $\det(A) := a_{11}$.

2. Ha $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, akkor:

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(A_{1j}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot a'_{1j},$$

ahol az $a'_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ neve: előjelezett aldetermináns (kofaktor).

A fenti definícióban a determinánst az első sor szerinti kifejtéssel értelmeztük.

13.3. Példák.

1. Egy 2×2-es mátrix determinánsa a következőképpen számítható:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det([d]) + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det([c]) = ad - bc,$$

tehát egy 2×2-es mátrix determinánsát megkapjuk, ha a főátlóbeli elemeinek szorzatából levonjuk a mellékátlóbeli elemeinek szorzatát.

2. A definícióból következik, hogy egy alsó háromszögmátrix (speciálisan egy diagonálmátrix) determinánsa a főátlóbeli elemeinek szorzata. Így tehát az egységmátrix determinánsa 1.

A továbbiakban a determinánsra a $\det(A)$ helyett használni fogjuk az

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

jelölést is. Ennek értelmében beszélhetünk a determináns sorairól, oszlopairól, elemeiről, stb.

A fentiek alapján tehát:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Az alábbiakban – bizonyítás nélkül – összefoglaljuk a determináns néhány fontos és hasznos tulajdonságát. Ezek között vannak könnyebben és nehezebben bizonyíthatók is.

1. A determináns bármelyik sora és bármelyik oszlopa szerint kifejthető, azaz minden r, $s \in \{1, \dots, n\}$ esetén:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} \cdot a'_{rj} = \sum_{i=1}^{n} a_{is} \cdot a'_{is}.$$

2. Az előző pont következménye, hogy $\det(A) = \det(A^T)$. Ebből azonnal adódik, hogy felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

3. Ha egy determináns valamely sorában (vagy valamelyik oszlopában) csupa 0 áll, akkor a determináns értéke 0.

4. Ha egy determináns két sorát (vagy két oszlopát) felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált, azaz értéke a (-1)-szeresére változik.

5. Ha egy determinánsban két sor azonos (vagy két oszlop azonos), akkor értéke 0.

6. Ha egy determináns valamely sorának (vagy valamely oszlopának) minden elemét megszorozzuk egy c számmal, akkor a determináns értéke a c-szeresére változik.

7. Ha $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és $c \in \mathbb{K}$, akkor $\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$.

8. Ha egy determináns két sora (vagy két oszlopa) arányos, akkor értéke 0.

9. A determináns sorai (oszlopai) szerint additív, amin a következőt értjük: Ha

$$(A)_{ij} := \begin{cases} \alpha_j & \text{ha} \quad i = r \\ a_{ij} & \text{ha} \quad i \neq r, \end{cases} \qquad (B)_{ij} := \begin{cases} \beta_j & \text{ha} \quad i = r \\ a_{ij} & \text{ha} \quad i \neq r, \end{cases}$$

$$(C)_{ij} := \begin{cases} \alpha_j + \beta_j & \text{ha} \quad i = r \\ a_{ij} & \text{ha} \quad i \neq r. \end{cases}$$

   Ekkor $\det C = \det A + \det B$.

10. Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk egy másik sorának valahányszorosát (vagy valamely oszlopához egy másik oszlop valahányszorosát), akkor a determináns értéke változatlan marad.

11. Két mátrix szorzatának determinánsa egyenlő determinánsuk szorzatával:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

A determináns szoros kapcsolatban áll a hosszúság-, terület-, térfogatszámítással. Erről részletesebben a függelékben írunk „A determináns geometriai jelentése” címmel.

13.1.2. Inverz mátrix

Ebben a szakaszban részletesebben megvizsgáljuk az inverz mátrix (a definíciót és az egyértelműséget illetően ld. 12.12 definíciót és az azt követő tételt) létezésének feltételeit. Ehhez a determinánst használjuk fel.

13.4. Tétel. *[jobbinverz létezése]*
Az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixhoz akkor és csak akkor létezik olyan $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix, melyre $AC = I$, ha $\det(A) \neq 0$. Egy ilyen C mátrixot az A jobbinverzének nevezünk.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy létezik ilyen tulajdonságú C mátrix. Ekkor:

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot C) = \det(A) \cdot \det(C),$$

amiből azonnal adódik, hogy $\det(A) \neq 0$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\det(A) \neq 0$, és értelmezzük az alábbi mátrixot:

$$C := \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \,, \qquad \text{ahol} \qquad (\tilde{A})_{ij} := a'_{ji} \,.$$

Megmutatjuk, hogy ezzel a C mátrixszal fennáll, hogy $AC = I$. Valóban:

$$(AC)_{ij} = \left(A \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}\right)_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A \cdot \tilde{A})_{ij} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (\tilde{A})_{kj} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{jk}.$$

Az utóbbi összeg $i = j$ esetén 1, mivel ekkor - felhasználva a determináns i-edik sor szerinti kifejtését:

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a'_{ik} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1.$$

$i \neq j$ esetén az említett összeg azon determináns j-edik sora szerinti kifejtése, melyet úgy kapunk, hogy $\det(A)$ j-edik sorát kicseréljük az i-edik sorára. Ez viszont egy olyan determináns, melyben két azonos sor van (az i-edik és a j-edik), tehát értéke 0.

Ezzel beláttuk, hogy $(AC)_{ij} = (I)_{ij}$, tehát az AC szorzat valóban egyenlő az egységmátrixszal. □

13.5. Tétel. *[inverz létezése] Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Ekkor*

$$\exists\, A^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0\,,$$

azaz az A mátrix akkor és csak akkor reguláris, ha $\det(A) \neq 0$. *Következésképpen: az A mátrix akkor és csak akkor szinguláris, ha* $\det(A) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A reguláris, azaz, hogy $\exists\, A^{-1}$. Ekkor, $C = A^{-1}$ választással megismételve az előző tétel első felének bizonyítását:

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}),$$

amiből azonnal adódik, hogy $\det(A) \neq 0$. Mellesleg az is kiadódott, hogy

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\det(A) \neq 0$. Ekkor – az előző tétel második fele alapján – létezik olyan $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix, melyre fennáll: $AC = I$. Megmutatjuk, hogy ez a C mátrix lesz az A inverze. Ehhez már csak azt kell igazolni, hogy $CA = I$.

Ezt a következőképpen igazoljuk. Mivel $\det(A^T) = \det(A) \neq 0$, ezért az előző tétel második felét az A^T mátrixra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists\, D \in \mathbb{K}^{n\times n}: \qquad A^T D = I\,.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát transzponáljuk:

$$(A^T D)^T = I^T\,,$$

ahonnan $D^T A = I$ következik. Ennek segítségével igazolhatjuk a $CA = I$ egyenlőséget:

$$CA = ICA = D^T ACA = D^T (AC) A = D^T IA = D^T A = I\,.$$

□

13.6. Megjegyzések.

1. Még egyszer kiemeljük, hogy egy $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix regularitása ekvivalens azzal, hogy determinánsa nem 0. A reguláris esetben pedig explicit képletet is levezettünk az inverzre:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A} \,, \qquad \text{ahol} \qquad (\tilde{A})_{ij} := a'_{ji} \,.$$

2. Az előző eredményt az
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
2×2-es mátrixra alkalmazva kapjuk, hogy A akkor és csak akkor reguláris, ha $ad - bc \neq 0$, s ez esetben az inverz mátrix:
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} .$$
Szavakban:

   egy 2×2-es reguláris mátrix inverzét megkapjuk, ha a főátlójában álló elemeket felcseréljük, a mellékátlójában lévő elemek előjelét ellenkezőjére változtatjuk, majd a kapott mátrixot megszorozzuk az eredeti mátrix determinánsának reciprokával.

3. Meggondolásainkból az is következik, hogy ahhoz, hogy igazoljuk egy $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixról, hogy az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inverze, elegendő az $AC = I$ és a $CA = I$ egyenlőségek közül az egyiket igazolni, a másik automatikusan teljesül.

13.1.3. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja az $m \times n$ mátrixnak egy $(i,\, j)$ indexpárhoz tartozó részmátrixát, és adjon rá egy példát.
2. Definiálja a determinánst
3. Definiálja az előjelezett aldetermináns (kofaktor) fogalmát
4. Hogyan számítjuk ki a 2×2-es determinánst?
5. Hogyan számítjuk ki egy háromszögmátrix determinánsát?
6. Írja fel a determináns alábbi tulajdonságát:
   - tetszőleges sor/oszlop szerinti kifejtés
   - transzponált-tulajdonság
   - 0 sor/oszlop
   - sor/oszlop felcserélés

- két sor/két oszlop megegyezik
- sor/oszlop homogén
- λA determinánsa
- arányos sorok/oszlopok
- sor/oszlop additív
- szorzat determinánsa

7. Mondja ki a jobbinverz létezéséről szóló tételt
8. Mondja ki az inverz létezéséről szóló tételt
9. Milyen képletet tanultunk reguláris mátrix inverzére, determinánsokkal kifejezve?
10. Írja fel a 2×2-es mátrix inverzének képletét

13.1.4. Bizonyítandó tételek

1. A 2×2-es determináns kiszámításának képlete
2. Az inverz létezéséről szóló tétel (a jobbinverz létezéséről szóló tétel felhasználásával)
3. A 2×2-es mátrix inverzének képlete

13.2. Feladatok

13.2.1. Órai feladatok

1. Legyen

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad\qquad b) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   a) Számítsuk ki $\det A$-t, különféle módokon.
   b) Reguláris vagy szinguláris az A mátrix? Reguláris esetben határozzuk meg az A inverzét az előjelezett aldeterminánsok (kofaktorok) felhasználásával.
   c) Ellenőrizzük, hogy valóban $A \cdot A^{-1} = I$.

2. Az alábbi mátrixok regulárisak, vagy szingulárisak? Reguláris esetben határozzuk meg az inverz mátrixot.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} ;$$

3. Szemléltessük a determináns 3. – 11. tulajdonságait konkrét mátrixokon (ami órán nem fér bele, az HF).

13.2.2. További feladatok

1. Számítsuk ki a determinánsokat:

$$a) \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} \qquad b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Határozuk meg az inverz mátrixot:

$$a) \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

majd ellenőrizzük az eredményt az inverz mátrix definíciója alapján.

3. Szemléltessük a determináns 3. – 11. tulajdonságait konkrét mátrixokon.

4. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ egy diagonálmátrix (azaz: $a_{ij} = 0$ ha $i \neq j$). Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor reguláris (invertálható), ha egyetlen diagonális eleme sem 0. Igazoljuk, hogy ez esetben A^{-1} is egy diagonálmátrix, az

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots \frac{1}{a_{nn}}$$

diagonális elemekkel.

14. Vektorok, vektorterek

Ebben a fejezetben a vektor fogalmát általánosítjuk.

14.1. Az elméleti anyag

14.1.1. Vektortér fogalma

Középiskolában megismerkedtünk a vektor fogalmával, a vektorokkal végezhető műveletekkel, ezek tulajdonságaival. Megállapítottuk, hogy a vektorok összeadása rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok, akkor $\underline{a} + \underline{b}$ is vektor
2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (kommutativitás)
3. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (asszociativitás)
4. $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ (a nullvektort jellemző tulajdonság)
5. $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$ (az ellentett vektort jellemző tulajdonság)

A vektorok valós számmal szorzásának legfontosabb tulajdonságai pedig az alábbiak (λ, μ valós számokat jelöl):

1. Ha λ valós szám, és $\underline{a}$ vektor, akkor $\lambda\underline{a}$ is vektor
2. $\lambda(\mu\underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$ (szorzat szorzása)
3. $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$ (disztributivitás)
4. $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ (disztributivitás)
5. $1\underline{a} = \underline{a}$

Ugyanezeket a tulajdonságokat láttuk a mátrixokkal kapcsolatban is, a 12.5 tételben.

A továbbiakban a vektor fogalmát általánosítjuk úgy, hogy tekintünk egy nem üres halmazt (ennek elmei lesznek a vektorok), egy számhalmazt (ezt skalártartománynak fogjuk nevezni), s két műveletet (vektorösszeadás és vektor szorzása számmal), mely két művelet rendelkezik a fenti 10 tulajdonsággal. Az így keletkezett „struktúrát” fogjuk vektortérnek nevezni. Az egyes tulajdonságokat vektortér-axiómáknak fogjuk nevezni.

Még egy megjegyzés szükséges a pontos definíció kimondása előtt. A számok, amivel a középiskolában a vektorokat szorozzuk, a valós számok, azaz a középiskolában tanult vektorok esetén a skalártartomány a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$). Időközben megismerkedtünk a komplex számokkal is ($\mathbb{C}$), ezért természetes módon adódik a felvetés, hogy lehessen vektorokat komplex számmal is szorozni, azaz lehessen $\mathbb{C}$ is a skalártartomány. Mivel később mindkét esetre szükség lesz, ezért az előző fejezetekhez hasonlóan továbbra is használjuk a $\mathbb{K}$ jelölést, ami a valós számok halmazának és a komplex számok halmazának egyikét jelöli. Így nem kell mindent külön megfogalmazni a valós és külön a komplex skalártartomány esetére.

Ezen bevezető után lássuk a vektortér definícióját:

14.1. Definíció. Legyen $V \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy V $\mathbb{K}$ feletti vektortér, ha léteznek az $x + y$ (összeadás) és $\lambda x = \lambda \cdot x$ (szorzás számmal) műveletek úgy, hogy teljesülnek a következő axiómák:

I.
1. $\forall\, x, y \in V: \quad x + y \in V$
2. $\forall\, x, y \in V: \quad x + y = y + x$
3. $\forall\, x, y, z \in V: \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\exists\, 0 \in V \quad \forall\, x \in V: \quad x + 0 = x$
   Bebizonyítható, hogy 0 egyértelmű, neve: nullelem vagy nullvektor.
5. $\forall\, x \in V \quad \exists\, (-x) \in V: \quad x + (-x) = 0.$
   Bebizonyítható, hogy $(-x)$ egyértelmű, neve: x ellentettje.

II.
1. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\, x \in V: \quad \lambda x \in V$
2. $\forall\, x \in V \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
3. $\forall\, x \in V \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4. $\forall\, x, y \in V \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}: \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
5. $\forall\, x \in V: \quad 1x = x$

V elemeit vektoroknak, $\mathbb{K}$ elemeit skalároknak nevezzük. $\mathbb{K}$-t pedig a V skalártartományának nevezzük.

14.2. Megjegyzések.

1. A vektorokat sokszor jelöljük aláhúzott kisbetűkkel, de ez nem kötelező.
2. Látható, hogy a definícióban szereplő követelményeket (axiómákat) a középiskolában tanult síkbeli geometriai vektorok tulajdonságaiból vonatkoztattuk el. Ezzel meg is van az első példánk vektortérre:

   A sík egy rögzített pontjából induló vektorok a középiskolában tanult vektorösszeadás és számmal való szorzás műveletére nézve $\mathbb{R}$ feletti vektorteret alkotnak.

   A rögzített kezdőpontra azért van szükség, hogy ne legyen probléma a vektorok egyenlőségével.

3. Időnként használjuk a számmal való jobbról szorzás, a nem 0 számmal való osztás, továbbá a kivonás műveletét is, melyek definíciója rendre

$$x \cdot \lambda := \lambda \cdot x, \qquad \frac{x}{\lambda} := \frac{1}{\lambda} \cdot x \qquad x - y := x + (-y).$$

   Ezen műveletek tulajdonságai egyszerűen levezethetők az összeadás és a számmal való szorzás tulajdonságaiból.

4. Egy vektortér csak akkor adott, ha a V halmazon kívül ismeretes a skalártartomány, továbbá a két művelet. Az utóbbiakat nem szükséges minden esetben feltüntetni, a gyakran használt vektorterek esetében ezek valamilyen alapértelmezés szerint adottak.

14.3. Példák.

1. A sík rögzített kezdőpontú irányított szakaszai (a sík helyvektorai) $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. A műveletek a középiskolában tanult vektorműveletek. Ezt a vektorteret röviden a síkvektorok terének nevezzük.

   Mivel a helyvektorok és végpontjaik – a középiskolában tanult módon – megfeleltethetők egymásnak, szokás a sík pontjainak vektorteréről is beszélni.

2. A tér rögzített kezdőpontú irányított szakaszai (a tér helyvektorai) $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. A műveletek a középiskolában tanult vektorműveletek. Ezt a vektorteret röviden a térvektorok terének nevezzük.

   Mivel a helyvektorok és végpontjaik – a középiskolában tanult módon – megfeleltethetők egymásnak, szokás a tér pontjainak vektorteréről is beszélni.

3. $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\mathbb{C}$ pedig vektortér $\mathbb{C}$ felett, összefoglalva: $\mathbb{K}$ vektortér $\mathbb{K}$ felett.

   Érdekességképpen megjegyezzük, hogy $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ felett is vektortér.

4. Rögzített $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $m \times n$-es mátrixok $\mathbb{K}^{m \times n}$ halmaza $\mathbb{K}$ feletti vektortér. Ez azonnal következik a 12.5 tételből.

A továbbiakban V egy $\mathbb{K}$ feletti vektorteret jelöl.

A következő tételben a vektorterek néhány – igen szemléletes – alaptulajdonságát soroljuk fel. A bizonyítások az axiómák alkalmazásával végezhetők el.

14.4. Tétel. *Legyen $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor*

1. $0 \cdot x = 0$ *(a bal oldali* 0 *a* $\mathbb{K}$*-beli nulla számot, a jobb oldali* 0 *pedig a* V*-beli nullvektort jelöli).*

2. $\lambda \cdot 0 = 0$ *(itt mindkét* 0 *a* V*-beli nullvektort jelöli).*

3. $(-1) \cdot x = -x$*.*

4. $\lambda \cdot x = 0 \quad \iff \quad \lambda = 0 \quad \text{vagy} \quad x = 0.$

14.1.2. A $\mathbb{K}^n$ vektortér

Ebben a szakaszban egy nagyon fontos vektortérről, a $\mathbb{K}^n$-ről lesz szó.

Adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}$ elemeiből alkotott n-tagú sorozat, más néven rendezett szám n-es egy

$$x : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$$

függvény. Az $x(i) \in \mathbb{K}$ számot az x i-edik komponensének nevezzük, és x_i-vel jelöljük ($i = 1, \ldots, n$). Magát a rendezett szám n-est így jelöljük:

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n) .$$

Például $(1, -3, 5, 8)$ egy rendezett számnégyes.

Jelölje $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}$ elemeiből alkotott rendezett n-esek halmazát:

$$\mathbb{K}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$$

Az előző példa nyomán tehát pl. $(1, -3, 5, 8) \in \mathbb{R}^4$.

Vezessük be $\mathbb{K}^n$-ben az ún. komponensenkénti műveleteket:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \qquad (x \in \mathbb{K}^n;\ \lambda \in \mathbb{K})$$

Másképp felírva:

$$(x + y)_i := x_i + y_i; \quad \text{és} \quad (\lambda \cdot x)_i := \lambda \cdot x_i \quad (i = 1, \ldots, n;\ x, y \in \mathbb{K}^n\ \lambda \in \mathbb{K}) .$$

14.5. Tétel. *A fent bevezetett műveletekkel $\mathbb{K}^n$ vektortér $\mathbb{K}$ felett.*

E vektortér nullvektora a $(0, 0, \ldots, 0)$ rendezett n-es, az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor ellentettje pedig $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{K}^n$ elemeinek szokásos felírása:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n ,$$

de néha célszerű az oszlop-írásmód használata:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n .$$

Az oszlop-írásmód pl.akkor előnyös, ha $\mathbb{K}^n$-beli elemekkel műveleteket végzünk („számolunk”), ugyanis ekkor az azonos indexű komponensek azonos magasságba kerülnek, így könnyebben áttekinthetők. Pl. $\mathbb{R}^4$-ben:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

14.6. Megjegyzés. Amikor a $\mathbb{K}^n$ vektortérről beszélünk, akkor alapértelmezés szerint a skalártartomány $\mathbb{K}$, a műveletek pedig a komponensenkénti műveletek.

14.7. Megjegyzés. A középiskolában tanultak szerint a sík pontjai rendezett valós számpárokkal, a tér pontjai rendezett valós számhármasokkal jellemezhetők. Ismeretes a kapcsolat a pontok helyvektoraival és a számpárokkal, illetve a számhármasokkal végzett műveletek között is. Ezért $\mathbb{R}^2$ felfogható úgy is, mint a sík pontjainak (illetve a síkvektoroknak), $\mathbb{R}^3$ pedig mint a tér pontjainak (illetve a térvektoroknak) vektortere.

Hasonló indoklással, $\mathbb{R}^1$ az egyenes pontjainak vektortereként fogható fel (számegyenes).

14.8. Megjegyzés. $\mathbb{K}^n$ azonosítható a sormátrixok $\mathbb{K}^{1\times n}$ terével, de azonosítható az oszlopmátrixok $\mathbb{K}^{n\times 1}$ terével is. Ez az oka annak, hogy a sormátrixokat sorvektoroknak, az oszlopmátrixokat pedig oszlopvektoroknak is nevezzük. Egyébként sor-írásmód esetén $\mathbb{K}^n$ elemeit is szoktuk sorvektoroknak, oszlop-írásmód esetén pedig oszlopvektoroknak nevezni.

A mátrixszorzás speciális eseteként foghatjuk fel a mátrix-vektor szorzás műveletét. Ezt így értelmezzük:

14.9. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Az

$$Ax \in \mathbb{K}^m, \qquad (Ax)_i := a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

vektort az A mátrix és az x vektor (ebben a sorrendben vett) szorzatának nevezzük.

14.10. Megjegyzés. A definícióból látható, hogy – az előző megjegyzést is figyelembe véve – az Ax vektorhoz úgy is eljuthatunk, hogy összeszorozzuk az A mátrixot és az x-nek megfelelő oszlopmátrixot, s vesszük az így kapott oszlopmátrixnak megfelelő vektort. Ezért röviden úgy mondjuk, hogy a mátrix-vektor szorzás lényegében egy mátrix és egy oszlopmátrix (oszlopvektor) összeszorzását jelenti. Ebből az azonosításból természetes módon adódnak a mátrix-vektor szorzás tulajdonságai.

A mátrix-vektor szorzás segítségével felírhatjuk a komplex számmal való szorzást a Gauss-féle számsíkon, azaz $\mathbb{R}^2$-ben:

14.11. Tétel. *Legyen $w = a + bi \in \mathbb{C}$ és $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Ekkor*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(wz) \\ \mathrm{Im}\,(wz) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy az $a+bi$ komplex számmal való megszorzás $\mathbb{R}^2$-ben (azaz a Gauss-féle számsíkon) az $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ mátrixszal való megszorzást jelenti.

Bizonyítás.

$$wz = (a + bi) \cdot (x + yi) = ax + bxi + aiy + byi^2 = (ax - by) + (bx + ay)i$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(wz) \\ \mathrm{Im}\,(wz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

□

14.1.3. Síkbeli forgatómátrixok

Ebben a szakaszban a sík helyvektorainak origó körüli elforgatását írjuk le mátrix-vektor szorzással.

Középiskolás ismereteink alapján a $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektor (origó körüli) $+90°$-os elforgatottja a $v' = (-y, x) \in \mathbb{R}^2$ vektor.

Próbáljuk meg előállítani v'-t a v vektor alkalmas mátrixszal való megszorzásával. Keressük tehát azt az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, melyre fennáll, hogy:

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Könnyen igazolható, hogy A-ra az egyetlen lehetőség:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hogyan lehetne hasonló módon, azaz mátrix-vektor szorzással leírni egy tetszőleges φ szöggel való forgatást?

Ehhez fel fogjuk használni, hogy ha egy $v \neq 0$ vektor irányszöge α, akkor $\dfrac{v}{|v|}$ egy α irányszögű egységvektor, ezért:

$$v = |v| \cdot \frac{v}{|v|} = |v| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

továbbá a szögfüggvényekre tanult addíciós tételeket.

Legyen az elforgatandó vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, melynek irányszöge α. A v vektort az origó körül φ szöggel elforgatva a v' vektorhoz jutunk, melynek irányszöge nyilvánvalóan $\alpha+\varphi$. Az is nyilvánvaló, hogy $|v'| = |v|$, hiszen a vektor hossza a forgatáskor nem változik. Mindezek alapján:

$$v' = |v'| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\varphi) \\ \\ \sin(\alpha+\varphi) \end{pmatrix} = |v| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi \\ \\ \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= |v| \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \underbrace{|v| \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \\ \sin\alpha \end{pmatrix}}_{v} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot v$$

Azt kaptuk, hogy:

$$v' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot v$$

Az origó körüli, φ szöggel való elforgatás tehát elvégezhető úgy, hogy az elforgatandó vektort megszorozzuk az

$$A = A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

mátrixszal.

14.12. Definíció. Legyen φ egy szög. Az

$$A = A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mátrixot síkbeli forgatómátrixnak, pontosabban a síkon az origó körüli φ szöggel való elforgatás mátrixának nevezzük.

14.13. Megjegyzések.

1. A 90°-os elforgatás mátrixa:

$$A = A_{90^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ahogy azt már korábban láttuk.

2. Könnyen látható, hogy a síkbeli forgatómátrix éppen olyan alakú, mint a komplex számmal való szorzás mátrixszal való jellemzésénél szereplő mátrix:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

ahol $a = \cos\varphi$ és $b = \sin\varphi$.

Ezért pl. az origó körüli 60°-os forgatás a Gauss-féle számsíkon megfelel a

$$w = (\cos 60^\circ) + (\sin 60^\circ) \cdot i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

komplex számmal való megszorzásnak.

Később, a lineáris transzformációk tárgyalásánál még vissza fogunk térni a síkbeli forgatásokra.

14.1.4. Alterek

14.14. Definíció. Legyen W a V vektortér egy nem üres részhalmaza. Azt mondjuk, hogy W altere V-nek (W altér V-ben), ha W vektortér a V-beli műveletekre nézve.

14.15. Tétel. *Legyen $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. W akkor és csak akkor altere V-nek, ha a következő két feltétel teljesül:*

1. $\forall\, x, y \in W: \quad x + y \in W,$
2. $\forall\, x \in W \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}: \quad \lambda x \in W.$

Az első feltételt úgy is szoktuk mondani, hogy az összeadás nem vezet ki W-ből vagy, hogy W zárt az összeadásra nézve. Hasonlóképpen, a második feltételt fogalmazhatjuk úgy is, hogy a számmal való szorzás nem vezet ki W-ből vagy, hogy W zárt a számmal való szorzásra nézve.

Bizonyítás. A két feltétel szükségessége nyilvánvaló.

Az elégségesség igazolásához csak az 14.1. definíció I. 4. és I. 5. pontjai szorulnak bizonyításra, hiszen I. 1. és II. 1. fel van téve, a többi axióma pedig azonosság.

Jelöljük 0_V-vel a V nullvektorát, és legyen $x \in W$. Ekkor $x \in V$, ezért az 14.4. tétel valamint tételünk 2. feltétele alapján

$$0_V = 0 \cdot x \in W.$$

Tehát az I. 4. axióma teljesül W-ben, sőt W és V nullvektora megegyezik. Hasonlóan, ha $(-x)_V$ jelöli az $x \in W$ elem V-beli ellentettjét, akkor – szintén az 14.4. tétel és tételünk 2. feltételének felhasználásával – kapjuk, hogy

$$(-x)_V = (-1) \cdot x \in W,$$

tehát az I. 5. axióma is teljesül W-ben, sőt az x vektor W-beli és V-beli ellentettje megegyezik. □

14.16. Következmény. Ahhoz, hogy egy V-beli részhalmaz altér legyen, szükséges, hogy tartalmazza a nullvektort („átmenjen az origón”).

A 14.15. tétel alapján könnyen igazolhatók az alábbi példák alterekre:

14.17. Példák.

1. Tetszőleges V vektortérben $\{0\}$ és V alterek. Ezeket triviális altereknek nevezzük.
2. A síkvektorok terének ($\mathbb{R}^2$-nek) alterei: az origóból álló egyelemű halmaz, az origón átmenő egyenesek és maga az $\mathbb{R}^2$.
3. A térvektorok terének ($\mathbb{R}^3$-nak) alterei: az origóból álló egyelemű halmaz, az origón átmenő egyenesek, az origón átmenő síkok és maga az $\mathbb{R}^3$.

A szakasz hátralévő részében egy rögzített $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrixszal kapcsolatos két fontos altérről lesz szó.

14.18. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. A

$$\mathrm{Ker}\,(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

halmazt az A mátrix nullterének nevezzük. Más elnevezése: az A mátrix magja.

Az

$$\mathrm{Im}\,(A) := \{Ax \in \mathbb{K}^m \mid x \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

halmazt az A mátrix képterének nevezzük. Más elnevezése: az A mátrix értékkészlete.

14.19. Tétel. *Az előző definícióban szereplő* $\mathrm{Ker}\,(A)$ *és* $\mathrm{Im}\,(A)$ *halmazok valóban alterek, így elnevezésükben jogos a „tér” szóhasználat.*

Bizonyítás. Mivel $A \cdot 0 = 0$, ezért $0 \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Ezért $\mathrm{Ker}\,(A) \neq \emptyset$.

$\mathrm{Ker}\,(A)$ zárt az összeadásra nézve, mivel ha $x, y \in \mathrm{Ker}\,(A)$, akkor $Ax = Ay = 0$, ezért

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0\,,$$

amiből következik, hogy $x + y \in \mathrm{Ker}\,(A)$.

Továbbá $\mathrm{Ker}\,(A)$ zárt a skalárral való szorzásra nézve is, mivel ha $x \in \mathrm{Ker}\,(A)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $Ax = 0$, ezért

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

amiből $\lambda x \in \mathrm{Ker}\,(A)$ következik. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathrm{Ker}\,(A)$ altér $\mathbb{K}^n$-ben.

Hasonló gondolatmenettel igazolhatjuk az $\mathrm{Im}\,(A)$-ra vonatkozó állítást.

$A \cdot 0 = 0 \in \mathrm{Im}\,(A)$ miatt $\mathrm{Im}\,(A) \neq \emptyset$.

$\mathrm{Im}\,(A)$ zárt az összeadásra nézve, mivel ha $u, v \in \mathrm{Im}\,(A)$, akkor

$$\exists\, x, y \in \mathbb{K}^n : \quad Ax = u,\ Ay = v$$

Ezt felhasználva:

$$u + v = Ax + Ay = A(x + y) \in \mathrm{Im}\,(A) \quad \text{mivel} \quad x + y \in \mathbb{K}^n\,,$$

tehát $u + v \in \mathrm{Im}\,(A)$.

Továbbá $\mathrm{Im}\,(A)$ zárt a skalárral való szorzásra nézve is, mivel ha $u \in \mathrm{Im}\,(A)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\exists\, x \in \mathbb{K}^n : \quad Ax = u$$

Ezt felhasználva:

$$\lambda u = \lambda Ax = A(\lambda x) \in \mathrm{Im}\,(A) \quad \text{mivel} \quad \lambda x \in \mathbb{K}^n\,,$$

tehát $\lambda u \in \mathrm{Im}\,(A)$. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathrm{Im}\,(A)$ altér $\mathbb{K}^m$-ben. □

14.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a vektortér fogalmát.
2. Adjon 2 példát vektortérre.
3. Sorolja fel a vektortereknél tanult 4 alapvető tulajdonságot.
4. Definiálja a $\mathbb{K}^n$ vektorteret (mik az elemei, hogyan értelmezzük a műveleteket).
5. Definiálja a mátrix-vektor szorzás műveletét.
6. A komplex számmal való szorzás jellemzése mátrixszal.
7. Definiálja a síkbeli forgatómátrixot.
8. Definiálja az altér fogalmát.
9. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy nem üres vektorhalmaz altér legyen.
10. Adjon 2 példát altérre.
11. Definiálja a mátrix nullterét (magját).
12. Definiálja a mátrix képterét (értékkészletét).

14.1.6. Bizonyítandó tételek

1. Síkon az origó körül φ szöggel való forgatás mátrixának levezetése.
2. A komplex számmal való szorzás jellemzése mátrixszal.
3. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Ker}\,(A)$ altér.
4. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}\,(A)$ altér.

14.2. Feladatok

14.2.1. Órai feladatok

1. Adottak az alábbi, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok:
$$x = (-3, 4, 1, 5, 2) \qquad y = (2, 0, 4, -3, -1) \qquad z = (7, -1, 0, 2, 3)\,,$$
továbbá az
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 5}$$
mátrix. Számítsuk ki az alábbiakat:
$$x + y\,, \qquad y - z\,, \qquad 4x\,, \qquad x + 3y - 2z\,, \qquad Ax\,.$$
2. Írjuk fel a megadott φ szöggel való, origó körüli síkbeli elforgatás mátrixát. Határozzuk meg e mátrix segítségével az $x = (-3,\ 5)$ vektor elforgatottját az egyes esetekben:
$$a)\quad \varphi = 135^\circ \qquad\qquad b)\quad \varphi = -30^\circ \qquad\qquad c)\quad \varphi = 1680^\circ\,.$$
3. Alterek-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi halmazok? Mely nevezetes ponthalmazokról van szó (nevezzük meg geometriailag):
$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad ; \qquad N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\ y \geq 0\}\,.$$
4. Alterek-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi halmazok? Nevezzük meg e hamazokat geometriailag is.
   (a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
   (b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$,
   (c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$,
   (d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 5\}$,
   (e) $S_5 = \{(x - y, 3x, 2x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
5. Igazoljuk a vektortér-axiómák teljesülését $\mathbb{K}^n$-ben, azaz a 14.5 tételt. (Ami órán nem fér bele, az HF.)

14.2.2. További feladatok

1. Adottak az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok:

$$x = (1, -2, 3, 4) \qquad y = (-4, 0, 2, 1) \qquad z = (2, -1, 0)\,,$$

továbbá az

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

mátrix. Számítsuk ki az alábbit:

$$3x + y + 2Az$$

2. Írjuk fel a megadott φ szöggel való, origó körüli síkbeli elforgatás mátrixát. Határozzuk meg e mátrix segítségével az $x = (-5,\ -2)$ vektor elforgatottját az egyes esetekben:

$$a)\quad \varphi = 150^\circ \qquad\qquad b)\quad \varphi = -45^\circ \qquad\qquad c)\quad \varphi = -1860^\circ\,.$$

3. Alterek-e $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi halmazok? Mely nevezetes ponthalmazokról van szó (nevezzük meg geometriailag):

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad ; \qquad N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}\,.$$

4. Alterek-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi halmazok? Nevezzük meg e hamazokat geometriailag is.

   (a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$,
   (b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$,
   (c) $S_3 = \{(2x, x + y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
   (d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z = 0\}$,
   (e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z + 1 = 0\}$,

5. Igazoljuk a vektortér-axiómák teljesülését $\mathbb{K}^n$-ben, azaz a 14.5 tételt.

15. Generált alterek

Ebben a fejezetben véges számú vektor segítségével fogunk altereket megadni.

15.1. Az elméleti anyag

A továbbiakban sokszor fog szerepelni a (véges) vektorrendszer fogalma. (Véges) vektorrendszerről van szó, ha egy vektortérből kiválasztunk véges számú vektort, s ugyanaz a vektor többször is választható. Pontosan ez a „többször választhatóság" különbözteti meg a vektorrendszer fogalmát a vektorhalmaz fogalmától.

15.1.1. Lineáris kombináció

15.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$. A

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

vektort (ill. magát a kifejezést is) az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszer (vagy egyszerűen csak vektorok) $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ együtthatókkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

A lineáris kombinációt triviálisnak nevezzük, ha minden együtthatója 0 (ennek eredménye nyilván a nullvektor), nem triviálisnak, ha van nem 0 együtthatója.

15.2. Megjegyzések.

1. Az 15.1. definícióban nem tettük fel, hogy az x_i vektorok különbözők, s azt sem, hogy a λ_i számok különbözők.

2. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy ha W altér V-ben, $x_1, \ldots, x_k \in W$, $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W$, vagyis, hogy az alterek zártak a lineáris kombináció képzésére nézve.

15.1.2. Generált altér fogalma

Legyen $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k \in V$ egy vektorrendszer. Tekintsük V következő részhalmazát:

$$W^* := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in V \mid \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k \in \mathbb{K}\}\,. \tag{15.1}$$

W^* elemei tehát az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ vektorrendszer összes lehetséges lineáris kombinációi.

15.3. Tétel. *1. W^* altér V-ben.*

2. *W^* lefedi az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorrendszert, amin azt értjük, hogy*

$$x_i \in W^* \quad (i = 1, \ldots, k).$$

3. *Minden olyan $Z \subseteq V$ altér esetén, amely a fenti értelemben lefedi az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorrendszert, fennáll, hogy $W^* \subseteq Z$.*

A bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy a tétel állítása röviden úgy foglalható össze, hogy W^* az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorrendszert lefedő legszűkebb altér.

Bizonyítás.

1. Legyen $a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$ és $b = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in W^*$. Ekkor

$$a + b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) x_i \in W^*.$$

   Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\lambda a = \lambda \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda \lambda_i) x_i \in W^*.$$

   Tehát – a 14.15 tétel alapján – W^* valóban altér V-ben.

2. Bármely rögzített $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén:

$$x_i = 0x_1 + \ldots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \ldots + 0x_k \in W^*.$$

3. Legyen Z egy, a tételben leírt altér, és legyen $a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in W^*$. Mivel Z lefedi a vektorrendszert, ezért

$$x_i \in Z \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

   Azonban Z altér, ezért zárt a lináris kombináció képzésére, amiből azonnal adódik, hogy $a \in Z$. Tehát valóban $W^* \subseteq Z$.

□

15.4. Definíció. Az (15.1) formulával értelmezett W^* alteret az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorrendszer által generált (vagy kifeszített) altérnek nevezzük, és $\mathrm{Span}\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$-val jelöljük.

15.5. Definíció. Legyen W a V egy altere. Azt mondjuk, hogy W-nek van véges generátorrendszere, ha

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \exists\, x_1, x_2, \ldots, x_k \in V : \qquad \mathrm{Span}\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) = W.$$

Ez esetben az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorrendszert a W altér egy (véges) generátorrendszerének nevezzük.

15.6. Definíció. Amennyiben $\mathrm{Span}\,(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_k) = V$, az $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_k$ vektorrendszert röviden csak generátorrendszernek nevezzük.

15.7. Megjegyzés. Az a tény, hogy egy x vektor benne van az $x_1, \dots, x_k$ vektorok által generált altérben, egyenértékű azzal, hogy x felírható az $x_1, \dots, x_k$ vektorok lineáris kombinációjaként. Úgy is szokták mondani, hogy az x vektor lineárisan függ az $x_1, \dots, x_k$ vektoroktól.

15.8. Példák.

1. A sík helyvektorainak (pontjainak) vektorterében legyen v egy rögzített vektor. Ekkor
$$\mathrm{Span}\,(v) = \begin{cases} \{0\} & \text{ha } v = 0, \\ v \text{ irányvektorú, origón átmenő egyenes} & \text{ha } v \neq 0. \end{cases}$$
Elemi geometriai módszerekkel igazolható az is, hogy a síkvektorok vektorterében bármely két, egymással nem párhuzamos vektor generátorrendszert alkot.

2. A tér helyvektorainak (pontjainak) vektorterében legyen v_1 és v_2 két rögzített vektor. Ekkor
$$\mathrm{Span}\,(v_1, v_2) = \begin{cases} \{0\} & \text{ha } v_1 = v_2 = 0, \\ v_1 \text{ és } v_2 \text{ közös egyenese} & \text{ha } v_1 \parallel v_2 \\ v_1 \text{ és } v_2 \text{ közös síkja} & \text{ha } v_1 \nparallel v_2. \end{cases}$$
Elemi geometriai módszerekkel igazolható, hogy a térvektorok vektorterében bármely három, nem egy síkba eső vektor generátorrendszert alkot.

3. A $\mathbb{K}^n$-beli i-edik (kanonikus) egységvektort (jelöljük e_i-vel) úgy értelmezzük, hogy i-edik komponense legyen 1, a többi komponense pedig legyen 0 ($i = 1, \dots, n$). Ekkor az $e_1, \dots, e_n$ vektorrendszer generátorrendszer a $\mathbb{K}^n$ térben, ugyanis tetszőleges $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ esetén:
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 0 \\ \vdots \\ x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$
tehát x valóban felírható az $e_1, \dots, e_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

15.9. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha a V vektortér egy generátorrendszerét bővítjük (V-beli vektorokat veszünk hozzá), akkor a kibővített rendszer továbbra is generátorrendszer, ha pedig elhagyunk belőle (de nem az összes tagját), akkor nem minden esetben kapunk generátorrendszert. Ilyen értelemben tehát a generátorrendszerek a „nagy” rendszerek. A későbbiek során fontos szerepet kapnak a „minimális” generátorrendszerek.

15.10. Megjegyzés. (altértartó átalakítások) A későbbiekben (ld. 18.2 megjegyzés **4.** pontja) hivatkozni fogunk arra, hogy egy vektorrendszer által generált altér nem változik, ha az alábbi átalakításokat végezzük:

a) A rendszer valamelyik tagját megszorozzuk egy nem nulla számmal, azaz minden $i \in \{1, \dots, k\}$ index és minden $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén:

$$\mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) = \mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

b) A rendszer valamelyik tagjához hozzáadjuk egy másik tagjának konstans-szorosát, azaz minden $i, j \in \{1, \dots, k\},\ i \neq j$ indexpár és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) = \mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

c) A rendszerből elhagyunk egy nullvektort (feltéve, hogy a rendszer legalább kéttagú, és hogy van benne nullvektor), azaz $k \geq 2$ és $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén:

$$\mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) = \mathrm{Span}\,(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

Mindhárom egyenlőség úgy igazolható, hogy az egyik oldalán megadott generátorrendszer benne van a másik oldalán álló altérben. Így az egyik oldalon álló generált altér is (mivel a legszűkebb fedő altér) része a másik oldalon álló altérnek.

Például a b) egyenlőség esetén jelöljük a bal oldalon álló alteret W_1-gyel, a jobb oldalon álló alteret pedig W_2-vel.

$W_1 \subseteq W_2$ igazolása:

$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in W_2$ nyilvánvaló, mivel ezek a vektorok már W_2 generátorrendszerében is benne vannak. x_i pedig azért van benne W_2-ben, mivel felírható W_2 generátorrendszerének lineáris kombinációjaként (a ki nem írt tagok együtthatója 0):

$$x_i = 1 \cdot (x_i + \lambda x_j) + (-\lambda) \cdot x_j$$

$W_2 \subseteq W_1$ igazolása:

$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k \in W_1$ nyilvánvaló, mivel ezek a vektorok már W_1 generátorrendszerében is benne vannak. $x_i + \lambda x_j$ pedig azért van benne W_1-ben, mivel láthatóan W_1 generátorrendszerének lineáris kombinációja (a ki nem írt tagok együtthatója 0):

$$x_i + \lambda x_j = 1 \cdot x_i + \lambda \cdot x_j$$

15.1.3. Véges dimenziós vektortér

15.11. Definíció. A V vektorteret véges dimenziósnak nevezzük, ha van véges generátorrendszere, azaz,ha

$$\exists\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \exists\, x_1, x_2, \dots, x_k \in V : \qquad \mathrm{Span}\,(x_1, x_2, \dots, x_k) = V\,.$$

Azt a tényt, hogy V véges dimenziós, így jelöljük: $\dim V < \infty$.

15.12. Definíció. A V vektorteret végtelen dimenziósnak nevezzük, ha nincs véges generátorrendszere, azaz, ha

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^+ \quad \forall\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k \in V: \qquad \operatorname{Span}(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k) \neq V\,.$$

Azt a tényt, hogy V végtelen dimenziós, így jelöljük: $\dim V = \infty$.

15.13. Példák.

1. A síkvektorok tere véges dimenziós (egy véges generátorrendszere: $i,\, j$).
2. A térvektorok tere véges dimenziós (egy véges generátorrendszere: $i,\, j,\, k$).
3. A $\mathbb{K}^n$ tér véges dimenziós (egy véges generátorrendszere: az n db kanonikus egységvektor).
4. Végtelen dimenziós vektortérre a függelékben találunk példát.

15.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a lineáris kombináció fogalmát.
2. Mondja ki a generált altérről (W^*) szóló tételt.
3. Mit nevezünk generátorrendszernek?
4. Adjon 3 példát generált altérre $\mathbb{R}^2$-ben.
5. Adjon 3 példát generált altérre $\mathbb{R}^3$-ban.
6. Definiálja a kanonikus egységvektorokat $\mathbb{K}^n$-ben. Mi az általuk generált altér?
7. Sorolja fel a tanult 3 altértartó átalakítást.
8. Mikor nevezünk egy vektorteret véges dimenziósnak? Adjon rá egy példát.
9. Mikor nevezünk egy vektorteret végtelen dimenziósnak?

15.1.5. Bizonyítandó tételek

1. A generált altérről (W^*) szóló tétel.
2. Kanonikus egységvektorok definíciója $\mathbb{K}^n$-ben. Az általuk generált altér.

15.2. Feladatok

15.2.1. Órai feladatok

1. Írjuk fel a

$$W := \text{Span}\,((1,2,-1),(-3,1,1))$$

$\mathbb{R}^3$-beli alteret. Adjuk meg az altér néhány elemét.

Döntsük el, hogy a $(2,4,0)$ és az $(5,-4,-1)$ vektorok benne vannak-e ebben a W altérben.

2. Tekintsük az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorokat:

$$u = (1,2,-1)\ ; \quad v = (6,4,2)\ ; \quad x = (9,2,7)\ ; \quad y = (4,-1,8).$$

(a) Számítsuk ki a $-2u+3v$ lineáris kombináció eredményét.

(b) Írjuk fel a $\text{Span}\,(u,v)$ altér elemeit.

(c) Döntsük el, hogy $x \in \text{Span}\,(u,v)$ vagy nem.

(d) Döntsük el, hogy $y \in \text{Span}\,(u,v)$ vagy nem.

3. Tekintsük az előző órán vizsgált

(a) $S_5 = \{(x-y, 3x, 2x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(b) $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

altereket, valamint a

(c) $W_1 = \{(x-y+5z, 3x-z, 2x+y-7z, -x) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

(d) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

altereket. Adjuk meg mindegyiknek egy (véges) generátorrendszerét.

Megjegyzés: Ha sikerül felírni a megadott halmazok elemeit egy-egy véges generátorrendszer lineáris kombinációjaként, akkor az már igazolja azt is, hogy altérről van szó. Ez tehát – a múlt órai feladatot tekintve – egy másik igazolási lehetősége annak, hogy egy megadott halmaz altér.

4. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli alterek egy (véges) generátorrendszerét:

(a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\}$,

(b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,

(c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Megjegyzés: Az előző feladathoz fűzött megjegyzést figyelembe véve, nem szükséges előre igazolni, hogy a megadott halmazok valóban alterek.

5. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli altér egy (véges) generátorrendszerét:

$$W = \{(2x-y+z,\ y+3z,\ x+y-2z,\ x-y) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x,y,z \in \mathbb{R},\ x+2y+z=0\} \subseteq \mathbb{R}^4\,.$$

Megjegyzés: Az előző feladatokhoz fűzött megjegyzést figyelembe véve, itt sem szükséges előre igazolni, hogy a megadott halmaz valóban altér.

15.2.2. További feladatok

1. Legyen $a = (1,2,-1),\ b = (-3,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Számítsuk ki a $2a - 4b$ vektort.

(b) Írjuk fel $\mathrm{Span}\,(a,b)$ néhány elemét.

(c) Döntsük el, hogy az $x = (2,4,0)$, $y = (2,4,-3)$ vektorok benne vannak-e a $\mathrm{Span}\,(a,b)$ altérben.

2. Adjunk meg (véges) generátorrendszert az alábbi alterekhez:

(a) $W_1 = \{(x-y, x+2y, 3x, 4x+3y) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(b) $W_2 = \{(x, 5x, -4x, 7x) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(c) $W_3 = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 4z + 3u = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(d) $W_4 = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(e) $W_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(f) $W_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

(g) $W_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

3. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli altér egy (véges) generátorrendszerét:

$$W = \{(x+y+u,\ 3x-2y+5z-u,\ 2x+2z-u,\ 3z+2u) \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ x,y,z,u \in \mathbb{R},\ x+y+z+u=0\} \subseteq \mathbb{R}^4\,.$$

16. Lineáris függetlenség

16.1. Az elméleti anyag

16.1.1. Lineáris függetlenség fogalma

16.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy vektorrendszer a V vektortérben. Ezt a vektorrendszert lineárisan függetlennek (röviden: függetlennek) nevezzük, ha lineáris kombinációi közül csak a triviális lineáris kombináció eredményez nullvektort, azaz ha

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0 \,.$$

A rendszert lineárisan összefüggőnek (röviden: összefüggőnek) nevezzük, ha nem független, azaz, ha:

$$\exists\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots\, \lambda_k \in \mathbb{K},\ \lambda_i \text{ nem mind } 0 : \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 \,.$$

16.2. Megjegyzések.

1. A $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$ egyenletet összefüggőségi egyenletnek nevezzük.

2. Egyszerűen megmutatható, hogy az a vektorrendszer, amely tartalmaz azonos vektorokat, vagy pedig tartalmazza a nullvektort, lineárisan összefüggő. Ezért lineárisan független rendszerben nem lehet nullvektor, és nem lehetnek benne azonos vektorok.

3. A vektortereknél felírt alapvető tulajdonságokból következik, hogy az egyetlen vektorból álló vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a benne lévő egyetlen vektor nem a nullvektor.

4. Két nem nullvektor akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha egyik a másik konstans-szorosa.

5. $\mathbb{R}$ feletti vektorterekben a lineárisan összefüggő két nem nullvektort párhuzamosaknak nevezzük. A két vektort azonos irányúnak nevezzük, ha egymás pozitív konstans-szorosai, ellentétes irányúnak, ha egymás negatív konstans-szorosai.

16.3. Példák.

1. Elemi geometriai módszerekkel megmutatható, hogy a tér helyvektorainak terében:

- Két, egy egyenesbe eső vektor lineárisan összefüggő.
- Két, nem egy egyenesbe eső vektor lineárisan független.
- Három, egy síkba eső vektor lineárisan összefüggő.

– Három, nem egy síkba eső vektor lineárisan független.

2. $\mathbb{K}^n$-ben a kanonikus egységvektorok $e_1, \dots, e_n$ rendszere (l. az 15.8. példák 3. pontját) lineárisan független, ugyanis az összefüggőségi egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_n \cdot 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

amiből következik, hogy $\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

16.4. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha egy lineárisan független rendszerből elhagyunk (de nem minden tagját), akkor a visszamaradó rendszer lineárisan független marad, ha pedig egy lineárisan független rendszert bővítünk, nem minden esetben kapunk lineárisan független rendszert. Ilyen értelemben a lineárisan független rendszerek a „kis” rendszerek. A későbbiek során fontos szerepet kapnak a „maximális” független rendszerek (v.ö. még 15.9. megjegyzés).

A független rendszerek egyik jellemző tulajdonsága, hogy ha egy vektort elő lehet állítani a független rendszer lineáris kombinációjaként, akkor csak egyféleképpen lehet előállítani. Ezt fejezi ki a következő tétel:

16.5. Tétel. (egyértelmű előállítás tétele) *Legyen $x_1, \dots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, továbbá $x \in \operatorname{Span}(x_1, \dots, x_k)$. Ekkor*

a) Ha az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszer lineárisan független, akkor x egyértelműen (azaz csak egyféleképpen) állítható elő a rendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.

b) Ha az $x_1, \dots, x_k$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor x végtelen sokféleképpen állítható elő a rendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. a)
Tegyük fel, hogy

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \,,$$

és rendezzük át a jobb oldali egyenlőséget (0-ra redukálás, közös szumma, kiemelés):

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0 \,.$$

Ebből – az $x_1, \dots x_k$ rendszer függetlenségét felhasználva – azt kapjuk, hogy $\lambda_i - \mu_i = 0$, azaz, hogy $\lambda_i = \mu_i \quad (i = 1, \dots, k)$.

b)

Legyen x egy előállítása:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \, .$$

Mivel a rendszer linárisan összefüggő, ezért léteznek a nem mind 0 α_i együtthatók úgy, hogy

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \, .$$

Szorozzuk be ezt az egyenletet egy tetszőleges $\beta \in \mathbb{K}$ számmal, majd adjuk össze az x-et előállító egyenlettel:

$$\begin{aligned} x + 0 &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta \alpha_i x_i \\ x &= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \beta \alpha_i) x_i \, . \end{aligned}$$

A lineáris összefüggőség miatt van olyan j index, hogy $\alpha_j \neq 0$. Ekkor viszont a $\lambda_j + \beta \alpha_j$ együttható végtelen sokféle értéket vesz fel, ha β befutja $\mathbb{K}$-t.

$\square$

16.1.2. Tételek vektorrendszerekről

Lássunk néhány tételt a független, az összefüggő és a generátorrendszerek kapcsolatáról.

16.6. Tétel. (összefüggő rendszer szűkítése)
Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy lin. összefüggő rendszer. Ekkor

$$\exists\, i \in \{1,\, 2,\, \ldots\, k\} : \quad \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \, .$$

Szavakban: Összefüggő rendszerből elhagyható valamely vektor úgy, hogy a generált altér nem változik. Másképpen fogalmazva: összefüggő rendszerben legalább egy vektor felesleges a generált altér szempontjából.

Bizonyítás. A rendszer összefüggősége miatt léteznek a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ nem mind 0 számok úgy, hogy

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0 \, .$$

Legyen i egy olyan index, amelyre $\lambda_i \neq 0$. Legyen továbbá

$$W_1 := \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \quad \text{és} \quad W_2 := \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \, .$$

Azt kell igazolnunk, hogy $W_1 = W_2$.

A $W_1 \subseteq W_2$ tartalmazás nyilvánvaló, ugyanis:

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) = W_2$$

miatt a W_2 altér lefedi az $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$ vektorrendszert. Mivel W_1 e rendszer legszűkebb lefedő altere, ezért $W_1 \subseteq W_2$.

A fordított irányú, $W_2 \subseteq W_1$ tartalmazás igazolásához induljunk ki abból, hogy nyilvánvalóan

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = W_1 \,.$$

Most igazolni fogjuk, hogy $x_i \in W_1$. Ehhez a már felírt

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0 \,.$$

összefüggőségi egyenletből rendezzük ki x_i-t ($\lambda_i \neq 0$ miatt ez lehetséges):

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) \cdot x_j \,.$$

Azt kaptuk, hogy x_i kifejezhető az $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát x_i valóban benne van a $\operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = W_1$ altérben.

Így tehát a W_1 altér lefedi az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszert, s mivel W_2 e rendszer legszűkebb lefedő altere, következésképpen $W_2 \subseteq W_1$.

A $W_1 \subseteq W_2$ és a $W_2 \subseteq W_1$ tartalmazási relációk pedig együtt azt jelentik, hogy $W_1 = W_2$

□

16.7. Megjegyzés. A bizonyításból az is kiderült, hogy az a vektor biztosan felesleges (vagyis elhagyható), amelyiknek az együtthatója valamelyik összefüggőségi egyenletben nem 0.

16.8. Tétel. (összefüggő rendszerré bővítés) *Legyen $x_1, \ldots, x_k \in V$ egy vektorrendszer, továbbá $x \in V$. Ekkor*

$$x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1, \ldots, x_k, x \text{ lineárisan összefüggő.}$$

Bizonyítás. Mivel $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$, ezért x felírható a generátorrendszer lineáris kombinációjaként:

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K} : \quad x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k \,.$$

Átrendezés után:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + (-1) \cdot x = 0 \,.$$

Mivel $-1 \neq 0$, ezért a rendszer valóban összefüggő. □

16.9. Következmény. (független rendszer szűkítése) Lineárisan független rendszerből (tegyük fel, hogy legalább két tagú) bármely vektort elhagyva, a visszamaradó rendszer nem ugyanazt az alteret generálja, mint az eredeti rendszer.

16.10. Tétel. (független rendszer bővítése) *Legyen* $x_1, \ldots, x_k \in V$ *egy lineárisan független rendszer, továbbá legyen* $x \in V$*. Ekkor*

a) $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \quad \Longrightarrow \quad x_1, \ldots, x_k, x$ *lineárisan összefüggő*

b) $x \notin \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) \quad \Longrightarrow \quad x_1, \ldots, x_k, x$ *lineárisan független*

Bizonyítás. Az a) rész az előző tétel speciális esete.

A b) rész bizonyításához induljunk ki az összefüggőségi egyenletből:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + \lambda \cdot x = 0\,,$$

és mutassuk meg, hogy itt minden együttható 0.

Először azt fogjuk megmutatni, hogy $\lambda = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy $\lambda \neq 0$. Ekkor x-et kifejezhetjük az összefüggőségi egyenletből:

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda} x_k\,.$$

Ebből pedig $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$ következik, ami ellentmond a b) rész feltételének. ezért tehát $\lambda = 0$.

Helyettesítsük a kapott eredményt az összefüggőségi egyenletbe:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + 0x = 0\,.$$

Az eredeti rendszer függetlensége miatt ebből

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

következik, tehát az $x_1, \ldots, x_k, x$ rendszer valóban független. □

16.11. Következmény. Legyen $x_1, \ldots, x_k, x \in V$. Ha $x_1, \ldots, x_k$ lineárisan független és $x_1, \ldots, x_k, x$ lineárisan összefüggő, akkor

$$x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)\,.$$

16.1.3. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a lineáris függetlenség fogalmát véges vektorrendszerre.

2. Definiálja a lineáris összefüggőség fogalmát véges vektorrendszerre (az nem elég, hogy „nem lin. független").

3. Adjon meg két példát független, és két példát összefüggő vektorrendszerre.

4. Milyen állítást tanultunk a nullvektort tartalmazó rendszer lineáris függetlenségéről?

5. Milyen állítást tanultunk az azonos vektorokat tartalmazó rendszer lineáris függetlenségéről?

6. Mondja ki az egyértelmű előállítás tételét.

7. Mondja ki az összefüggő rendszerek szűkítéséről szóló tételt.

8. Mondja ki az $x_1, \ldots, x_k, x$ vektorrendszer összefüggőségéről szóló tételt, ahol $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$.

9. Mondja ki a lineárisan független rendszer bővítéséről szóló tételt.

16.1.4. Bizonyítandó tételek

1. A kanonikus egységvektorok függetlensége.

2. Az összefüggő rendszerek szűkítéséről szóló tétel.

3. Az $x_1, \ldots, x_k, x$ vektorrendszer összefüggőségéről szóló tétel, ahol $x \in \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k)$.

4. A lineárisan független rendszer bővítéséről szóló tétel.

16.2. Feladatok

16.2.1. Órai feladatok

1. Döntsük el, hogy az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek függetlenek vagy összefüggők:
a)
$$v_1 = (1,2,2,-1)\ ; \quad v_2 = (4,3,9,-4)\ ; \quad v_3 = (5,8,9,-5).$$
b)
$$v_1 = (1,2,3,1)\ ; \quad v_2 = (2,2,1,3)\ ; \quad v_3 = (-1,2,7,-3).$$

2. Döntsük el, hogy a
$$v_1 = (1,2,3,1), \quad v_2 = (2,2,1,3), \quad v_3 = (-1,2,7,-3)$$
$\mathbb{R}^4$-beli vektorok lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

Elhagyható-e valamelyik vektor a fenti $v_1,\ v_2,\ v_3$ vektorrendszerből úgy, hogy a generált altér ne változzon? Ha igen, adjunk meg ilyen vektort.

3. A $v_1 = (1,-2,1)$, $v_2 = (2,1,0)$ $\mathbb{R}^3$-beli lineárisan független vektorrendszert bővítsük ki olyan $v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorral, hogy a kibővített v_1, v_2, v_3 vektorrendszer

(a) összefüggő legyen
(b) független legyen

16.2.2. További feladatok

1. Legyen $v_1 = (1,-2,3)$, $v_2 = (5,6,-1)$, $v_3 = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$. Döntsük el, hogy ez a vektorrendszer lineárisan független vagy összefüggő

2. Döntsük el, hogy a
$$v_1 = (-1,0,2,1), \quad v_2 = (3,4,-1,-5), \quad v_3 = (1,4,3,-3)$$
$\mathbb{R}^4$-beli vektorok lineárisan függetlenek vagy összefüggők.

Elhagyható-e valamelyik vektor a fenti $v_1,\ v_2,\ v_3$ vektorrendszerből úgy, hogy a generált altér ne változzon? Ha igen, adjunk meg ilyen vektort.

3. A $v_1 = (1,4,-1,3)$, $v_2 = (-1,5,6,2)$ $\mathbb{R}^4$-beli lineárisan független vektorrendszert bővítsük ki olyan $v_3 \in \mathbb{R}^4$ vektorral, hogy a kibővített v_1, v_2, v_3 vektorrendszer

(a) összefüggő legyen
(b) független legyen

17. Bázis, dimenzió

17.1. Az elméleti anyag

17.1.1. Bázis

17.1. Definíció. Az $x_1, \ldots, x_k \in V$ vektorrendszert (V-beli) bázisnak nevezzük, ha generátorrendszer is és lineárisan független is.

17.2. Megjegyzés. Mi a bázis előnye? Mivel a bázis generátorrendszer, ezért a tér minden vektora előállítható a bázisban lévő vektorok (röviden: bázisvektorok) lineáris kombinációjaként. Mivel a bázis lineárisan független rendszer is, ezért a 16.5 tétel miatt ez az előállítás egyértelmű. Összefoglalva:

A tér bármely vektora egyértelműen előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Ezt a vektor adott bázison vett előállításának vagy kifejtésének nevezzük.

17.3. Definíció. A fenti lineáris kombináció együtthatóit a vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Mivel már láttunk példákat generátorrendszerekre is és lineárisan független rendszerekre is, ezért az alábbi példák könnyen adódnak.

17.4. Példák.

1. A síkvektorok terében bármely két, nem egy egyenesen fekvő vektorból álló rendszer bázis.

2. A térvektorok terében bármely három, nem egy síkban fekvő vektorból álló rendszer bázis.

3. A $\mathbb{K}^n$ térben a kanonikus egységvektorok rendszere bázis. Ezt $\mathbb{K}^n$ kanonikus vagy standard bázisának nevezzük.

Kérdés, hogy van-e minden véges dimenziós vektortérben bázis.

Mivel a $\{0\}$ zéróvektortérben nincs lineárisan független rendszer, ezért ebben a vektortérben nincs bázis. Az alábbi tételben megmutatjuk, hogy ettől az esettől eltekintve minden véges dimenziós vektortérben van bázis.

17.5. Tétel. (bázis létezéséről) *Bármely véges dimenziós, nem $\{0\}$ vektortérben van bázis.*

Bizonyítás. Legyen $y_1, \dots, y_m$ a V véges dimenziós, nem $\{0\}$ vektortér egy véges generátorrendszere. Ha ez a rendszer lineárisan független, akkor bázis. Ha összefüggő, akkor az 16.6 tétel szerint elhagyható belőle egy vektor úgy, hogy a visszamaradó, $m-1$ vektorból álló rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki vagyis generátorrendszer. Ha ez lineárisan független, akkor bázis. Ha összefüggő, akkor ismét elhagyunk belőle egy vektort, s az eljárást folytatjuk tovább. Így vagy valamelyik lépésben bázist kapunk, vagy pedig ($m-1$ lépés után) eljutunk az egyetlen vektorból álló vektorrendszerhez, ami tehát generátorrendszere V-nek. Mivel $V \neq \{0\}$, ezért ez az egyetlen visszamaradt vektor nem 0, azaz lineárisan független rendszer, tehát bázis. □

17.6. Megjegyzés. A tétel állításánál többet igazoltunk. Megmutattuk, hogy a tér bármely véges generátorrendszeréből kiválasztható bázis, sőt eljárást is adtunk e bázis kiválasztására.

A következőkben azt fogjuk igazolni, hogy a véges dimenziós nem $\{0\}$ vektortér bármely két bázisa ugyanannyi vektorból áll. Ehhez először bebizonyítjuk az ún. kicserélési tételt.

17.7. Tétel. (kicserélési tétel) *Legyen $x_1, \dots, x_k \in V$ egy lineárisan független rendszer, $y_1, \dots, y_m \in V$ pedig egy generátorrendszer.*

Ekkor minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén létezik olyan $j \in \{1, \dots, m\}$ index, hogy az

$$x_1,\ \dots,\ x_{i-1},\ y_j,\ x_{i+1},\ \dots,\ x_k$$

vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyítás. $i = 1$ feltehető, a többi i-re a bizonyítás hasonlóan történik. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy az $y_j, x_2, \dots, x_k$ vektorrendszer minden $j \in \{1, \dots, m\}$ esetén összefüggő. Ekkor az $x_2, \dots, x_k$ rendszer függetlenségéből az 16.11 következmény felhasználásával kapjuk, hogy $y_j \in \operatorname{Span}(x_2, \dots, x_k)$ minden $j \in \{1, \dots, m\}$ esetén. Ebből viszont

$$V = \operatorname{Span}(y_1, \dots, y_m) \subset \operatorname{Span}(x_2, \dots, x_k) \subset V$$

következik, ami azt jelenti, hogy $x_2, \dots, x_k$ generátorrendszer V-ben, tehát

$$x_1 \in V = \operatorname{Span}(x_2, \dots, x_k).$$

Ez pedig – a 16.8 tétel alapján – ellentmond az $x_1, \dots, x_k$ rendszer függetlenségének. □

17.8. Tétel. *Bármely (véges) lineárisan független vektorrendszer tagjainak száma nem nagyobb, mint bármely (véges) generátorrendszer tagjainak száma. (Ezzel pontos értelmet nyert az, hogy a független rendszerek a „kis" rendszerek, a generátorrendszerek pedig a „nagy" rendszerek.)*

Bizonyítás. Jelöljön ugyanis $x_1, \dots, x_k$ egy lineárisan független rendszert, $y_1, \dots, y_m$ pedig egy generátorrendszert. Cseréljük ki x_1-et alkalmas y_{j_1}-re a kicserélési tétel alapján, így kapjuk az $y_{j_1}, x_2, \dots, x_k$ független rendszert. Erre ismét alkalmazzuk a kicserélési tételt, x_2-t kicseréljük y_{j_2}-re, így kapjuk az $y_{j_1}, y_{j_2}, x_3, \dots, x_k$ független rendszert. Az eljárást folytatva véges számú (k) lépésben eljutunk az $y_{j_1}, \dots, y_{j_k}$ független rendszerhez, ami (a függetlenség miatt) csupa különböző vektorból áll. Azt kaptuk tehát, hogy az $y_1, \dots, y_m$ vektorok között van k db különböző, tehát valóban $k \le m$. □

17.9. Tétel. *Legyen V véges dimenziós, nem $\{0\}$ vektortér. Ekkor V bármely két bázisa azonos elemszámú.*

Bizonyítás. Legyen $e_1, \ldots, e_m$ és $f_1, \ldots, f_k$ két bázis V-ben. Mivel $e_1, \ldots, e_m$ lineárisan független, $f_1, \ldots, f_k$ pedig generátorrendszer, ezért az előző tétel szerint $m \leq k$. Szerepcserével kapjuk, hogy $k \leq m$. Így tehát $k = m$. □

17.10. Definíció. A véges dimenziós (és nem $\{0\}$) vektortér bázisainak közös elemszámát a tér dimenziójának nevezzük, és $\dim V$-vel jelöljük. Megállapodunk még abban is, hogy $\dim \{0\} := 0$.

17.11. Példák.

1. Az egyenes helyvektorainak tere 1 dimenziós.
2. A sík helyvektorainak tere 2 dimenziós.
3. A tér helyvektorainak tere 3 dimenziós.
4. $\dim \mathbb{K}^n = n \quad (n \in \mathbb{N})$.

A példák állításai azonnal adódnak az 17.4. példákból.

17.12. Tétel. („ 4 apró állítás")
Legyen $1 \leq \dim(V) = n < \infty$. Ekkor

1. *Ha $x_1, \ldots, x_k \in V$ lineárisan független, akkor $k \leq n$.*

   Másképp: Bármely lineárisan független rendszer legfeljebb annyi vektorból áll, mint amennyi a tér dimenziója.

   Még másképp: Bármely vektorrendszer, amelyben több vektor van, mint amennyi a tér dimenziója, lineárisan összefüggő.

2. *Ha $x_1, \ldots, x_k \in V$ generátorrendszer, akkor $k \geq n$.*

   Másképp: Bármely generátorrendszer legalább annyi vektorból áll, mint amennyi a tér dimenziója.

   Még másképp: Bármely vektorrendszer, amelyben kevesebb vektor van, mint amennyi a tér dimenziója, nem generátorrendszer.

3. *Ha $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárisan független rendszer, akkor generátorrendszer is (következésképpen: bázis)*

   Másképp: Ha egy lineárisan független rendszer annyi vektorból áll, mint amennyi a tér dimenziója, akkor generátorrendszer is (következésképpen: bázis)

4. *Ha $x_1, \ldots, x_n \in V$ generátorrendszer, akkor lineárisan független is (következésképpen: bázis)*

   Másképp: Ha egy generátorrendszer annyi vektorból áll, mint amennyi a tér dimenziója, akkor lineárisan független is (következésképpen: bázis)

Bizonyítás.

1. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ bázis V-ben. Ekkor generátorrendszer is, tehát a 17.8 tétel miatt:

$$k \leq n\,.$$

2. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ bázis V-ben. Ekkor lineárisan független, tehát a 17.8 tétel miatt:

$$k \geq n\,.$$

3. Tegyük fel indirekt, hogy $x_1, \ldots, x_n$ nem generátorrendszer. Ekkor

$$V \setminus \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_n) \neq \emptyset\,.$$

Legyen $x \in V \setminus \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_n)$. Ekkor a 16.10 tétel miatt $x_1, \ldots, x_n, x$ lineárisan független. Ez ellentmondás, mivel ez a rendszer $n+1$ vektorból áll, többől, mint a tér dimenziója.

4. Tegyük fel indirekt, hogy $x_1, \ldots, x_n$ lineárisan összefüggő. Ekkor a 16.6 tétel miatt

$$\exists\, i \in \{1,\, 2,\, \ldots\, n\}: \quad \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_n) = V\,.$$

Ez ellentmondás, mivel az $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ rendszer $n-1$ vektorból áll, kevesebből, mint a tér dimenziója.

□

17.1.2. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a bázis fogalmát és adjon rá 3 példát.

2. Definiálja a koordináták fogalmát.

3. Milyen tételt tanultunk bázis létezéséről?

4. Mondja ki a kicserélési tételt.

5. Mondja ki a kicserélési tétel legfontosabb következményét (a lineárisan független és a generátorrendszerek tagjai számának viszonyáról).

6. Definiálja a dimenzió fogalmát, és adjon rá 3 példát.

7. Mondja ki a dimenzióval kapcsolatos „4 apró állítás”-t.

17.1.3. Bizonyítandó tételek

1. Minden véges dimenziós nemzéró vektortérben van bázis.

2. Véges dimenziós térben bármely két bázis ugyanannyi vektorból áll.

3. A dimenzióval kapcsolatos „4 apró állítás”.

17.2. Feladatok

17.2.1. Órai feladatok

1. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$x_1 = (3, 0, -2, 4), \quad x_2 = (2, 1, -1, 3), \quad x_3 = (-1, 4, 2, 0), \quad x_4 = (-1, 1, 1, -1).$$

Adjunk meg bázist – generátorrendszerből való kiválasztással – az általuk generált W altérben. Hány dimenziós ez az altér?

2. Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben.

$$a)\ x_1,\ x_2 \qquad b)\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \qquad c)\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$$

ahol

$$\begin{aligned} &x_1 = (2, 3, -2, 7), \quad x_2 = (0, 1, 0, 1), \quad x_3 = (1, 2, -1, 0), \\ &x_4 = (-1, -5, 2, 0), \quad x_5 = (3, -1, 1, 2). \end{aligned}$$

3. Válasszunk ki bázist az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerekből a $W = \operatorname{Span}(x_1, x_2, x_3)$ altérben. Határozzuk meg $\dim W$-t is.

a)

$$x_1 = (1, 2, 2, -1)\ ; \quad x_2 = (4, 3, 9, -4)\ ; \quad x_3 = (5, 8, 9, -5).$$

b)

$$x_1 = (1, 2, 3, 1)\ ; \quad x_2 = (2, 2, 1, 3)\ ; \quad x_3 = (-1, 2, 7, -3).$$

4. Bázist alkotnak-e az alábbi vektorrendszerek $\mathbb{R}^3$-ban?

(a) $(1, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 3, 3)$

(b) $(3, 1, -4)$, $(2, 5, 6)$, $(1, 4, 8)$

(c) $(2, -3, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(0, -7, 1)$, $(1, 6, 4)$

(d) $(2, 4, -1)$, $(-1, 2, 5)$

17.2.2. További feladatok

1. Az alábbi vektorrendszerek közül melyik alkot bázist?

(a) $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (2, 2, 0)$, $x_3 = (3, 3, 3)$ $\mathbb{R}^3$-ben.

(b) $y_1 = (3, 1, -4)$, $y_2 = (2, 5, 6)$, $y_3 = (1, 4, 8)$ $\mathbb{R}^3$-ben.

(c) $z_1 = (1, 2, -1, 0)$, $z_2 = (0, 1, 0, 1)$, $z_3 = (-1, -5, 2, 0)$, $z_4 = (2, 3, -2, 7)$ $\mathbb{R}^4$-ben.

(d) $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $z_2 = (2, 1, 0, -1)$, $z_3 = (-1, 4, 3, 8)$, $z_4 = (0, 3, 2, 5)$ $\mathbb{R}^4$-ben.

2. Az előző feladatbeli adatokat tekintve, válasszuk ki a megadott vektorrendszerekből az általuk generált altér egy bázisát. Hány dimenziósak ezek az alterek?

18. Rang, lineáris egyenletrendszerek

18.1. Az elméleti anyag

18.1.1. Vektorrendszer rangja

Ebben a szakaszban jellemezni fogjuk a vektorrendszer „összefüggőségének mértékét”. Például a térvektorok terében úgy érzékeljük, hogy egy háromtagú összefüggő vektorrendszer „jobban összefüggő”, ha egy egyenesen van, mint ha egy síkban van, de nincs egy egyenesen. Ez az észrevétel vezet el a következő definícióhoz:

18.1. Definíció. Legyen V egy vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, \ldots, x_k \in V$.

Az $x_1, \ldots, x_k$ vektorrendszer által generált altér dimenzióját a vektorrendszer rangjának nevezzük. Jele: $\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k)$. Tehát

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) := \dim \operatorname{Span}(x_1, \ldots, x_k) .$$

18.2. Megjegyzések.

1. $0 \leq \operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) \leq k$.

2. A rang az összefüggőség mértékét fejezi ki. Minél kisebb a rang, annál „összefüggőbbek” a vektorok. Speciálisan:

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) = 0 \quad \iff \quad x_1 = \ldots = x_k = 0 \quad \text{és}$$

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k) = k \quad \iff \quad x_1, \ldots, x_k \text{ lineárisan független} .$$

3. $\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_k)$ megegyezik az $x_1, \ldots, x_k$ rendszerből kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számával

4. (rangtartó átalakítások) Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha az alábbi átalakításokat végezzük:

a) A rendszer valamelyik tagját megszorozzuk egy nem nulla számmal, azaz minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ index és minden $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén:

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

b) A rendszer valamelyik tagjához hozzáadjuk egy másik tagjának konstans-szorosát, azaz minden $i, j \in \{1, \ldots, k\},\ i \neq j$ indexpár és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \operatorname{rang}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

c) A rendszerből elhagyunk egy nullvektort (feltéve, hogy a rendszer legalább kéttagú, és hogy van benne nullvektor), azaz $k \geq 2$ és $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén:

$$\operatorname{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) = \operatorname{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

Mindhárom állítás egyszerű következménye a 15.10 megjegyzésnek és a rang definíciójának.

18.1.2. Mátrix rangja

18.3. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Az A i-edik sorában álló elemek alkotják az i-edik sorvektort:

$$s_i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n \qquad (i = 1, \dots, m)$$

A sorvektorok által generált ($\mathbb{K}^n$-beli) alteret a mátrix sorvektorterének (sorterének) nevezzük, jele: $\mathrm{S}(A)$.

18.4. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Az A j-edik oszlopában álló elemek alkotják a j-edik oszlopvektort:

$$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \qquad (j = 1, \dots, n)$$

Az oszlopvektorok által generált ($\mathbb{K}^m$-beli) alteret a mátrix oszlopvektorterének (oszlopterének) nevezzük, jele: $\mathrm{O}(A)$. A 14.18 definíció alapján nyilvánvaló, hogy az oszloptér azonos a mátrix képterével, azaz:

$$\mathrm{O}(A) = \operatorname{Im}(A)$$

18.5. Megjegyzés. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ esetén nyilvánvalóak az alábbiak:

$$\dim \mathrm{S}(A) \leq m, \qquad \dim \mathrm{S}(A) \leq n, \qquad \dim \mathrm{O}(A) \leq n, \qquad \dim \mathrm{O}(A) \leq m\,,$$

$$\mathrm{S}(A^T) = \mathrm{O}(A) \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{és} \quad \mathrm{O}(A^T) = \mathrm{S}(A) \subseteq \mathbb{K}^n\,.$$

18.6. Tétel. *Bármely $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix oszlopvektorterének és sorvektorterének dimenziója megegyezik, azaz*

$$\dim \mathrm{O}(A) = \dim \mathrm{S}(A)\,.$$

Bizonyítás. $A = 0$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy $A \neq 0$, és legyen $r := \dim \mathrm{O}(A) \geq 1$. Legyen $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{K}^m$ bázis $\mathrm{O}(A)$-ban, és jelölje $B \in \mathbb{K}^{m\times r}$ a $b_1, \dots, b_r$ oszlopokból összerakott mátrixot:

$$B := [b_1 \ \dots \ b_r] \in \mathbb{K}^{m\times r}$$

Ekkor A oszlopai felírhatók a $b_1, \ldots, b_r$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\exists\, d_{ij} \in \mathbb{K}: \quad a_j = \sum_{i=1}^{r} d_{ij} b_i \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Legyen $D = (d_{ij}) \in \mathbb{K}^{r\times n}$. A mátrixszorzás szabályai alapján könnyen látható, hogy

$$A = BD\,.$$

Most tekintsük úgy ezt az egyenletet, hogy A minden sorvektora előáll D sorvektorainak lineáris kombinációjaként (az együtthatók a B megfelelő sorában álló elemek), ezért A minden sorvektora benne van $\mathrm{S}(D)$-ben. Következésképpen $\mathrm{S}(A) \subseteq \mathrm{S}(D)$, amiből következik, hogy

$$\dim \mathrm{S}(A) \leq \dim \mathrm{S}(D) \leq r = \dim \mathrm{O}(A)\,.$$

Tehát $\dim \mathrm{S}(A) \leq \dim \mathrm{O}(A)$. Ha ezt az eredményt A helyett A^T-ra alkalmazzuk, akkor megkapjuk az ellenkező irányú egyenlőtlenséget:

$$\dim \mathrm{O}(A) = \dim \mathrm{S}(A^T) \leq \dim \mathrm{O}(A^T) = \dim \mathrm{S}(A)\,.$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

18.7. Megjegyzés. A bizonyításban nem volt szükség arra, hogy $O(A)$ bázisát az A oszlopai közül válasszuk. Ha a bázist A oszlopai közül választjuk, akkor D-nek a bázisindexeknek megfelelő r db oszlopa az r db kanonikus egységvektor. Durván úgy mondjuk, hogy D tartalmaz egy $r \times r$-es egységmátrixot. Ez esetben az $A = BD$ felbontást az A (a választott bázishoz tartozó) bázisfelbontásának nevezzük.

18.8. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$\dim \mathrm{O}(A)$ és $\dim \mathrm{S}(A)$ közös értékét az A mátrix rangjának nevezzük, és $\mathrm{rang}\,(A)$-val jelöljük. Tehát

$$\mathrm{rang}\,(A) := \dim \mathrm{S}(A) = \dim \mathrm{O}(A)\,.$$

18.9. Megjegyzések.

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Ekkor

1. Az A mátrix rangja megegyezik oszlopvektorrendszerének rangjával, és megyezik sorvektorrendszerének rangjával.
2. $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(A^T)$
3. $0 \leq \mathrm{rang}\,(A) \leq \min\{m, n\}$,

   $\mathrm{rang}\,(A) = 0 \iff A = 0$.
4. $\mathrm{rang}\,(A) = m$ akkor és csak akkor, ha a sorvektorok lineárisan függetlenek,

   $\mathrm{rang}\,(A) = n$ akkor és csak akkor, ha az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.
5. **(rangtartó átalakítások)** A mátrix rangja nem változik, ha az alábbi átalakításokat végezzük rajta:

(a) Valamelyik sorát megszorozzuk egy nem nulla konstanssal

(b) Valamelyik sorához hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát

(c) A mátrixból elhagyunk egy csupa 0-át tartalmazó sort (feltéve, hogy van ilyen sora, és hogy van legalább két sora)

Mindhárom állítás egyszerű következménye a 18.2 megjegyzés **4.** pontjában foglaltaknak, ha azt a mátrix sorvektoraira alkalmazzuk.

18.1.3. Lineáris egyenletrendszerek

18.10. Definíció. Legyenek m és n pozitív egész számok. Az m egyenletből álló, n ismeretlenes (röviden: $m \times n$-es) lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

ahol az $a_{ij} \in \mathbb{K}$ együtthatók és a b_j jobb oldali konstansok adottak. Ezt az alakot a lineáris egyenletrendszer skalár alakjának nevezzük.

Keressük az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenek összes olyan ($\mathbb{K}$-beli) értékét, amelyre mindegyik egyenlőség igaz. Egy ilyen $x_1, \ldots, x_n$ értékrendszert a lineáris egyenletrendszer egy megoldásának nevezzük.

18.11. Definíció. A lineáris egyenletrendszert konzisztensnek nevezzük, ha van megoldása, inkonzisztensnek (ellentmondásosnak), ha nincs megoldása.

Vezessük be az

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^m$-beli vektorokat. Ezzel egyenletrendszerünk az alábbi, egyszerűbb alakba írható:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b, \tag{18.1}$$

amit az egyenletrendszer vektoros alakjának nevezünk. A vektoros alak alapján a feladat így is megfogalmazható: Előállítható-e a b vektor az $a_1, \ldots, a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, és ha igen, akkor adjuk meg az összes lehetséges előállítás együtthatóit.

Ha pedig bevezetjük az

$$A := [a_1 \dots a_n] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

mátrixot (melyet az egyenletrendszer mátrixának, vagy együtthatómátrixának nevezünk) valamint az $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vektort, akkor egyenletrendszerünk legtömörebb alakja:

$$Ax = b\,. \tag{18.2}$$

Ezt az alakot az egyenletrendszer mátrixos alakjának nevezzük.

A feladat tehát az összes olyan $\mathbb{K}^n$-beli vektor megkeresése, melyet x helyébe írva a (18.2) egyenlőség igaz. Egy ilyen vektort (amennyiben létezik) az egyenletrendszer egy megoldásának, vagy megoldásvektorának nevezünk.

18.12. Megjegyzés. Az (18.1) vektoros alakból azonnal adódik, hogy

$$\text{az egyenletrendszernek létezik megoldása} \quad \Longleftrightarrow \quad b \in \mathrm{O}(A) = \mathrm{Im}\,(A)\,.$$

Így a lineáris rendszer megoldhatósága egyenértékű azzal, hogy b benne van-e az A oszlopterében. Következésképpen minél szűkebb az oszloptér (azaz minél kisebb az együtthatómátrix rangja), annál nagyobb az esélye annak, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása (inkonzisztens). Ha pl. $\mathrm{rang}\,(A) = m$, akkor $\mathrm{O}(A)$ a lehető legnagyobb altér $\mathbb{K}^m$-ben, azaz $\mathrm{O}(A) = \mathbb{K}^m$. Ez esetben biztosan $b \in O(A)$, tehát az egyenletrendszer megoldható. Ha tehát az együtthatómátrix rangja megegyezik sorainak számával, akkor az egyenletrendszernek bármely jobb oldal esetén létezik megoldása.

Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásvektorainak halmazát, azaz a megoldáshalmazt:

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \subseteq \mathbb{K}^n\,.$$

18.13. Definíció. Két lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldáshalmazuk ugyanaz.

18.14. Megjegyzések.

Könnyen beláthatók az alábbi állítások:

1. Az egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható (konzisztens), ha $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

2. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza a benne szereplő egyenletek megoldáshalmazainak metszete.

3. Ha az egyenletrendszerben van legalább egy

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = q \qquad (q \neq 0)$$

alakú egyenlet, akkor az egyenletrendszer inkonzisztens (nincs megoldása).

4. Az alábbi átalakítások ekvivalens egyenletrendszert eredményeznek:

(a) Egy egyenletet megszorzunk egy nem nulla konstanssal,

(b) Az egyik egyenlethez hozzáadjuk egy másik egyenlet konstans-szorosát,

(c) A rendszerből elhagyunk egy

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

alakú egyenletet.

18.15. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Ekkor az $Ax = 0$ lineáris egyenletrendszert homogén rendszernek nevezzük. Azt is szoktuk mondani, hogy $Ax = 0$ az $Ax = b$ -hez tartozó homogén rendszer.

Jegyezzük meg, hogy a homogén rendszer mindig megoldható, mivel a nullvektor biztosan megoldása ($0 \in \mathrm{O}(A)$).

18.16. Tétel. *Jelölje $\mathcal{M}_h$ a homogén rendszer megoldáshalmazát, azaz*

$$\mathcal{M}_h := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n .$$

Ekkor $\mathcal{M}_h$ altér $\mathbb{K}^n$-ben.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, mivel a 14.18 definíció alapján:

$$\mathcal{M}_h = \mathrm{Ker}\,(A)\,,$$

és az idézett definíció után már igazoltuk, hogy $\mathrm{Ker}\,(A)$ altér. □

Most rátérünk a konzisztens lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazának vizsgálatára.

18.17. Tétel. (Lineáris egyenletrendszerek alaptétele)
Legyen $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $r = \mathrm{rang}\,(A) \geq 1$ (azaz: $A \neq 0$), $b \in \mathbb{K}^m$, és tekintsük az

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszernek van megoldása.
Legyen az A oszlopvektorokra particionált alakja:

$$A = [a_1 \;\ldots\; a_n]\,, \quad \textit{ahol} \quad a_j \in \mathbb{K}^m .$$

Tudjuk, hogy A oszlopvektorai generátorrendszert alkotnak $\mathrm{O}(A)$-ban,
valamint, hogy $\dim \mathrm{O}(A) = r$. Ezért A oszlopai közül kiválasztható r db vektor, ami bázist alkot $\mathrm{O}(A)$-ban. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy az első r db oszlop, $a_1, \ldots, a_r$ alkotja ezt a bázist.

Legyen b egyértelmű előállítása (kifejtése) ezen a bázison:

$$b = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i \,.$$

Ekkor
a) az $r = n$ esetben a lineáris egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, mégpedig:

$$x_i = c_i \qquad (i = 1, \dots, r = n)\,.$$

b) az $1 \le r < n$ esetben tekintsük az $a_{r+1}, \dots, a_n \in \mathrm{O}(A)$ oszlopok egyértelmű előállítását az $a_1, \dots, a_r$ bázison:

$$a_j = \sum_{i=1}^{r} d_{ij} a_i \qquad (j = r+1, \dots, n)\,.$$

Ekkor a lineáris egyenletrendszer összes megoldása:

$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j \qquad (i = 1, \dots, r)\,, \quad x_{r+1}, \quad \dots, \quad x_n\,,$$

ahol az $x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ számok tetszőlegesek.

Bizonyítás. a) $r = n$ eset

Nyilvánvaló az $a_1, \dots, a_n$ vektorok függetlensége és az egyértelmű előállítás tétele miatt.

b) $1 \le r < n$ eset

Az alábbi ekvivalens átalakításokkal juthatunk el az összes megoldásig:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i &= b \\ \sum_{i=1}^{r} x_i a_i + \sum_{j=r+1}^{n} x_j a_j &= b \end{aligned}$$

beírjuk b és az a_j-k előállítását:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i a_i + \sum_{j=r+1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{r} d_{ij} a_i = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$$

az összegzés sorrendjét felcseréljük, majd rendezünk:

$$\sum_{i=1}^{r} \left(x_i + \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij} x_j \right) \cdot a_i = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$$

az a_i-k függetlensége és az egyértelmű előállítás tétele miatt

$$x_i + \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij}x_j = c_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} d_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, r)\,.$$

□

18.18. Megjegyzések.

1. Ha megállapodunk abban, hogy az üres összeg értékét 0-nak tekintjük, akkor az $r = n$ és az $r < n$ esetek egységesen összefoglalhatók az

$$x_i = c_i - \sum_{j=r+1}^{n} x_j d_{ij} \quad (i = 1, \dots, r), \qquad x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{K} \tag{18.3}$$

képlettel.

2. A tetszőlegesen választható $x_{r+1}, \dots, x_n$ ismeretleneket szabad ismeretleneknek, az ezektől egyértelműen függő $x_1, \dots, x_r$ ismeretleneket pedig kötött ismeretleneknek nevezzük. Az $n - r$ szám neve: az egyenletrendszer szabadsági foka.

3. Látható, hogy $r = n$ esetben a szabadsági fok 0, nincs szabad ismeretlen, minden ismeretlen kötött, a megoldás egyértelmű. Az $r < n$ esetben végtelen sok megoldás van, $n - r$ db szabad ismeretlennel.

4. Ha $\mathrm{O}(A)$-ban az első r db oszlop helyett másik bázist választunk, akkor hasonló tételhez jutunk, csak az indexelés lesz bonyolultabb.

A következőkben a megoldásokat vektorba rendezzük, így jutunk el a vektor-alakú megoldásokhoz. Felhasználva (18.3) egyenleteit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - d_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{1n}x_n \\ c_2 - d_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{2n}x_n \\ \vdots \\ c_r - d_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \cdot \begin{pmatrix} -d_{1,r+1} \\ -d_{2,r+1} \\ \vdots \\ -d_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} -d_{1n} \\ -d_{2,n} \\ \vdots \\ -d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Röviden:

$$x = x^B + x_{r+1} \cdot v_{r+1} + \ldots + x_n \cdot v_n = x^B + \sum_{j=r+1}^{n} x_j v_j\,, \tag{18.4}$$

ahol

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}, \quad x^B=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_r\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix},$$

és

$$v_{r+1}=\begin{pmatrix} -d_{1,r+1}\\ -d_{2,r+1}\\ \vdots\\ -d_{r,r+1}\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n=\begin{pmatrix} -d_{1n}\\ -d_{2,n}\\ \vdots\\ -d_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}. \tag{18.5}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{M}=\left\{x^B+\sum_{j=r+1}^{n} x_j v_j \mid x_j\in\mathbb{K}\right\}\subseteq\mathbb{K}^n. \tag{18.6}$$

18.19. Megjegyzés. Láthatjuk, hogy x^B a lineáris egyenletrendszerünk egy megoldása, sőt $r=n$ esetben ez az egyetlen megoldás.

A megoldáshalmaz szerkezetéről szól az alábbi tétel:

18.20. Tétel. (a megoldáshalmaz szerkezete)
A 18.17 tétel feltételei mellett

1. *Az $Ax=0$ homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza $n-r$ dimenziós altér $\mathbb{K}^n$-ben. Ennek az altérnek egy bázisa a* (18.5) *képletekkel értelmezett $v_{r+1},\ldots,v_n$ vektorrendszer.*

2. *Ha az $Ax=b$ rendszer megoldható, akkor $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza az $\mathcal{M}_h$ altér x^B-vel való eltolása.*

Bizonyítás.

1. Homogén egyenletrendszer esetén $b=0$, ezért $c_1=\ldots=c_r=0$. Ez azt jelenti, hogy $x^B=0$. Helyettesítsük ezt (18.6) képletbe:

$$\mathcal{M}_h=\left\{\sum_{j=r+1}^{n} x_j v_j \mid x_j\in\mathbb{K}\right\},$$

ami $r = n$ esetben azt jelenti, hogy $\mathcal{M}_h = \{0\}$ (üres összeg esete), $r < n$ esetben pedig azt jelenti, hogy $v_{r+1}, \ldots, v_n$ generátorrendszer $\mathcal{M}_h$-ban.

Másrészt – a 0-1 komponensek miatt – a $v_{r+1}, \ldots, v_n$ rendszer lineárisan független.

Így tehát a $v_{r+1}, \ldots, v_n$ rendszer bázis $\mathcal{M}_h$-ban, következésképpen $\dim \mathcal{M}_h = n - r$.

2. Közvetlenül következik a (18.6). képletből.

□

18.21. Megjegyzések.

1. Az $r = n$ esetben az $\mathcal{M}$ és az $\mathcal{M}_h$ képletében szereplő szummák üresek, ezért

$$\mathcal{M}_h = \{0\}, \quad \dim \mathcal{M}_h = 0, \quad \mathcal{M} = \{x^B\}\,.$$

2. Felhasználva, hogy $\dim \mathcal{M}_h = n - r$ és $\dim \mathrm{O}(A) = r$, az alábbi fontos egyenlőséghez jutunk:

$$\underbrace{\dim \mathcal{M}_h}_{n-r} + \underbrace{\dim \mathrm{O}(A)}_{r} = n$$

Ha pedig azt is felhasználjuk, hogy $\mathcal{M}_h = \mathrm{Ker}\,(A)$ és $\mathrm{O}(A) = \mathrm{Im}\,(A)$, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\dim \mathrm{Ker}\,(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A) = n\,.$$

Az itt kifejtett elmélet nem alkalmas a lineáris egyenletrendszer gyakorlati megoldására, mivel nem adott eljárást a megoldhatóság eldöntésére, $\mathrm{O}(A)$-ban a bázis megtalálására, a c_i és a d_{ij} számok meghatározására. A következő szakaszban lesz szó a gyakorlati megoldásról.

18.1.4. Lineáris egyenletrendszer gyakorlati megoldása

A középiskolában lineáris egyenletrendszerek megoldására két módszert tanultunk: a behelyettesítő módszert és az egyenlő együtthatók módszerét.

A behelyettesítő módszer lényege, hogy a rendszer valamelyik egyenletéből kifejezünk egy ismeretlent, a rá kapott kifejezést behelyettesítjük az összes többi egyenletbe. Így egy eggyel kevesebb egyenletből álló, eggyel kevesebb ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerhez jutunk. Az ismeretlent kifejező egyenletet félretesszük. Ezt az eljárást ismételjük, amíg lehet. A megálláskor kapott eredményből először leolvassuk, hogy van-e megoldás. Ha van megoldás, akkor a félretett egyenleteket is felhasználva, fokozatos visszahelyettesítéssel kapjuk az ismeretlenek értékét.

Az egyenlő együtthatók módszerének lényege, hogy kiragadva a rendszerből két olyan egyenletet, melyekben ugyananannak az ismeretlennek azonos az együtthatója, a két egyenletet kivonjuk egymásból. Ezzel a közös együtthatójú ismeretlen kiesik. Az így kapott, eggyel kevesebb ismeretlenes egyenletre cserélve a két kiragadott egyenlet egyikét, az eredetivel ekvivalens rendszerhez jutunk. Ez lényegében ugyanaz, mintha a behelyettesítő módszerrel az egyik kiragadott egyenletből kifejezünk egy ismeretlent, és behelyettesítjük a másikba. Az alábbi példa ezt illusztrálja:

Legyen a két kiragadott egyenlet pl.:

$$\begin{array}{l} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ \underline{5x_1 + \ x_2 \ + \ x_3 \ = 3} \end{array}$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat (egyenlő együtthatók módszere):

$$-4x_2 + x_3 = 4\,.$$

Ha a behelyettesítő módszert alkalmazzuk, akkor az első egyenletből fejezzük ki x_1-et:

$$x_1 = \frac{3x_2 - 2x_3 + 7}{5}\,,$$

majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{3x_2 - 2x_3 + 7}{5} + x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_2 - x_3 &= -4 \\ -4x_2 + x_3 &= 4\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy ugyanazt az egyenletet kaptuk, mint az egyenlő együtthatók módszerénél.

Ha az egyenlő együtthatók módszerét szeretnénk alkalmazni, de nem találunk két olyan egyenletet, amelyben valamely ismeretlen együtthatója közös, akkor az egyenletek nem 0 konstanssal való beszorzásával érhetjük el a közös együtthatókat.

Az egyenlő együtthatók módszerét úgy is felfoghatjuk, hogy a rendszer egyik egyenletéhez hozzáadtuk egy másik egyenlet konstans-szorosát, s így elértük, hogy egy ismeretlen eltűnjön az egyenletből. Ha ezt a gondolatot úgy fejlesztjük tovább, hogy egy rögzített egyenlet megfelelő konstans-szorosait levonjuk a rendszer több másik (esetleg az összes többi) egyenletéből, akkor több egyenletből is el tudjuk tüntetni (más szóval: ki tudjuk küszöbölni, latinosan: eliminálni) ezt az ismeretlent. Ez az alapja az ún. eliminációs (kiküszöböléses) módszereknek. Ezekről részletesen felsőbb évfolyamon, a „Numerikus módszerek" tantárgyban lesz szó.

Itt csupán egy változatot, a Gauss-Jordan-féle eliminációs módszert fogjuk röviden ismertetni.

Az első lényeges megjegyzés, hogy az egyenletrendszert és annak átalakított változatait nem fogjuk leírni, hanem csak az együtthatókat és a jobb oldalon álló konstansokat tüntetjük fel egy táblázatban, az alábbi módon:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \underline{a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m} \end{array} \qquad \text{helyett} \qquad \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\,.$$

Ha valamelyik ismeretlen hiányzik egy egyenletből, akkor a megfelelő táblázat-elem 0. Ez összhangban van azzal, hogy az egyenletből hiányzó ismeretlen valójában ott van az egyenletben, csak éppen 0-val szorzódik, és a rövidségre törekvés miatt ezeket a tagokat nem kötelező kiírni.

Látható, hogy ez a táblázatos ábrázolás máris lényegesen lecsökkenti az írásmunkát („együttható, ismeretlen, annak indexe, műveleti jel” helyett csupán az együtthatót írjuk le), ha pl. egyetlen együttható sem 0, akkor kb. a negyedére. Az egyenleteket a sorokkal azonosíthatjuk, az ismeretleneket a táblázat függőleges vonaltól balra eső oszlopaival, a jobb oldali konstanst pedig a táblázatnak a függőleges vonaltól jobbra eső oszlopával.

Az egyenletrendszerből könnyen kialakítható a táblázat, a táblázatból pedig azonnal látható az egyenletrendszer, akár fejben is. Az egyenletekkel végzett műveletek pedig megfelelnek a táblázat soraival végzett hasonló műveleteknek.

A táblázat természetesen felfogható egy $m \times (n+1)$ méretű mátrixnak is, amely úgy keletkezik, hogy az együtthatómátrix utolsó oszlopa után $(n+1)$-edik oszlopként elhelyezzük a jobb oldali konstansokat tartalmazó b vektort. Az így kapott mátrixot $[\,A\,|\,b\,]$-vel jelöljük, és az egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük. Tehát

$$[\,A\,|\,b\,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$$

Tegyük fel, hogy az együtthatómátrix nem a nullmátrix (a 0 együtthatómátrixú egyenletrendszert könnyen meg tudjuk vizsgálni közvetlenül is). Ez esetben a Gauss-Jordan elimináció lényege a táblázaton végzett alábbi lépéssorozatok ismétlése, majd pedig a leállás után az utolsó táblázatból az eredmények kiolvasása:

1. A függőleges vonaltól balra eső területen választunk egy olyan elemet, amely nem 0, és amely nincs sem megjelölt sorban, sem pedig megjelölt oszlopban (kezdetben nincs megjelölt sor és nins megjelölt oszlop). A választott elemet elnevezzük generáló elemnek (főelemnek, pivot elemnek). Ennek sorát generáló sornak, oszlopát generáló oszlopnak, az oszlopához tartozó ismeretlent pedig generáló ismeretlennek nevezzük. Ha nem tudunk generáló elemet választani, az eljárás leáll.

2. A generáló sort leosztjuk a generáló elemmel. A generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük (megjelölt elem lesz belőle).

3. A generáló soron kívüli összes sorból levonjuk a generáló sor annyiszorosát, hogy a generáló oszlopba eső elem 0-vá váljon (úgy is szokták mondani, hogy kinullázzuk a generáló elem alatti és fölötti elemeket). Így elértük, hogy a generáló oszlopban a megjelölt elem 1, az összes többi elem 0. Ezt a lépést röviden „a generáló oszlop nullázása" néven fogjuk nevezni.

Az egyenletrendszerre nézve ez azt jelenti, hogy egy ismeretlent a generáló soron kívüli sorokból elimináltunk, a generáló sorban pedig 1-es együtthatóval bent hagytuk.

4. A „generáló" jelzőket (elem, sor, oszlop, ismeretlen) átváltoztatjuk „megjelölt"-re (az elem esetén ez már megtörtént), majd az 1. pontra lépünk.

Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg az 1. pontban leírt megállási kritérium alapján meg nem áll, azaz amíg találunk generáló elemet. Az eljárás nyilvánvalóan véges, mivel a megjelölt elemek száma (de a megjelölt sorok, oszlopok száma is) minden ciklusban 1-gyel nő, és az elemek, sorok, oszlopok száma véges.

Tegyük fel, hogy a megálláskor r db megjelölt elem van. Ekkor természetesen a megjelölt sorok (ezek a megjelölt elemet tartalmazó sorok) száma is r, a megjelölt oszlopok (ezek a megjelölt elemet tartalmazó oszlopok) száma is r, és a megjelölt ismeretleneké is r. Továbbá az induló táblázatot követő, ún. számított táblázatok száma is r. Később meg fogjuk mutatni, hogy r az együtthatómátrix rangjával egyenlő.

A megállás után két esetet különítünk el:

1. eset, ha $r = m$, azaz minden sorban van megjelölt elem (minden sor megjelölt sor), ezért már nem lehet generáló elemet választani. Ekkor az utolsó táblázatot elnevezzük redukált táblázatnak.

2. eset, ha $r < m$, azaz vannak nem megjelölt sorok, azonban minden ilyen sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani.

Ebben az esetben egy nem megjelölt sorhoz tartozó egyenlet így néz ki:

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = q\,.$$

Nyilvánvaló, hogy $q \neq 0$ esetén ennek az egyenletnek nincs megoldása (ún. tilos sor), következésképpen az egyenletrendszernek sincs. $q = 0$ esetben pedig az egyenletnek minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektor megoldása, tehát az egyenlet a rendszerből elhagyható. Ezért az $r < m$ esetben:

- Ha van olyan nem megjelölt sor, aminek az utolsó eleme, azaz a függőleges vonaltól jobbra eső eleme nem 0, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása (inkonzisztens). Redukált táblázat nem keletkezik.

- Ha minden nem megjelölt sor utolsó eleme, azaz a függőleges vonaltól jobbra eső eleme 0, akkor a nem megjelölt sorokat töröljük, és a megmaradt táblázatot elnevezzük redukált táblázatnak.

Megmutatjuk, hogy ha a redukált táblázat létezik (amint láttuk, ez két esetben lehetséges), akkor az egyenletrendszernek van megodása.

A redukált táblázat jellemzői:

1. r db sora van, és mindegyik sora megjelölt sor (minden sorában van megjelölt elem, ami mint tudjuk 1).

2. A függőleges vonaltól balra n db oszlopa van, ezek között pontosan r db megjelölt oszlop van, s ezekben a megjelölt oszlopokban az r db r-dimenziós kanonikus egységvektor áll. A függőleges vonaltól balra 1 db oszlopa van.

3. Az előző pontból következik, hogy minden sorában az r db megjelölt ismeretlen közül pontosan 1 db van, ennek együtthatója 1, és ez a megjelölt ismeretlen másik sorban már nem fordul elő (az r db megjelölt ismeretlen szétválasztódott az r db egyenletben).

Ezek után az eljárás úgy fejeződik be, hogy a redukált táblázat minden sorának megfelelő egyenletből a benne szereplő egyetlen megjelölt ismeretlent kifejezzük a jobb oldalon álló konstans és az esetleges nem megjelölt ismeretlenek segítségével. Ez nagyon egyszerű, mivel ha nincs nem megjelölt ismeretlen ($r = n$ eset), akkor a megjelölt ismeretlen értéke a jobb oldalon álló konstans, így az átrendezés nélkül leolvasható. Ha pedig van nem megjelölt ismeretlen, akkor azokat csak át kell vinni az egyenlet jobb oldalára.

Látható tehát, hogy a redukált táblázat létezése esetén mindig van megoldás, mégpedig $r = n$ esetben egyértelmű, $r < n$ esetben pedig végtelen sok, $n - r$ szabad paraméterrel.

18.22. Tétel. *A lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának rangja egyenlő a Gauss-Jordan módszer alkalmazásakor kapott r számmal, azaz egyenlő a megjelölt elemek számával a leálláskor.*

Bizonyítás. Jelöljük A-val az egyenletrendszer együtthatómátrixát. A Gauss-Jordan módszer végrehajtásakor az induló és a számított táblázatok a megfelelő lineáris egyenletrendszerek kibővített mátrixának alábbi sorozatát jelentik:

$$[\,A\,|\,b\,] \to [\,A_1\,|\,b_1\,] \to \ \dots\ \to [\,A_r\,|\,b_r\,]$$

Ebből számunkra most az

$$A,\ A_1,\ \dots,\ A_r$$

mátrix-sorozat a lényeges. Ennek ugyanis – az algoritmus leírása és a 18.9 megjegyzés 5. pontja miatt – a második tagtól kezdve minden tagja rangtartó átalakítással keletkezik az őt megelőző tagból. Ezért $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_r)$.

Az $r = m$ esetben legyen $A_r^{red} = A_r$. Az $r < m$ esetben hagyjuk el A_r-ből a 0-sorokat, és a visszamaradó $r \times n$-es mátrixot jelöljük A_r^{red}-del. Mivel a 0-sor elhagyása is rangtartó átalakítás, ezért $\operatorname{rang}(A_r^{red}) = \operatorname{rang}(A_r)$.

Végül könnyű meggondolni, hogy $\operatorname{rang}(A_r^{red}) = r$, ugyanis – a redukált táblázatnál meggondoltak szerint – A_r^{red} oszlopai között szerepel mind az r db r-dimenziós kanonikus egységvektor, ezért $\operatorname{rang}(A_r^{red}) \geq r$. Másrészt a sorok száma r, ezért $\operatorname{rang}(A_r^{red}) \leq r$.

Mindezeket összevetve kapjuk, hogy:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_1) = \ \dots\ = \operatorname{rang}(A_r) = \operatorname{rang}(A_r^{red}) = r\,.$$

□

18.23. Következmény. a Gauss-Jordan-eliminációban kapott r szám független a generáló elemek megválasztásától, és egyenlő az együtthatómátrix rangjával. Az egyenletrendszer szabadsági foka pedig $n - r$.

Igazolható (ld. pl. Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából c. jegyzet elemi bázistranszformációról szóló fejezete), hogy a Gauss-Jordan-elimináció során kapott eredmények az alábbi módon vannak összhangban az elméletben tárgyaltakkal (a Gauss-Jordan-eliminációs módszer és az elemi bázistranszformációs módszer ugyanaz):

1. A kötött ismeretlenek a megjelölt ismeretlenek.

2. A szabad ismeretlenek a nem megjelölt ismeretlenek (ha nincs nem megjelölt ismeretlen, akkor nincs szabad ismeretlen).

3. A c_i számok a redukált táblázatban a függőleges vonaltól jobbra eső oszlopból olvashatók ki, megfelelő módon.

4. A d_{ij} számok a redukált táblázatban a függőleges vonaltól balra eső területről olvashatók ki, megfelelő módon.

18.24. Megjegyzések.

1. Homogén egyenletrendszer esetén a fentieken kívül még az is igaz, hogy minden táblázatban a függőleges vonaltól jobbra csupa 0 áll. Ezért minden esetben van redukált táblázat (összhangban azzal, hogy $\mathcal{M}_h \neq \emptyset$), és ott is csupa 0 áll a függőleges vonaltól jobbra.

2. Amint azt az előbb láttuk, a Gauss-Jordan eliminációt használhatjuk egy $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix rangjának meghatározására is. Ekkor az induló táblázatban csupán az A mátrixot vesszük fel, nincs sem függőleges vonal, sem függőleges vonaltól jobbra eső rész. Elvégezzük az eliminációs lépéseket (az 1-4. lépések ismételgetése, amíg lehet). Az A mátrix rangja egyenlő a megjelölt elemek számával: $\operatorname{rang}(A) = r$.

A Gauss-Jordan eljárásra példákat, és összehasonlítását a behelyettesítő módszerrel a következő szakaszban tárgyalunk.

18.1.5. Három példa

Az alábbiakban a lineáris egyenletrendszerekről és a mátrix rangjáról tanultakat szemléltetjük három számpéldával. Mindhárom esetben a feladatok az alábbiak:

a) Írjuk fel az egyenletrendszer méretét, együtthatómátrixát és jobb oldali b vektorát.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert (megoldhatóság eldöntése, összes megoldás megadása skalár alakban, kötött ismeretlenek, szabad ismeretlenek)

c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?

d) Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is.

e) Amennyiben van megoldás, írjuk fel a megoldáshalmazt ($\mathcal{M}$).

f) Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldását, megoldáshalmazát ($\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A)$). Adjuk meg $\mathcal{M}_h$ egy bázisát. Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

A b) és az f) kérdést először Gauss-Jordan eliminációval, majd a behelyettesítő módszerrel oldjuk meg. A Gauss-Jordan eliminációnál a generáló elemeket bekeretezéssel, a megjelölt elemeket aláhúzással fogjuk jelölni.

1. Példa. *(egyértelmű megoldás esete)*

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás.

$\boxed{\text{a)}}$

Láthatóan $m = 3$, $n = 3$, tehát egyenletrendszerünk 3×3-as. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

$\boxed{\text{b) Gauss-Jordan eliminációval:}}$

Írjuk fel az eredeti egyenletrendszert ábrázoló táblázatot, és az 1. lépésben válasszuk generáló elemnek az első sor második elemét. Ezzel az első sor lett a generáló sor, a második oszlop a generáló oszlop, az x_2 ismeretlen a generáló ismeretlen.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} .$$

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis az első sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis 1-gyel), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Ez után következik a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először a második sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis az első sor) $\frac{5}{1} = 5$-szörösét, majd a harmadik sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis az első sor) $\frac{3}{1} = 3$-szorosát. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 13 & 35 \\ 2 & 0 & 8 & 22 \end{array} .$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sor az 1. sor, a megjelölt oszlop a 2. oszlop, a megjelölt ismeretlen az x_2.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet (a 4, 13, 2, 8 közül választhatunk), legyen ez a harmadik sor első eleme:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 4 & 0 & 13 & 35 \\ \boxed{2} & 0 & 8 & 22 \end{array} .$$

Ezzel a harmadik sor lett a generáló sor, az első oszlop a generáló oszlop, az x_1 ismeretlen a generáló ismeretlen.

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis a harmadik sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis 2-vel), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Így már két megjelölt elemünk van. Ezt követi a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először az első sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a harmadik sor) $\frac{0}{2} = 0$-szorosát, majd a második sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a harmadik sor) $\frac{4}{2} = 2$-szörösét. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 11 \end{array}\ .$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sorrá válik a 3. sor is, megjelölt oszloppá válik az 1. oszlop is, és megjelölt ismeretlenné válik az x_1 is. Most már két megjelölt elemünk, két megjelölt sorunk, két megjelölt oszlopunk, és két megjelölt ismeretlenünk van.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet (csak a -3 -at választhatjuk):

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 11 \end{array}\ .$$

Ezzel a második sor lett a generáló sor, a harmadik oszlop a generáló oszlop, az x_3 ismeretlen a generáló ismeretlen.

Következik a 2. lépés, a generáló sort (vagyis a második sort) végigosztjuk a generáló elemmel (vagyis -3-mal), és a generáló elem helyén keletkező 1-est megjelöljük. Így már három megjelölt elemünk van. Ezt követi a 3. lépés, a generáló oszlop nullázása. Először az első sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a második sor) $\dfrac{-3}{-3} = 1$-szeresét, majd a harmadik sorból kivonjuk a generáló sor (vagyis a második sor) $\dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$-szorosát. Az eredmény:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}\ .$$

A 4. lépés szerint a megjelölt sorrá válik a 2. sor is, megjelölt oszloppá válik a 3. oszlop is, és megjelölt ismeretlenné válik az x_3 is. Most már három megjelölt elemünk, három megjelölt sorunk, három megjelölt oszlopunk, és három megjelölt ismeretlenünk van.

Következik ismét az 1. lépés, válasszunk generáló elemet. Azt tapasztaljuk, hogy minden sor megjelölt, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Három megjelölt elem van, ezért $r = 3$.

Mivel minden sor megjelölt ($r = m$ eset), ezért van megoldás, a redukált táblázat megegyezik az utolsó táblázattal:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}\ .$$

Most állítsuk elő az összes megoldást. Mivel minden oszlop megjelölt ($r = n$ eset), ezért egyetlen megoldás van, ezt az utolsó táblázatból így olvassuk ki:

Az első sor alapján: $x_2 = 4$.

A második sor alapján: $x_3 = 3$.

A harmadik sor alapján: $x_1 = -1$.

Látjuk, hogy ha felülről lefelé haladunk, akkor az ismeretleneket nem a természetes x_1, x_2, x_3 sorrendben kaptuk. Ha a természetes sorrendben szeretnénk leolvasni az ismeretlenek értékét, akkor a redukált táblázat sorait rendezzük át úgy, hogy a függőleges vonaltól balra eső rész egységmátrix legyen:

$$\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{array}.$$

Ha eltekintünk a menet közbeni magyarázatoktól, a Gauss-Jordan elimináció az alábbi táblázat-sorozatot jelenti:

$$\begin{array}{cccc|c}
0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\
4 & 5 & -2 & 10 \\
2 & 3 & -1 & 7 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
4 & 0 & 13 & 35 \\
\boxed{2} & 0 & 8 & 22 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -5 \\
0 & 0 & \boxed{-3} & -9 \\
\underline{1} & 0 & 4 & 11 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3 \\
\underline{1} & 0 & 0 & -1 \\
\hline\hline
\underline{1} & 0 & 0 & -1 \\
0 & \underline{1} & 0 & 4 \\
0 & 0 & \underline{1} & 3
\end{array}.$$

A három megjelölt ismeretlen a kötött ismeretlen: x_1, x_2, x_3. Szabad ismeretlen nincs.

18.25. Megjegyzés. Amint a példából látszik, a generáló elemmel osztani kell. Ezért papíros számolásnál igyekszünk olyan generáló elemeket választani, hogy ne keletkezzenek törtek, pl. 1-et vagy -1-et.

$\boxed{\text{b) behelyettesítő módszerrel:}}$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \qquad \longrightarrow x_2 = 3x_3 - 5 \\
4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\
\hline
4x_1 & + & 5(3x_3-5) & - & 2x_3 & = & 10 \\
2x_1 & + & 3(3x_3-5) & - & x_3 & = & 7 \\
\hline
4x_1 & + & & & 13x_3 & = & 35 \\
2x_1 & + & & & 8x_3 & = & 22 \qquad \longrightarrow x_1 = 11 - 4x_3 \\
\hline
4(11-4x_3) & + & & & 13x_3 & = & 35 \\
 & & & & x_3 & = & 3
\end{array}$$

Az ismeretlenek kifejezésének folyamata befejeződött, mert az egyenletek elfogytak.

Amelyik ismeretlent kifejezzük a többivel, az kötött ismeretlenné válik. Az első lépésben x_2-t fejeztük ki, tehát x_2 kötött lett. Utána x_1-et fejeztük ki, ezért x_1 is kötött lett. Végül x_3-at fejeztük ki, tehát x_3 is kötött.

Azt kaptuk, hogy mindhárom ismeretlenünk kötött, ezért a kötött ismeretlenek száma 3, a szabad ismeretlenek száma 0. Az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

A megoldás meghatározásához visszafelé haladva számítjuk ki a kötött ismeretleneket:

$$x_3 = 3; \qquad x_1 = 11 - 4x_3 = 11 - 4 \cdot 3 = -1; \qquad x_2 = 3x_3 - 5 = 3 \cdot 3 - 5 = 4\,.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 4; \qquad x_3 = 3\,.$$

c)

Három kötött ismeretlen van, ezért az együtthatómátrix rangja: $\operatorname{rang}(A) = 3$.

d)

Mindkét megoldási módszerrel azt kaptuk, hogy

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 4; \qquad x_3 = 3\,.$$

Ezeket vektorba rendezve kapjuk a vektor alakú megoldást:

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3) = (-1,\, 4,\, 3)\,.$$

e)

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza egyelemű halmaz:

$$\mathcal{M} = \{(-1,\, 4,\, 3)\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$

f) Gauss-Jordan módszer esetén:

A homogén egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0\,, \quad \text{vektor alakban:} \quad (0,\, 0,\, 0)\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_h = \{(0,\, 0,\, 0)\} = \operatorname{Ker}(A) \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Ennek az altérnek bázisa nincs, dimenziója: $\dim \mathcal{M}_h = 0$, ami azonos a szabad ismeretlenek számával.

f) behelyettesítő módszer esetén:

Ha az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszert oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel, akkor a jobb oldalon álló -5, 10, 7 konstansok helyett 0, 0, 0 konstansok állnak a jobb oldalon. A számolási eljárás mutatja, hogy a konstans tagok minden egyenletben nullák lesznek, tehát a visszahelyettesítések után a három kötött ismeretlen:

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 0\,.$$

A folytatás innen ugyanaz, mint a Gauss-Jordan módszer esetében.

2. Példa. *(végtelen sok megoldás esete)*

$$\begin{array}{rrrrrl}
-3x_1 & + x_2 & + x_3 & - x_4 & - 2x_5 & = 2 \\
2x_1 & - x_2 & & & + x_5 & = 0 \\
-x_1 & + x_2 & + 2x_3 & + x_4 & - x_5 & = 8 \\
 & x_2 & + x_3 & + 2x_4 & & = 6 \\ \hline
\end{array}$$

Megoldás.

$\boxed{\text{a)}}$
Láthatóan $m = 4$, $n = 5$, tehát egyenletrendszerünk 4×5-ös. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

$\boxed{\text{b) Gauss-Jordan eliminációval:}}$
(A szükséges magyarázatok az órán ill. az első példa magyarázatainak értelemszerű alkalmazásával.)

$$\begin{array}{rrrrr|r}
-3 & 1 & \boxed{1} & -1 & -2 & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\
\hline\hline
-3 & 1 & \underline{1} & -1 & -2 & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\
5 & -1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\
\hline\hline
1 & -1 & \underline{1} & -1 & 0 & 2 \\
2 & -1 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\
\boxed{-1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
-1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\
\hline\hline
0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 & 6 \\
0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} & 8 \\
\underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Következne ismét az 1. lépés, a generáló elem választása. Azt tapasztaljuk, hogy bár van nem megjelölt sor, abban a sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Három megjelölt elem van, ezért $r = 3$.

Mivel minden nem megjelölt sor utolsó eleme 0 (csak a negyedik sor ilyen), ezért van megoldás. A redukált táblázatot a negyedik sor elhagyásával kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} & 8 \\ \underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 & -4 \end{array}\,.$$

Most állítsuk elő az összes megoldást a redukált táblázatból, átrendezéssel:
Az első sor alapján: $x_3 = 6 - x_2 - 2x_4$.
A második sor alapján: $x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4$.
A harmadik sor alapján: $x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4$.
Tehát az egyenletrendszer összes megoldása:

$$x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4, \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4, \quad x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4\,.$$

A három megjelölt ismeretlen a kötött ismeretlen: x_1, x_3, x_5. A két nem megjelölt ismeretlen a szabad ismeretlen: x_2, x_4.

b) behelyettesítő módszerrel:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -3x_1 &+& x_2 &+& x_3 &-& x_4 &-& 2x_5 &=& 2 \\ 2x_1 &-& x_2 &&&&&+& x_5 &=& 0 \\ -x_1 &+& x_2 &+& 2x_3 &+& x_4 &-& x_5 &=& 8 \\ && x_2 &+& x_3 &+& 2x_4 &&&=& 6 \end{array} \longrightarrow x_3 = 3x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 2$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2(3x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 2) + x_4 - x_5 = 8 \\ x_2 + (3x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + 2) + 2x_4 = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 4 \\ 3x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \end{array} \longrightarrow x_5 = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + 3x_4 + 3(-2x_1 + x_2) = 4 \\ 3x_1 + 3x_4 + 2(-2x_1 + x_2) = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \end{array} \longrightarrow x_1 = 2x_2 + 3x_4 - 4$$

$$-(2x_2 + 3x_4 - 4) + 2x_2 + 3x_4 = 4$$

$$0x_2 + 0x_4 = 0$$

Az ismeretlenek kifejezésének folyamata befejeződött, mert bár az egyenletek nem fogytak el, a megmaradt utolsó egyenletből már nem lehet ismeretlent kifejezni a 0 együtthatók miatt.

A kifejezett ismeretlenek váltak kötötté: x_3, x_5, x_1.

A megmaradt utolsó egyenlet a benne szereplő x_2, x_4 bármely értéke mellett igaz, ezért x_2 és x_4 szabad ismeretlenek. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

A megoldások meghatározásához most is visszafelé haladva számítjuk ki a kötött ismeretleneket:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_4 - 4; \qquad x_5 = -2(2x_2 + 3x_4 - 4) + x_2 = -3x_2 - 6x_4 + 8;$$
$$x_3 = 3(2x_2 + 3x_4 - 4) - x_2 + x_4 + 2(-3x_2 - 6x_4 + 8) + 2 = -x_2 - 2x_4 + 6\,.$$

Az egyenletrendszer végtelen sok megoldása:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_4 - 4; \qquad x_5 = -3x_2 - 6x_4 + 8; \qquad x_3 = -x_2 - 2x_4 + 6 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

$\boxed{\text{c)}}$

Mivel három kötött ismeretlen van, ezért az együtthatómátrix rangja: $\operatorname{rang}(A) = 3$.

$\boxed{\text{d)}}$

Mindkét megoldási módszerrel azt kaptuk, hogy

$$x_1 = -4 + 2x_2 + 3x_4; \quad x_5 = 8 - 3x_2 - 6x_4; \quad x_3 = 6 - x_2 - 2x_4 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

Ezeket vektorba rendezve, és az ún. szétválasztási technikát alkalmazva kapjuk a vektor alakú megoldást:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ 6 - x_2 - 2x_4 \\ x_4 \\ 8 - 3x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ebből leolvasható, hogy

$$x^B = (-4, 0, 6, 0, 8), \qquad v_2 = (2, 1, -1, 0, -3), \qquad v_4 = (3, 0, -2, 1, -6)\,.$$

$\boxed{\text{e)}}$

Az egyenletrendszer megoldáshalmaza végtelen halmaz:

$$\mathcal{M} = \{x^B + x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}\,.$$

$\boxed{\text{f) Gauss-Jordan módszer esetén:}}$

A homogén egyenletrendszer összes megoldása (a redukált táblázatban 0-ákat gondolunk a vonaltól jobbra):

$$x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 2x_2 + 3x_4, \quad x_3 = x_2 - 2x_4, \quad x_5 = 3x_2 - 6x_4\,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -x_2 - 2x_4 \\ x_4 \\ -3x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = x_2 v_2 + x_4 v_4\,.$$

A megoldáshalmaz:

$$\mathcal{M}_h = \{x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(v_2,\, v_4) = \operatorname{Ker}(A)\,.$$

$\mathcal{M}_h$ bázisa: $v_1,\ v_2$, $\dim \mathcal{M}_h = 2$.

$\boxed{\text{f) behelyettesítő módszer esetén:}}$

Ha az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszert oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel, akkor a jobb oldalon álló 2, 0, 8, 6 konstansok helyett 0, 0, 0, 0 konstansok állnak a jobb oldalon. A számolási eljárás mutatja, hogy a konstans tagok minden egyenletben nullák lesznek, tehát a visszahelyttesítések után a három kötött ismeretlen:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_4; \quad x_5 = -3x_2 - 6x_4; \quad x_3 = -x_2 - 2x_4 \quad (x_2,\, x_4 \in \mathbb{R})\,.$$

A folytatás innen ugyanaz, mint a Gauss-Jordan módszer esetében.

3. Példa. *(inkonzisztens eset)*

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - \ x_3 + 2x_4 &=& -1 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 &=& 2 \\ 4x_1 + \ x_2 + 5x_3 \qquad &=& 1 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás.

$\boxed{\text{a)}}$

Láthatóan $m = 3$, $n = 4$, tehát egyenletrendszerünk 3×4-es. Együtthatómátrixa és jobb oldali b vektora:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}\,, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,.$$

$\boxed{\text{b) Gauss-Jordan eliminációval:}}$

A szükséges magyarázatok az órán ill. az első példa magyarázatainak értelemszerű alkalmazásával.

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\
1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\
4 & \boxed{1} & 5 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-10 & 0 & -16 & \boxed{2} & -4 \\
-15 & 0 & -24 & 3 & -2 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-5 & 0 & -8 & \underline{1} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
4 & \underline{1} & 5 & 0 & 1
\end{array}
$$

Következne ismét az 1. lépés, a generáló elem választása. Azt tapasztaljuk, hogy bár van nem megjelölt sor, abban a sorban a függőleges vonaltól balra csupa 0 áll, ezért nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt. Két megjelölt elem van, ezért $r = 2$.

Mivel van olyan nem megjelölt sor, melynek utolsó eleme nem 0 (a második sor ilyen ún. tilos sor), ezért nincs megoldás, az egyenletrendszer ellentmondásos (inkonzisztens).

$\boxed{\text{b) behelyettesítő módszerrel:}}$

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\
x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\
4x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \quad \longrightarrow x_2 = 1 - 4x_1 - 5x_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 3(1 - 4x_1 - 5x_3) - x_3 + 2x_4 = -1 \\
x_1 + 4(1 - 4x_1 - 5x_3) - 4x_3 + 3x_4 = 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-10x_1 - 16x_3 + 2x_4 = -4 \quad \longrightarrow x_4 = -2 + 5x_1 + 8x_3 \\
-15x_1 - 24x_3 + 3x_4 = -2
\end{array}
$$

$$-15x_1 - 24x_3 + 3(-2 + 5x_1 + 8x_3) = -2$$

$$0x_1 + 0x_3 = 4$$

Az ismeretlenek kifejezésének folyamata befejeződött, mert bár az egyenletek nem fogytak el, a megmaradt utolsó egyenletből már nem lehet ismeretlent kifejezni a 0 együtthatók miatt.

A kifejezett ismeretlenek váltak kötötté: x_2, x_4.

A megmaradt utolsó egyenlet a benne szereplő x_1, x_3 semmilyen értéke mellett sem igaz, ezért az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

c)

A Gauss-Jordan módszer esetén két megjelölt ismeretlen van, ezért $\operatorname{rang}(A) = 2$.
A behelyettesítő módszer esetén két kötött ismeretlen van, ezért $\operatorname{rang}(A) = 2$.

d)

Mivel nincs megoldás, ezért a vektor alakú megoldás sem létezik.

e)

A megoldáshalmaz az üres halmaz: $\mathcal{M} = \emptyset$.

f) Gauss-Jordan módszer esetén:

A homogén egyenletrendszer összes megoldása (a redukált táblázatban 0-ákat gondolunk a vonaltól jobbra):

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -4x_1 - 5x_3, \quad x_4 = 5x_1 + 8x_3\,.$$

Vektor alakban:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_1 - 5x_3 \\ x_3 \\ 5x_1 + 8x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

A homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$\mathcal{M}_h = \{x_2 v_2 + x_4 v_4 \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(v_2,\, v_4) = \operatorname{Ker}(A)\,.$$

$\mathcal{M}_h$ bázisa: $v_1 = (1, -4, 0, 5), \quad v_3 = (0, -5, 1, 8)$. Továbbá $\dim \mathcal{M}_h = 2$.

f) behelyettesítő módszer esetén:

Ha az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszert oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel, akkor a jobb oldalon álló -1, 2, 1 konstansok helyett 0, 0, 0 konstansok állnak a jobb oldalon. A számolási eljárás mutatja, hogy a konstans tagok minden egyenletben nullák lesznek, tehát a visszahelyttesítések után a két kötött ismeretlen:

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -4x_1 - 5x_3, \quad x_4 = 5x_1 + 8x_3\,.$$

A folytatás innen ugyanaz, mint a Gauss-Jordan módszer esetében.

18.26. Megjegyzés. A három számpéldát végigkövetve megállapíthatjuk, hogy a Gauss-Jordan módszer táblázatai megfelelnek a behelyettesítő módszer során felírt egyenletrendszereknek. Ezért – leegyszerűsítve – azt mondhatjuk, hogy a két módszer lényegében ugyanazokat a lépéseket csinálja, csak a Gauss-Jordan-módszer táblázatokkal ábrázolja az egyenletrendszereket, a behelyettesítő módszer pedig ténylegesen leírja az egyenleteket. A műveletszám ezért mindkét módszernél kb. ugyanannyi, viszont a Gauss-Jordan módszernél lényegesen kevesebb az írásmunka. Kis méretű rendszereknél az eltérés alig érzékelhető. Nagyobb méretűeknél (pl. a 2. példa 4×5-ös egyenletrendszere már ilyen) a Gauss-Jordan módszer érezhetően hatékonyabb: sokkal kevesebbet kell írni, mint a behelyettesítő módszer esetén, és az adatok tárolása is áttekinthetőbb.

18.1.6. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a vektorrendszer rangját.

2. Sorolja fel azt a három rangtartó átalakítást, amit vektorrendszerekre tanultunk.

3. Mondja ki az oszlopvektortér és a sorvektortér dimenziója közti kapcsolatról szóló tételt.

4. Definiálja a mátrix rangját.

5. Sorolja fel azt a három rangtartó átalakítást, amit mátrixokra tanultunk.

6. Írja fel a lineáris egyenletrendszer skalár, vektor illetve mátrix alakját.

7. Definiálja a következő halmazokat: $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_h$.

18.1.7. Bizonyítandó tételek

1. $\mathcal{M}_h$ altér.

2. A Gauss-Jordan-módszer során kapott r szám az együtthatómátrix rangjával egyenlő.

18.2. Feladatok

18.2.1. Órai feladatok

1. Adottak az alábbi lineáris egyenletrendszerek:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 8 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & = & 6 \\ \hline \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

Mindhárom esetben a feladatok az alábbiak:

a) Írjuk fel az egyenletrendszer méretét, együtthatómátrixát és jobb oldali b vektorát.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert (megoldhatóság eldöntése, összes megoldás megadása skalár alakban, kötött ismeretlenek, szabad ismeretlenek)

c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?

d) Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is.

e) Amennyiben van megoldás, írjuk fel a megoldáshalmazt ($\mathcal{M}$).

f) Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldását, megoldáshalmazát ($\mathcal{M}_h = \mathrm{Ker}\,(A)$). Adjuk meg $\mathcal{M}_h$ egy bázisát. Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

2. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} .$$

Határozzunk meg egy bázist a

$$\mathrm{Ker}\,(A) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$$

altérben. Hány dimenziós $\mathrm{Ker}\,(A)$?

18.2.2. További feladatok

1. Adottak az alábbi lineáris egyenletrendszerek:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

Mindegyik esetben a feladatok az alábbiak:

a) Írjuk fel az egyenletrendszer méretét, együtthatómátrixát és jobb oldali b vektorát.

b) Oldjuk meg az egyenletrendszert (megoldhatóság eldöntése, összes megoldás megadása skalár alakban, kötött ismeretlenek, szabad ismeretlenek)

c) Mennyi az együtthatómátrix rangja?

d) Amennyiben van megoldás, írjuk fel azt vektor alakban is.

e) Amennyiben van megoldás, írjuk fel a megoldáshalmazt ($\mathcal{M}$).

f) Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldását, megoldáshalmazát ($\mathcal{M}_h = \operatorname{Ker}(A)$). Adjuk meg $\mathcal{M}_h$ egy bázisát. Hány dimenziós az $\mathcal{M}_h$ altér?

2. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Határozzunk meg egy bázist a

$$\operatorname{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$$

altérben. Hány dimenziós $\operatorname{Ker}(A)$?

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

19. Kapcsolat az inverz mátrixszal

19.1. Az elméleti anyag

19.1.1. Négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer

19.1. Tétel. (Négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszer) *Tekintsük az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ négyzetes mátrixszal és a $b \in \mathbb{K}^n$ vektorral felírt lineáris $Ax = b$ egyenletrendszert. Ekkor*

a) $\operatorname{rang}(A) = n$ *esetben az egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása*

b) $\operatorname{rang}(A) \leq n-1$ *esetben az egyenletrendszernek vagy nem létezik megoldása, vagy pedig végtelen sok megoldása létezik*

Bizonyítás.
a) Tegyük fel, hogy $r = \operatorname{rang}(A) = n$.

Ekkor A oszlopvektorai n-tagú lineárisan független rendszert alkotnak az n dimenziós $\mathbb{K}^n$ térben, tehát bázist alkotnak $\mathbb{K}^n$-ben. Következésképpen $\mathrm{O}(A) = \mathbb{K}^n$. Ezért fennáll, hogy $b \in \mathrm{O}(A)$, vagyis létezik megoldás.

Másrészt a szabadsági fok $n - r = n - n = 0$, ezért a megoldás egyértelmű.

b) Tegyük fel, hogy $r = \operatorname{rang}(A) \leq n-1$.

Ebben az esetben

$$\dim \mathrm{O}(A) = r < n = \dim \mathbb{K}^n$$

miatt $\mathrm{O}(A)$ valódi altere $\mathbb{K}^n$-nek. Ha tehát $b \notin \mathrm{O}(A)$, akkor nincs megoldás. Ha viszont $b \in \mathrm{O}(A)$, akkor létezik megoldás, és a szabadsági fok

$$n - r \geq n - (n-1) = 1$$

ezért a megoldások száma végtelen. □

19.1.2. Inverz mátrix és lineáris egyenletrendszer

A négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerről elmondottakat felhasználhatjuk mátrixok inverzének meghatározásához is.

19.2. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ egy négyzetes mátrix. Ekkor*

a) $\operatorname{rang} A = n \quad \Longrightarrow \quad$ *A invertálható (reguláris);*
b) $\operatorname{rang} A < n \quad \Longrightarrow \quad$ *A nem invertálható (szinguláris).*

Bizonyítás. Jelölje I az $n \times n$-es egységmátrixot. Ennek oszlopai a kanonikus egységvektorok:

$$I = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} .$$

Keressük A inverzét, azaz keressük az

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

mátrixot úgy, hogy $AX = I$ teljesüljön.

Az $AX = I$ mátrixegyenletet felírhatjuk így:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} ,$$

ami ekvivalens az alábbi lineáris egyenletrendszerek együttesével:

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n . \tag{19.1}$$

Ezek után rátérünk az a) és a b) állítások igazolására:

a) Mivel ebben az esetben $r = n$, ezért – felhasználva előző tételt is – mindegyik egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Ebből következik, hogy A^{-1} létezik, és hogy A^{-1} oszlopai az $x_1, \dots, x_n$ megoldásvektorok.

b) Mivel $\dim \mathrm{O}(A) = r < n$, ezért mindegyik $e_1, \dots, e_n$ kanonikus egységvektor nem lehet $\mathrm{O}(A)$-ban. Ezért – felhasználva előző tételt is – a fenti egyenletrendszer-együttesből legalább az egyik egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása. Következésképpen A^{-1} nem létezik. □

19.3. Megjegyzés. Tételünkből következik, hogy annak a) pontja is és b) pontja is valójában ekvivalencia.

Mindezek után – figyelembe véve az inverz és a determináns kapcsolatát is – így jellemezhetjük a reguláris és a szinguláris mátrixokat:

Az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ reguláris mátrix öt ekvivalens jellemzése:

1. $\exists A^{-1}$

2. $\det(A) \neq 0$

3. $\mathrm{rang}\,(A) = n$

4. A oszlopai lineárisan függetlenek

5. A sorai lineárisan függetlenek

Az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ szinguláris mátrix öt ekvivalens jellemzése:

1. $\nexists A^{-1}$

2. $\det(A) = 0$

3. $\operatorname{rang}(A) < n$

4. A oszlopai lineárisan összefüggők

5. A sorai lineárisan összefüggők

Megjegyezzük, hogy tetszőleges mátrix rangja egyenlő a „benne található” maximális méretű reguláris részmátrix méretével. Erről bővebben a Függelék-ben olvashatunk „Rangot adó részmátrix” címen.

19.1.3. Az inverz mátrix meghatározása Gauss-Jordan módszerrel

Az előző szakasz alapján megállapíthatjuk, hogy egy $n \times n$-es mátrix inverzének meghatározásához n db lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Műveletigény szempontjából ez hatékonyabb, mint a determinánsoknál tanult inverzmátrix meghatározás. Eljárhatnánk tehát úgy, hogy ezt az n db lineáris egyenletrendszert egymás után megoldjuk.

Azonban ennek az n db lineáris egyenletrendszernek az együtthatómátrixa közös, ezért hatékonyabb eljáráshoz juthatunk, ha ezt az n db egyenletrendszert nem egymás után, hanem „párhuzamosan” oldjuk meg. A Gauss-Jordan módszer ezt lehetővé teszi, csak annyit kell módosítanunk rajta, hogy az induló táblázatban a függőleges vonaltól jobbra nem 1 db oszlopot veszünk fel, hanem n db oszlopot, mégpedig – (19.1) miatt – az $e_1, \ldots, e_n$ kanonikus egységvektorokat. Az így meghosszabbított sorokkal végezzük a tanult műveleteket.

– Ha leálláskor nincs meg az n db megjelölt elem, akkor a mátrix szinguláris, inverze nincs.

– Ha leálláskor megvan az n db megjelölt elem, akkor a mátrix reguláris. Inverzének leolvasásához rendezzük át a redukált táblázat (mely ez esetben azonos az utolsó számított táblázattal) sorait úgy, hogy a függőleges vonaltól balra eső rész egységmátrix legyen (ez megtehető, mivel ez a rész olyan, hogy minden sorában és minden oszlopában 1 db 1-es áll, s a többi elem 0). Ekkor a mátrix inverze az átrendezés utáni táblázat függőleges vonaltól jobbra eső része.

A mátrix rangja pedig a megjelölt elemek számával egyenlő.

Nézzük meg mindezt az alábbi két kidolgozott példán:

1. Példa. Gauss-Jordan módszer alkalmazásával számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mátrix inverzét.

Megoldás.

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\
3 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0\\
2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1\\
\hline\hline
-1 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0\\
3 & \underline{1} & -2 & 0 & 1 & 0\\
11 & 0 & -10 & 0 & 3 & 1\\
\hline\hline
-1 & 0 & \underline{1} & 1 & -2 & 0\\
1 & \underline{1} & 0 & 2 & -3 & 0\\
\boxed{1} & 0 & 0 & 10 & -17 & 1\\
\hline\hline
0 & 0 & \underline{1} & 11 & -19 & 1\\
0 & \underline{1} & 0 & -8 & 14 & -1\\
\underline{1} & 0 & 0 & 10 & -17 & 1\\
\hline\hline
\underline{1} & 0 & 0 & 10 & -17 & 1\\
0 & \underline{1} & 0 & -8 & 14 & -1\\
0 & 0 & \underline{1} & 11 & -19 & 1
\end{array}
$$

Innen kiolvashatjuk, hogy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -17 & 1 \\ -8 & 14 & -1 \\ 11 & -19 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Mivel három megjelölt elem van, ezért a mátrix rangja: 3.

2. Példa. Gauss-Jordan módszer alkalmazásával számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mátrix inverzét.

Megoldás.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & \boxed{1} & -7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & -1 \\ \boxed{2} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & \underline{1} & -7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ \underline{1} & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -5/2 & 0 & 3/2 & 1 \end{array}$$

Az eljárás leállt, mivel már nem lehet generáló elemet választani. Mivel nincs meg a 3 db megjelölt elem, ezért a mátrixnak nincs inverze, a mátrix szinguláris.

Mivel két megjelölt elem van, a mátrix rangja 2.

4×4-es mátrix inverzére a függelékben találunk példát.

19.1.4. Determináns számítás Gauss-Jordan módszerrel

Egy $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ négyzetes mátrix determinánsát az alábbi módon határozhatjuk meg Gauss-Jordan módszerrel:

Legyen $A_0 = A$ az induló mátrix (táblázat), ebből kiindulva hozzuk létre – a Gauss-Jordan módszer lépéseit alkalmazva – az A_1, A_2, …, A_r számított mátrixokat. Ezek determinánsának változását nyomon tudjuk követni a determináns tulajdonságai alapján. Jelölje az $A_{i-1} \to A_i$ átalakítás generáló elemét g_i $(i = 1, \ldots, r)$. Mivel csak generáló elemmel való osztás és az egyik sor konstans-szorosának egy másik sorhoz való hozzáadása szerepel, ezért írhatjuk, hogy:

$$\det A_1 = \frac{1}{g_1} \cdot \det A_0, \quad \ldots, \quad \det A_r = \frac{1}{g_r} \cdot \det A_{r-1}\,.$$

A generáló elemekkel átszorozva, és az egyenleteket egymásba helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\det A = g_1 \cdot g_2 \cdot \ \ldots\ \cdot g_r \cdot \det A_r\,.$$

<u>Ha $r < n$</u>, akkor az A_r-ben lévő 0-sor miatt $\det A_r = 0$, tehát $\det A = 0$. (Ez az eredmény közvetlenül is adódik abból, hogy $r < n$ esetén A szinguláris.)

<u>Ha $r = n$</u>, akkor

$$\det A = g_1 \cdot g_2 \cdot \ \ldots \ \cdot g_n \cdot \det A_n \,.$$

Az A_n mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan 1 db 1-es van, a többi eleme 0. Így alkalmas sorcserékkel egységmátrixszá alakítható, tehát determinánsa

$$\det A_n = (-1)^k \,,$$

ahol k jelöli a szükséges sorcserék számát. Mindezek alapján tehát azt mondhatjuk, hogy reguláris esetben

$$\det A = g_1 \cdot g_2 \cdot \ \ldots \ \cdot g_n \cdot (-1)^k \,.$$

Szavakban: reguláris induló mátrix esetén a determinánst úgy kapjuk, hogy a generáló elemek szorzatát megszorozzuk 1-gyel vagy (-1)-gyel aszerint, hogy az utolsó számított mátrix páros vagy páratlan számú sorcserével alakítható egységmátrixszá.

Például az előző szakasz 1. példájában szereplő mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)^1 = -1 \,,$$

Az 1-es kitevő magyarázata az, hogy az utolsó számított mátrix 1 sorcserével egységmátrixszá alakítható.

a 2. példában szereplő mátrix determinánsa pedig

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = g_1 \cdot g_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0 \,.$$

4×4-es mátrix determinánsának kiszámítására a függelékben, a 4×4-es mátrix inverzénél találunk példát.

19.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mondja ki a négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerekről szóló tételt (1. eset, 2. eset).

2. Mondja ki a rang és az invertálhatóság kapcsolatáról szóló tételt.

3. Írja fel a reguláris mátrixok 5 ekvivalens jellemzését.

4. Írja fel a szinguláris mátrixok 5 ekvivalens jellemzését.

5. Hogyan határozzuk meg egy mátrix inverzét Gauss-Jordan módszerrel?

6. Hogyan számítjuk ki egy mátrix determinánsát Gauss-Jordan módszerrel?

19.1.6. Bizonyítandó tételek

1. A négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerekről szóló tétel.

2. A mátrix rangja és invertálhatóságának kapcsolatáról szóló tétel.

19.2. Feladatok

19.2.1. Órai feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszert (a feladatot az előző alkalommal már megcsináltuk). Reguláris vagy szinguláris az együtthatómátrix? Mennyi az együtthatómátrix rangja, determinánsa?

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ \hline \end{array}$$

2. Gauss-Jordan módszer alkalmazásával számítsuk ki az

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad\qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mátrix inverzét és determinánsát.

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját és determinánsát. Reguláris vagy szinguláris ez a mátrix?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

4. Tekintsük az előző példa

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

mátrixát, és legyen

$$b_1 = (-1, 3, 7, 0),\ b_2 = (0, 5, 7, -1) \in \mathbb{R}^4.$$

Igazoljuk, hogy
a) Az $Ax = b_1$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van,
b) Az $Ay = b_2$ lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása.

19.2.2. További feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Reguláris vagy szinguláris az együtthatómátrix? Mennyi az együtthatómátrix rangja, determinánsa?

$$a)\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &=& 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &=& 3 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 5 \\ x_1 + x_3 &=& -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &=& 3 \end{array}$$

2. Gauss-Jordan módszer alkalmazásával számítsuk ki az

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad\qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mátrix inverzét és determinánsát.

3. Adott az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mátrix.

(a) Mennyi a rangja? Reguláris vagy szinguláris az A mátrix?

(b) Adjunk meg olyan $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektorokat, hogy az $Ax = b_1$ lineáris egyenletrendszer konzisztens, az $Ax = b_2$ pedig inkonzisztens legyen.

20. Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy adott $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix esetén $\mathbb{K}^n$-ben mely irányokban lesz az A-val való szorzás eredménye párhuzamos ugyanezzel az iránnyal. Az ilyen irányokat fogjuk sajátirányoknak nevezni.

A felvetett kérdés szoros kapcsolatban áll a lineáris transzformációkkal, ezért a fejezet elején röviden érintjük a lineáris transzformációk témakörét is.

20.1. Az elméleti anyag

20.1.1. Lineáris transzformációk a $\mathbb{K}^n$ téren

20.1. Definíció. Egy $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ függvényt a $\mathbb{K}^n$ tér lineáris transzformációjának nevezünk, ha

a) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n)$, és

b) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{K}^n,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

A $\mathbb{K}^n$ tér lineáris transzformációinak halmazát jelölje $L(\mathbb{K}^n)$.

$\mathbb{R}^2$-n lineáris transzformációk például az x-tengelyre való tengelyes tükrözés, az origó körüli, adott α szöggel való elforgatás, az origó középpontú, adott λ arányú középpontos hasonlóság (nyújtás).

Könnyen igazolható, hogy adott $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix esetén lineáris transzformáció a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \varphi(x) = Ax$$

függvény. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{K}^n$ minden lineáris transzformációja ilyen alakú.

20.2. Tétel. *Minden $\varphi \in L(\mathbb{K}^n)$ lineáris transzformációhoz egyértelműen létezik olyan $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix, hogy*

$$\varphi(x) = Ax \quad (\forall\, x \in \mathbb{K}^n)$$

Bizonyítás. Jelölje e_1, e_2, … e_n a $\mathbb{K}^n$ kanonikus bázisát, továbbá legyen $\varphi \in L(\mathbb{K}^n)$.

A keresett A mátrixra vonatkozó fenti követelményt alkalmazzuk $x = e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ választással:

$$A\ j\text{-edik oszlopa} = Ae_j = \varphi(e_j) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

miatt csak az

$$A = [\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \ldots \quad \varphi(e_n)] \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

mátrix jöhet szóba. Ezzel A egyértelműségét igazoltuk.

A létezéshez elég igazolnunk, hogy ez az A mátrix jó, azaz teljesíti a vele szemben támasztott követelményt. Valóban, tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{K}^n$ esetén, felhasználva φ linearitását:

$$Ax = [\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \ldots \quad \varphi(e_n)] \cdot x = [\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \ldots \quad \varphi(e_n)] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \varphi(x)$$

□

20.3. Definíció. A fenti tételben szereplő A mátrixot a φ lineáris transzformáció mátrixának nevezzük. Jelölése: $[\varphi]$

Tehát az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixot akkor és csak akkor nevezzük a $\varphi \in L(\mathbb{K}^n)$ mátrixának (azaz $[\varphi] = A$), ha

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^n : \quad \varphi(x) = Ax$$

Hogyan kereshetjük meg egy lineáris transzformáció mátrixát?

A gyakorlatban egy adott $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ függvény (amelyről esetleg még azt sem tudjuk, hogy lineáris transzformáció-e) esetén a következőképpen járhatunk el:

Az első lehetőség, hogy veszünk egy $n\times n$-es „üres” mátrixot, és megpróbáljuk meghatározni az elemeit úgy, hogy a $\varphi(x) = Ax$ egyenlőség minden $x \in \mathbb{K}^n$ igaz legyen. Ha ez sikerül, akkor készen vagyunk: bebizonyosodott, hogy φ lineáris transzformáció, és megvan φ mátrixa is ($[\varphi] = A$).

Ennél szisztematikusabb módszer az, hogy – felhasználva az előző tételt – $\mathbb{K}^n$ kanonikus egységvektorait $(e_1, \ldots, e_n)$ behelyettesítjük φ-be, és a kapott $\mathbb{K}^n$-beli vektorokkal mint oszlopokkal elkészítjük az A mátrixot:

$$A = [\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \ldots \quad \varphi(e_n)] \in \mathbb{K}^{n\times n}\,.$$

Ha tudjuk, hogy φ lineáris transzformáció, akkor készen vagyunk, $[\varphi] = A$.

Ha nem tudjuk, hogy φ lineáris transzformáció-e, akkor a fent kapott A mátrixszal leellenőrizzük a $\varphi(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{K}^n)$ azonosságot. Ha ez az azonosság igaz, akkor bebizonyítottuk, hogy φ lineáris transzformáció, és megvan a mátrixa is. Ellenkező esetben φ nem lineáris transzformáció, mátrixa nincs.

20.4. Definíció. A $\varphi \in L(\mathbb{K}^n)$ és $\psi \in L(\mathbb{K}^n)$ lineáris transzformációk (ebben a sorrendben vett) kompozíciójának vagy szorzatának nevezzük az alábbi függvényt:

$$\varphi \circ \psi \,:\, \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad (\varphi \circ \psi)(x) = (\varphi\psi)(x) := \varphi(\psi(x)) \qquad (x \in \mathbb{K}^n)\,.$$

Könnyen igazolható, hogy $\varphi\psi \in L(\mathbb{K}^n)$.

20.5. Megjegyzés. Megállapíthatjuk, hogy két lineáris transzformáció szorzata a transzformációk egymás után való alkalmazását jelenti.

20.6. Tétel. *Legyen* $\varphi, \psi \in L(\mathbb{K}^n)$. *Ekkor:*

$$[\varphi\psi] = [\varphi] \cdot [\psi]\,,$$

azaz: lineáris transzformációk kompozíciójának (szorzatának) mátrixa a transzformációk mátrixának összeszorzásával kapható.

Bizonyítás.

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^n : \quad (\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = [\varphi] \cdot \psi(x) = [\varphi] \cdot ([\psi]x) = ([\varphi] \cdot [\psi]) \cdot x\,.$$

□

20.7. Példák.

1. $\mathbb{R}^2$-ben az x-tengelyre tükrözés mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, mivel:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. A síkbeli forgatómátrixokról szóló szakaszban elmondottak alapján $\mathbb{R}^2$-ben az origó körüli, α szöggel való elforgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

3. $\mathbb{K}^n$-ben origó középpontú, $\lambda \in \mathbb{K}$ arányú középpontos hasonlóságnak (nyújtásnak) nevezzük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad \varphi(x) = \lambda x \qquad (x \in \mathbb{K}^n)$$

leképezést. Nyilvánvaló, hogy $\varphi \in L(\mathbb{K}^n)$. Ekkor φ mátrixa

$$[\varphi] = \lambda I\,,$$

ahol I jelöli a $\mathbb{K}^{n\times n}$-beli egységmátrixot. Indoklása egyszerű:

$$\varphi(x) = \lambda x = \lambda \cdot (Ix) = (\lambda I) \cdot x \qquad (x \in \mathbb{K}^n)\,.$$

4. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-t mint a komplex számok ábrázolására szolgáló Gauss-féle számsíkot. Tekintsük továbbá $\mathbb{R}^2$-n azt a φ lineáris transzformációt, amely az origó körüli, $150°$-os elforgatás, majd az eredmény origó középpontú, 3-szoros nyújtása. Ekkor

$$[\varphi] = (3I) \cdot \begin{bmatrix} \cos 150° & -\sin 150° \\ \sin 150° & \cos 150° \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Ebből, a síkbeli forgatómátrixokról szóló szakaszban leírtak alapján azt kapjuk, hogy a most tárgyalt φ transzformáció megfelel a

$$w = (\cos 150^\circ) + (\sin 150^\circ) \cdot i = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i$$

komplex számmal való megszorzásnak.

5. Ismét tekintsük $\mathbb{R}^2$-t mint a Gauss-féle számsíkot, és nézzük meg, hogy $\mathbb{R}^2$ mely lineáris transzformációjának felel meg a $w = 1+i$ komplex számmal való megszorzás.

Mivel $\operatorname{Re} w = 1$ és $\operatorname{Im} w = 1$, ezért, a mátrix-vektor szorzás és a komplex számmal való megszorzás kapcsolatáról szóló 14.11 tétel alapján, a w-vel veló megszorzás megfelel a

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} w & -\operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal való megszorzásnak. Ezért a keresett $\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$ lineáris transzformáció mátrixa:

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}.$$

Ebből kiolvasható, hogy a φ az origó körüli 45°-os elforgatás és az origóból való $\sqrt{2}$-szörös nyújtás egymás utáni alkalmazása.

20.1.2. Alapfogalmak

Érdekes kérdés, hogy egy lineáris transzformáció mely irányokban viselkedik origó középpontú nyújtásként, azaz mely $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektorok és $\lambda \in \mathbb{K}$ számok esetén igaz, hogy

$$\varphi(x) = \lambda x \qquad \text{(a sajátértékfeladat transzformációkkal való megfogalmazása)}$$

A transzformáció mátrixát beírva:

$$Ax = \lambda x \qquad \text{(a sajátértékfeladat mátrixokkal való megfogalmazása)}$$

Ezt a kérdést fogjuk vizsgálni az alábbiakban, mégpedig a mátrixokkal való megfogalmazásban.

20.8. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A sajátértékének nevezzük, ha

$$\exists\, x \in \mathbb{K}^n,\ x \neq 0: \quad Ax = \lambda x\,.$$

Az $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ vektort egy, a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük.

A sajátértékek halmazát az A mátrix spektrumának nevezzük, jele: $\mathrm{Sp}\,(A)$. Tehát:

$$\mathrm{Sp}\,(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists\, x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}:\ Ax = \lambda x\} \subseteq \mathbb{K}\,.$$

Egyszerű átrendezéssel látható, hogy az $Ax = \lambda x$ egyenlet minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén ekvivalens az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerrel:

$$(A - \lambda I)x = 0\,, \tag{20.1}$$

ahol I a $\mathbb{K}^{n\times n}$-beli egységmátrixot jelöli.

Ebből pedig az következik, hogy a $\lambda \in \mathbb{K}$ szám akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha a fenti egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ez pedig – a négyzetes mátrixú lineáris egyenletrendszerekről tanultak értelmében – azzal ekvivalens, hogy az $A - \lambda I$ együtthatómátrix determinánsa 0:

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala a λ változó polinomja, mivel a determináns kifejtésekor csak összeadást és szorzást alkalmazunk. Ennek a polinomnak a $\mathbb{K}$-beli gyökei a sajátértékek. Egy rögzített λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig a (20.1) homogén lineáris egyenletrendszer nem 0 megoldásai.

20.9. Definíció. A

$$P(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

polinomot az A mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük.

20.10. Megjegyzés. Az első sor szerinti kifejtésből látszik, hogy a karakterisztikus polinom n-edfokú, λ^n együtthatója $(-1)^n$. Továbbá $P(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$ miatt adódik, hogy konstans tagja $\det(A)$. Tehát a karakterisztikus polinom alakja:

$$P(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + \ldots + \det(A) \qquad (\lambda \in \mathbb{K})\,.$$

Az 1. fejezet elméleti bevezetőjében szó volt a valós gyökök multiplicitásáról. Az ott leírtakhoz hasonlóan értelmezzük a komplex gyökök multiplicitását is. Ez vezet el a következő definícióhoz:

20.11. Definíció. Jelölje P az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomját, $\lambda \in \mathbb{K}$ pedig az A egy sajátértékét (azaz P egy gyökét). A λ gyök multiplicitását a λ sajátérték algebrai multiplicitásának nevezzük és $a(\lambda)$-val jelöljük.

Mivel a sajátértékek a karakterisztikus polinom $\mathbb{K}$-beli gyökei, megállapíthatjuk a következőket:

- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\mathrm{Sp}\,(A)$ nem üres, legfeljebb n elemű halmaz. Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk meg, mint amennyi az algebrai multiplicitása, akkor a sajátértékek száma pontosan n.

- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ akkor $\mathrm{Sp}\,(A)$ lehet üres is, és elemeinek száma legfeljebb n. Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk meg, mint amennyi az algebrai multiplicitása, még akkor sem biztos, hogy a sajátértékek száma pontosan n. Amennyiben a sajátértékeket algebrai multiplicitással számolva pontosan n-et kapunk, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix minden sajátértéke valós.

Háromszögmátrixok (speciálisan diagonálmátrixok) sajátértékeit egyszerűen megkaphatjuk, erről szól az alábbi megjegyzés.

20.12. Megjegyzés. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ egy (alsó vagy felső) háromszögmátrix. Ekkor – pl. az alsó háromszögmátrix esetében – karakterisztikus polinomja a következő (háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata):

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)\cdot\dots\cdot(a_{nn}-\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{K})\,.$$

Ugyanez lesz a karakterisztikus polinom felső háromszögmátrix esetén is.

Innen pedig az következik, hogy a háromszögmátrix sajátértékei a főátló elemei, s mindegyik sajátérték algebrai multiplicitása annyi, ahányszor a főátlóban szerepel.

Térjünk rá a sajátvektorok vizsgálatára. Először megmutatjuk, hogy minden sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, melyekhez a nullvektort hozzávéve egy alteret kapunk.

20.13. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. Ekkor a λ-hoz tartozó sajátvektorokból és a nullvektorból álló*

$$W_\lambda := W_\lambda(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

halmaz altér $\mathbb{K}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \mathrm{rang}\,(A - \lambda I)$. A λ sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik.

Bizonyítás.

$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid (A-\lambda I)x = 0\} = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)\,.$$

A mátrixok magjáról tudjuk, hogy altér, melynek dimenzióját is megállapítottuk a lineáris egyenletrendszerek tágyalása során. Ezért a fenti halmaz valóban altér, melynek dimenziója:

$$\dim W_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = n - \operatorname{rang}(A-\lambda I)\,.$$

Mivel $\dim W_\lambda = n - \operatorname{rang}(A-\lambda I) \geq 1$, ezért a sajátvektorok halmaza ($W_\lambda \setminus \{0\}$) valóban végtelen. □

Rögzített sajátérték esetén tehát nem az az igazi kérdés, hogy hány sajátvektor tartozik hozzá, hanem az, hogy maximálisan hány független sajátvektor tartozik hozzá, azaz mennyi a W_λ altér dimenziója.

20.14. Definíció. A fenti tételben értelmezett

$$W_\lambda := W_\lambda(A) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

alteret a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük. A W_λ sajátaltér dimenzióját a λ sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük, és $g(\lambda)$-val jelöljük. Beláttuk tehát, hogy $g(\lambda) = n - \operatorname{rang}(A-\lambda I)$.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt, melynek lényege, hogy a geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.

20.15. Tétel.

$$\forall\, \lambda \in \operatorname{Sp}(A): \quad 1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda) \leq n\,.$$

20.1.3. Sajátvektorokból álló bázis (S.B.)

Az alábbi tételt bizonyítás nélkül közöljük. Lényege, hogy a különböző sajátértékekhez linárisan független sajátvektorok tartoznak.

20.16. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az A mátrix k db különböző sajátértéke. Legyen továbbá $s_i \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq s_i \leq g(\lambda_i)$, és $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(s_i)}$ lineárisan független vektorrendszer a W_{λ_i} sajátaltérben ($i = 1, \ldots, k$). Ekkor az*

$$x_i^{(j)} \in \mathbb{K}^n \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, s_i) \tag{20.2}$$

egyesített vektorrendszer lineárisan független.

Vegyük a W_λ sajátaltérből a maximális számú, azaz $g(\lambda)$ db lineárisan független sajátvektort. Ezek egyesített rendszere – az előző tétel következtében – linárisan független, és tagjainak száma $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} g(\lambda)$. Így tehát megállapíthatjuk, hogy

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} g(\lambda) \leq n\,.$$

Amennyiben ez az egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül, akkor n db független sajátvektorunk van az n dimenziós $\mathbb{K}^n$ térben. Ez a vektorrendszer tehát bázis, mely sajátvektorokból áll. Ezt a bázist sajátvektorokból álló bázisnak (S.B.) nevezzük.

Előző eredményünkből egyszerűen következik, hogy

$$\exists \text{ S.B.} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} g(\lambda) = n\,.$$

Az algebrai és a geometriai multiplicitás viszonyáról szóló 20.15 tétel segítségével igazolható az alábbi tétel:

20.17. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ és jelölje a λ sajátérték algebrai multiplicitását $a(\lambda)$, geometriai multiplicitását pedig $g(\lambda)$. Ekkor*

$$\exists \ S.B. \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} a(\lambda) = n \quad \text{\textit{és}} \quad \forall\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A): \quad g(\lambda) = a(\lambda)\,.$$

20.18. Megjegyzés. A $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(A)} a(\lambda) = n$ feltétel jelentése, hogy a karakterisztikus polinomnak – multiplicitással számolva – n db gyöke vak $\mathbb{K}$-ban. Ez a feltétel

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén „automatikusan” teljesül.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén pedig akkor és csak akkor teljesül, ha a karakterisztikus polinom minden gyöke valós.

20.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a lineáris transzformáció fogalmát.

2. Adjon 3 példát lineáris transzformációra.

3. A lináris transzformációk és a mátrixok kapcsolatáról szóló tétel.

4. Definiálja a lineáris transzformáció mátrixának fogalmát.

5. Hogyan határozhatjuk meg egy lineáris transzformáció mátrixát?

6. Definiálja két lineáris transzformáció kompozícióját (szorzatát).

7. Lineáris transzformációk kompozíciójának (szorzatának) mátrixa (tétel).

8. Definiálja a sajátérték és a sajátvektor fogalmát.

9. Definiálja a karakterisztikus polinomot.

10. Definiálja a sajátérték algebrai multiplicitását.

11. Írja fel a háromszögmátrix sajátértékeiről szóló állítást.

12. Milyen halmazt alkotnak a sajátvektorok a nullvektorral együtt?

13. Definiálja a sajátaltér fogalmát. Mennyi a sajátaltér dimenziója?

14. Definiálja a sajátérték geometriai multiplicitását.

15. Írja fel az algebrai és a geometriai multiplicitás kapcsolatáról szóló tételt.

16. Mit tudunk a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorokról?

17. Definiálja a sajátvektorokból álló bázis (S.B.) fogalmát.

18. Írja fel a S.B. létezésének szükséges és elégséges feltételéről szóló tételeket (2 db tétel).

20.1.5. Bizonyítandó tételek

1. A lináris transzformációk és a mátrixok kapcsolatáról szóló tétel.

2. Lineáris transzformációk kompozíciójának (szorzatának) mátrixa.

3. A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei.

4. A háromszögmátrix sajátértékeiről szóló állítás.

5. Egy adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak. Mennyi ennek az altérnek a dimenziója?

20.2. Feladatok

20.2.1. Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását. Van-e sajátvektorokból álló bázis a megfelelő vektortérben?

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel $\mathbb{R}^2$-ben (az xy síkon) az $y = x$ egyenesre való tengelyes tükrözés mátrixát.

3. A Gauss-számsíkon mely komplex számmal való megszorzásnak felel meg az a lineáris transzformáció, amely egy origó körüli 240°-os forgatás és egy origó középpontú 5-szörös nyújtás egymásutánja?

4. A Gauss-számsík mely lineáris transzformációjának felel meg a $w = 2 - 2i$ komplex számmal való megszorzás? Írjuk fel e transzformáció mátrixát!

20.2.2. További feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását. Van-e sajátvektorokból álló bázis a megfelelő vektortérben?

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -9 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)\quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. Írjuk fel $\mathbb{R}^2$-ben (az xy síkon) az $y = -x$ egyenesre való tengelyes tükrözés mátrixát.

3. A Gauss-számsíkon mely komplex számmal való megszorzásnak felel meg az a lineáris transzformáció, amely egy origó körüli 330°-os forgatás és egy origó középpontú 4-szeres nyújtás egymásutánja?

4. A Gauss-számsík mely lineáris transzformációjának felel meg a $w = -2 + 2\sqrt{3}i$ komplex számmal való megszorzás? Írjuk fel e transzformáció mátrixát!

21. Mátrixok diagonalizálhatósága

21.1. Az elméleti anyag

21.1.1. Mátrixok hasonlósága

21.1. Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy a B mátrix hasonló az A mátrixhoz (jele: $A \sim B$), ha

$$\exists\, C \in \mathbb{K}^{n\times n}: \quad C \text{ invertálható, és } B = C^{-1}AC\,.$$

21.2. Megjegyzés. A hasonlósági reláció szimmetrikus, azaz $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Ezért a hasonlóságot így is mondhatjuk: A és B hasonlók (egymáshoz).

21.3. Tétel. *Ha $A \sim B$, akkor $P_A = P_B$, vagyis karakterisztikus polinomjuk megegyezik. Következésképpen megegyeznek a sajátértékek (algebrai multiplicitással) és a determinánsok is.*

Bizonyítás. Legyenek $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $B = C^{-1}AC$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}IC) = \det(C^{-1}(A-\lambda I)C) = \\ &= \det(C^{-1}) \cdot \det(A-\lambda I) \cdot \det(C) = \det(C^{-1}) \cdot \det(C) \cdot \det(A - \lambda I) = \\ &= \det(C^{-1}C) \cdot \det(A-\lambda I) = \det(I) \cdot P_A(\lambda) = 1 \cdot P_A(\lambda) = P_A(\lambda)\,. \end{aligned}$$

□

21.1.2. Diagonalizálhatóság

A következő definícióban mátrixok egy fontos osztályát értelmezzük.

21.4. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy A diagonalizálható ($\mathbb{K}$ felett), ha hasonló egy diagonálmátrixhoz, azaz, ha

$$\exists\, C \in \mathbb{K}^{n\times n},\ C \text{ invertálható}: \quad C^{-1}AC \text{ diagonálmátrix}\,.$$

A C mátrixot diagonalizáló mátrixnak, a $D = C^{-1}AC$ diagonálmátrixot pedig az A diagonális alakjának nevezzük.

21.5. Megjegyzés. Ha A diagonalizálható, akkor diagonális alakjának főátlójában az A sajátértékei állnak, mindegyik sajátérték annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi az algebrai multiplicitása.

Az alábbi tétel lényege, hogy a diagonalizálhatóság egyenértékű a sajátvektorokból álló bázis (S.B.) létezésével.

21.6. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ($\mathbb{K}$ felett), ha létezik S.B. $\mathbb{K}^n$-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A diagonalizálható. Legyenek $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}^n$ a diagonalizáló C mátrix oszlopvektorai:

$$C = [c_1 \ \dots \ c_n] \ .$$

Megmutatjuk, hogy $c_1, \dots, c_n$ egy S.B.

Mivel C invertálható, ezért $c_1, \dots, c_n$ egy n-tagú lineárisan független rendszer, tehát bázis $\mathbb{K}^n$-ben.

Annak igazolásához, hogy a c_j vektorok sajátvektorok, induljunk ki a

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

egyenlőségből, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei. Szorozzuk be az egyenletet C-vel balról:

$$A \cdot [c_1 \dots c_n] = C \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = [c_1 \dots c_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[Ac_1 \dots Ac_n] = [\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n]$$

Az oszloponkénti egyenlőséget felírva:

$$Ac_j = \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

tehát a bázis valóban sajátvektorokból áll.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $c_1, \dots, c_n$ egy S.B. $\mathbb{K}^n$-ben. Legyen $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ a $c_1, \dots, c_n$ oszlopokból felépített mátrix. C nyilvánvalóan invertálható, mivel oszlopai lineárisan függetlenek.

Írjuk fel a sajátérték-egyenleteket:

$$Ac_j = \lambda_j c_j \qquad (j = 1, \dots, n)\, ,$$

majd végezzük el visszafelé a bizonyítás első felében tett átalakításokat. Az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Tehát A valóban diagonalizálható. □

21.7. Megjegyzések.

1. Láthatjuk, hogy a sajátvektorok mint oszlopok sorrendje C-ben ugyanaz, mint a megfelelő sajátértékek sorrendje $C^{-1}AC$ főátlójában.

2. Ha az $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrixnak n db különböző sajátértéke van $\mathbb{K}$-ban, akkor a megfelelő (n db) sajátvektor lineárisan független. Ezért ezek S.B.-t alkotnak, tehát A diagonalizálható.

A most igazolt tételt, és korábbi tételeinket is figyelembe véve, egy $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix ($\mathbb{K}$ feletti) diagonalizálhatóságát a következőképpen célszerű vizsgálni: Először meghatározzuk a mátrix sajátértékeit az algebrai multiplicitásukkal együtt (a karakterisztikus egyenlet megoldása). Ha az algebrai multiplicitások összege kisebb, mint n, akkor már meg is állhatunk, a mátrix nem diagonalizálható. Ha az algebrai multiplicitások összege n, akkor továbblépünk, elkezdjük meghatározni sajátértékenként a geometriai multiplicitásokat. Ezt tehetjük pl. a megfelelő lineáris egyenletrendszerek megoldásával is, vagy egyéb más módon. Ha valamelyik sajátértéknél azt észleljük, hogy a geometriai multiplicitás kisebb az algebrainál, akkor megállunk, a mátrix nem diagonalizálható. Ha a geometriai és az algebrai multiplicitások mindegyik sajátérték esetén azonosak, akkor a mátrix diagonalizálható. Ez esetben a diagonalizáló mátrixot és a diagonális alakot a 21.7. megjegyzés alapján kapjuk.

21.1.3. Két példa

A sajátértékekről, sajátvektorokról, diagonalizálásról tanultak szemléltetésére következik két számpélda.

Mindkét feladatban:

(a) Határozzuk meg a megadott mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitását.

(b) Van-e sajátvektorokból álló bázis a megfelelő vektortérben?

(c) Vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak)

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

1. Példa. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$

Megoldás.
A karakterisztikus polinom:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda) \cdot [(-2-\lambda)(2-\lambda) + 3] + 1 \cdot [3(2-\lambda) - 3] - 1 \cdot [3 - (2+\lambda)] =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) - 2\lambda + 2 = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) - 2(\lambda-1) =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-\lambda^2) = -\lambda(\lambda-1)^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

A sajátértékek e polinom gyökei: $\lambda_1 = 0$, algebrai multiplicitása $a(0) = 1$, mivel egyszeres gyök. $\lambda_2 = 1$, algebrai multiplicitása $a(1) = 2$, mivel kétszeres gyök. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{0;\ 1\}.$$

Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk, mint amennyi az algebrai multiplicitása, akkor így is válaszolhatunk a feladat kérdésére:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1.$$

Keressük meg a sajátvektorokat:
<u>$\lambda_1 = 0$ esetén</u> a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (x_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}).$$

A megfelelő sajátaltér egydimenziós (egyenes), melynek egy bázisa (irányvektora) az $(1,\ 3,\ -1)$ vektor. Emiatt a $\lambda_1 = 0$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(0) = 1$.
<u>$\lambda_2 = 1$ esetén</u> a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x_2, x_3 \in \mathbb{K},\ (x_2, x_3) \neq (0,0)).$$

A megfelelő sajátaltér kétdimenziós (sík), melynek egy bázisa az $(1,1,0),\ (1,0,1)$ vektorrendszer. Emiatt a $\lambda_2 = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(1) = 2$.

Következik a diagonalizálhatóság vizsgálata:

A sajátértékek algebrai multiplicitás-összege $a(1)+a(0) = 2+1 = 3$, ezért továbblépünk. A geometriai multiplicitások rendre megegyeznek az algebraiakkal:

$$g(0) = a(0) = 1, \quad g(1) = a(1) = 2.$$

Ezért az A mátrix ($\mathbb{K}$ felett) diagonalizálható. Megjegyezzük, hogy most nem alkalmazható az az elégséges feltétel, hogy „A-nak 3 különböző sajátértéke van”.

A S.B. a sajátértékenként kapott maximális számú lineárisan független sajátvektorok egyesített rendszere:

$$c_1 = (1,3,-1), \qquad c_2 = (1,1,0) \qquad c_3 = (1,0,1).$$

Diagonalizáló mátrixot most is az S.B. vektoraiból építhetünk fel:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

A megfelelő diagonális alak (a sajátértékeket a főátlóba írjuk):

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$$

2. Példa. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}.$

Megoldás.

A karakterisztikus polinom (most célszerű az első oszlop szerinti kifejtés):

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(2-\lambda)-1] - 1\cdot[(-1)(2-\lambda)+1] = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+1) + 1 - \lambda = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Innen a sajátértékek: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, az algebrai multiplicitásuk pedig $a(1) = 2$, $a(2) = 1$. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{1;\, 2\}.$$

Ha minden sajátértéket annyiszor számolunk, mint amennyi az algebrai multiplicitása, akkor így is válaszolhatunk a feladat kérdésére:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$$

Térjünk rá a sajátvektorokra:
$\underline{\lambda_1 = 1 \text{ esetén}}$ a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (x_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}).$$

A megfelelő sajátaltér egydimenziós (egyenes), melynek egy bázisa (irányvektora) az $(1, 1, 1)$ vektor. Emiatt a $\lambda_1 = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(1) = 1$.

$\underline{\lambda_2 = 2 \text{ esetén}}$ a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek nemtriviális megoldásai a sajátvektorok:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (x_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}).$$

A megfelelő sajátaltér egydimenziós (egyenes), melynek egy bázisa (irányvektora) az $(1, 0, 1)$ vektor. Emiatt a $\lambda_2 = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása: $g(2) = 1$.

Következik a diagonalizálhatóság vizsgálata:

A sajátértékek algebrai multiplicitás-összege $a(1)+a(2) = 2+1 = 3$, ezért továbblépünk. Azonban az algebrai és a geometriai multiplicitás nem egyezik meg minden sajátértéknél, mivel:

$$g(1) = 1 < a(1) = 2.$$

Ezért a másik sajátérték geometriai multiplicitásának megállapítása nélkül is kijelenthetjük, hogy az A mátrix ($\mathbb{K}$ felett) nem diagonalizálható, valamint, hogy S.B. sem létezik $\mathbb{K}^n$-ben, sem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén.

21.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a mátrixok hasonlóságát.

2. Mondja ki a hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai kapcsolatáról szóló tételt.

3. Definiálja a diagonalizálható mátrix fogalmát.

4. Mik a diagonális elemei egy diagonalizálható mátrix diagonális alakjának?

5. Mondja ki a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tételt.

21.1.5. Bizonyítandó tételek

1. Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai kapcsolatáról szóló tétel.

2. A diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tétel.

21.2. Feladatok

21.2.1. Órai feladatok

1. Az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, stb. az előző alkalommal már megvizsgáltuk.

(a) Idézzük fel az eredményeket

(b) Vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak)

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21.2.2. További feladatok

1. Az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, stb. az előző alkalommal már megvizsgáltuk.

(a) Idézzük fel az eredményeket

(b) Vizsgáljuk meg a mátrixot diagonalizálhatóság szempontjából (diagonalizáló mátrix, diagonális alak)

Válaszoljunk a fenti kérdésekre abban az esetben is, ha a mátrixot valós számokból álló mátrixnak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tekintjük, és akkor is, ha a mátrixot komplex számokból álló mátrixnak tekintjük ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -9 \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad c)\quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad e)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

22. Valós euklideszi terek I.

Ebben és a következő fejezetben a középiskolában megismert „vektorok skaláris szorzata" műveletet általánosítjuk vektorterekre. Az egyszerűség kedvéért most csak valós (azaz $\mathbb{R}$ feletti vektorterekről lesz szó.

22.1. Az elméleti anyag

22.1.1. Valós euklideszi tér fogalma

Az eddigi lineáris algebrai fejezetekben a vektor fogalmát általánosítottuk, így jutottunk el a vektorterekhez. A középiskolában azonban a vektorok összeadásán és számmal való szorzásán kívül megismerkedtünk még egy vektorművelettel: a vektorok skaláris szorzatával. Megállapítottuk, hogy a vektorok skaláris szorzata rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok, akkor $\underline{a} \cdot \underline{b}$ egy valós szám (innen ered a skaláris szorzat elnevezés)

2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ (kommutativitás)

3. $(\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$ (szorzat szorzása)

4. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$ (összeg szorzása, disztributivitás)

5. $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$, s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\underline{a} = \underline{0}$

A továbbiakban a skaláris szorzás fogalmát általánosítjuk úgy, hogy tekintünk egy $\mathbb{R}$ feletti vektorteret, s a két vektortér-műveleten kívül egy harmadik műveletet (skaláris szorzás), mely rendelkezik a fenti 5 tulajdonsággal. Az így keletkezett „struktúrát" fogjuk euklideszi térnek nevezni. A fenti 5 tulajdonságot pedig a skaláris szorzat axiómáinak fogjuk nevezni.

Ezen bevezető után lássuk az euklideszi tér definícióját:

22.1. Definíció. Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett az $x + y$ (összeadás) és a λx (számmal szorzás) műveletekkel.

A V vektorteret ($\mathbb{R}$ feletti) euklideszi térnek nevezzük, ha létezik egy

$$xy = x \cdot y = \langle x,\, y \rangle$$

harmadik művelet (ezt skaláris szorzásnak nevezzük), melyre teljesülnek a következő axiómák:

1. $\forall\, x, y \in V: \quad \langle x,\, y\rangle \in \mathbb{R}$

2. $\forall\, x, y \in V: \quad \langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$ (kommutatív)

3. $\forall\, x, y \in V\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda\langle x,\, y\rangle$ (szorzat szorzása számmal)

4. $\forall\, x, y, z \in V: \quad \langle x,\, y+z\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle x,\, z\rangle$ (disztributív)

5. $\forall\, x \in V: \quad \langle x,\, x\rangle \geq 0,$
és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $x = 0$ (a skalárszorzat pozitív definit)

Az $\mathbb{R}$ feletti euklideszi tér más elnevezése: valós euklideszi tér.

22.2. Példák.

1. A síkvektorok és a térvektorok tere valós euklideszi tér a középiskolában megismert

$$\langle \underline{a},\, \underline{b}\rangle = \underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$$

skalárszorzattal, ahol γ az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok közbezárt szögét jelenti.

2. Az $\mathbb{R}^n$ tér is euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett az alábbi skalárszorzattal:

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)\,,$$

ez az alapértelmezett skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Itt fontos megjegyezni, hogy a 12.18 definíció és az utána tett megjegyzés alapján az $\mathbb{R}^n$-beli alapértelmezett skaláris szorzat az $\mathbb{R}^n$-beli vektoroknak megfelelő oszlopvektorok skaláris szorzatával is felírható:

$$\langle x,\, y\rangle = y^T x = x^T y$$

Az $y^T x$ és az $x^T y$ jelölés sok helyen használatos az $\mathbb{R}^n$-beli alapértelmezett skaláris szorzat jelölésére. Tantárgyunkban maradunk az $\langle x,\, y\rangle$ jelölésnél.

A következő tétel az axiómák alapján könnyen igazolható:

22.3. Tétel. (a skalárszorzat alaptulajdonságai)
Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti euklideszi tér. Ekkor minden $x,\, x_i,\, y,\, y_j,\, z \in V$ vektor és minden $\lambda,\, \lambda_i,\, \mu_j \in \mathbb{R}$ skalár esetén igaz, hogy

a) $\langle x,\, \lambda y\rangle = \lambda\cdot\langle x,\, y\rangle$;

b) $\langle x+y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle$;

c) $\langle \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j y_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i\mu_j\langle x_i,\, y_j\rangle$;

d) $\langle x,\, 0\rangle = \langle 0,\, x\rangle = 0$.

22.1.2. Vektor hossza (normája)

A középiskolában megismert

$$\langle \underline{a},\, \underline{b}\rangle = |\,\underline{a}| \cdot |\,\underline{b}| \cdot \cos\gamma$$

skalárszorzat képletéből adódik, hogy

$$\langle \underline{a},\, \underline{a}\rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos 0 = |\underline{a}|^2 \quad \text{azaz} \quad |\underline{a}| = \sqrt{\langle \underline{a},\, \underline{a}\rangle}\,.$$

Ezek után általánosíthatjuk a középiskolában megismert „vektor abszolút értéke" fogalmat:

22.4. Definíció. Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett, és legyen $x \in V$. Az x vektor normáját (más elnevezések: x hossza, x abszolút értéke) így értelmezzük:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle}\,.$$

A $\|.\| : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$ leképezést szintén normának hívjuk.

22.5. Megjegyzés. A norma tekinthető „a vektor önmagával vett skalárszorzatából vont négyzetgyöke" rövidítésének is.

22.6. Példák.

1. A síkvektorok és a térvektorok euklideszi terében a norma azonos a középiskolában megismert „vektor abszolút értéke", „vektor hossza" fogalommal:

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\langle a,\, a\rangle} = \sqrt{|\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{a})} = |\underline{a}|\,.$$

2. $\mathbb{R}^n$-ben az alapértelmezett skaláris szorzatból az alábbi norma származik:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \,\ldots,\, x_n^2}\,,$$

tehát – hasonlóan a középiskolában tanultakhoz – a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök. Ez az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett euklideszi vektornorma.

Itt is fontos megjegyezni, hogy az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett euklideszi vektornorma az $\mathbb{R}^n$-beli vektoroknak megfelelő oszlopvektorok skaláris szorzatával is felírható:

$$\|x\| = \langle x,\, x\rangle = x^T x$$

Az $x^T x$ jelölés sok helyen használatos az $\mathbb{R}^n$–en értelmezett euklideszi vektornorma jelölésére. Tantárgyunkban maradunk az $\langle x,\, x\rangle$, $\|x\|$ jelöléseknél.

Az alábbi tételben a norma két egyszerű tulajdonságát fogjuk igazolni.

22.7. Tétel. (a norma két egyszerű tulajdonsága)

1. $\|x\| \geq 0 \quad (x \in V)$. *Továbbá* $\|x\| = 0 \iff x = 0$ *(pozitív definit);*

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \qquad (x \in V;\ \lambda \in \mathbb{R})$ *(homogén).*

Bizonyítás. Az első állítás azonnal adódik a skaláris szorzat ötödik axiómájából.
A második állítás igazolása:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x,\, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\lambda\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \|x\|^2} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\|x\|^2} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

□

22.8. Megjegyzés. Az első tulajdonság ekvivalens formája:

$$\|\,0\| = 0 \quad \text{és} \quad \forall\, x \in V \setminus \{0\} : \|\,x\| > 0\,.$$

22.9. Definíció. Az $x \in V$ vektort egységvektornak nevezzük, ha normája 1, azaz, ha:

$$\|x\| = 1\,.$$

22.10. Megjegyzés. (normálás) Bármely nem nullvektorból készíthető vele azonos irányú egységvektor a következőképen:
Ha $x \in V \setminus \{0\}$, akkor az

$$x^0 := \frac{x}{\|x\|}$$

megfelel a célnak, ugyanis $\dfrac{1}{\|x\|} > 0$ miatt x és x^0 iránya azonos, továbbá

$$\|x^0\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1\,.$$

Ezt az eljárást (a normával való leosztást) normálásnak nevezzük.

22.1.3. Merőlegesség (ortogonalitás)

A középiskolában megismert

$$\langle \underline{a},\, \underline{b}\rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$$

skalárszorzat képletéből adódik, hogy ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egyike sem nullvektor, akkor e két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nullával egyenlő. Ezt a tényt használjuk fel a merőlegesség (ortogonalitás) definiálásakor euklideszi térben.

Ebben a szakaszban jelöljön V egy $\mathbb{R}$ feletti euklideszi teret.

22.11. Definíció. Az $x, y \in V$ vektorokat egymásra merőlegesnek (ortogonálisnak) nevezzük, ha skaláris szorzatuk 0, azaz, ha

$$\langle x,\, y\rangle = 0\,.$$

Jelölése: $x \perp y$. (Nyilvánvaló, hogy a merőlegesség szimmetrikus reláció.)

22.12. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a nullvektor a tér minden vektorára (önmagára is) merőleges. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy a nullvektor a tér egyetlen olyan vektora, amelyik önmagára merőleges.

22.13. Definíció. (halmazra való merőlegesség) Legyen $\emptyset \neq H \subseteq V$ és $x \in V$. Azt mondjuk, hogy az x vektor merőleges (ortogonális) a H halmazra (jelölése: $x \perp H$), ha merőleges a H halmaz minden elemére, azaz ha

$$\forall\, y \in H: \quad \langle x,\, y\rangle = 0\,.$$

A következő tételben megmutatjuk, hogy egy véges dimenziós altérre való merőlegességhez elegendő egy generátorrendszerére való merőlegesség.

22.14. Tétel. (altérre való merőlegesség) *Legyen $e_1,\, \ldots,\, e_n \in V$ egy vektorrendszer, $W := \operatorname{Span}(e_1,\, \ldots,\, e_n)$, és $x \in V$. Ekkor*

$$x \perp W \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x,\, e_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Bizonyítás.
„$\Longrightarrow$”: Nyilvánvaló az $y := e_i$ választással.
„$\Longleftarrow$”: Legyen $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in W$ egy tetszőleges vektor. Ekkor

$$\langle x,\, y\rangle = \langle x,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x,\, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0\,.$$

□

22.15. Definíció. Legyen $x_1,\, \ldots,\, x_n \in V$ egy véges vektorrendszer.

1. Az $x_1,\, \ldots,\, x_n$ rendszert ortogonális rendszernek (O.R.) nevezzük, ha bármely két tagja egymásra merőleges, azaz, ha

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots\, n\},\ i \neq j: \quad \langle x_i,\, x_j\rangle = 0\,.$$

2. Az $x_1,\, \ldots,\, x_n$ rendszert ortonormált rendszernek (O.N.R.) nevezzük, ha ortogonális rendszer, és minden tagja egységvektor, azaz, ha:

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots\, n\}: \qquad \langle x_i,\, x_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ ha } i \neq j \\ 1 \text{ ha } i = j\,. \end{cases}$$

3. Ha egy O.R. egyúttal bázis is, akkor ortogonális bázisnak (O.B.) nevezzük.

4. Ha egy O.N.R. egyúttal bázis is, akkor ortonormált bázisnak (O.N.B.) nevezzük.

22.16. Megjegyzések.

1. Egyszerűen belátható, hogy

- egy O.R.-ben lehet nullvektor
- egy O.N.R.-ben nem lehet nullvektor
- egy O.R.-ben a nullvektor többször is előfordulhat, de minden más vektor csak legfeljebb egyszer
- egy O.N.R.-ben nincs két azonos vektor

2. (O.R. normálása) Egy O.R.-ből könnyen előállíthatunk olyan O.N.R.-t, amelyik ugyanazt az alteret generálja, mint az eredeti O.R.:

Először hagyjuk el az O.R.-ből az esetleg ott lévő nullvektorokat, majd a visszamaradó rendszer minden vektorát normáljuk (ld. 22.10 Megjegyzés).

22.17. Példák.

1. A síkvektorok euklideszi terében a középiskolában megismert $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok O.N.B.-t alkotnak.

2. A térvektorok euklideszi terében az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorok O.N.B.-t alkotnak.

3. $\mathbb{R}^n$-ben az $e_1, \ldots, e_n$ kanonikus egységvektorok O.N.B.-t alkotnak.

Amint azt a térvektorok körében érzékeljük, az ortogonalitás erősebb, mint a függetlenség. Ezt mondja ki a következő tétel:

22.18. Tétel. (O.R. függetlensége) *Legyen $x_1, \ldots, x_n \in V \setminus \{0\}$ egy O.R. Ekkor ez a rendszer lineárisan független. Következésképpen minden O.N.R. lineárisan független.*

Bizonyítás.
A

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

összefüggőségi egyenletet szorozzuk be skalárisan az x_j vektorral, ahol $j = 1, \ldots, n$:

$$0 = \langle 0,\, x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i,\, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j,\, x_j \rangle\,.$$

Mivel a rendszerből kizártuk a nullvektort, ezért $\langle x_j,\, x_j \rangle \neq 0$. Következésképpen: $\lambda_j = 0$.

Az összefüggőségi egyenletben minden együttható 0, tehát a rendszer valóban lineárisan független. □

Az ortogonális rendszerek másik alapvető tétele következik, a Pitagorasz-tétel általánosítása. Középiskolában a Pitagorasz-tételt úgy ismertük meg, hogy a derékszögű háromszög átfogójának négyzete megegyezik a befogók négyzetösszegével. Vektorok nyelvén ez úgy is megfogalmazható, hogy ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok egymásra merőlegesek, akkor

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 \,.$$

Ezt általánosítjuk akárhány (de véges számú) vektor esetére.

22.19. Tétel. (Pitagorasz-tétel) *Legyen $x_1, \ldots, x_n \in V$ egy véges O.R. Ekkor*

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \,, \tag{22.1}$$

részletesebben:

$$\|x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ \ldots \ \|x_n\|^2 \,.$$

Bizonyítás.

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i ,\, \sum_{j=1}^{n} x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i ,\, x_j \rangle = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \langle x_i ,\, x_j \rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i = j}}^{n} \langle x_i ,\, x_j \rangle =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} 0 + \sum_{i=1}^{n} \langle x_i ,\, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

(Felhasználtuk, hogy $i \neq j$ esetén $\langle x_i ,\, x_j \rangle = 0$.) □

22.1.4. Fourier-kifejtés

Vegyünk egy véges dimenziós alteret a V euklideszi térben. Azt már tudjuk, hogy ennek az altérnek a vektorai előállnak az alteret generáló véges számú vektor lineáris kombinációjaként. E szakasz alapkérdése az, hogy ennek az előállításnak az együtthatói hogyan fejezhetők ki a skaláris szorzat segítségével. Látni fogjuk, hogy ortonormált generátorrendszer esetén a keresett kifejezés igen egyszerű.

Legyen tehát $e_1, \ldots, e_n \in V$ egy vektorrendszer, $W := \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ a rendszer által generált altér, továbbá $x \in W$. Ekkor

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = x \,.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét odalát skalárisan az e_i vektorral ($i = 1, \ldots, n$):

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j ,\, e_i \rangle = \langle x ,\, e_i \rangle \,.$$

Átalakítva:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j,\, e_i\rangle = \langle x,\, e_i\rangle \qquad (i=1,\dots,n)\,. \tag{22.2}$$

Ez egy $n \times n$-es lineáris egyenletrendszer az ismeretlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ együtthatókra.

Az x előállításának együtthatói tehát megoldásai a (22.2) egyenletrendszernek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számok megoldásai a (22.2) egyenletrendszernek. Most „visszafelé” alakítjuk az egyenleteket ($i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j,\, e_i\rangle &= \langle x,\, e_i\rangle \\ \langle x,\, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j,\, e_i\rangle &= 0 \\ \langle x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,\, e_i\rangle &= 0\,. \end{aligned}$$

Mivel $e_1, \dots, e_n$ generátorrendszer a W altérben, ezért az utolsó egyenlet azt jelenti, hogy az $x - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in W$ vektor merőleges a W altérre, tehát (mivel benne van az altérben) önmagára is merőleges. Mivel a térben egyedül a nullvektor merőleges önmagára, ezért

$$x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0 \qquad \text{azaz} \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\,.$$

Tehát a (22.2) egyenletrendszer megoldásai valóban az x előállítását adják.

Ezért megállapíthatjuk, hogy az $x \in W$ vektor előállításában az együtthatók keresése ekvivalens a (22.2) lineáris egyenletrendszer megoldásával.

22.20. Definíció. A (22.2) egyenleteket Gauss-féle normálegyenleteknek, együttesüket pedig Gauss-féle normálegyenlet-rendszernek nevezzük.

A Gauss-féle normálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{bmatrix} \langle e_1,\, e_1\rangle & \langle e_2,\, e_1\rangle & \dots & \langle e_n,\, e_1\rangle \\ \langle e_1,\, e_2\rangle & \langle e_2,\, e_2\rangle & \dots & \langle e_n,\, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_1,\, e_n\rangle & \langle e_2,\, e_n\rangle & \dots & \langle e_n,\, e_n\rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x,\, e_1\rangle \\ \langle x,\, e_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x,\, e_n\rangle \end{pmatrix}\,. \tag{22.3}$$

Ennek együtthatómátrixa csak az $e_1, \dots, e_n$ vektoroktól függ, az x vektortól független. Ez vezet el az alábbi definícióhoz:

22.21. Definíció. Az $e_1, \dots, e_n \in V$ vektorrendszer Gram-mátrixának nevezzük a

$$G := G_n := G(e_1, \dots, e_n) := \begin{bmatrix} \langle e_1,\, e_1\rangle & \langle e_2,\, e_1\rangle & \dots & \langle e_n,\, e_1\rangle \\ \langle e_1,\, e_2\rangle & \langle e_2,\, e_2\rangle & \dots & \langle e_n,\, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_1,\, e_n\rangle & \langle e_2,\, e_n\rangle & \dots & \langle e_n,\, e_n\rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{22.4}$$

mátrixot. Ennek determinánsát az $e_1, \dots, e_n$ vektorrendszer Gram-determinánsának nevezzük.

22.22. Megjegyzés. Amint az látható, a Gram-mátrix elemeit az alábbi képlet adja meg:

$$(G)_{ij} = \langle e_j,\, e_i \rangle \qquad (i, j = 1, \dots, n\,.$$

Tantárgyunknak nem célja Gram-mátrix részletes vizsgálata. Egy érdekes tulajdonságáról a függelékben olvashatunk, „A determináns geometriai jelentése” szakaszban.

Egy $x \in W$ vektor előállításának együtthatóit tehát a Gauss-féle normálegyenletrendszer megoldásával kapjuk. Ez általában sok számolással jár.

Azonban ha az $e_1, \dots, e_n$ vektorrendszer egyúttal O.N.R. is, akkor a Gram-mátrixa az egységmátrixszal azonos, így a megoldás azonnal és egyértelműen adódik:

$$\lambda_i = \langle x,\, e_i \rangle \qquad (i = 1, \dots, n)\,.$$

azaz x egyértelmű előállítása:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i\,.$$

22.23. Definíció. A

$$c_i = \langle x,\, e_i \rangle \qquad (i = 1, \dots, n)$$

számokat az x Fourier-együtthatóinak, az

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i$$

előállítást pedig az x Fourier-kifejtésének nevezzük, az $e_1, \dots, e_n$ O.N.R. szerint.

22.24. Megjegyzések.

1. Az $x \in W$ vektor Fourier-együtthatói tehát azonosak az x koordinátáival a W altér $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázisán.

2. Meggondolásainkat az $x = 0$ esetre alkalmazva lényegében újra eljutunk a 22.18 tételhez, vagyis az ortonormált rendszerek lineáris függetlenségéhez.

22.1.5. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a valós euklideszi tér fogalmát.

2. Mit jelentenek az $y^T x$, $x^T y$, $x^T x$ jelölések?

3. Írja fel a skalárszorzat 4 alaptulajdonságát kimondó tételt.

4. Definiálja a vektor normáját euklideszi térben.

5. Írja fel az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi vektornorma képletét.

6. Írja fel az euklideszi téren értelmezett norma két egyszerű tulajdonságát kimondó tételt.

7. Mit nevezünk egységvektornak euklideszi térben?

8. Mit jelent a normálás?

9. Definiálja az alábbi fogalmakat: két vektor merőlegessége; vektor merőlegessége halmazra.

10. Mondja ki azt a tételt, amely egy véges dimenziós altérre való merőlegességről szól.

11. Definiálja az alábbi fogalmakat: ortogonális rendszer (O.R.); ortonormált rendszer (O.N.R.).

12. Mondja ki az ortogonális rendszerek lineáris függetlenségéről szóló tételt.

13. Írja fel a Pitagorasz-tételt euklideszi térben.

14. Mi az együtthatók képlete, ha egy x vektort felírunk egy $e_1, \ldots, e_n$ O.N.R. vektorainak lineáris kombinációjaként? Hogy nevezzük ezeket az együtthatókat?

22.1.6. Bizonyítandó tételek

1. Az euklideszi téren értelmezett norma két egyszerű tulajdonságáról szóló tétel.

2. Véges dimenziós altérre való merőlegességről szóló tétel.

3. A Pitagorasz-tétel euklideszi térben.

4. Az ortogonális rendszerek lineáris függetlenségéről szóló tétel.

22.2. Feladatok

22.2.1. Órai feladatok

1. Legyenek $w_1, \ldots, w_n$ adott pozitív számok (ún. súlyok). Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett az

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$$

skaláris szorzattal. ($w_i = 1$ esetben kapjuk az alapértelmezett skaláris szorzatot.)

2. Adottak az

$$x := (1, -2, -3, 5), \quad y := (-1, 2, -1, 0), \quad z := (2, -1, 1, 3)$$

vektorok $\mathbb{R}^4$-ben. Számítsuk ki az alábbiakat:

(a) $\langle x,\, y\rangle$

(b) $\|\, x\|$

(c) $\|\, x - z\|$

(d) $\dfrac{\langle x,\, z\rangle \cdot y - \langle y,\, z\rangle \cdot x}{\|\, y\|^2}$

(e) z irányú egységvektor, z-vel ellentétes irányú egységvektor

3. Adott az

$$u_1 := (1, 1, 1, 1),\; u_2 := (1, -1, -1, 1),\; u_3 := (-1, 0, 0, 1)$$

vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben.

(a) Mutassuk meg, hogy az $u_1,\; u_2,\; u_3$ vektorrendszer O.R.

(b) Ellenőrizzük a Pitagorasz-tétel állítását az $u_1,\; u_2,\; u_3$ ortogonális vektorrendszeren.

4. Igazoljuk a paralelogramma-azonosságot a V valós euklideszi térben:

$$\forall\, x, y \in V : \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

22.2.2. További feladatok

1. Legyen $x = (3, -2, 1, 1)$, $y = (4, 5, 3, 1)$ $z = (-1, 6, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$ és legyen $\lambda = -4$. A két oldal kiszámításával ellenőrizzük az alábbi egyenlőségeket:

a) $\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$

b) $\langle x + y,\, z\rangle = \langle x,\, z\rangle + \langle y,\, z\rangle$

c) $\langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda\langle x,\, y\rangle$

2. Az előző feladat adataival számítsuk ki:

$$\frac{\langle x,\, x\rangle}{\langle y,\, z\rangle} \cdot x, \qquad \|\, z - y\| \cdot x, \qquad y \text{ irányú egységvektor}$$

3. Legyen $x_1 = (0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (1, -1, 3, 0)$, $x_3 = (4, 0, 9, 2) \in \mathbb{R}^4$. Döntsük el, hogy az $x = (-1, 1, 0, 2)$ merőleges-e a $\mathrm{Span}\,(x_1,\, x_2,\, x_3)$ altérre.

4. Igazoljuk, hogy lineárisan független vektorrendszer Gram-mátrixa reguláris, lineárisan összefüggő vektorrendszer Gram-mátrixa szinguláris. (Útmutatás: használjuk a Gauss-féle normálegyenlet-rendszert.)

23. Valós euklideszi terek II.

23.1. Az elméleti anyag

23.1.1. A felbontási tétel

Az előző szakaszban megvizsgáltuk – véges dimenziós W altér esetén – egy $x \in W$ vektor előállítását, ha az altér $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszere ortonormált. Így jutottunk el az x Fourier-kifejtéséhez. Mivel x Fourier-együtthatói nem csak $x \in W$ esetén képezhetők, hanem bármely $x \in V$ esetén, ezért természetesen vetődik fel a kérdés, hogy $x \notin W$ esetén mit ad meg a

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i$$

összeg (az ún. Fourier-összeg). Ezzel a kérdéssel foglalkozunk ebben a szakaszban.

23.1. Tétel. (Felbontási tétel)

Legyen $e_1, \ldots, e_n \in V$ egy O.N.R., továbbá $W := \mathrm{Span}\,(e_1, \ldots, e_n)$ a rendszer által generált altér. (Fontos megjegyeznünk, hogy ekkor $e_1, \ldots, e_n$ O.N.B. W-ben.)

Ekkor bármely $x \in V$ vektor egyértelműen felbontható $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in W$ és $x_2 \perp W$. Nevezetesen

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i \quad \textit{és} \quad x_2 = x - x_1 = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i \rangle \cdot e_i\,.$$

Bizonyítás. Először a felbontás létezését igazoljuk úgy, hogy megmutatjuk, hogy a megadott képletek egy helyes felbontást adnak. Jelölje ismét c_i az i-edik Fourier-együtthatót, azaz legyen $c_i = \langle x,\, e_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ezzel a jelöléssel

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \quad \text{és} \quad x_2 = x - x_1 = x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\,.$$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 \in W$ (mivel x_1 az e_i-k lineáris kombinációja).

Az is nyilvánvaló, hogy $x = x_1 + x_2$ (mivel $x_2 = x - x_1$).

Csak azt kell igazolnunk, hogy $x_2 \perp W$. Mivel W altér, a rá való merőlegesség ekvivalens az $e_1, \ldots, e_n$ generátorrendszerre való merőlegességgel (22.14 tétel). Ez viszont egyszerűen adódik az alábbi számolásból:

$$\begin{aligned}
\langle x_2,\, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j,\, e_i \rangle = \langle x,\, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j \langle e_j,\, e_i \rangle = \\
&= \langle x,\, e_i \rangle - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} c_j \langle e_j,\, e_i \rangle - c_i \langle e_i,\, e_i \rangle = \\
&= \langle x,\, e_i \rangle - 0 - c_i \cdot 1 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Második lépésként igazoljuk az egyértelműséget.

Tegyük fel, hogy

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{és} \quad x = x_1' + x_2'$$

is a követelményeknek megfelelő felbontások. Ebből következően

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \quad \text{átrendezve} \quad x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \,. \tag{23.1}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\langle x_1 - x_1',\, x_1 - x_1'\rangle &= \langle x_2' - x_2,\, x_1 - x_1'\rangle = \\ &= \langle x_2',\, x_1\rangle - \langle x_2,\, x_1\rangle - \langle x_2',\, x_1'\rangle + \langle x_2,\, x_1'\rangle = 0 - 0 - 0 + 0 = 0\,,\end{aligned}$$

amiből a skaláris szorzat utolsó axiómája alapján $x_1 - x_1' = 0$, azaz $x_1 = x_1'$ következik. Ekkor viszont (23.1) alapján $x_2 = x_2'$ is azonnal adódik. □

23.2. Megjegyzések.

1. Az x_1 vektort az x vektor W-vel párhuzamos összetevőjének (komponensének) nevezzük, jele $P(x)$. Az x_2 vektor neve: az x vektor W-re merőleges összetevője (komponense), jele $Q(x)$.

2. A $P(x) = x_1$ vektor más elnevezése: az x vektor W altérre eső merőleges vetülete (projekciója). Ha ezt akarjuk hangsúlyozni, akkor $P(x)$ helyett szokás a $\mathrm{proj}_W(x)$ jelölés is. Tételünkből következik, hogy

   $$\mathrm{proj}_W(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, e_i\rangle \cdot e_i \,.$$

   Ezzel megkaptuk a szakasz elején feltett kérdésre a választ:

   $x \in V$ esetén a Fourier-kifejtésben szereplő összeg az x vektornak a $W = \mathrm{Span}\,(e_1, \dots, e_n)$ altérre való merőleges vetületét állítja elő.

   Ez a vetület $x \in W$ esetén természetesen maga az x vektor.

3. Később (ld. 23.6 következmény) meg fogjuk mutatni, hogy bármely véges dimenziós altér generálható véges O.N.R.-rel, így a felbontás tetszőleges véges dimenziós altér esetén elvégezhető.

A felbontási tétel és annak képletei könnyen általánosíthatók arra az esetre, amikor a W alteret egy ortogonális (tehát nem feltétlenül ortonormált) rendszer generálja. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a generáló ortogonális rendszerben nincs nullvektor.

Legyen tehát $u_1, \dots, u_n \in V \setminus \{0\}$ egy O.R., $W := \mathrm{Span}\,(u_1, \dots, u_n)$ a rendszer által generált altér, továbbá $x \in V$. Ekkor normálással kapjuk az

$$\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

O.N.R.-t, amely nyilvánvalóan a W alteret generálja. Erre már alkalmazhatjuk a felbontás levezetett képleteit:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\, \frac{u_i}{\|u_i\|}\rangle \cdot \frac{u_i}{\|u_i\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_i\|^2} \cdot \langle x,\, u_i\rangle \cdot u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,\, u_i\rangle}{\langle u_i,\, u_i\rangle} \cdot u_i$$

$$Q(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x,\, u_i\rangle}{\langle u_i,\, u_i\rangle} \cdot u_i$$

23.3. Tétel. (vetület hosszának becslése) *A felbontási tétel feltételei mellett:*

$$\|\, P(x)\| \leq \|\, x\|\,.$$

Itt egyenlőség akkaor és csk akkor áll, ha $Q(x) = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x \in W$.

Bizonyítás. Mivel $P(x) \perp Q(x)$, alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, majd hagyjuk el a nemnegatív $\|\, Q(x)\|^2$ tagot:

$$\|\, x\|^2 = \|\, P(x) + Q(x)\|^2 = \|\, P(x)\|^2 + \|\, Q(x)\|^2 \geq \|\, P(x)\|^2\,,$$

amiből négyzetgyökvonás után kapjuk a bizonyítandó állítást. Nyilvánvaló, hogy az utolsó becslésnél akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $Q(x) = 0$. □

23.4. Megjegyzés. Hasonlóan igazolhatjuk a $\|\, Q(x)\| \leq \|\, x\|$ egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $P(x) = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x \perp W$.

23.1.2. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás

Legyen $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n \in V$ egy véges lineárisan független vektorrendszer. Az alábbiakban ismertetjük a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást, amellyel ebből a rendszerből kiindulva létrehozunk egy olyan

$$u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n \in V \setminus \{0\}$$

ortogonális rendszert, amely ekvivalens az eredeti rendszerrel abban az értelemben, hogy

$$\forall\, k \in \{1, 2, , \ldots, n\} : \quad \mathrm{Span}\,(b_1,\, \ldots,\, b_k) = \mathrm{Span}\,(u_1,\, \ldots,\, u_k)\,.$$

Speciálisan ($k = n$ esetén): a két rendszer ugyanazt az alteret generálja.

Az eljárás a következő:

1. lépés: $u_1 := b_1$

2. lépés: $u_2 := b_2 - \dfrac{\langle b_2,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1$

3. lépés: $u_3 := b_3 - \dfrac{\langle b_3,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 - \dfrac{\langle b_3,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle} \cdot u_2$

$\vdots$

n. lépés: $u_n := b_n - \dfrac{\langle b_n,\, u_1\rangle}{\langle u_1,\, u_1\rangle} \cdot u_1 - \dfrac{\langle b_n,\, u_2\rangle}{\langle u_2,\, u_2\rangle} \cdot u_2 - \ldots - \dfrac{\langle b_n,\, u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1},\, u_{n-1}\rangle} \cdot u_{n-1}.$

Igazolható, hogy ez az eljárás olyan $u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n$ rendszerhez vezet, amelyet a feladat követelményei előírnak.

23.5. Megjegyzések.

1. Az eljárás lényege – s ez egyúttal egy szemléletes „igazolását” is adja az eljárás helyességének – az, hogy

- u_2 a b_2 merőleges komponense a $\operatorname{Span}(u_1)$ altérre vonatkozóan
- u_3 a b_3 merőleges komponense a $\operatorname{Span}(u_1,\, u_2)$ altérre vonatkozóan

  $\vdots$
- u_n a b_n merőleges komponense a $\operatorname{Span}(u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_{n-1})$ altérre vonatkozóan.

2. Szintén ekvivalens O.R.-hez jutunk, ha a k-adik lépésben kapott u_k vektort megszorozzuk egy $c_k \neq 0$ konstanssal, és a továbbiakban ezt a $c_k u_k$ vektort használjuk u_k helyett. Ha pl. $c_k = \dfrac{1}{\|\, u_k\|}$-val szorzunk, akkor ekvivalans O.N.R.-hez jutunk (normalizált Gram-Schmidt eljárás).

23.6. Következmény. Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ felett, $1 \leq \dim V = n < \infty$. Ekkor V-ben létezik ortogonális bázis is és ortonormált bázis is.

Vegyük ugyanis a tér egy $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ bázisát, és alkalmazzuk rá a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást. Így egy $u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n$ ortogonális bázishoz jutunk. Ennek normálásával pedig ortonormált bázist kapunk.

Ezzel megkaptuk a 23.2 megjegyzésben előre jelzett eredményt: minden véges dimenziós, nem zéró altér generálható véges O.N.R.-rel, tehát a párhuzamos és merőleges komponensekre bontás minden véges dimenziós altér esetén elvégezhető.

23.1.3. Háromszög-egyenlőtlenség

Az elemi geometriában tanultuk, hogy a háromszög két oldalának összege legalább akkora, mint a harmadik oldal. Vektorokkal megfogalmazva ez azt jelenti, hogy bármely $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor esetén

$$|\,\underline{a}+\underline{b}| \leq |\,\underline{a}| + |\,\underline{b}|$$

Ebben a szakaszban bebizonyítjuk a fenti, ún. háromszög-egyenlőtlenséget tetszőleges euklideszi térben. Ehhez először egy önmagában is fontos alapvető egyenlőtlenséget igazolunk.

23.7. Tétel. **(Cauchy-egyenlőtlenség)** *Legyen $x, y \in V$. Ekkor*

$$|\,\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Bizonyítás. $y = 0$ esetén az állítás egyenlőség formájában teljesül. Tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Ekkor alkalmazhatjuk a felbontási tételt az $u_1 := y$ egyetlen tagból álló O.R.-re:

$$x = P(x) + Q(x), \quad \text{ahol} \quad P(x) = \sum_{i=1}^{1} \frac{\langle x,\, u_i\rangle}{\langle u_i,\, u_i\rangle} \cdot u_i = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle} \cdot y = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|\,y\|^2} \cdot y$$

A vetület hosszának becsléséről szóló 23.3 tételbe írjuk be $P(x)$ képletét, majd rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$\left\| \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|\,y\|^2} \cdot y \right\| \leq \|\,x\|$$

$$\left| \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|\,y\|^2} \right| \cdot \|\,y\| \leq \|\,x\|$$

$$\frac{|\,\langle x,\, y\rangle|}{\|\,y\|^2} \cdot \|\,y\| \leq \|\,x\|$$

$$|\,\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

$\square$

23.8. Megjegyzés. A bizonyításból kiderül, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha x és y lineárisan összefüggők (egyik a másik skalárszorosa). Könnyen kiszámolható az is, hogy ha x és y egyirányú (azaz $\exists\, \lambda > 0 :\ x = \lambda y$), akkor az egyenlőség

$$\langle x,\, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$$

formában, ha pedig x és y ellentétes irányú (azaz $\exists\, \lambda < 0 :\ x = \lambda y$), akkor az egyenlőség

$$\langle x,\, y\rangle = -\|x\| \cdot \|y\|$$

formában teljesül.

A Cauchy-egyenlőtlenség segítségével igazolhatjuk a norma harmadik alapvető tulajdonságát, a háromszög-egyenlőtlenséget. Az első két alapvető tulajdonságot a 22.7 tételben tárgyaltuk.

23.9. Tétel. (háromszög-egyenlőtlenség)

$$\forall\, x,\, y \in V: \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Bizonyítás.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \langle y,\, x\rangle + \langle y,\, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\cdot|\langle x,\, y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\,,$$

amiből négyzetgyökvonás után kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. (Az utolsó becslésnél a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmaztuk.) □

23.10. Megjegyzés. Figyelembe véve azt is, hogy mikor van a Cauchy-egyenlőtlenségben egyenlőség, megállapíthatjuk, hogy a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x = 0$ vagy $y = 0$ vagy egyikük sem nullvektor, de egyirányúak (egymás pozitív konstans-szorosai).

23.1.4. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mondja ki a felbontási tételt.

2. Írja fel a vetület hosszának becsléséről szóló tételt.

3. Írja le a Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást.

4. Írja fel a Cauchy-egyenlőtlenségről szóló tételt (az egyenlőség esetéről nem kell írni).

5. Írja fel a háromszög-egyenlőtlenségről szóló tételt (az egyenlőség esetéről nem kell írni).

23.1.5. Bizonyítandó tételek

1. A felbontási tétel.

23.2. Feladatok

23.2.1. Órai feladatok

1. (részben az előző leckéhez tartozó feladat) Adott az

$$u_1 := (1,1,1,1),\ u_2 := (1,-1,-1,1),\ u_3 := (-1,0,0,1)$$

vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben.

(a) Mutassuk meg, hogy az $u_1,\ u_2,\ u_3$ vektorrendszer O.R.

(b) Ellenőrizzük a Pitagorasz-tétel állítását az $u_1,\ u_2,\ u_3$ ortogonális vektorrendszeren.

(c) Bontsuk fel az $x = (2,1,3,1) \in \mathbb{R}^4$ vektort a

$$W := \operatorname{Span}(u_1,\ u_2,\ u_3) \subset \mathbb{R}^4$$

altér szerinti párhuzamos és merőleges komponensekre.

2. Állítsunk elő az $\mathbb{R}^4$ térben a

$$b_1 := (1,1,1,1), \quad b_2 := (3,3,-1,-1), \quad b_3 := (-2,0,6,8)$$

lineárisan független vektorrendszerrel ekvivalens ortogonális rendszert (O.R.-t) és ekvivalens ortonormált rendszert (O.N.R.-t).

3. Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér

$$b_1 := (1,1,1,1), \quad b_2 := (3,3,-1,-1), \quad b_3 := (-2,0,6,8)$$

vektorai által generált W alterében.

4. (a) Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist az $\mathbb{R}^4$ tér

$$W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 = 0,\ 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

alterében.

(b) Bontsuk fel az $x := (3,4,-3,5) \in \mathbb{R}^4$ vektort az előző pontbeli W altérrel párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

(c) Melyik mátrix nulltere (magja) a fenti W altér?

23.2.2. További feladatok

1. Számítsuk ki az $x = (1, 2, 0, -2) \in \mathbb{R}^4$ vektor merőleges vetületét az $\mathbb{R}^4$ alábbi ortogonális rendszerei által generált alterekre:

a) $u_1 = (0, 1, -4, -1),\ u_2 = (3, 5, 1, 1)$.

b) $u_1 = (1, -1, -1, 1),\ u_2 = (1, 1, 1, 1),\ u_3 = (1, 1, -1, -1)$.

2. A Gram-Schmidt eljárással alakítsuk át a

$$b_1 = (0, 2, 1, 0),\ b_2 = (1, -1, 0, 0),\ b_3 = (1, 2, 0, -1),\ b_4 = (1, 0, 0, 1)$$

$\mathbb{R}^4$-beli bázist

(a) ortogonális bázissá:

(b) ortonormált bázissá

3. Adottak $\mathbb{R}^4$ alábbi alterei:

(a) $W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0,\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 0\}$

(b) $W := \{y \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0\}$

Mindkét altér esetén

(a) Adjunk meg ortogonális bázist és ortonormált bázist a W altérben.

(b) Határozzuk meg az $x := (0, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ vektor merőleges vetületét a W altérre.

(c) Melyik mátrix nulltere (magja) a W altér?

4. Igazoljuk a Bessel-egyenlőtlenséget:

Ha $e_1, \ldots, e_n$ O.N.R. a V valós euklideszi térben, akkor:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

24. Függvények, elemi függvények, műveletek függvényekkel

24.1. Kiegészítés az elmélethez

A függvény fogalmának a definiálásához először bevezetjük a rendezett pár fogalmát, halmazok Descartes szorzatát és az ezek nemüres részhalamazaiként definiált relációkat. A középiskolában bevezett függvény fogalma szépen vissza fog tükröződni ezekben a pontosan megfogalmazott definíciókban. A teljes bevezetés analízisből fog megtörténni a későbbi tanulmányaik során.

Rendezett pár

Def: Legyenek x, y tetszőleges "objektumok". Ekkor az

$$(x; y) := \{\{x\}; \{x; y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük, melynek *első komponense* x a *második komponense* y. Igazolható, hogy két ilyen rendezett pár pontosan akkor egyenlő, ha komponenseik rendre megegyeznek, azaz:

$$(x; y) = (a; b) \iff x = a \ \wedge \ y = b.$$

Halmazok Descartes szorzata

Def: Legyenek $\emptyset \neq A, B$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok. Ekkor az

$$A \times B := \{(x; y) \ \Big| \ x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

halmazt az A és B *Descartes szorzatának* nevezzük. $A \times B$ elemei tehát olyan rendezett párok, melyeknek az első komponense $A-$ból van, második komponense pedig $B-$beli.

Megjegyzések:

1. Ha $A = B$, akkor gyakran jelöljük az $A \times A$ halmazt A^2-tel. Például ismert a Descartes$-$féle koordináta sík:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Hasonlóan bevezethető 3 halmaz Descartes$-$féle szorzata, mint rendezett számhármasok halmaza. Ennek megfelelően

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

a szokásos 3$-$dimenziós tér pontjainak a halmaza.

2. Például: $(2; 1); (-2; 0); (0; 0); (0; -\pi) \in \mathbb{R}^2$ a sík néhány pontja és $(1; 2; 3); (-1; 0; 7) \in \mathbb{R}^3$ két térbeli pont.

3. Ha $A := \{1; 2\}$ és $B := \{-1; 3; 7\}$, akkor

$$A \times B = \{(1; -1); (1; 3); (1; 7); (2; -1); (2; 3); (2; 7)\}$$

és

$$B \times A = \{(-1; 1); (-1; 2); (3; 1); (3; 2); (7; 1); (7; 2)\}.$$

4. A fenti példa alapján világos, hogy általában

$$A \times B \neq B \times A,$$

azaz a Descartes−szorzat nem felcserélhető, nem kommutatív.

5. Az alábbi halmaz a sík olyan pontjait tartalmazza, melyekre a második komponens az első komponens négyzete és ez utóbbi befutja a valós számok halmazát:

$$P := \{(x; x^2) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in \mathbb{R}\}.$$

Világos, hogy a fenti ponthalmaz az $y = x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ egyenletű parabola pontjainak a halmaza, vagy másképp fogalmazva (a középiskolából hozott szemlélettel) az előbb megadott *függvény* grafikonja. Itt megadtunk egy olyan hozzárendelési módot, kapcsolatot x és y között, amivel "kijelöltük" $\mathbb{R}^2$−nek egy részhalmazát, nevezetesen:

$$P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = x^2 \ (x \in \mathbb{R})\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Mondhatnánk azt is, hogy a fenti részhalmaz pontjainak x és y komponensei között az $y = x^2$ kapcsolat érvényes, vagy x és y a megadott relációban vannak egymással. Definiáljuk ezek után a *reláció* fogalmát.

Relációk

Def: Legyenek A és B tetszőleges nemüres halmazok. Ekkor minden

$$\emptyset \neq R \subseteq A \times B$$

nemüres részhalmazt *relációnak* nevezünk. Ennek elemei tehát rendezett párok és azt mondjuk, hogy ezen elemek komponensei R relációban vannak egymással. Ha tehát $(x; y) \in R$ akkor azt mondjuk, hogy x R relációban van y−nal. A fenti P parabola esetében ennek minden $(x; y)$ pontjára x P relációban van y−nal azt jelenti, hogy a második komponens az elsőnek a négyzete.

Megjegyzések:

1. Legyen $A; B := \mathbb{N}$ és $R := \{(n; m) \in \mathbb{N}^2 \;\Big|\; m = 2n \ (n \in \mathbb{N})\}$. Tehát itt egy $(n; m)$ rendezett pár pontosan akkor van R relációban egymással, ha a második komponens az elsőnek a duplája. Szemléltessük az R reláció pontjait a síkon!

2. $E := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = 2x \ (x \in \mathbb{R})\}$. Ekkor E a sík egy egyenese. Szemléltessük az E reláció pontjait!

3. Legyen $K := \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ebben az esetben K pontjai az origó közepű, 1 sugarú körvonal pontjai. Vegyük észre, hogy például: $(0;1) \in K$ és $(0;-1) \in K$ vagyis a 0 első komponenssel két második komponens is relációban van (az 1 és a -1 és csak ezek). A fenti P parabola esetében ez nem mondható el, nevezetesen ott

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists !\ y \in \mathbb{R}\ \ y = x^2 :\ (x;y) \in P.$$

Itt tehát minden relációbeli pont első komponenséhez egyetlen második komponens tartozik. Az ilyen tulajdonságú relációkat fogjuk függvényeknek nevezni.

Függvények

Def: Legyenek $\emptyset \neq A, B$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok. Ekkor az

$$\emptyset \neq f \subseteq A \times B$$

relációt *függvénynek* nevezzük, ha igaz az alábbi:

$$\forall\ (x;y)\ \wedge\ (x;z) \in f\ \implies\ y = z.$$

Def: $\emptyset \neq A, B$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok és $f \subseteq A \times B$ egy függvény. Ekkor:

$$D_f = \{x \in A \mid \exists\, y \in B :\ (x;y) \in f\} \subseteq A$$

az f *értelmezési tartománya* és

$$R_f = \{y \in B \mid \exists\, x \in D_f :\ (x;y) \in f\} \subseteq B$$

az f *értékkészlete.*

Megjegyzések:

1. Ha $f \subseteq A \times B$ egy függvény, akkor azt mondjuk, hogy f az A halmazból képez a B halmazba (Vigyázzunk, itt az értelmezési tartomány nem feltétlenül a teljes A halmaz, hanem annak egy részhalmaza). Ennek külön jelölést vezetünk be, nevezetesen legyen:

$$f \in A \longrightarrow B \iff f \subseteq A \times B \ \text{ függvény.}$$

Ha pedig $D_f = A$ akkor az alábbi jelölést fogjuk alkalmazni:

$$f : A \longrightarrow B,$$

ami azt jelenti, hogy $f \subseteq A \times B$ egy függvény és $D_f = A$.

2. Általában az R_f értékkészlet is különbözik a B képhalmaztól (annak szűkebb részhalmaza). Ha $R_f = B$ akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *szürjektív.*

3. Legyen $f : A \longrightarrow B$ egy függvény. Ekkor egy $(x; y) \in f$ rendezett pár esetén azt mondjuk, hogy y az $x-$hez rendelt *függvényérték* és úgy fogjuk jelölni, hogy:

$$y = f(x).$$

Ezek után készen állunk bevezetni a "szokásos" jelöléseket és megadási módokat:

$$f : A \longrightarrow B \;\; y = f(x), \;\text{ vagy}$$
$$y = f(x) \;\; (x \in D_f), \;\text{ vagy}$$
$$D_f \ni x \longrightarrow y := f(x) \in B, \;\text{ vagy}$$
$$f := \{(x; y) \in D_f \times B \;\Big|\; y := f(x)\}.$$

Például: A fenti parabola esetén az f megadási módjai:

$$y = x^2 \;\;\; (x \in \mathbb{R}), \;\text{ vagy}$$
$$f(x) := x^2 \;\;\; (x \in \mathbb{R}), \;\text{ vagy}$$
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\;\; f(x) := x^2, \;\text{ vagy}$$
$$f : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}, \;\text{ vagy}$$
$$f := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = x^2\}.$$

4. A fenti jelölésekkel egy $f : A \longrightarrow B$ függvény értékkészletét az alábbi módon is fel tudjuk írni:

$$R_f := \{f(x) \in B \;\Big|\; x \in D_f\}.$$

Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; f(x) := x^2$ függvény esetében:

$$R_f = \{x^2 \in \mathbb{R} \;\Big|\; x \in \mathbb{R}\} = (?) = [0; +\infty).$$

A kérdőjel itt arra utal, hogy bizonyítanunk kell a jelzett egyenlőséget, amit a következő fejezetben meg is teszünk.

5. Ha $A = B := \mathbb{R}$ akkor az $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényeket *valós-valós* függvényeknek fogjuk nevezni.

6. Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény. Az alábbi síkbeli ponthalmazt az f *grafikonjának* nevezzük:

$$\text{Graf}(f) := \Big\{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in D_f\Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Néhány elemi függvény

Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan elemi függvényt, amelyeknek a definícióit, garfikonjaikat és tulajdonságaikat ismertnek tételezzük fel. Amennyiben valaki nem találkozott volna velük, akkor most érdemes megtanulni őket.

1. Konstans függvények: rögzített $a \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) := a \ \ (x \in \mathbb{R})$.

2. Elsőfokú függvények (egyenesek): rögzített $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esetén

$$f(x) := ax + b \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

3. Másodfokú függvények (parabolák): rögzített $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esetén

$$f(x) := ax^2 + bx + c \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

4. Hatványfüggvények: rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x) := x^n \ \ (x \in \mathbb{R})$. Különösen az $n = 0, 1, 2, 3$ esetek.

5. Gyökfüggvények: rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) := \sqrt[2n]{x} \ \ (x \in [0; +\infty)) \ \ \wedge \ \ g(x) := \sqrt[2n+1]{x} \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Különösen az $n = 1$ esetén fellépő négyzetgyök és köbgyök függvények.

6. Speciális törtfüggvények: rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) := \frac{1}{x^n} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Különösen az $n = 1, 2$ esetek.

7. Exponenciális függvények: rögzített $0 < a \neq 1$ alappal

$$f(x) := a^x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Speciálisan az $a = e$ eset, tehát $f(x) := e^x \ \ (x \in \mathbb{R})$.

8. Logaritmus függvények: rögzített $0 < a \neq 1$ alappal

$$f(x) := \log_a(x) \ \ (x \in (0; +\infty)).$$

Speciálisan az $a = e$ eset, tehát

$$f(x) := \ln x := \log_e(x) \ \ (x \in (0; +\infty)).$$

9. Az ismert trigonometrikus függvények: $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$.

10. Abszolútérték függvény:

$$f(x) := \mathrm{Abs}(x) := |x| = \begin{cases} -x \ , \text{ha } x < 0; \\ x \quad \ , \text{ha } x \geq 0 \end{cases} ;$$

11. Egészrész függvény: $f(x) := [x] \ \ (x \in \mathbb{R})$; ahol $[x]$:=az x számhoz legközelebb lévő nála nem nagyobb egész szám.

12. Törtrész függvény: $f(x) := \{x\} := x - [x] \ \ (x \in \mathbb{R})$.

13. Előjel vagy Szignum függvény:

$$f(x) := \mathrm{Sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{,ha } x < 0; \\ 0 & \text{,ha } x = 0; \\ 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

14. Dirichlet függvény:

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Függvények egyenlősége

Def: Legyenek adottak az $\emptyset \neq A, B, C, D$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, valamint az $f \in A \longrightarrow B$ és $g \in C \longrightarrow D$ függvények. Ekkor $f = g$ (vagyis a két függvény megegyezik) pontosan akkor, ha:

$$D_f = D_g \ \wedge \ (\forall \ x \in D_f = D_g : f(x) = g(x)).$$

Például:

1. Adottak

$$f(x) = \sqrt{x^3} \ \ (x \in [0; +\infty)); \ \ g(x) = x \cdot \sqrt{x} \ \ (x \in [0; +\infty)).$$

Ekkor $D_f = D_g = [0; +\infty)$ és

$$f(x) = |x| \cdot \sqrt{x} = (x \geq 0) = x \cdot \sqrt{x} = g(x) \ \ \forall \ x \in [0; +\infty) \Longrightarrow f = g.$$

2. Legyenek:

$$f(x) = \sqrt{x^2} \ \ (x \in \mathbb{R}); \ \ g(x) = x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $D_f = D_g = \mathbb{R}$, de $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq g(x) = x$, ha $x \in (-\infty; 0) \Longrightarrow f \neq g$.

3. Legyenek most:

$$f(x) = x - 1 \ \ (x \in \mathbb{R}); \ \ g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}),$$

Világos, ha $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ akkor $g(x) = \dfrac{(x-1) \cdot (x+1)}{x+1} = x - 1 = f(x)$, de

$$D_f = \mathbb{R} \neq D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Longrightarrow f \neq g.$$

Függvények számszorosa, összege, különbsége, szorzata, hányadosa

Def: Legyenek adottak az $\emptyset \neq A, B, C, D$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, valamint az $f \in A \longrightarrow B$ és $g \in C \longrightarrow D$ függvények és $c \in \mathbb{R}$ egy valós szám. Ekkor definiálhatóak az alábbi új függvények (feltéve, hogy a megfelelő értelmezési tartományok nem egyenlőek az üres halmazzal):

$$D_{c\cdot f} := D_f \ \wedge \ (c\cdot f)(x) := c\cdot f(x) \ (\forall\, x \in D_{c\cdot f});$$

$$D_{f+g} := D_f \cap D_g \neq \emptyset \ \wedge (f+g)(x) := f(x)+g(x) \ (\forall\, x \in D_{f+g});$$

$$D_{f-g} := D_f \cap D_g \neq \emptyset \ \wedge (f-g)(x) := f(x)-g(x) \ (\forall\, x \in D_{f-g});$$

$$D_{f\cdot g} := D_f \cap D_g \neq \emptyset \ \wedge (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x) \ (\forall\, x \in D_{f\cdot g});$$

$$D_{f/g} := \{x \in D_f \cap D_g \ \big| \ g(x) \neq 0\} \neq \emptyset \ \wedge \ \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \ (\forall\, x \in D_{f/g}).$$

Az így definiált függvények: $c\cdot f$ *számszoros* vagy *konstansszoros függvény*, $f+g$ az *összegfüggvény*, $f-g$ a *különbségfüggvény*, $f\cdot g$ a *szorzatfüggvény*, f/g a *hányadosfüggvény.*

Például:

1. Adottak

$$f(x) = \sqrt{x-1} \ (x \in [1;+\infty)); \ g(x) = \sin x \ (x \in [0;2\pi]).$$

$$D_{2\cdot f} = [1;+\infty) \ \wedge \ (2\cdot f)(x) = 2\cdot f(x) = 2\cdot\sqrt{x-1} \ (x \in [1;+\infty)).$$

$$D_{f+g} = [1;+\infty) \cap [0;2\pi] = [1;2\pi] \ \wedge \ (f+g)(x) := f(x)+g(x) = \sqrt{x-1}+\sin x;$$

$$D_{f-g} = [1;+\infty) \cap [0;2\pi] = [1;2\pi] \ \wedge \ (f-g)(x) := f(x)-g(x) = \sqrt{x-1}-\sin x;$$

$$D_{f\cdot g} = [1;+\infty) \cap [0;2\pi] = [1;2\pi] \ \wedge \ (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x) = \sqrt{x-1}\cdot \sin x;$$

$$D_{f/g} = \{x \in [1;2\pi] \ \big| \ \sin x \neq 0\} = [1;\pi) \cup (\pi;2\pi) \ \wedge \ \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sin x};$$

$$D_{g/f} = \{x \in [1;2\pi] \ \big| \ \sqrt{x-1} \neq 0\} = (1;2\pi] \ \wedge \ \frac{g}{f}(x) := \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}.$$

Függvények kompozíciója

Def: Legyenek adottak az $\emptyset \neq A,B,C,D$ tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, valamint az $f \in A \longrightarrow B$ és $g \in C \longrightarrow D$ függvények. Ekkor vezessük be az alábbi $f\circ g$ *kompozíció*, vagy *összetett* függvényt:

$$D_{f\circ g} := \{x \in D_g \ \big| \ g(x) \in D_f\} \neq \emptyset \ \wedge \ (f\circ g)(x) := f(g(x)) \ (x \in D_{f\circ g}).$$

Például:

1. Az előbbi függvényeket idézve adjuk meg az $f\circ g$ függvényt:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \ (x \in [1;+\infty)); \ g(x) = \sin x \ (x \in [0;2\pi]).$$

$$D_{f\circ g} = \{x \in [0;2\pi] \ \big| \ \sin x \in [1;+\infty)\} = (\star) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \ \wedge$$

$$\wedge \ (f\circ g)(x) := f(g(x)) = \sqrt{\sin x - 1} \ \left(x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right).$$

Az itteni levezetésben $(\star)$ jelöli az alábbi feltételnek megfelelő x értékek meghatározását a $[0;2\pi]$ halmazban:

$$\sin x \in [1;+\infty) \iff \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezen értékek közül egyetlen pont a $\pi/2$ van a $[0;2\pi]$ intervallumban. Tehát az $f \circ g$ kompozíció egyetlen pontban értelmezhető:

$$D_{f\circ g} = \{\pi/2\} \ \ \wedge \ \ (f \circ g)(\pi/2) = \sqrt{\sin(\pi/2) - 1} = 0.$$

Ez esetben az $f \circ g$ grafikonja egyetlen pontból áll, nevezetesen a $(\pi/2;0)$ pontból.

2. Határozzuk meg a fordított sorrendű kompozíciót is, azaz a $g \circ f$ függvényt:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ \big| \ f(x) \in D_g\} = \{x \in [1;+\infty) \ \big| \ \sqrt{x-1} \in [0;2\pi]\} = (\star) = [1;1{+}4\pi^2] \ \wedge$$

$$\wedge \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(\sqrt{x-1}) \ \ (x \in [1;1+4\pi^2]),$$

ahol $(\star)$ jelöli ismét az alábbi levezetést az $[1;+\infty)$ halmazon:

$$\sqrt{x-1} \in [0;2\pi] \iff 0 \le \sqrt{x-1} \le 2\pi \iff 0 \le x-1 \le 4\pi^2 \iff$$

$$\iff 1 \le x \le 1 + 4\pi^2.$$

Ezen intervallumot elmetszve az $[1;+\infty)$ halmazzal maradnak az $[1;4\pi^2]$ halmaz pontjai.

3. Megjegyzés: Az előző két példát összevetve érdemes megjegyezni, hogy általában:

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

tehát a kompozíció művelete nem felcserélhető, nem kommutatív.

Függvénytranszformációk

Az alábbi transzformációkat ismertnek tételezzük fel és a feladatokon keresztüli alkalmazásukat szeretnénk a leginkább viszontlátni.

1. A változó transzformációi

(a) Eltolás az x tengely mentén egy adott $a \in \mathbb{R}$ értékkel (f grafikonját eltoljuk $a-$val az x tengely mentén, ha $a > 0$ akkor "balra", ha $a < 0$ akkor "jobbra"):

$$g(x) := f(x+a) \ \ (x + a \in D_f);$$

$$g(x) := f(x-a) \ \ (x - a \in D_f);$$

(b) Tükrözés az y tengely mentén (f grafikonját tükrözzük az y tengelyre nézve):

$$g(x) := f(-x) \ \ (-x \in D_f);$$

(c) Nyújtás/zsugorítás az x tengely mentén egy $a > 0$ konstanssal (f grafikonját az x tengely mentén $\frac{1}{a}-$szorosára módosítjuk, ha $0 < a < 1$, akkor nyújtás, ha $a > 1$, akkor zsugorítás):

$$g(x) := f(a \cdot x) \quad (a > 0 \ \wedge \ a \cdot x \in D_f);$$

Megjegyzés: Az $a < 0$ eseteket a fenti transzformációkkal már el tudjuk végezni: először $-a-$val szorzunk (lásd pozitív számszoros esete a változóra), majd az "argumentum $-1-$szerese" egy tükrözés az y tengelyre.

(d) Vágás/tükrözés (az f grafikonjának az y tengelytől balra eső részét levágjuk és a tőle jobbra eső részt megtartva tükrözzük az y tengelyre):

$$g(x) := f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & \text{, ha } x < 0; \\ f(x) & \text{, ha } x \geq 0 \end{cases} \quad (|x| \in D_f);$$

2. A függvényértékek transzformációi

(a) A függvényértékek eltolása az y tengely mentén egy adott $c \in \mathbb{R}$ értékkel (f grafikonját eltoljuk $c-$vel az y tengely mentén, ha $c > 0$ "felfelé", ha $c < 0$ lefelé):

$$g(x) := f(x) + c \quad (x \in D_f);$$

$$g(x) := f(x) - c \quad (x \in D_f);$$

(b) A függvényértékek tükrözése az x tengely mentén (f grafikonját tükrözzük az x tengelyre nézve):

$$g(x) := -f(x) \quad (x \in D_f);$$

(c) A függvényértékek nyújtása/zsugorítása az y tengely mentén egy $c > 0$ konstanssal (f grafikonját az y tengely mentén $c-$szeresére módosítjuk, ha $0 < c < 1$, akkor zsugorítás, ha $c > 1$, akkor nyújtás):

$$g(x) := c \cdot f(x) \quad (c > 0 \ \wedge \ x \in D_f);$$

Megjegyzés: Az $c < 0$ eseteket a fenti transzformációkkal már el tudjuk végezni: elősz̋or $-c-$vel szorzunk (lásd a függvényértékek pozitív számszorosa esetet), majd az így kapott értékek $-1-$szerese egy tükrözés az x tengelyre.

(d) Vágás/tükrözés (az f grafikonjának az x tengely alá eső részét (negatív értékeket) tükrözzük az x tengelyre):

$$g(x) := |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{, ha } f(x) < 0; \\ f(x) & \text{, ha } f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (x \in D_f);$$

Például: Ábrázoljuk az alábbi f és a megadott transzformált függvényeket (otthoni gyakorlásra):

1. Legyen $f(x) := \sqrt{x}\ \ (x \geq 0)$:

$$1 \leq x \longrightarrow \sqrt{x-1};\quad -1 \leq x \longrightarrow \sqrt{x+1};\quad 0 \leq x \longrightarrow \sqrt{2x};\quad 0 \leq x \longrightarrow \sqrt{x}-1;$$

$$0 \leq x \longrightarrow 2\cdot\sqrt{x};\quad 0 \leq x \longrightarrow -\sqrt{x};\quad 0 \geq x \longrightarrow \sqrt{-x};\quad 0 \leq x \longrightarrow \sqrt{x}+2;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sqrt{|x|};\quad 0 \leq x \longrightarrow |\sqrt{x}|.$$

2. Legyen $f(x) := x^3\ \ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow (x-2)^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (x+1)^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (2x)^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^3+1;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot x^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -x^3;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (-x)^3;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x^3-8;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow (|x|)^3;\quad 0 \leq x \longrightarrow |x^3|.$$

3. Legyen $f(x) := |x|\ \ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x-2|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x+1|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |2x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x|-1;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot|x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -|x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |-x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |x|+2;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow ||x|-1|.$$

4. Legyen $f(x) := \sin x\ \ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(x-\pi/3);\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(x+\pi/2);\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(2x);$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot\sin x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -\sin x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(-x);\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin x-2;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 1+\sin x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow |\sin x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \sin(|x|).$$

5. Legyen $f(x) := e^x\ \ (x \in \mathbb{R})$:

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{x-1};\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{x+2};\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^x-1;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^x+5;$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow 2\cdot e^x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow -e^x;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{-x};$$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow |1-e^x|;\quad \mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{|x|}.$$

6. Legyen $f(x) := \ln x\ \ (x \in (0;+\infty))$:

$$-1 < x \longrightarrow \ln(x+1);\quad 2 < x \longrightarrow \ln(x-2);\quad 0 < x \longrightarrow \ln x-1;\quad 0 < x \longrightarrow 5+\ln x;$$

$$0 < x \longrightarrow 2\cdot\ln x;\quad 0 < x \longrightarrow \ln(2x);\quad 0 < x \longrightarrow -\ln x;\quad 0 > x \longrightarrow \ln(-x);$$

$$0 < x \longrightarrow |\ln x|;\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \ln|x|.$$

7. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{x}\ \ (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$:

$$\mathbb{R}\setminus\{-1\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x+1};\quad \mathbb{R}\setminus\{1\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x-1};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{x}-1;$$

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 1+\frac{1}{x};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{2}{x};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{2x};$$

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{-x};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{|x|};\quad \mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|.$$

24.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja a *függvény* fogalmát.

2. Definiálja a g/f *hányadosfüggvényt.*

3. Definiálja a $g \circ f$ *összetett függvényt.*

4. Definiálja egy $f : A \longrightarrow B$ függvény *grafikonját.*

5. Definiálja egy $f \in A \longrightarrow B$ függvény esetén az R_f *értékkészletet.*

6. Ábrázolja a síkon az $(1; 2] \times [-1; 1)$ Descartes szorzat ponthalmazt.

7. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre az $f^2 := f \cdot f$ függvény megegyezik $f-$el.

8. Tegyük fel, hogy az f és g függvények szorzata az azonosan 0 függvény, azaz:

$$f \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ (f \cdot g)(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Igaz-e, hogy f vagy g az azonosan 0 függvény?

9. Legyenek adottak az $f(x) := \sqrt{x-1}$ $(x \in [1; +\infty))$ és a $g(x) := x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények. Igaz-e, hogy $f^2 = g$?

10. Adja meg az $f \circ f$ függvényt, ha $f(x) := 3^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Mennyi lesz $(f \circ f)(0)$ és $(f \circ f)(-1)$?

11. Adja meg az $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g és g/f függvényeket, ha

$$f(x) := \frac{1}{x^2 - 1} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}) \ \ \wedge \ \ g(x) := \sqrt{e^x - 1} \ \ (x \in [0; +\infty)).$$

12. Adja meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket, ha

$$f(x) := \sqrt{x} \ \ (x \in (0; +\infty)) \ \ \wedge \ \ g(x) := x^2 \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

13. Adja meg azt a legbővebb $D \subseteq \mathbb{R}$ halmazt, amellyel az alábbi utasítás függvényt definiál:

$$f(x) := \frac{\ln(3 - \sqrt{x})}{\sqrt{1 - \sin x}} \ \ (x \in D).$$

14. Ábrázolja az $f(x) := 2^{|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

15. Ábrázolja az $f(x) := \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ $(1 \neq x \in (0; +\infty))$ függvényt.

24.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Definiálja az $(a;b)$ *rendezett pár* fogalmát.

2. Definiálja egy $\emptyset \neq f \subseteq A \times B$ függvény esetén a D_f *értelmezési tartományt.*

3. Mi lesz az $A \times B$ halmaz, ha $A := \{1\}$ és $B := [0;3]$? Ábrázolja a kapott ponthalmazt.

4. Mi lesz az $A \times B$ halmaz, ha $A := (-1;1]$ és $B := \{2\}$? Ábrázolja a kapott ponthalmazt.

5. Mit jelent az $f \in A \longrightarrow B$ jelölés?

6. Mit jelent az $f : A \longrightarrow B$ jelölés?

7. Definiálja a *reláció* fogalmát.

8. Mikor mondjuk, hogy az f és g függvények *egyenlőek* egymással?

9. Adja meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket, ha

$$f(x) := \ln(-2-x) \;\; (x \in (-\infty;-2)) \;\; \wedge \;\; g(x) := \cos x \;\; (x \in \mathbb{R}).$$

10. Definiálja két halmaz *Descartes szorzatát.*

11. Definiálja és ábrázolja a *négyzetgyök* és a *köbgyök* függvényeket.

12. Ábrázolja az *identitás* függvényt ($f(x) := x \;\; (x \in \mathbb{R})$).

13. Ábrázolja az $f(x) := 2 - 3x \;\; (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

14. Ábrázolja az $f(x) := 2 - x^2 \;\; (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

15. Definiálja az $f + g$ *összegfüggvényt.*

16. Definiálja az $g - f$ *különbségfüggvényt.*

17. Definiálja az $f \cdot g$ *szorzatfüggvényt.*

18. Definiálja és ábrázolja az *abszolútérték* függvényt.

19. Definiálja és ábrázolja az *előjel* függvényt.

20. Definiálja és ábrázolja az *egészrész* függvényt.

21. Definiálja és ábrázolja a teljes valós számhalmazon értelmezett konstans 5 függvényt.

22. Ábrázolja a *reciprokfüggvényt*, azaz az $f(x) := \dfrac{1}{x} \;\; (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvényt.

23. Ábrázolja az $f(x) := \dfrac{1}{x^2} \;\; (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvényt.

24. Ábrázolja az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ köbfüggvényt.

25. Ábrázolja az $f(x) := \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ és a $g(x) = \cos x$ $(x \in [0; 3\pi])$ függvényeket.

26. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

$$f(x) := \mathrm{tg}x \ \ (x \in (-\pi/2; \pi/2)) \ \ \wedge \ \ g(x) = \mathrm{ctg}x \ \ \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ \Big| \ k \in \mathbb{Z}\}\right).$$

27. Ábrázolja egy koordináta rendszerben az alábbi függvényeket:

$$f(x) := e^x \ \ (x \in \mathbb{R}) \ \ \wedge \ \ g(x) = \ln x \ \ (x \in (0; +\infty)).$$

28. Ábrázolja egy koordináta rendszerben az alábbi függvényeket:

$$f(x) := 2^{-x} \ \ (x \in \mathbb{R}) \ \ \wedge \ \ g(x) = \log_{1/2} x \ \ (x \in (0; +\infty)).$$

29. Ábrázolja az $f(x) := 1 + (x-3)^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

30. Ábrázolja az $f(x) := |1 - x^2|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

31. Ábrázolja az $f(x) := g(x+1)$ $(x > -1)$ függvényt, ha $g(x) = \log_2(x)$ $(x > 0)$.

32. Ábrázolja az $f(x) := g(x-4)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ha $g(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

33. Ábrázolja az $f(x) := |g(-x)|$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, ha $g(x) = 2x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$.

34. Ábrázolja az $f(x) := -1 + 2 \cdot \cos(x - \pi)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

35. Ábrázolja az $f(x) := \left|2 - \dfrac{1}{x}\right|$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvényt.

36. Ábrázolja az $f(x) := \left|2 - \sqrt{1-x}\right|$ $(x \in (-\infty; 1])$ függvényt.

24.2. Feladatok

24.2.1. Órai feladatok

Függvények értelmezési tartománya

1. Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg:

(a) $f(x) := \sqrt{\dfrac{2x^3 - 1}{x}}$ $(x \in D)$;

(b) $f(x) := \sqrt{\lg(x^2 - 5x + 7)} \quad (x \in D)$;

(c) $f(x) := \sqrt{2^x - e^x} + \sqrt{3^x - e^x} \quad (x \in D)$;

(d) $f(x) := \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{\lg(\sin x)} \quad (x \in D)$?

Függvények egyenlősége

2. Igaz-e, hogy az alábbi függvények egyenlőek (azaz $f = g$), ha:

(a) $f(x) := \sqrt{x} \ (x \in [0; +\infty))$; $g(x) := \sqrt[4]{x^2} \ (x \in \mathbb{R})$?

(b) $f(x) := \sqrt{x} \ (x \in [0; +\infty))$; $g(x) := \sqrt[4]{x^2} \ (x \in [0; +\infty))$?

(c) $f(x) := \sqrt{x^2} \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := |x| \ (x \in \mathbb{R})$?

(d) $f(x) := \sqrt{x^2} \ (x \in \mathbb{R})$; $g(x) := (\sqrt{x})^2 \ (x \in [0; +\infty))$?

Igaz-e, hogy $f|_{[0;+\infty)} = g$?

(e) $f(x) := \ln(x^2) \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$; $g(x) := 2 \cdot \ln x \ (x \in (0; +\infty))$?

(f) $f(x) := \ln(x^2) \ (x > 0)$; $g(x) := 2 \cdot \ln x \ (x \in (0; +\infty))$?

(g) $f(x) := \dfrac{x}{|x|} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \wedge f(0) := 0$; $g(x) := \dfrac{|x|}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \wedge g(0) := 0$?

(h) $f(x) := e^{\ln x} \ (x \in \mathbb{R}^+)$; $g(x) := \ln(e^x) \ (x \in \mathbb{R})$?

(i) $f(x) := \dfrac{1 - \cos x}{2} \ (x \in [0; \pi/2])$; $g(x) := \sin^2 \dfrac{x}{2} \ (x \in [0; \pi])$?

Igaz-e, hogy $f = g|_{[0;\pi/2]}$?

Ábrázoljuk a fenti függvények mindegyikét.

Függvénytranszformációk, ábrázolás

3. Ábrázoljuk az alábbi *speciális* függvényeket és írjuk fel az *értékkészletüket*:

(a)

$$f(x) := \mathrm{Abs}(x) := |x| = \begin{cases} -x & \text{, ha } x < 0; \\ x & \text{, ha } x \geq 0 \end{cases} ;$$

(b) $f(x) := [x] \ (x \in \mathbb{R})$; ahol $[x]$:=az x számhoz legközelebb lévő nála nem nagyobb egész szám. (Egészrész függvény);

(c) $f(x) := \{x\} := x - [x] \ (x \in \mathbb{R})$; (Törtörész függvény);

(d) Előjel vagy Szignum függvény:

$$f(x) := \mathrm{Sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{,ha } x < 0; \\ 0 & \text{,ha } x = 0; \\ 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

(e) Dirichlet függvény:

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(f) Riemann függvény:

$$R(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \wedge\ (p;q) = 1 \ \wedge\ q > 0; \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ábrázoljuk a fenti függvények mindegyikét.

4. Rajzoljuk fel az alábbi függvények grafikonját, és írjuk le az ábrázolás lépéseit! Ahol a grafikon felrajzolása hosszadalmas, ott elég az ábrázolás lépéseit leírni.

(a) $f(x) := 2(x+3)^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := -x^2 + 5x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := |x^2 - 5x + 6| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(e) $f(x) := |2 - |x-1|| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x) := \dfrac{x+3}{x+5} \quad (-5 \neq x \in \mathbb{R})$;

(g) $f(x) := \dfrac{4x-1}{2x-1} \quad \left(\dfrac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right)$;

(h) $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(i) $f(x) := \dfrac{\sqrt{5x-1}}{4} + 2 \quad \left(\dfrac{1}{5} \leq x \in \mathbb{R}\right)$;

(j) $f(x) := 2 - \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty; 1])$;

(k) $f(x) := \sqrt{|x|} \ (x \in \mathbb{R})$;

(l) $f(x) := \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(m) $f(x) := \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(n) $f(x) := \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(o) $f(x) := \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \quad (x \in (-\pi/4; 3\pi/4))$;

(p) $f(x) := 3 \cdot 2^{3x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(q) $f(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(r) $f(x) := \ln(1-x) \quad (x \in (-\infty; 1))$;

(s) $f(x) := \ln \dfrac{e}{x} \quad (x \in (0; +\infty))$.

(t)
$$D(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ x^3, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Műveletek függvényekkel

5. Az alábbi feladatokban adottak az f és a g függvények. Határozzuk meg és ahol lehet elemi eszközökkel, ott ábrázoljuk a jelzett műveletekkel definiált h függvényeket:

(a) $f(x) := x \ \ (x \in \mathbb{R})$; $\ g(x) := \sin x \ \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

(b) $f(x) := D(x) \ \ (x \in \mathbb{R})$; $\ g(x) := 1 - D(x) \ \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

Itt D a fenti Dirichlet függvény.

(c) $f(x) := |x| \ \ (x \in \mathbb{R})$; $\ g(x) := x \ \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$?

(d) $f(x) := \sin x \ \ (x \in \mathbb{R})$; $\ g(x) := \cos x \ \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

(e) $f(x) := \sqrt{x} - 1 \ \ (x \in [0; +\infty))$; $\ g(x) := 1 \ \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

(f) $f(x) := x \ \ (x \in \mathbb{R})$; $\ g(x) := [x] \ \ (x \in \mathbb{R})$;

Mi lesz $h := f + g$; $h := f - g$; $h := f \cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

6. Tekintsük az alábbi két függvényt:

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot e^x \ \ (x \in \mathbb{R}); \ \ g(x) := \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \ \ (x \in \mathbb{R});$$

a) Határozzuk meg az alábbi függvényeket:

(a) $\mathrm{ch} := f + g$; $\mathrm{sh} := f - g$; $p := f \cdot g$; $l := \dfrac{f}{g}$; $t := \dfrac{g}{f}$.

(b) $w := \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2$; $\ v := 2 \cdot \mathrm{ch} \cdot \mathrm{sh}$; $\ r := \mathrm{ch}^2 + \mathrm{sh}^2$.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden $y \in [1; +\infty)$ esetén a $\mathrm{ch}(x) = y$ egyenlet megoldható (x−re nézve) a pozitív valós számok halmazán és adjuk meg a megoldást.

c) Bizonyítsuk be:

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists!\, x \in \mathbb{R} : \mathrm{sh}\, x = y.$$

Adjuk meg a fenti x−et.

7. Tekintsük az alábbi f és g függvényeket. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := [x] \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \dfrac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$

(b) $f(x) := \mathrm{Sign}\,(x) \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \ln(2 - x) \ (x \in (-\infty; 2));$

(c) $f(x) := e^x \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \ln x \ (x \in \mathbb{R}^+)$. Igaz-e, hogy $f \circ g = g \circ f$?

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty; 0); \\ 2x, & \text{ha } x \in [0; +\infty); \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } x \in (-\infty; 1); \\ x - 1, & \text{ha } x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

8. Tekintsük az alábbi f és g illetve h függvényeket. Határozzuk meg a $\min\{f, g\}$ és a $\max\{f; g\}$ vagy három függvény esetén a $\min/\max\{f; g; h\}$ alsó és felső burkoló függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := |x| \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := |1 - |x|| \ (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \ g(x) := 2x \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := 1 \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := x \ (x \in \mathbb{R}); \ h(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R}).$

Egyéb típusok

9. Bizonyítsuk be, hogy az $f : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) := x + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény szigorúan monoton csökken a $(0; 1]$ intervallumon és szigorúan monoton nő az $[1; +\infty)$ intervallumon.

10. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$2 \cdot f(x) + 3 \cdot f(1 - x) = 4x - 1 \ \ (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

24.2.2. További feladatok

Függvények értelmezési tartománya

1. Melyik az a legbővebb $D \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre az alábbi előírások egy f egyváltozós valós függvényt határoznak meg:

(a) $f(x) := \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 2}}{1 - [x/9]} \quad (x \in D)\,;$

(b) $f(x) := \log_{3+x}(x^2 - 1) \quad (x \in D)\,;$

(c) $f(x) := \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 - |x|}} \quad (x \in D)\,;$

(d) $f(x) := \dfrac{\ln(4 - x^2) + \sqrt{1 - x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \in D)\,;$

(e) $f(x) := \sqrt{\ln(\cos x)} + \dfrac{1}{\sin x} \quad (x \in D)\,?$

Függvények egyenlősége

2. Igaz-e, hogy az alábbi függvények egyenlőek, azaz $f = g$, ha:

(a) $f(x) := \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := 1 - x^3 + (x^2 - 3) \cdot (x + 1) \ (x \in \mathbb{R})?$

(b) $f(x) := \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := (x^2 - 1) \cdot \operatorname{sign}(1 - |x|) \ (x \in \mathbb{R})?$

(c) $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\});\ \ g(x) := x - 1 \ (x \in \mathbb{R})?$

(d) $f(x) := \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \wedge f(1) := 3;\ \ g(x) := (x + 1)^2 - x \ (x \in \mathbb{R})?$

(e) $f(x) := \ln|x| \ (x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty));\ \ g(x) := \ln(-x) \ (x \in (-\infty; 0)?$

(f) $f(x) := \ln \dfrac{x + 1}{x} \ (x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty));$

$g(x) := \ln(x + 1) - \ln x \ (x \in (0; +\infty))$? Igaz-e, hogy $f|_{(0;+\infty)} = g$?

(g) $f(x) := \ln(\cos^2 x) \ (x \in (-\pi/2; \pi/2));$

$g(x) := \ln(1 + \sin x) + \ln(1 - \sin x) \ (x \in (-\pi/2; \pi/2))?$

Mi az a legbővebb halmaz, amelyre kiterjesztve $f-$et és $g-$t teljesül, hogy $f = g$?

(h) $f(x) := \sin^2 x + \cos^2 x \ (x \in \mathbb{R});\ \ g(x) := 1 \ (x \in \mathbb{R})?$

(i) $f(x) := \cos(2x) \ (x \in \mathbb{R});$

$g(x) := (1 - \operatorname{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})?$

(j) $f(x) := -\cos(2x)$ $(x \in (0;\pi))$; $g(x) := (1 - \operatorname{ctg}^2 x) \cdot \sin^2 x$ $(x \in (0;\pi))$?

(k) $f(x) := \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$;

$g(x) := \dfrac{2}{\sin(2x)}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$?

(l) $f(x) := \sqrt{1 + \cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$; $g(x) := \sqrt{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$?

Mi a kapcsolat f és g között?

Az (a),(b),(c),(d),(e),(h),(i),(j) és (l) esetekben ábrázoljuk is az f és a g függvényeket.

Függvénytranszformációk, ábrázolás

3. Rajzoljuk fel az alábbi függvények grafikonját, és írjuk le az ábrázolás lépéseit! Ahol a grafikon felrajzolása hosszadalmas, ott elég az ábrázolás lépéseit leírni.

(a) $f(x) := 1 - (2x - 4)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := |3x - x^2 - 2| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := 9 - x^3 + 6x^2 - 12x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(e) $f(x) := |x^3 - 1| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x) := |x^3| - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(g) $f(x) := ||x - 2| - 1| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(h) $f(x) := x \cdot |x| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(i) $f(x) := \dfrac{x+3}{x+1} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R})$;

(j) $f(x) := \dfrac{x-4}{3x-3} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$;

(k) $f(x) := \dfrac{x}{1 - |x|} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$;

(l) $f(x) := \dfrac{\sqrt{16x - 4}}{2} + 1 \quad \left(\dfrac{1}{4} \leq x \in \mathbb{R}\right)$;

(m) $f(x) := 1 - \sqrt{x - 1} \quad (x \in [1 + \infty))$;

(n) $f(x) := \sqrt{|x - 1|}$ $(x \in \mathbb{R})$;

(o) $f(x) := |\sqrt{|x|} - 1|$ $(x \in \mathbb{R})$;

(p) $f(x) := \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(q) $f(x) := \sin|x - \pi| + \sin|x + \pi| \quad (x \in \mathbb{R})$;

(r) $f(x) := \sin x \cos x + \dfrac{1}{2} \cdot \cos^2 x - \dfrac{1}{2} \cdot \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(s) $f(x) := \sin^4 x + \dfrac{1}{2} \cdot \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(t) $f(x) := \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \quad (x \in (-\pi/2; \pi/2))$;

(u) $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(v) $f(x) := |\ln(1+x)| \quad (x \in (-1; +\infty))$;

(w) $f(x) := \lg \dfrac{100}{x-1} \quad (x \in (1; +\infty))$.

(x) $f(x) := \operatorname{Sign}(x-1) + x \cdot \operatorname{Sign}(x-2) \quad (x \in \mathbb{R})$.

(y)

$$D(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}; \\ x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Műveletek függvényekkel

4. Az alábbi feladatokban adottak az f és a g függvények. Határozzuk meg és ahol lehet elemi eszközökkel, ott ábrázoljuk a jelzett műveletekkel definiált h függvényeket:

(a) $f(x) := x - 1 \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := \cos x \ (x \in \mathbb{R});$

Mi lesz $h := f + g; \ h := f - g; \ h := f \cdot g; \ h := \dfrac{f}{g}; \ h := \dfrac{g}{f}$?

(b) $f(x) := -D(x) \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := D(-x) \ (x \in \mathbb{R});$

Mi lesz $h := f + g; \ h := f - g; \ h := f \cdot g; \ h := \dfrac{f}{g}$?

Itt D a fenti Dirichlet függvény.

(c) $f(x) := |x - 1| \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := 1 - x \ (x \in \mathbb{R});$

Mi lesz $h := f + g; \ h := f - g; \ h := f \cdot g; \ h := \dfrac{f}{g}; \ h := \dfrac{g}{f}$?

(d) $f(x) := \ln x \ (x \in (0; +\infty)); \ g(x) := \ln x^2 \ (0 \neq x \in \mathbb{R});$

Mi lesz $h := f + g; \ h := f - g; \ h := f \cdot g; \ h := \dfrac{f}{g} \ h := \dfrac{g}{f}$?

(e) $f(x) := \sqrt{x-1} \ (x \in [1; +\infty)); \ g(x) := \sqrt{1-x} \ (x \in (-\infty; 1]);$

Mi lesz $h := f + g; \ h := f - g; \ h := f \cdot g; \ h := \dfrac{f}{g}; \ h := \dfrac{g}{f}$?

(f) $f(x) := \dfrac{1}{e^x} \ (x \in \mathbb{R}); \ g(x) := e^x \ (x \in \mathbb{R});$

Mi lesz $h := f + g; \ h := f - g; \ h := f \cdot g; \ h := \dfrac{f}{g}; \ h := \dfrac{g}{f}$?

(g)

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot(x-1), & \text{ha } x\in\mathbb{Q};\\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\end{cases}\quad;\quad g(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x\in\mathbb{Q};\\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Mi lesz: $h := f \pm g$; $h := f\cdot g$; $h := \dfrac{f}{g}$; $h := \dfrac{g}{f}$?

5. Tekintsük az alábbi f és g függvényeket. Határozzuk meg az $f\circ g$ és a $g\circ f$ függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := |x|\ \ (x\in\mathbb{R})$; $g(x) := \sin x\ \ (x\in\mathbb{R})$;

(b) $f(x) := \sqrt{x}\ \ (x\in[0;+\infty))$; $g(x) := x^2\ \ (x\in\mathbb{R})$. Igaz-e, hogy $f\circ g = g\circ f$?

(c) $f(x) := [x]\ \ (x\in\mathbb{R})$; $g(x) := \cos(\pi\cdot x)\ \ (x\in\mathbb{R})$;

(d) $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|}\ \ (x\in\mathbb{R})$; $g(x) := \dfrac{x}{1-|x|}\ \ (x\in(-1;1))$. Igaz-e, hogy $f\circ g = g\circ f$?

(e)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+6x, & \text{ha } x\in(-\infty;-3);\\ -2x-5, & \text{ha } x\in[-3;+\infty);\end{cases}\quad;\quad g(x)=\begin{cases} 5x-2, & \text{ha } x\in(-\infty;1];\\ x^2-2x+4, & \text{ha } x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

6. Tekintsük az alábbi f és g illetve h függvényeket. Határozzuk meg a $\min\{f,g\}$ és a $\max\{f;g\}$ vagy három függvény esetén a $\min/\max\{f;g;h\}$ alsó és felső burkoló függvényeket és ábrázoljuk is őket:

(a) $f(x) := |x|\ \ (x\in\mathbb{R})$; $g(x) := \sqrt{1-x^2}\ \ (x\in[-1;1])$;

(b) $f(x) := \sqrt{|x|}\ \ (x\in\mathbb{R})$; $g(x) := \left|\dfrac{1}{x}\right|\ \ (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$;

(c) $f(x) := x\ \ (x\in\mathbb{R})$; $g(x) := x^2\ \ (x\in\mathbb{R})$; $h(x) := x^3\ \ (x\in\mathbb{R})$.

Egyéb típusok

7. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x)=\frac{3+x}{3-x}\cdot\log_{x^2-x-2}(9-x^2)\quad(x\in D),$$

ahol $D\subset\mathbb{R}$ jelöli a maximális értelmezési tartományt amelyen az f utasítása értelmes. Adjuk meg a D halmazt, majd oldjuk meg ezen az $f(x)>0$ egyenlőtlenséget.

8. Bizonyítsuk be, hogy az $f : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) := x + \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény szigorúan monoton csökken a $(0;1]$ intervallumon és szigorúan monoton nő az $[1;+\infty)$ intervallumon.

9. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$f(x) + f\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) = 1 + x \ \ (\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}).$$

10. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy \ \ (\forall\, x, y \in \mathbb{R}).$$

11. Adott az $a \in [0;+\infty)$ paraméter és az $f : (a;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy a $g(x) := \dfrac{1}{x} \cdot f(x) \ \ (x \in (a;+\infty))$ függvény monoton csökkenő. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény szubadditív, azaz:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \ \ (\forall\, x, y \in (a;+\infty)).$$

12. Adott az $f(x) := ax+b \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol a és b valós paraméterek. Határozzuk meg az alábbi függvényt:

$$g := f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{szer}} \ \ (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

25. Kép, őskép, értékkészlet, inverz függvény

25.1. Kiegészítés az elmélethez

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A, B$ tetszőleges nemüres halmazok.

Kép, értékkészlet

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ függvény és $C \subseteq A$ adott halmaz. Ekkor a C halmaz f függvény által létesített *képe* az alábbi halmaz:

$$f[C] := \{f(x) \mid x \in C\} \subseteq B.$$

Megjegyzések:

1. Egyezzünk meg abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.
2. Világos, hogy az f értékkészlete az értelmezési tartomány f által létesített képe, azaz
$$R_f = f[D_f].$$

Például:

1. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ és $C := [-1; 2]$. Határozzuk meg az $f[C]$ képhalmazt.

   Megoldás: A definícióból indulva:

   $$f[[-1;2]] = \{f(x) \mid x \in [-1;2]\} = \{x^2 \mid -1 \leq x \leq 2\} = (\star) = [0;4],$$

   ahol $(\star)$ az alábbi levezetéseket helyettesíti (két halmaz egyenlőségéhez igazolnunk kell a kétirányú tartalmazást):

   $$\text{Ha } 0 \leq x \leq 2 \implies 0 \leq x^2 \leq 4;$$

   $$\text{Ha } -1 \leq x \leq 0 \iff 0 \leq -x \leq 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 1.$$

   Összefoglalva tehát:
   $$\text{Ha } x \in [-1;2] \implies x^2 \in [0;4].$$

   Ezzel igazoltuk, hogy
   $$f[[-1;2]] \subseteq [0;4].$$

   A fordított irányhoz be kell látnunk, hogy:

   $$\forall\ y \in [0;4] :\ y \in f[[-1;2]] \iff \forall\ y \in [0;4]\ \exists\, x \in [-1;2] :\ x^2 = y.$$

   Rögzítsünk tehát egy $y \in [0;4]$ értéket. Keresünk olyan $x \in [-1;2]$ számot, melyre:

   $$x^2 = y \in [0;4] \iff x = \pm\sqrt{y}.$$

Világos, hogy

$$x = \sqrt{y} \in [0;2] \subseteq [-1;2] \text{ megfelel.}$$

Beláttuk, hogy:

$$[0;4] \subseteq f[[-1;2]].$$

2. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$. Határozzuk meg az R_f értékkészletet.

Megoldás: A definícióból indulva:

$$R_f = f[D_f] = \{f(x) \mid x \in D_f\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq [0;+\infty),$$

hiszen

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : y = x^2 \geq 0.$$

A fordított irányhoz be kell látnunk, hogy:

$$\forall\ y \in [0;+\infty) :\ y \in R_f \iff \forall\ y \in [0;+\infty)\ \exists\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 = y.$$

Rögzítsünk tehát egy $y \in [0;+\infty)$ értéket. Keresünk olyan $x \in \mathbb{R}$ valós számot, melyre:

$$x^2 = y \in [0;+\infty) \iff x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}.$$

Két megfelelő x értéket is találtunk, tehát:

$$[0;+\infty) \subseteq R_f.$$

Összevetve a két tartalmazási relációt kapjuk, hogy:

$$R_f = [0;+\infty).$$

Őskép

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ függvény és $D \subseteq B$ adott halmaz. Ekkor a D halmaz f függvény által létesített *ősképe* az alábbi halmaz:

$$f^{-1}[D] := \{x \in D_f \mid f(x) \in D\} \subseteq A.$$

Megjegyzések:

1. Egyezzünk meg abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

2. Világos, hogy az f értelmezési tartománya az értékkészlet f által létesített ősképe, azaz

$$D_f = f^{-1}[R_f].$$

Például:

1. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ és $D := [1;2]$. Határozzuk meg az $f^{-1}[D]$ ősképhalmazt.

   Megoldás: A definícióból indulva:

$$f^{-1}[[1;2]] = \{x \in D_f \mid f(x) \in [1;2]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 2\} = (\star) =$$
$$= [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}],$$

   ahol $(\star)$ a fenti egyenlőtlenséglánc alábbi megoldását jelöli:

$$1 \leq x^2 \leq 2 \iff (x^2 - 1 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - \sqrt{2} \leq 0) \iff x \in [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}].$$

2. Legyen $g(x) := \dfrac{1}{x} \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Határozzuk meg az $g^{-1}[(-1;1]]$ ősképhalmazt.

   Megoldás: A definícióból indulva:

$$g^{-1}[(-1;1]] = \{x \in D_f \mid g(x) \in (-1;1]\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid -1 < \frac{1}{x} \leq 1 Big\} = (\star) =$$
$$= (-\infty; -1) \cup [1; +\infty),$$

   ahol $(\star)$ a fenti egyenlőtlenséglánc megoldását jelöli:

$$-1 < \frac{1}{x} \leq 1 \quad (x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)) \iff$$
$$\iff ((x < 0 \Longrightarrow x < -1 \ \wedge \ x \leq 1) \ \vee \ (x > 0 \Longrightarrow x > -1 \ \wedge \ x \geq 1)) \iff$$
$$\iff x < -1 \ \vee \ x \geq 1.$$

Invertálható függvények, inverz függvény

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *invertálható* vagy *injektív*, ha:

$$\forall\, x, t \in D_f : x \neq t \implies f(x) \neq f(t).$$

Megjegyzések:

1. Szóban megfogalmazva tehát: egy f függvény pontosan akkor invertálható, ha a D_f értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe is különböző.

2. A feladatokban gyakran használjuk a fenti definícióval azonos megfogalmazást:

$$f \ \text{ injektív } \iff \forall \ x, t \in D_f : f(x) = f(t) \implies x = t.$$

Például:

1. Legyen $f(x) := 2x - 7 \ (x \in \mathbb{R})$. Invertálható$-$e az f?

   Megoldás: Legyenek $x \neq t \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített értelmezési tartománybeli különböző pontok. Vizsgáljuk meg az alábbi eltérést:

$$f(x) - f(t) = (2x - 7) - (2t - 7) = 2 \cdot (x - t) \neq 0 \Longrightarrow f(x) \neq f(t),$$

   tehát az f injektív.

2. Legyen $f(x) := \sqrt{9-x^2}$ $(x \in [-3;3])$. Invertálható−e az f?

   Megoldás: Könnyű észrevenni, hogy például:
   $$-1 \neq 1 \in [-3;3] \quad \wedge \quad f(-1) = f(1) = \sqrt{8} \quad \Longrightarrow f \quad \text{nem injektív.}$$

3. Módosítsuk az előző feladat értelmezési tartományát az alábbi módon:
   $$f(x) := \sqrt{9-x^2} \ \ (x \in [0;3]).$$
   Invertálható−e most az f?

   Megoldás: Legyenek most $x, t \in [0;3]$ és tegyük fel, hogy $f(x) = f(t)$. Ekkor:
   $$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-t^2} \quad \Longrightarrow \quad 9 - x^2 = 9 - t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
   $$\Longleftrightarrow \quad (x-t)\cdot(x+t) = 0 \Longrightarrow x = t,$$
   ugyanis
   $$\text{Ha} \ \ x, t \in [0;3] \quad \Longrightarrow \quad x + t \in [0;6] \ \ \wedge \ \ (x + t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = t = 0).$$
   Ezzel beláttuk, hogy az f invertálható.

Def: Legyen $f : A \longrightarrow B$ egy invertálható függvény. Definiáljuk ekkor az *inverzét* f^{-1}−et az alábbiak szerint:
$$D_{f^{-1}} := R_f \quad \wedge \quad \forall\, y \in D_{f^{-1}}: \quad f^{-1}(y) := x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Megjegyzések:

1. Könnyű meggondolni, hogy $R_{f^{-1}} = D_f$.

2. A feladatokban az inverz utasítás meghatározása az $f(x) = y$ egyenlet megoldását jelenti az ismeretlen x−re nézve (x−et fejezzük ki az y segítségével). Az is világos, hogy ez az egyenlet pontosan azon y értékek esetén oldható meg D_f−en, ha $y \in R_f$.

Például:

1. Legyen $f(x) := 2x - 7$ $(x \in \mathbb{R})$. Adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.

   Megoldás: Korábban már beláttuk, hogy f invertálható. Először is adjuk meg R_f−et:
   $$R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\} = \{2x - 7 \mid x \in \mathbb{R}\} = (\star) = \mathbb{R},$$
   ugyanis $(\star)$:
   $$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2x - 7 \in \mathbb{R}, \ \text{ azaz } \ R_f \subseteq \mathbb{R}$$
   és fordítva:
   $$\text{Ha } y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \ \ y = 2x - 7 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ x = \frac{y+7}{2} \in \mathbb{R}: \ \ f(x) = y, \ \text{ azaz } \mathbb{R} \subseteq R_f.$$
   Ezzel beláttuk, hogy:
   $$D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} \ \wedge \ f^{-1}(y) = \frac{y+7}{2} \quad (y \in \mathbb{R} = D_{f^{-1}})\,.$$

2. Invertálható-e az alábbi függvény és ha igen,akkor adjuk meg f^{-1}–et:

$$f(x) := \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad (x \in [0;+\infty)).$$

Megoldás: Legyenek most $x, t \in [0;+\infty)$ és tegyük fel, hogy $f(x) = f(t)$. Ekkor:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \iff (1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{t}) = (1-\sqrt{t})\cdot(1+\sqrt{x}) \iff \sqrt{x} = \sqrt{t} \implies$$

$$\implies x = t,$$

tehát f injektív. Mi lesz R_f? Ehhez alakítsuk át f utasítását az alábbiak szerint:

$$\text{Ha} \quad x \in [0;+\infty), \quad \text{akkor}: \quad f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2-1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 > -1 \implies$$

$$\implies R_f \subseteq (-1;+\infty).$$

A fordított irányú tartalmazáshoz legyen $y \in (-1;+\infty)$ tetszőlegesen rögzített érték és keresünk olyan $x \geq 0$ számot, melyre:

$$f(x) = y \iff \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 = y \iff \frac{2}{1+\sqrt{x}} = y+1 \iff (y \neq -1) \iff$$

$$\iff \sqrt{x} = \frac{2}{y+1} - 1.$$

A fenti utolsó egyenlet pontosan akkor oldható meg az eddigi $y > -1$ feltétel mellet, ha:

$$\frac{2}{y+1} - 1 \geq 0 \;\Big|\; \cdot (y+1) > 0 \iff 2 \geq y+1 \iff y \leq 1.$$

Összefoglalva tehát:

$$\forall\ y \in (-1;1]\ \exists\ x = \left(\frac{2}{y+1} - 1\right)^2 \in [0;+\infty): \ f(x) = y \implies$$

$$\implies (-1;1] \subseteq R_f.$$

A korábbi észrevételünket, miszerint $R_f \subseteq (-1;+\infty)$ tovább vizsgáljuk és belátjuk, hogy $R_f \subset (-1;1]$ is igaz! Ehhez elég belátni, hogy:

$$\forall\ x \in [0;+\infty)\ \frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 \leq 1 \iff \forall\ x \in [0;+\infty): \ 0 \leq \sqrt{x},$$

ami nyilvánvalóan igaz. Tehát

$$R_f = (-1;1].$$

Ezek után megadható az inverz függvény:

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-1;1] \ \wedge \ f^{-1}(y) = \left(\frac{2}{y+1} - 1\right)^2 \quad (y \in (-1;1]).$$

Megjegyzés: Az értékkészlet megállapítása nem mindig egyszerű, vagy nem feltétlenül "olvasható" le az értékeket definiáló formulából. Az itteni levezetésben csak "később" derült ki, hogy 1 az értékek egy felső korlátja. Természetesen ez előbb is észrevehető, hiszen $x \geq 0$ esetén

$$\frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 \leq \frac{2}{1+\sqrt{0}} - 1 = 1,$$

de talán az $f(x) = y$ egyenlet megoldhatóságát vizsgálva természetesebb módon kaptuk meg az $y \leq 1$ feltételt.

25.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Definiálja egy C halmaz f függvény által létesített *képét*.
2. Definiálja egy D halmaz f függvény által létesített *ősképét*.
3. Halmaz függvény által létesített képét használva definiálja egy f függvény értékkészletét.
4. Mikor mondjuk, hogy egy függvény invertálható?
5. Definiálja egy invertálható függvény inverzét.
6. Adott az $f(x) := 3x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f[[-3;4)]$ képhalmazt.
7. Adott az $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f[(-2;1]]$ képhalmazt.
8. Adott az $f(x) := 3x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f^{-1}[[-1;5)]$ ősképhalmazt.
9. Adott az $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f^{-1}[(1;7]]$ ősképhalmazt.
10. Adott az $f(x) := \ln x \quad (x \in (0;+\infty))$ függvény. Határozza meg az $f^{-1}[(-1;1)]$ ősképhalmazt.
11. Adott az $f(x) := x^2 + x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az $f[C]$ és $f^{-1}[C]$ halmazokat, ha $C := \{-1\}$.
12. Adott az $f(x) := 1 - 4x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.
13. Adott az $f(x) := 1 - 2x - x^2 \quad (x \in (-\infty;-1))$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.
14. Adott az $f(x) := |x-1| + (x^2 - 4x + 4) \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.
15. Adott az $f(x) := 2^x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény. Invertálható-e az f és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverzfüggvényt.

25.2. Feladatok

25.2.1. Órai feladatok

Kép, őskép, értékkészlet

1. Adjuk meg az alábbi f függvények és a megadott B, C halmazok esetében az $f^{-1}[B]$ ősképhalmazt, illetve az $f[C]$ képhalmazt :

   (a) $f(x) := 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R});\ \ B := [1; 2);\ \ C := (1; 2]$;

   (b) $f(x) := 2 - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty));\ \ B := [-1; 1];\ \ C := [2; 9]$;

   (c) $f(x) := |1 - |x - 2|| \quad (x \in [-1; 4]);\ \ B := [1/4; 1/2);\ \ C := [-1; 2]$;

   (d) $f(x) := (\sqrt{2})^{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R});\ \ B := [\sqrt{2}; 2);\ \ C := [-1; 1)$;

   (e) $f(x) := \dfrac{2 - x}{1 - x} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R});\ \ B := [1/2; +\infty);\ \ C := [0; 1) \cup (1; +\infty)$;

   (f) $f(x) := [\sin x] \quad (x \in \mathbb{R});\ \ B := [-1; 0];\ \ C := [-1; 0]$.

2. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

   (a) $f(x) := 3x + 1 \quad (x \in [-2; 1])$;

   (b) $f(x) := 1 - 2x \quad (-1 \leq x < 3)$.

   (c) $f(x) := |x - 2| \quad (x \in [-1; 4])$.

3. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

   (a) $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (-1 \leq x \leq 6)$.

   (c) $f(x) := 1 - x^2 \quad (-2 \leq x \leq 3)$.

4. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 3}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az f értékkészletét, az R_f halmazt.

5. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozza meg az a értékeit úgy, hogy az $R_f \subset [-3; 2]$ feltétel teljesüljön.

6. Adott az alábbi függvény és az $m \in \mathbb{R}$ valós paraméter:

$$f(x) := \text{Sign}(x) := \begin{cases} 1-x & ,\text{ha } xin(-\infty;-1); \\ 1-x^2 & ,\text{ha } x \in [-1;1]; \\ 1+x & \text{ha } x \in (1;+\infty). \end{cases}$$

A paraméter értékeitől függően adjuk meg az $f^{-1}[(m;+\infty)]$ősképhalmazt.

Invertálható függvények, inverz függvény

7. Adott az alábbi függvény:

$$f(x) := \text{Sign}(x) := \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & ,\text{ha } x \in (1;+\infty); \\ 1 & \text{ha } x \in (-\infty;1]. \end{cases}$$

Határozza meg a $g(x) := f(x+1) - f(x-1) \quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt, majd a $g[[-1;3]]$ képhalmazt és a $g^{-1}[[-1;2]]$ ősképhalmazt. Invertálható$-$e a g függvény? Igazolja, hogy a $g|_{(0;+\infty)}$ függvény invertálható és adja meg az inverzét!

8. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények invertálhatóak$-$e és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverz függvényt (megadva a $D_{f^{-1}}; R_{f^{-1}}$ halmazokat és az $f^{-1}(x)$ értéket, ha $x \in D_{f^{-1}}$):

   (a) $f(x) := 2x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (b) $f(x) := x^2 - 2x + 2 \quad (x \in (-\infty;1])$;
   (c) $f(x) := 1 - \sqrt{2-x} \quad x \in (-\infty;2]$;
   (d) $f(x) := \dfrac{3x+2}{x-1} \quad (x \in (1;+\infty))$;
   (e) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$;
   (f) $f(x) := |x-1| + (x+2)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (g) $f(x) := \dfrac{2x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (h) $f(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$;
   (i) $f(x) := x \cdot |x| + 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

25.2.2. További feladatok

Kép, őskép, értékkészlet

1. Adjuk meg az alábbi f függvények és a megadott B, C halmazok esetében az $f^{-1}[B]$ ősképhalmazt, illetve az $f[C]$ képhalmazt :

(a) $f(x) := 4 - 3x \quad (x \in \mathbb{R});\ B := [-1;2);\ C := (-1;2]$;
(b) $f(x) := 1 + \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty;1]);\ B := [1/2;3];\ C := [0;1/2]$;
(c) $f(x) := |1 - x^2| \quad (x \in \mathbb{R});\ B := [-1;1/2];\ C := [-2;3]$;
(d) $f(x) := 3^{1/2-2x} \quad (x \in \mathbb{R});\ B := (1/27;3];\ C := [-1/4;1/4)$;
(e) $f(x) := \dfrac{x}{1+x} \quad (-1 \neq x \in \mathbb{R});\ B := [0;+\infty);\ C := (-\infty;-1) \cup (-1;1]$;
(f) $f(x) := [\cos x] \quad (x \in \mathbb{R});\ B := [0;1];\ C := [0;\pi]$.

2. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

(a) $f(x) := -x^2 - x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;
(b) $f(x) := (x-1)\cdot(3-x) \quad (1 \le x \le 4)$.
(c) $f(x) := x^2 - 10x + 27 \quad (x \in [0;6])$.

3. Állapítsuk meg az f függvény értékkészletét, ha

(a) $f(x) := 2x - \sqrt{2} \quad (x \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}])$;
(b) $f(x) := 1 + 3\cdot\sqrt{|x-2|} \quad (x \in \mathbb{R})$.
(c) $f(x) := \sqrt{4x^2 - 1} \quad \left(\dfrac{1}{2} \le x < 1\right)$;
(d) $f(x) := \lg(2x+1) \quad \left(-\dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{9}{2}\right)$;
(e) $f(x) := \dfrac{2x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;
(f) $f(x) := 4^x - 2^x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$;
(g) $f(x) := (\sin x + \cos x)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;
(h) $f(x) := [\sin x] + [\cos x] \quad (x \in [0;2\pi])$.

4. Milyen $k \in \mathbb{R}$ esetén lesz az

$$f(x) := \sqrt{x^2 + 4x + k} \qquad (|x| \le 3)$$

függvény értékkészlete a $[0,5]$ zárt intervallum?

5. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény. Határozza meg az f értékkészletét, az R_f halmazt.

6. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f(x) = \dfrac{3x^2 + ax - 1}{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozza meg az a értékeit úgy, hogy az $R_f = [-3;5]$ feltétel teljesüljön.

7. Adott az alábbi függvény :

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in (-\infty; 0); \\ \sin x, & \text{ha } x \in [0; 2\pi]; \\ 2\pi - x & \text{ha } x \in (2\pi; +\infty). \end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi kép és ősképhalmazokat:

$$f^{-1}\Big[[-1;1]\Big];\; f\Big[[-1;\pi]\Big];\; f^{-1}\Big[[0;+\infty)\Big];\; f^{-1}\Big[(-\infty;-1]\Big];$$

$$f\Big[[\pi;3\pi]\Big];\; f^{-1}\Big[\{-1;1\}\Big];\; f^{-1}\Big[\{-1/2\}\Big].$$

8. Határozzuk meg az m valós paraméter értékeit úgy, hogy az

$$f(x) := (m+1)x^2 + 2mx + 1 \;\; (x \in \mathbb{R})$$

függvény esetén az alábbi feltétel teljesüljön:

$$f^{-1}\Big[(-\infty;0)\Big] = \mathbb{R}$$

Invertálható függvények, inverz függvény

9. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények invertálhatóak$-$e és ha igen, akkor adjuk meg az f^{-1} inverz függvényt (megadva a $D_{f^{-1}}; R_{f^{-1}}$ halmazokat és az $f^{-1}(x)$ értéket, ha $x \in D_{f^{-1}}$):

   (a) $f(x) := 2 - 5x \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := 1 - 2x - x^2 \quad (x \in [-1; +\infty))$;

   (c) $f(x) := x^3 - x \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (d) $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (e) $f(x) := \sqrt{x-2} - 1 \quad (x \in [2; +\infty))$;

   (f) $f(x) := \sqrt{x^2 + 2x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (g) $f(x) := \sqrt{x^2 + 2x + 5} \quad (x \in (-1; +\infty))$;

   (h) $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0; +\infty))$;

   (i) $f(x) := \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$;

   (j) $f(x) := x \cdot \sin x \quad (x \in (-\pi; \pi/2])$;

   (k) $f(x) := \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 2x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\})$;

   (l) $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in (0; +\infty))$;

(m) $f(x) := x \cdot |x| - 2x - 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

10. Adott az $f(x) := ax+b \ (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol a és b tetszőleges valós paraméterek. Határozzuk meg az a, b értékeit úgy, hogy f invertálható legyen és teljesüljön, hogy $f = f^{-1}$.

11. Bizonyítsuk be, hogy az olyan a, b valós paraméterek esetén, amelyekre $ab \neq -4$ az alábbi függvény invertálható és megegyezik az inverzével, azaz $f = f^{-1}$:

$$f(x) := \frac{2x+a}{bx-2} \ (2/b \neq x \in \mathbb{R}).$$

Egyéb típusok

12. Adott az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ f(x) = x^2 + (5m-2)x + m \ (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol $m \in \mathbb{R}$ valós paraméter. Határozza meg az m értékét, ha tudjuk, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet egyik megoldása a másiknak pont a reciproka. A kapott m paraméterrel tekintsük a fenti f , továbbá a $g(x) = |x| \ \ (x \in \mathbb{R})$ függvényeket. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket, majd az ezek által létesített $(f \circ g)^{-1}[[-1; 1]]$ ősképhalmazt, illetve a $(g \circ f)[[-1; 1]]$ képhalmazt. Milyen $A \subset \mathbb{R}$ halmazok esetén lesz a $(g \circ f)^{-1}[A]$ ősképhalmaz elemszáma k, ahol $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$?

13. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő valós x számok halmaza olyan diszjunk intervallumok egyesítése, amelyeknek az összhossza 1988.

26. Korlátosság, szélsőérték, végtelenben vett határérték

26.1. Kiegészítés az elmélethez

Korlátos függvények

Definíció : Azt mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ valós−valós függvény:

1. *alulról korlátos*, ha az R_f értékkészlet alulról korlátos, azaz

$$\exists\, k \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq k \quad (\forall\, x \in D_f);$$

2. *felülről korlátos*, ha az R_f értékkészlet felülről korlátos, azaz

$$\exists\, K \in \mathbb{R} : \quad f(x) \leq K \quad (\forall\, x \in D_f);$$

3. *korlátos*, ha az R_f értékkészlet alulról is és felülről is korlátos, azaz

$$\exists\, k, K \in \mathbb{R} : \quad k \leq f(x) \leq K \quad (\forall\, x \in D_f).$$

Megjegyzések:

1. A fenti definíciókban szereplő k és K számokat az f alsó illetve felső korlátjának nevezzük.

2. Egy fenti típusú f függvény *nem korlátos*, ha alulról vagy felülről nem korlátos.

Példák:

1. Legyen $f(x) := x^2 \;\; (x \in \mathbb{R})$. Világos, hogy

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq f(x) = x^2,$$

azaz f alulról korlátos és például 0 egy alsó korlátja (egyben minimuma is). Könnyű meggondolni, hogy az f felülről nem korlátos: indirekt módon tegyük fel ugyanis, hogy az f felülről korlátos, ami azt jelentené, hogy

$$\exists\, K \in [0; +\infty) : \quad 0 \leq x^2 \leq K \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

ami nyilván nem teljesül például a $x = \sqrt{K+1} \in \mathbb{R}$ szám esetén.

2. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0;1))$. Könnyű meggondolni, hogy ebben az esetben:

$$\forall\, x \in (0;1): \;\; 1 < \frac{1}{x},$$

de itt sem létezik olyan $K > 0$ (elég csupán ezeket meggondolni) szám, melyre

$$\frac{1}{x} \leq K \quad (x \in (0;1))$$

igaz, mert például egy ilyen K esetén az $x = \dfrac{1}{K+1} \in (0;1)$ számra nem teljesül a fenti egyenlőtlenség. Jegyezzük meg, hogy ennél a feladatnál az 1 mint alsó korlát nem a legkisebb értéke az $f-$nek (most nincs minimális érték). Ez a függvény tehát alulról korlátos, felülről nem korlátos.

3. Legyen $f(x) := \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \;\; -1 \leq \cos x \leq 1,$$

azaz f korlátos. A cos függvényt ismerve tudjuk, hogy a -1 és az 1 alsó és felső korlátok egyben a függvény legnagyobb és legkisebb értékei is, amelyeket végtelen sok pontban vesz fel az f.

4. Legyen $f(x) := \ln x$ $(x \in (0;1))$. A logaritmusfüggvényről tanultakat használva:

$$\forall\, x \in (0;1): \;\; -\infty < \ln x < 0,$$

azaz f felülről korlátos. Ebben az esetben azonban nincs alsó korlát, ugyanis ha volna ilyen $k < 0$ szám, amelyre igaz lenne, hogy:

$$\forall\, x \in (0;1): \;\; k < \ln x < 0,$$

akkor az $x := e^{k-1} \in (0;1)$ számmal ellentmondásra jutunk.

Szélsőértékszámítás

Definíció : Azt mondjuk, hogy egy $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ valós$-$valós függvénynek:

1. van *minimuma/legkisebb értéke*, ha az R_f értékkészletnek van legkisebb értéke, azaz

$$\exists\, a \in D_f: \;\; f(x) \geq f(a) \quad (\forall\, x \in D_f);$$

2. van *maximuma/legnagyobb értéke*, ha az R_f értékkészletnek van legnagyobb értéke, azaz

$$\exists\, b \in D_f: \;\; f(x) \leq f(b) \quad (\forall\, x \in D_f).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a és b az f *minimumhelye* illetve *maximumhelye* és $f(a)$ illetve $f(b)$ a megfelelő minimális és maximális *értékek*.

Megjegyzések:

1. Ha egy valós−valós f függvénynek van szélsőértéke (minimuma, vagy maximuma, vagy mindkettő), akkor ezeket akár több helyen is felveheti. Például az ismert sin és cos függvények végtelen sok helyen veszik fel az 1 maximumot és a −1 minimális értéket. Hasonlóan az $f(x) := 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ konstansfüggvény esetében: minden valós helyen egyszerre van minimum és maximum.

Példák: Az alábbi esetekben határozzuk meg az f szélsőértékeit és azok helyeit (ha léteznek).

1. Legyen $f(x) := x^2 \quad (x \in [-1;3])$. Világos, hogy
$$\forall\, x \in [0;3] : f(0) = 0 \leq x^2 \leq 9 = f(3),$$
és
$$\forall\, x \in [-1;0] : -1 \leq x \leq 0 \iff 0 \leq -x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) \in [0;1].$$
Összefoglalva tehát:
$$\forall\, x \in [-1;3] : f(0) = 0 \leq x^2 \leq 9 = f(3),$$
tehát a minimum 0 amit $x = 0-$ban vesz fel az f és a legnagyobb érték 9 ami $x = 3-$ban teljesül.

2. Legyen $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0;1])$. Először alakítsuk át az $f(x)$ kifejezést az alábbiak szerint (így jobban leolvashatóak lesznek a szélsőértékek):
$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad (x \in [0;1]).$$
Világos, hogy az x legynagyobb értékét beírva a tört a legkisebb és x legkisebb értékére a tört a legnagyobb lesz. Ennek megfelelően:
$$\forall\, x \in [0;1] : f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{0+1} + \sqrt{0}} = 1 = f(0),$$
tehát a minimum $\sqrt{2} - 1$ amit $x = 1-$ben vesz fel az f és a legnagyobb érték 1 ami $x = 0-$ban teljesül.

3. Legyen $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$. Vegyük észre, hogy:
$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f(-1) = -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} = f(1),$$
ugyanis:
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \iff -1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2 \iff$$
$$\iff 0 \leq (x+1)^2 \ \wedge \ 0 \leq (x-1)^2 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$
Tehát f maximuma $\dfrac{1}{2}$ az $x = 1$ helyen, minimuma pedig $-\dfrac{1}{2}$ az $x = -1$ helyen. Észre lehet venni, hogy f *páratlan* függvény, így elég lett volna csak a pozitív x értékekre keresni szélsőértékeket majd az origóra tükrözve kaptuk volna a további eredményeket.

Nagyságrendi becslések, $+\infty-$ben vett határéréték

Ebben a részben valós-valós függvények viselkedését fogjuk tanulmányozni az értelmezési tartomány elég nagy x valós értékei mellett. Ebben a fejezetben csak olyan függvényekkel foglalkozunk, melyek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal:

$$\forall K > 0 \; D_f \cap (K; +\infty) \neq \emptyset.$$

Erre a tulajdonságra úgy fogunk hivatkozni, hogy $+\infty$ az f értelmezési tartományának torlódási pontja. A későbbi tanulmányok során mindezt pontosan definiálni fogjuk. Ezen feltételezés mellett értjük az összes további definíciót. Bevezetjük valós-valós függvények határértékének három speciális esetét, nevezetesen a $+\infty-$ben vett végtelen/véges/mínusz végtelen határérték fogalmát.

Def: *(Végtelenben vett végtelen határérték)* Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ valós-valós függvény és D_f-nek $+\infty$ torlódási pontja. Azt fogjuk mondani, hogy az f határértéke $+\infty-$ben $+\infty$, jelölésben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall\, P > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\, : \forall\, x \in (K; +\infty) \cap D_f \;:\; f(x) > P.$$

Def: *(Végtelenben vett véges határérték)* Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény és D_f-nek $+\infty$ torlódási pontja. Azt fogjuk mondani, hogy az f határértéke $+\infty-$ben az $L \in \mathbb{R}$ valós szám, jelölésben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\, : \forall\, x \in (K; +\infty) \cap D_f \;:\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Def: *(Végtelenben vett mínusz végtelen határérték)* Legyen $f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény és D_f-nek $+\infty$ torlódási pontja. Azt fogjuk mondani, hogy az f határértéke $+\infty-$ben $-\infty$, jelölésben

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\, : \forall\, x \in (K; +\infty) \cap D_f \;:\; f(x) < p.$$

26.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

1. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvénynek van *maximuma*?
2. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvény *alulról korlátos*?
3. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvény *felülről korlátos*?

4. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvény *korlátos*?

5. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg, hogy egy valós$-$valós függvény *felülről nem korlátos.*

6. Definiálja egy valós-valós függvény esetén a végtelenben vett végtelen határértéket.

7. Mit jelent az, hogy egy valós-valós f függvény esetében $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$?

8. Mit jelent az, hogy egy valós-valós f függvény esetében $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$?

9. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melynek minden pontban minimuma és maximuma van.

10. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek van alsó korlátja, de felülről nem korlátos.

11. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek van alsó korlátja, nincs minimuma és felülről nem korlátos.

12. Adjon meg olyan $f : (0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely felülről korlátos, de alulról nem korlátos.

13. Van-e legkisebb értéke az $f(x) := x^2 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvénynek és ha igen, hol veszi fel ezt?

14. Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 1}{x^2} = +\infty$.

15. Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 1$.

26.1.2. További kérdések az elmélethez

1. Igazolja, hogy az $f(x) := \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvény felülről nem korlátos.

2. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely alulról és felülről sem korlátos.

3. Igaz-e, hogy ha egy valós$-$valós függvény felülről korlátos, akkor van maximuma is?

4. Igaz-e, hogy ha egy valós$-$valós függvénynek van minimuma, akkor alulról korlátos?

5. Mikor mondjuk, hogy egy valós$-$valós függvénynek van *minimuma* és ilyenkor mi a minimumhely?

6. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg, hogy egy valós$-$valós függvény *alulról nem korlátos.*

26.2. Feladatok

26.2.1. Órai feladatok

Korlátos függvények, szélsőértékszámítás

1. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb és legkisebb helyettesítési értékét:

   (a) $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := x^2 - 4x + 3 \quad \left(\frac{1}{2} \le x \le 3\right)$.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $P(x) := x^2 + ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$. Milyen a, b esetén lesz igaz, hogy $P(3) = \min\{P(x) : x \in \mathbb{R}\} = -2$?

3. 24 m hosszú kerítéssel téglalap alakú részt akarunk elkeríteni úgy, hogy a téglalap egyik oldalát a ház fala alkotja (tehát azon a szakaszon nincs szükség kerítésre). Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, ha maximális területű részt akarunk elkeríteni?

4. Egy derékszögű háromszög befogói 10 cm és 15 cm. A háromszögbe téglalapokat írunk úgy, hogy a téglalap egyik szöge a háromszög derékszögével esik egybe, a téglalap egyik csúcsa pedig az átfogón van. Határozzuk meg e téglalapok közül a legnagyobb területűt (adjuk meg az oldalait)!

5. Az alábbi függvényeket vizsgáljuk meg korlátosság és szélsőérték szempontjából:

   (a) $f(x) := \dfrac{3x^2 + 7}{9x^2 + 3} \quad (x \in [1; +\infty))$;

   (b) $f(n) := \dfrac{10n + 7}{15n + 12} \quad (n \in \mathbb{N})$;

   (c) $f(x) := \dfrac{1 - 3\sqrt{x}}{1 + 3\sqrt{x}} \quad (x \in [4; +\infty))$;

   (d) $x(n) := x_n := \dfrac{2^{n+1} + 2}{3 \cdot 2^n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$;

   (e) $f(x) := \dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (f) $f(x) := \dfrac{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x} \quad (x \in (0; \pi/2))$;

   (g) $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

6. Mekkora az $f(x) := \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legkisebb értéke és hol veszi fel ezt?

Nagyságrendi becslések, $+\infty-$ben vett határérérték

7. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [0;+\infty))$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) > 1000\ .$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, P > 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f :\ \ f(x) > P\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Igaz-e, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty?$$

8. Tekintsük az $f(x) := 1 - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -999\ .$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f :\ \ f(x) < p\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Igaz-e, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^2) = -\infty?$$

9. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) > 1000\ .$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, P > 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K;+\infty) \cap D_f :\ \ f(x) > P\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^2+1} = +\infty.$$

10. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$ $\left(x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}\right)$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$\left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{600}\ .$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f :\ \left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2-1}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^3+1}{1-x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -1000.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0\ \exists\, K > 0\ \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f :\ \ f(x) < p\ ?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{1-x}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

12. A megfelelő típusú határérték definíciója alapján igazolja a következő állításokat:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^3+x^2+7}{x^3+x+1} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 2x - 5} = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2} = -\infty$

26.2.2. További feladatok

Korlátos függvények, szélsőértékszámítás

1. Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb és legkisebb helyettesítési értékét:

   (a) $f(x) := x^2 + x - 6 \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (b) $f(x) := x^2 + x - 6 \quad (x \in [-1; 3])$;

   (c) $f(x) := -2 - 2x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

   (d) $f(x) := -2 - 2x - x^2 \quad (x \in (-\infty; 0])$;

   (e) $f(x) := -2 - 2x - x^2 \quad (x \in [-1/2; 2])$.

2. Adjuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy a

   $$P(x) := -x^2 + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   másodfokú polinomra

   $$P(-1) = \max\{P(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 3$$

   legyen!

3. Az olyan derékszögű háromszögek közül, amelyek befogóinak összege 12 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

4. Egy 20 m hosszú AB szakaszon határozzuk meg azt a C pontot amely esetén az AC és CB szakaszok, mint átmérők fölé szerkesztett körök területének összege minimális.

5. Adott kúpba írható hengerek közül melyiknek maximális a térfogata?

6. Az alábbi függvényeket vizsgáljuk meg korlátosság és szélsőérték szempontjából:

   (a) $f(x) := \dfrac{3(x-1)^2 + 7}{9(x-1)^2 + 3} \quad (x \in (-\infty; 2])$;

   (b) $f(x) := \dfrac{|x| - 1}{5|x| - 2} \quad (x \in [1; +\infty))$;

   (c) $f(x) := \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2} \quad (x \in (-\infty; 0])$;

(d) $f(x) := \dfrac{x^2+2x+6}{3x^2+6x+9} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(e) $f(x) := \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(f) $f(x) := \dfrac{2x-4\sqrt{x}-1}{5x-10\sqrt{x}+10} \quad (x \in [0;+\infty))$;

(g) $f(x) := x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}} \quad (x \in (0;+\infty))$;

(h) $f(x) := \dfrac{7-3\sin^2 x + 6\cos x}{\cos^2 x + 2\cos x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(i) $f(n) := x_n := \dfrac{8n+3}{5n+4} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(j) $f(x) := \dfrac{1-e^{x+1}}{e^x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(k) $f(x) := \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad (x \in [0;+\infty))$;

(l) $f(x) = \sin x \cdot (\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x) + \cos x \cdot (\sin x - \sqrt{3}\cos x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

7. Mekkora az $f(x) := \dfrac{x^4+x^2+4}{x}$ $(x \in (0;+\infty))$ függvény legkisebb értéke és hol veszi fel ezt?

Megoldás:

$$f(x) = x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 6 \cdot \sqrt{x^3 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4} = 6$$

Minimum $x = 1$ esetén adódik.

8. Mekkora az $f(x) := \dfrac{x^2}{1+x^4}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legkisebb és legnagyobb értéke és hol veszi fel ezeket?

Nagyságrendi becslések, $+\infty-$ben vett határérték

9. Tekintsük az $f(x) := \sqrt{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) > 100.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, P > 0 \;\exists\, K > 0 \;\forall x \in (K;+\infty) \cap D_f : \;\; f(x) > P \;?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

10. Tekintsük az $f(x) := \ln \frac{1}{x}$ $(x \in (0; +\infty))$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -100.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f : \;\; f(x) < p\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{x}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

11. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^6+1}{x^3+x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) > 4000.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, P > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f : \;\; f(x) > P\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6+1}{x^3+x^2}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

12. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{x^3+x}{1-x^3}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$|f(x) + 1| < \frac{1}{100}.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f : \;\; |f(x) - (-1)| < \varepsilon\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x}{1-x^3}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

13. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{1+x-3x^5}{x^4+16}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan $K > 0$ számot (ha van), hogy minden $x > K$ értelmezési tartománybeli valós szám esetén teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$f(x) < -100.$$

b) Igaz-e a következő állítás:

$$\forall\, p < 0 \;\; \exists\, K > 0 \;\; \forall x \in (K; +\infty) \cap D_f : \;\; f(x) < p\,?$$

c) Írja fel a fenti állítás tagadását.

d) Számítsa ki a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x-3x^5}{x^4+16}$$

határértéket és állítását igazolja a definíció segítségével.

Egyéb típusok

14. Tekintsük az $f : [0;1] \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R};\, f(x,y) := (x-y)^2$ $((x,y) \in [0;1] \times [0,1])$ kétváltozós függvényt. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\max\nolimits_{y \in [0;1]} \left(\min\nolimits_{x \in [0;1]} f(x,y)\right) < \min\nolimits_{y \in [0;1]} \left(\max\nolimits_{x \in [0;1]} f(x,y)\right).$$

15. Adottak az $f, g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvények. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $x, y \in [0; 1]$ valós számok, melyekre:

$$|f(x^2) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}.$$

16. Adott az $f(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény, ahol a, b valós paraméterek és $a \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi számok mindegyike nem lehet kisebb mint 1:

$$|f(0) - 1|; \ \ |f(1) - 3|; \ \ |f(2) - 9|.$$

27. Függelék

27.1. Gyöktényező kiemelése

A gyöktényező kiemelésére több módszer is ismeretes. Az alábbiakban az

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

azonosságra épülő módszert mutatjuk be. Legyen tehát $n \in \mathbb{N}^+$, továbbá

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

egy n-edfokú polinom, $\alpha \in \mathbb{R}$ pedig a P egy gyöke, azaz $P(\alpha) = 0$. Az $(x-\alpha)$ gyöktényezőt az alábbi módon emelhetjük ki P-ből:

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén induljunk ki az alábbi egyenlőségekből:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0\,, \\ 0 = P(\alpha) &= a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \alpha + a_0\,. \end{aligned}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót, és rendezzük át a kapott kifejezést:

$$P(x) = P(x) - 0 = P(x) - P(\alpha) = a_n \cdot (x^n - \alpha^n) + a_{n-1} \cdot (x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1 \cdot (x - \alpha).$$

Jól látható, hogy – az idézett azonosság alkalmazásával – minden tagból ki tudunk emelni $(x-\alpha)$-t.

Mindezt egy példával is szemléltetjük:

Feladat: A $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ polinomnak a 2 gyöke. Emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt.

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - 0 = P(x) - P(2) = 2(x^4 - 2^4) - 3(x^3 - 2^3) - 7(x^2 - 2^2) + 13(x-2) = \\ &= 2(x-2)(x^3 + x^2 \cdot 2 + x \cdot 2^2 + 2^3) - 3(x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) - \\ &- 7(x-2)(x+2) + 13(x-2) = \\ &= (x-2)(2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 - 3x^2 - 6x - 12 - 7x - 14 + 13) = \\ &= (x-2)(2x^3 + x^2 - 5x + 3). \end{aligned}$$

27.2. Gyöktényező kiemelése Horner-táblázattal

Tekintsük a valós együtthatós

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{27.1}$$

polinomot, és legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Osszuk el P-t maradékosan az $x - \alpha$ polinommal:

$$P(x) = (x-\alpha)\cdot(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1) + b_0 \tag{27.2}$$

Meghatározandók a b_j együtthatók. Közülük $b_n, \ldots b_1$ a hányadospolinom együtthatói, b_0 pedig a maradék. $x = \alpha$ beírása után nyilvánvaló, hogy $b_0 = P(\alpha)$, azaz b_0 a polinom helyettesítési értéke az α helyen.

Tétel: *A* $b_j \quad (j = n,\, n-1,\, \ldots,\, 1,\, 0)$ *együtthatók az alábbi rekurzióval kaphatók:*

$$b_n = a_n; \qquad b_j = \alpha \cdot b_{j+1} + a_j \quad (j = n-1,\, n-2,\, \ldots\, 1,\, 0).$$

Megjegyzés: Ezt a rekurziót az alábbi táblázattal lehet jól kivitelezni:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
α	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_2	b_1	b_0

A felső sorba beírjuk a P polinom együtthatóit, majd az első sor első elemét átmásoljuk a második sorba az alatta lévő cellába ($b_n = a_n$). Ezután a második sor elemeit úgy képezzük, hogy a sorban előtte álló számot α-val megszorozzuk, s hozzáadjuk a kitöltendő cella felett álló számot:

$$b_{n-1} = \alpha \cdot b_n + a_{n-1}, \quad b_{n-2} = \alpha \cdot b_{n-1} + a_{n-2}, \quad \ldots, \quad b_1 = \alpha \cdot b_2 + a_1, \quad b_0 = \alpha \cdot b_1 + a_0$$

A tétel bizonyítása: Az (27.1) és az (27.2) egyenletek alapján:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = (x-\alpha)\cdot \sum_{j=1}^{n} b_j x^{j-1} + b_0 \ . \tag{27.3}$$

A jobb oldalt átalakítjuk:

$$(x-\alpha)\cdot\sum_{j=1}^{n} b_j x^{j-1} + b_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j - \sum_{j=1}^{n} \alpha\cdot b_j x^{j-1} + b_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha \cdot b_{j+1} x^j + b_0 =$$

$$= b_n x^n + \sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha b_{j+1} x^j - \alpha b_1 + b_0 = b_n x^n + \sum_{j=1}^{n-1} (b_j - \alpha b_{j+1}) x^j + b_0 - \alpha b_1 =$$

$$= b_n x^n + \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - \alpha b_{j+1}) x^j \ .$$

Ezek után (27.3) két oldalán az azonos fokú tagok együtthatóinak egyenlőségét fel tudjuk írni:

$$a_n = b_n, \qquad a_j = b_j - \alpha \cdot b_{j+1} \quad (j = n-1,\, \ldots,\, 1,\, 0)\,,$$

amiből átrendezéssel kapjuk a tétel állításában szereplő rekurziós képleteket:

$$b_n = a_n, \qquad b_j = \alpha\cdot b_{j+1} + a_j \quad (j = n-1,\, \ldots,\, 1,\, 0) \ . \qquad \square$$

Szemléltessük a módszert az alábbi példán:

Feladat: Osszuk el a

$$P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54, \quad \alpha = 2,$$

polinomot maradékosan $x - 2$-vel.

Megoldás:
A feladatban tehát $\alpha = 2$. A táblázat:

	1	-8	16	18	-81	54
$\alpha = 2$	1	-6	4	26	-29	-4

Ebből egyrészt kiolvashatjuk a maradékos osztás eredményét:

$$x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54 = (x - 2) \cdot (x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 26x - 29) - 4\,,$$

másrészt azt is, hogy a polinom helyettesítési értéke a 2 helyen -4, azaz: $f(2) = -4$.

Az eljárást könnyen alkalmazhatjuk gyöktényező kiemelésére. Hiszen egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szám pontosan akkor gyöke a P polinomnak, ha $P(\alpha) = b_0 = 0$, azaz ha a táblázat második sorának utolsó eleme 0. Ekkor a maradékos osztás maradéka 0, a hányadospolinom együtthatói pedig az ismert módon olvashatók ki a táblázatból.

Két példával szemléltetjük a módszert:

1. Feladat: Az előző feladatban szereplő

$$P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54$$

polinomnak a 3 gyöke. Emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt.

Az 1. Feladat megoldása:
Tehát most

$$P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54, \quad \alpha = 3\,.$$

A táblázat:

	1	-8	16	18	-81	54
$\alpha = 3$	1	-5	1	21	-18	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a 3 gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54 = (x - 3) \cdot (x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18)\,.$$

Ezzel a gyöktényezőt kiemeltük.

2. Feladat: Az előző, 27.1. szakaszban szereplő

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 13x - 6$$

polinomnak a 2 gyöke. Emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt.

A 2. Feladat megoldása:
Tehát most

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 13x - 6, \quad \alpha = 2\,.$$

A táblázat:

	2	−3	−7	13	−6
$\alpha = 2$	2	1	−5	3	0

Ebből egyrészt láthatjuk, hogy a 2 gyöke a polinomnak (mivel a második sor utolsó eleme 0), másrészt felírhatjuk a kiemelés eredményét:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x-2) \cdot (2x^3 + x^2 - 5x + 3)\,.$$

Ezzel a gyöktényezőt kiemeltük.

27.3. Nagyságrend-őrző (NR) becslések

NRF-becslés

Egy pozitív főegyütthatós, n-edfokú P polinom nagyságrend-őrző felső (NRF) becslésén az alábbi feladatot értjük:

Határozzuk meg az $M > 0$ számot úgy, hogy minden, elég nagy $x > 0$ szám esetén igaz legyen, hogy:

$$P(x) \leq M \cdot x^n.$$

Az „elég nagy $x > 0$ szám esetén” azt jelenti, hogy meg kell adni olyan $R > 0$ számot, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $x \geq R$ esetén teljesüljön.

Az M és R számok megkeresése egyszerű. Tegyük fel, hogy $x \geq 1$, és alkalmazzuk az alábbi két lépést:

1. lépés: A negatív együtthatójú tagokat – ha vannak – elhagyjuk (azaz: 0-val helyettesítjük). Ekkor ($x \geq 1 > 0$ miatt) $P(x)$ növekszik. Természetesen, ha nincs negatív együtthatójú tag, akkor az 1. lépés elmarad.

Ezek után feltehető, hogy a polinom minden együtthatója pozitív.

2. lépés: A polinom minden, az n-nél alacsonyabb fokú tagjának kitevőjét n-re növeljük. Ezzel (mivel $x \geq 1$) $P(x)$ tovább nő.

A második lépés után a tagok már összevonhatók egyetlen $M \cdot x^n$ alakú kifejezéssé. Így tehát M megvan, R pedig választható 1-nek.

Szemléltessük mindezt az alábbi példán:

Feladat: Adjunk NRF-becslést az alábbi polinomra:

$$P(x) = x^4 + 30x^3 - 10x^2 + 43x - 8.$$

Megoldás: Tegyük fel, hogy $x \geq 1$. Mivel van két negatív együtthatós tag ($-10x^2$ és -8), ezeket elhagyjuk (1. lépés), így a polinomot növeljük:

$$P(x) = x^4 + 30x^3 - 10x^2 + 43x - 8 < x^4 + 30x^3 + 43x\,.$$

Kaptunk egy pozitív együtthatós polinomot. A 2. lépés következik, a 4-nél alacsonyabb kitevőket 4-gyel helyettesítjük, ezáltal tovább növelünk:

$$x^4 + 30x^3 + 43x \leq x^4 + 30x^4 + 43x^4 = 74x^4\,.$$

Mindezek alapján $P(x) \leq 74x^4$ ha $x \geq 1$. Tehát $M = 74$, $R = 1$ jó választás.

Megjegyezzük, hogy nem a lehető legkisebb M és R értékekre törekedtünk.

NRA-becslés

Térjünk rá az alsó becslésre. Egy pozitív főegyütthatós, n-edfokú P polinom nagyságrend-őrző alsó (NRA) becslésén az alábbi feladatot értjük:

Határozzuk meg az $m > 0$ számot úgy, hogy minden, elég nagy $x > 0$ szám esetén igaz legyen, hogy:

$$P(x) \geq m \cdot x^n.$$

Az „elég nagy $x > 0$ szám esetén" itt is azt jelenti, hogy meg kell adni olyan $R > 0$ számot, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $x \geq R$ esetén teljesüljön.

Az m és R számok megkeresésére itt is két lépést alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $x \geq 1$. Az 1. lépés a felső becslésnél megismert 1. lépés – értelemszerűen módosított – megfelelője:

1. lépés: A pozitív együtthatójú, n-nél alacsonyabb fokú tagokat – ha vannak – elhagyjuk (azaz: 0-val helyettesítjük). Ekkor ($x \geq 1 > 0$ miatt) $P(x)$ értéke csökken.

Ezek után feltehető, hogy a polinom minden, n-nél alacsonyabb fokú tagjának együtthatója negatív vagy 0, azaz hogy a polinom ilyen alakú:

$$P(x) = a_n \cdot x^n - a_{n-1} \cdot x^{n-1} - \ldots - a_1 \cdot x - a_0,$$

ahol $a_n > 0$ és $a_k \geq 0 \qquad (k = 1, \ldots n-1)$.

Ha $n \geq 2$ és $a_{n-1} = 0$, akkor a_{n-1}-et helyettesítsük egy tetszőleges negatív számmal, pl. -1-gyel. Ezáltal a polinom tovább csökken.

Feltehető tehát, hogy $n \geq 2$ és

$$P(x) = a_n \cdot x^n - a_{n-1} \cdot x^{n-1} - \ldots - a_1 \cdot x - a_0,$$

ahol $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$ és $a_k \geq 0 \qquad (k = 1, \ldots n-2)$.

Most következik a 2. lépés, amely kicsit bonyolultabb, mint a felső becslésnél.

2A. lépés: A polinom negatív együtthatós tagjaiból kiemelünk -1-et, s az így keletkező

$$a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

pozitív főegyütthatós polinomra NRF-becslést adunk, azaz meghatározzuk az $M_1 > 0$ és $R_1 > 0$ számokat úgy, hogy

$$a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 < M_1 \cdot x^{n-1}$$

teljesüljön, ha $x \geq R_1$.

2B. lépés: Ennek felhasználásával P így becsülhető alulról (az $x \geq R_1$ feltétel mellett):

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n \cdot x^n - (a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0) \geq a_n \cdot x^n - M_1 \cdot x^{n-1} = \\ &= \frac{a_n}{2} \cdot x^n + \frac{a_n}{2} \cdot x^n - M_1 \cdot x^{n-1} = \frac{a_n}{2} \cdot x^n + x^{n-1} \cdot (\frac{a_n}{2} \cdot x - M_1). \end{aligned}$$

Ha x-et olyan nagyra választjuk, hogy

$$\frac{a_n}{2} \cdot x - M_1 \geq 0 \qquad \text{azaz} \qquad x \geq \frac{2M_1}{a_n}$$

teljesüljön, akkor az utolsó tag elhagyásával a polinomot csökkentjük, vagyis

$$P(x) \geq \frac{a_n}{2} \cdot x^n, \qquad (\text{ha } x \geq R),$$

ahol R jelöli az R_1 és a $\frac{2M_1}{a_n}$ számok közül a nagyobbikat.

Szemléltessük mindezt az alábbi példán:

Feladat: Adjunk NRA-becslést az alábbi polinomra:

$$P(x) = x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12.$$

Megoldás: Tegyük fel először, hogy $x \geq 1$. Mivel – az ötödfokú tag kivételével – vannak pozitív együtthatós tagok ($31x^2$ és 12), ezeket elhagyjuk (1. lépés), így a polinomot csökkentjük:

$$P(x) = x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12 \geq x^5 - 71x^4 - 100x^3 - 25x\,.$$

A 2A. lépés következik, Kiemelünk -1-et

$$x^5 - (71x^4 + 100x^3 + 25x),$$

majd NRF-becslést adunk a

$$71x^4 + 100x^3 + 25x$$

polinomra:

$$71x^4 + 100x^3 + 25x \leq 71x^4 + 100x^4 + 25x^4 = 196x^4 \qquad (\text{ha } x \geq 1)$$

Mindezeket összevetve, és a 2B. lépést is alkalmazva:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 71x^4 - 100x^3 + 31x^2 - 25x + 12 \geq x^5 - 71x^4 - 100x^3 - 25x = \\ &= x^5 - (71x^4 + 100x^3 + 25x) \geq x^5 - 196x^4 = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^5 - 196x^4 = \\ &= \frac{1}{2}x^5 + x^4 \cdot (\frac{1}{2}x - 196). \end{aligned}$$

Válasszuk meg x-et úgy, hogy az $x \geq 1$ feltétel mellett még $\frac{1}{2}x - 196 \geq 0$ is teljesüljön, azaz legyen $x \geq 392$. Az ilyen x-ekre teljesül, hogy

$$P(x) \geq \frac{1}{2}x^5,$$

azaz $m = \frac{1}{2}$, $R = 392$ jó választás.

Megjegyezzük, hogy most sem törekedtünk lehető legkisebb R és a lehető legnagyobb m értékekre. Továbbá, hogy az $a_n x^n$ tagot tetszőleges módon oszthatjuk két részre, tehát nem szükséges a fele-fele arányban való felosztás, mint ahogy az a kidolgozott példában történt.

27.4. Komplex számok

27.4.1. Ponthalmazok a komplex számsíkon

A korábban említett analógiát (síkbeli vektorok és komplex számok) figyelembe véve, a komplex számok geometriai tulajdonságai és komplex ponthalmazok teljesen hasonlóan szemléltethetőek, mint ahogyan azt megszoktuk a Descartes féle koordináta síkon a koordináta geometriában. Például ismert, hogy az

$$x^2 + y^2 = 1 \ \ (x, y \in \mathbb{R})$$

algebrai egyenlet megoldásait szolgáltató $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ rendezett párok halmaza a síkon egy origó közepű 1 sugarú körvonal. Azt is tudjuk hogy, ha egy $(x; y)$ pont az origóhoz $1-$nél közelebb van, akkor a fenti körlap belsejébe esik, ha pedig ez a távolság nagyobb mint 1 akkor a körlapon kívül helyezkedik el. Algebrailag ezeket a tulajdonságokat az

$$x^2 + y^2 < 1,$$

illetve az

$$x^2 + y^2 > 1$$

egyenlőtlenségek fejezik ki. Mindezt a komplex számok világában is leírhatjuk, ugyanis ha $z = x + iy \ \ (x, y \in \mathbb{R})$, akkor

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

és így a fenti egyenlet és egyenlőtlenségek ekvivalens módon az alábbiak:

$$x^2 + y^2 = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1 \quad (1);$$

$$x^2 + y^2 < 1 \iff |z|^2 < 1 \iff |z| < 1 \quad (2);$$

$$x^2 + y^2 > 1 \iff |z|^2 > 1 \iff |z| > 1 \quad (3).$$

A fenti esetknek megfelelő z komplex számok tehát pontosan azok amelyek a komplex síkon az origó középű 1 sugarú körvonalon (1), annak belsejében (2), illetve a zárt (határvonalat is tartalmazó) körlapon kívül (3) helyezkednek el.

Hasonlóan az általános egyenletű körvonal esetében, ha $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ egy rögzített pont és $R > 0$ adott sugár, akkor az (a, b) középű R sugarú körvonal ismert egyenlete:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

amelynek a komplex ekvivalens megfelelője a $z = x + iy$ és $w = a + ib$ $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$ jelölések mellett:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = |z - w|^2 = R^2 \iff |z - w| = R.$$

Tehát, a komplex síkon egy rögzített w középpontú $R > 0$ sugarú körvonal egyenlete:

$$|z - w| = R \quad (4),$$

azaz a jelzett körvonal olyan z komplex pontok/számok halmaza, melyek kielégítik a fenti (4) összefüggést.

Megjegyzés: A komplex számok és a későbbiekben tárgyalandó komplex függvények segítségével számos, az alkalmazásokban is igen fontos szerepet játszó geometriai transzformáció (forgatás, eltolás, tükrözés, inverzió stb.) modellezhető, írható le és programozható elegánsan, de most csak érintőlegesen nézzük meg és pár feladatban szemléltetjük ennek a komplex témának a szépségét.

Példák: Hol helyezkednek el a komplex síkon azok a $z \in \mathbb{C}$ számok, amelyekre

1. $$|z - 1 + 2i| = 7;$$

2. $$2 < |2z + i| \leq \sqrt{5};$$

3. $$\mathrm{Re}\,((5 - i) \cdot z) = -2;$$

4. $$\mathrm{Re}\,(z) \leq \mathrm{Im}\,(\overline{z});$$

5. $$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z - i}\right) = 1?$$

Megoldások:

1. Mivel
$$|z-1+2i| = |z-(1-2i)| = 7,$$
ezért a keresett pontok az $1-2i$ közepű 7 sugarú körvonalon helyezkednek el.

2. Ebben az esetben
$$2 < |2z+i| \leq \sqrt{5} \iff 1 < |z-(-i/2)| \leq \sqrt{5}/2,$$
amiből már leolvasható, hogy a keresett z komplex számok a $-i/2$ középpontú, 1 illetve $\sqrt{5}/2$ sugarú körgyűrű belsejének, illetve a külső határoló körvonalnak a pontjai.

3. Írjuk be a keresett z komplex számokat $z = x+iy$ algebrai alakjukban és végezzük el a kijelölt műveleteket:
$$\mathrm{Re}\,((5-i)\cdot(x+iy)) = -2 \iff \mathrm{Re}\,(5x+y+(5y-x)\cdot i) = -2 \iff 5x+y = -2 \iff$$
$$\iff y = -2-5x.$$
Innen már leolvasható, hogy a keresett $z = x+iy$ komplex számok az itt kapott
$$y = -2-5x \quad (x \in \mathbb{R})$$
egyenletű egyenes pontjai.

4. Legyen $z = x+iy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ekkor
$$\mathrm{Re}\,(z) \leq \mathrm{Im}\,(\overline{z}) \iff \mathrm{Re}\,(x+iy) \leq \mathrm{Im}\,(x-iy) \iff x \leq -y \iff y \leq -x.$$
A keresett komplex számok tehát az
$$y = -x \quad (x \in \mathbb{R})$$
egyenes alatti zárt félsík pontjai, a határoló egyenes pontjait is ideértve.

5. Ismét beírva a $z = x+iy$ alakot végezzük el az osztást (bővítve a nevező konjugáltjával):
$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{x+(1-y)i} = \frac{x-(1-y)i}{x^2+(1-y)^2} = \frac{x}{x^2+(1-y)^2} + \frac{y-1}{x^2+(1-y)^2} \cdot i.$$
Innen már leolvasható a képzetes rész és a kitűzött feltétel alapján:
$$\frac{y-1}{x^2+(1-y)^2} = 1 \quad (5)$$
teljesül. Világos, hogy a feladat kitűzése alapján $z \neq i$ vagyis $(x,y) \neq (0;1)$. Ezt is figyelembe véve szorozzunk át a nevezővel és némi átalakítás után (5) a következő alakot ölti:
$$x^2+y^2-3y+2 = 0 \iff x^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

A keresett pontok tehát a $w := \frac{3}{2} \cdot i$ középű $R := \frac{1}{2}$ sugarú körvonal pontjai, kivéve az i pontot, ami rajta van ezen a körön (miért?). A megoldás tehát az $i-$ben kilyukasztott mondott körvonal.

27.4.2. Gyakorló kérdések és feladatok

1. Hol vannak a komplex számsíkon azok a z komplex számok, amelyekre
$$|z - 2i + 1| = 2?$$

2. Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z komplex számokat, melyekre
$$|z - 2| < 3.$$

3. Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z komplex számokat, melyekre
$$|z + i - 3| > 2.$$

4. Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z komplex számokat, melyekre
$$z = 2 \cdot \overline{z} + 1.$$

5. Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z komplex számokat, melyekre
$$z \cdot \overline{z} \geq 4.$$

6. Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z komplex számokat, melyekre
$$\mathrm{Im}(iz) \leq \mathrm{Re}(iz).$$

7. Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z komplex számokat, melyekre
$$|z| \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq \mathrm{Re}(z).$$

8. Írja le matematikailag azt, hogy a z komplex számok rajta vannak az $1 - 7i$ középű, 10 sugarú körvonalon.

9. Írja le matematikailag azt, hogy a z komplex számok az $i - \sqrt{2}$ középű, 1 sugarú körlap belsejében helyezkednek el.

10. Van-e olyan körvonal amely átmegy az $1 - i, 1 + i$ és a $3 + i$ komplex pontokon? Ha igen, akkor adjuk meg ezt a kört.

11. Határozzuk meg az alábbi feltételeknek eleget tevő komplex z számokat:

(a) $|z| = |1 - z| = |\overline{z}^2|$;

(b) $|z - i| = 1 \ \wedge \ |z| = 1$;

(c) $|z| = 2 \ \wedge \ |z - i| = 1$;

(d) $|z - i| = |z - 1| = |z + iz|$.

12. Szemléltessük a Gauss féle komplex számsíkon az alábbi feltételeknek eleget tevő z komplex számokat:

(a) $z = \overline{z}$;

(b) $z \cdot \overline{z} = 4$;

(c) $z + \overline{z} = -1$;

(d) $z - \overline{z} = i$;

(e) $1 < |z - 1 - i| < 2$;

(f) $|z - 1| < 1 \ \wedge \ |z - i| \leq 1$;

(g) $|z - 1| < 1 \ \vee \ |z - i| \leq 1$;

(h) $|z| = 2 \ \wedge \ |z - 1| = 1$;

(i) $|2z - i| > 4$;

(j) $|z + 1| < |1 - z|$;

(k) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z - 2}{z - 1}\right) = 0$;

(l) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z - 2}{z - 4i}\right) = 0$.

(m) $|z| = 3 \cdot \mathrm{Re}(z)$;

(n) $z = \dfrac{2}{\overline{z}}$;

(o) $|z| = i \cdot z$;

(p) $|z^2 - \overline{z}^2| < 4$;

(q) $|2z - i| \geq 2$;

(r) $|z| \leq 4 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z - i) = 2$;

(s) $|z + 1 - 2i| \leq 2 \ \wedge \ \mathrm{Re}(iz) = -3$;

(t) $|3z - 6| < 12 \ \wedge \ |z + 1| \geq 1$;

(u) $\mathrm{Im}\, z - \mathrm{Im}\, iz \geq (\mathrm{Re}\, \overline{z})^2$;

(v) $|z - i| > |z + i|$;

(w) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z + 1}{z - i}\right) = 0$;

(x) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{iz + 1}{\overline{z} - 1}\right) = 0$;

(y) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z-i-1}{iz+1}\right)^2 = 0.$

13. Határozzuk meg az alábbi szélsőértékeket és adjuk meg azokat a z komplex számokat, melyekre a kérdezett szélsőértékek előállnak:

(a) $\operatorname{Min}\left\{|z+i| \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \;\wedge\; |z-i-2| = 1\right\};$

(b) $\operatorname{Max}\left\{|z+i| \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \;\wedge\; |z-i-2| = 1\right\};$

27.5. Példa végtelen dimenziós vektortérre

Legyen V azon $\mathbb{K}$-beli végtelen számsorozatok halmaza, melyekben a nemzérus tagok száma véges:

$$V := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \{i \mid x_i \neq 0\} \text{ véges halmaz}\}\,.$$

A sorozatokkal végzett szokásos, tagonkénti összeadásra és $\mathbb{K}$-beli számmal való szorzásra nézve V vektortér $\mathbb{K}$ felett.

Megmutatjuk, hogy $\dim V = \infty$. Legyen $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in V$ tetszőleges véges vektorrendszer. Megmutatjuk, hogy ez a rendszer nem lehet generátorrendszer.

Legyen $x^{(1)}$ utolsó nemzérus tagjának indexe n_1, $\ldots$, $x^{(k)}$ utolsó nemzérus tagjának indexe n_k, és legyen:

$$N := \max\{n_1, \ldots, n_k\} + 1\,.$$

Ekkor $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ mindegyikének N-edik tagja 0, azaz:

$$x_N^{(1)} = 0, \quad \ldots, \quad x_N^{(k)} = 0\,.$$

Következésképpen minden

$$\lambda_1 x^{(1)} + \cdots + \lambda_k x^{(k)}$$

lineáris kombináció N-edik tagja 0. Ezért pl., ha $y \in V$ olyan, hogy $y_N = 1$, akkor

$$y \notin \operatorname{Span}(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}), \quad \text{tehát} \quad \operatorname{Span}(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}) \neq V\,.$$

27.6. 4×4-es mátrix inverze és determinánsa

1. feladat:

Gauss-Jordan módszer alkalmazásával számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

mátrix inverzét és determinánsát.

Megoldás:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
0 & \boxed{1} & -3 & -4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\underline{1} & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & -3 & -4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\
\underline{1} & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 1 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & 5 & 0 & -3 & 0 & 6 & 4 \\
0 & 0 & \boxed{3} & 0 & -2 & 1 & 4 & 3 \\
\underline{1} & 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & -3 & -2 \\
0 & 0 & 2 & \underline{1} & -1 & 0 & 2 & 1 \\
\hline\hline
0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & -2/3 & -1 \\
0 & 0 & \underline{1} & 0 & -2/3 & 1/3 & 4/3 & 1 \\
\underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1/3 & -2/3 & -2/3 & -1
\end{array}$$

Megvan a 4 megjelölt elem, ezért létezik az inverz.

Rendezzük át a sorokat úgy, hogy a függőleges vonaltól balra egységmátrix álljon:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & -2/3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 4/3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & -1
\end{array}$$

A keresett inverz a függőleges vonaltól jobbra eső területen áll:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -5/3 & -2/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 4/3 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Az is látható, hogy az A mátrix rangja 4 (a megjelölt elemek száma).

A determináns pedig a generáló elemek és az utolsó számított mátrix determinánsának szorzata:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

A 2-es kitevő magyarázata az, hogy az utolsó számított mátrix 2 sorcserével egységmátrixszá alakítható.

2. feladat:

Gauss-Jordan módszer alkalmazásával számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

mátrix inverzét és determinánsát.

Megoldás:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\
3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
\boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\
-1 & 1 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
\underline{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \underline{1} & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \\
0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Már nem lehet generáló elemet választani, az eljárás megállt, 3 db megjelölt elemmel. Mivel nincs meg a 4 megjelölt elem, ezért A-nak nincs inverze, A egy szinguláris mátrix. Az is látható, hogy az A mátrix rangja 3 (a megjelölt elemek száma).

Mivel a mátrix szinguláris, determinánsa nyilvánvalóan 0.

Ezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, hogy a determináns a generáló elemek és az utolsó számított mátrix determinánsának szorzata:

$$
\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0
$$

27.7. Rangot adó részmátrix

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a mátrix rangja egyenlő a benne található legnagyobb méretű négyzetes reguláris részmátrix méretével.

Először értelmezzük a részmátrix fogalmát. A négyzetes mátrixokból egy sor és egy oszlop törlésével keletkező részmátrixokkal már találkoztunk a determinánsoknál. Most úgy általánosítjuk ezt, hogy a mátrix nem feltétlenül négyzetes, továbbá akárhány sor ill. oszlop is törölhető. A részmátrix megadásakor nem a törlendő sorokat ill. oszlopokat fogjuk megadni, hanem a megtartandókat.

27.1. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, és tekintsük az alábbi index-rendszereket:

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le m\,, \quad 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_t \le n\,.$$

Az A mátrix fenti index-rendszerek által meghatározott részmátrixán azt a $B \in \mathbb{K}^{s\times t}$ mátrixot értjük, melynek k-adik sorának l-edik eleme:

$$b_{k,l} = a_{i_k,j_l} \qquad (k = 1,\ldots,s;\ l = 1,\ldots,t)$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a B mátrix elemei az A megadott indexű sorainak és oszlopainak – mint képzeletbeli vonalaknak – a metszéspontjaiban álló elemek.

27.2. Tétel. *Legyen* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$*, és* $r \in \{1,\,2,\,\ldots,\,\min\{m,n\}\}$*. Ekkor*

a) <u>$r = \min\{m,n\}$ *esetén:*</u>

rang$\,(A) = r \quad \Longleftrightarrow \quad$ *létezik A-nak $r\times r$-es reguláris részmátrixa.*

b) <u>$r < \min\{m,n\}$ *esetén:*</u>

rang$\,(A) = r \quad \Longleftrightarrow \quad$ *létezik A-nak $r\times r$-es reguláris részmátrixa, és minden legalább $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrixa szinguláris.*

Mindkét esetben a szóban forgó $r\times r$-es reguláris részmátrixot az A mátrix egy rangot adó részmátrixának nevezzük. A rangot adó részmátrix általában nem egyértelmű.

Bizonyítás.

<u>„$\Longrightarrow$" igazolása:</u>

Tegyük fel, hogy rang$\,(A) = r \in \{1,\,2,\,\ldots,\,\min\{m,n\}\}$, s igazoljuk először az $r\times r$-es reguláris részmátrix létezését.

Mivel $\dim O(A) = \text{rang}\,(A) = r$, ezért az A oszlopvektorai között van r db lineárisan független, jelölje ezen oszlopok indexeit: $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Nyilvánvaló, hogy az ezekből az oszlopokból összerakott $m\times r$-es A' részmátrix rangja r. Azonban A' sorvektortere is r-dimenziós, ezért A' sorai között is van r db lineárisan független, jelölje e sorok indexeit $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Az $i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_r$ sorindex-rendszer és a $j_1,\,j_2,\,\ldots,\,j_r$ oszlopindex-rendszer által meghatározott $r\times r$-es részmátrix rangja r, tehát reguláris. Ezzel az $r\times r$-es reguláris részmátrix létezését igazoltuk.

Hátravan még a b) második részének igazolása. Tegyük fel, hogy $r < \min\{m,n\}$, és megmutatjuk, hogy az A minden legalább $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrixa szinguláris.

Legyen $h \in \{r+1,\,\ldots,\,\min\{m,n\}\}$, és jelölje B az A egy tetszőleges $h\times h$-as részmátrixát, melyet az $i_1 < i_2 < \ldots < i_h$ sorindex-rendszer és a $j_1 < j_2 < \ldots < j_h$ oszlopindex-rendszer jelöl ki. Legyen az A oszlopokra bontott alakja $A = [a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n]$. Ekkor az

$$A' = [a_{j_1}\,\ldots\,a_{j_h}] \in \mathbb{K}^{m\times h}$$

részmátrixra fennáll, hogy $O(A') \subseteq O(A)$, amiből következik, hogy

$$\operatorname{rang}(A') = \dim O(A') \leq \dim O(A) = \operatorname{rang}(A) = r\,.$$

Ebből viszont az következik, hogy az A' sorvektortere is legfeljebb r dimenziós. Ezért $r < h$ miatt az A'-ből a megadott $i_1, i_2, \ldots, i_h$ sorindex-rendszerrel kiválasztott sorvektorok lineárisan összefüggők. Ezek a sorvektorok viszont pontosan a B mátrixot alkotják, tehát B valóban szinguláris.

„$\Longleftarrow$” igazolása:

a) eset ($r = \min\{m, n\}$):

Ha $m \leq n$, akkor $r = m$. Ekkor a feltétel szerint A-nak van $r \times r$-es reguláris részmátrixa. Ennek a részmátrixnak az r db oszlopvektora lineárisan független rendszert alkot $O(A)$-ban, amiből következik, hogy

$$r \leq \dim O(A) = \operatorname{rang}(A) = \dim S(A) \leq \text{sorok száma} = m = r\,.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $m \leq n$ esetén $\operatorname{rang}(A) = r$.

Ha $n \leq m$, akkor $r = n$. Ekkor a feltétel szerint A-nak van $r \times r$-es reguláris részmátrixa. Ennek a részmátrixnak az r db sorvektora lineárisan független rendszert alkot $S(A)$-ban, amiből következik, hogy

$$r \leq \dim S(A) = \operatorname{rang}(A) = \dim O(A) \leq \text{oszlopok száma} = n = r\,.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $n \leq m$ esetén is $\operatorname{rang}(A) = r$.

b) eset ($r < \min\{m, n\}$):

Legyen az A oszlopokra bontott alakja $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Jelölje $B \in \mathbb{K}^{r\times r}$ a feltételben szereplő részmátrixot, továbbá $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ és $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ azt a sor- illetve oszlopindex-rendszert, amely a B-t kiválasztja az A-ból.

Megmutatjuk, hogy az A mátrix $a_{j_1} \ldots a_{j_r}$ oszlopai bázist alkotnak $O(A)$-ban. Ebből már azonnal következni fog, hogy $\operatorname{rang}(A) = r$.

A lineáris függetlenség igazolásához írjuk fel az összefüggőségi egyenletet:

$$\lambda_1 a_{j_1} + \ldots + \lambda_r a_{j_r} = 0$$

Ha ezt a vektoregyenletet komponensenkre bontva felírjuk, és a kapott skaláregyenletekből csak az $i_1, \ldots, i_r$ indexű egyenleteket tartjuk meg, akkor pont a B oszlopaira felírt összefüggőségi egyenlethez jutunk, változatlan együtthatókkal. Mivel B reguláris, ezért oszlopai lineárian függetlenek, amiből következik, hogy

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0\,.$$

Most megmutatjuk, hogy $a_{j_1} \ldots a_{j_r}$ generátorrendszer $O(A)$-ban. Ehhez elég azt igazolni, hogy

$$\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} : \qquad a_j \in \operatorname{Span}(a_{j_1} \ldots a_{j_r})\,.$$

Tegyük fel indirekt, hogy valamely ilyen j-re $a_j \notin \operatorname{Span}(a_{j_1} \dots a_{j_r})$. Mivel az $a_{j_1} \dots a_{j_r}$ rendszer lineárisan független, ezért a független rendszerek bővítéséről szóló tétel miatt a kibővített $a_{j_1} \dots a_{j_r}, a_j$ rendszer is lineárisan független. Ez azt jelenti, hogy a kibővített rendszerből mint oszlopokból felépített $A' \in \mathbb{K}^{m\times(r+1)}$ részmátrix rangja $r+1$. A'-ben természetesen olyan sorrendben soroljuk fel az A oszlopait, ahogy a $j_1, j_2, \dots, j_r, j$ oszlopindexek növekvő sorrendje előírja.

Mivel $\operatorname{rang}(A') = r+1$, ezért A'-nek van $r+1$ db lineárisan független sora. Az ezen sorok által alkotott $(r+1)\times(r+1)$-es mátrix nyilvánvalóan az A' egy reguláris B részmátrixát alkotja. Azonban a konstrukció miatt B az A-nak is egy $(r+1)\times(r+1)$-es reguláris részmátrixa. Ez viszont ellentmond annak, hogy A minden legalább $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrixa szinguláris. □

Figyelembe véve a regularitás/szingularitás ekvivalens jellemzéseit, a fenti tétel állítását determinánsokkal is megfogalmazhatjuk:

27.3. Tétel. *Legyen* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, *és* $r \in \{1, 2, \dots, \min\{m,n\}\}$. *Ekkor*

a) <u>$r = \min\{m,n\}$ *esetén:*</u>

$\operatorname{rang}(A) = r \iff$ *létezik A-nak olyan $r\times r$-es részmátrixa, melynek determinánsa nem* 0.

b) <u>$r < \min\{m,n\}$ *esetén:*</u>

$\operatorname{rang}(A) = r \iff$ *létezik A-nak olyan $r\times r$-es részmátrixa, melynek determinánsa nem* 0, *és A minden legalább $(r+1)\times(r+1)$-es részmátrixának determinánsa* 0.

27.4. Megjegyzés. Egyszerűen meggondolható, hogy a rangot adó részmátrix könnyen meghatározható a Gauss-Jordan módszer segítségével. Ehhez csak le kell olvasni az utolsó táblázatban (az utolsó számított mátrixban) a megjelölt 1-esek sor- illetve oszlopindexeit. Az így kapott sor- illetve oszlopindex rendszer választ ki az eredeti mátrixból egy rangot adó részmátrixot.

Például a lineáris egyenletrendszerekre adott második kidolgozott példában az együtthatómátrix ez volt:

$$A_0 = A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

Ebből készítettük el az A_1, A_2, A_3 számított mátrixokat, és azt kaptuk, hogy az utolsó számított mátrix:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \underline{1} & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & \underline{1} \\ \underline{1} & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egy rangot adó B részmátrixot tehát az 1, 2, 3 sorindexek (ezek a megjelölt 1-esek sorindexei) és az 1, 3, 5 oszlopindexek (ezek a megjelölt 1-esek oszlopindexei) választanak ki A-ból:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

27.8. A determináns geometriai jelentése

Ebben a szakaszban értelmezzük a paralelepipedonokat euklideszi térben, majd megmutatjuk, hogyan számíthatjuk ki „térfogatukat" a Gram-determináns segítségével. Mivel a térfogat jelölésére a V betű az elterjedt, ezért ebben a szakaszban az euklideszi teret nem V-vel, hanem E-vel fogjuk jelölni.

Az elemi geometriában tanultak alapján könnyen beláthatjuk, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ élvektorok által kifeszített paralelogrammalap pontjai így adhatók meg:

$$P = \{t_1\underline{a} + t_2\underline{b} \mid 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1\}\,.$$

Ez egyaránt érvényes a síkon fekvő paralelogrammára is és a térben levőre is. Hasonlóképpen adható meg a térben az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ élvektorok által kifeszített paralelepipedontest is:

$$P = \{t_1\underline{a} + t_2\underline{b} + t_3\underline{c} \mid 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1,\ 0 \le t_3 \le 1\}\,.$$

Azt is tudjuk, hogy a paralelogramma területét úgy számítjuk ki, hogy egyik oldalának hosszát megszorozzuk az ehhez az oldalhoz tartozó magassággal. A paralelepipedon térfogatát pedig úgy számítjuk ki, hogy egyik oldallapjának területét megszorozzuk az ehhez az oldallaphoz tartozó magassággal.

Ezen megfigyelések alapján definiáljuk az E euklideszi térben lévő „k-dimenziós" paralelepipedont, röviden k-paralelepipedont, és ezek k-dimenziós mértékét. A „mérték" helyett a „térfogat" szót fogjuk használni minden dimenzióban. Az 1-dimenziós térfogat tehát a hosszúság, a 2-dimenziós térfogat a terület, a 3-dimenziós térfogat pedig a hagyományos értelemben vett térfogat.

27.5. Definíció. Legyen $a_1, \ldots, a_k$ egy vektorrendszer az E euklideszi térben. A

$$P(a_1, \ldots, a_k) := P_k := \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i a_i \in E \mid 0 \le t_i \le 1 \right\} \subset E$$

halmazt az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok által kifeszített E-beli k-paralelepipedonnak nevezzük. A paralelepipedon nem elfajuló, ha az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok lineárisan függetlenek, elfajuló, ha az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok lineárisan összefüggők.

27.6. Megjegyzések.

1. Az 1-paralelepipedonok az E-beli szakaszok, a 2-paralelepipedonok az E-beli paralelogrammák.

2. $k > \dim E$ estén az $a_1, \ldots, a_k$ vektorok lineárisan összefüggők, így ez esetben a k-paralelepipedon elfajuló.

A k-paralelepipedon térfogatát rekurzívan értelmezzük:

Az 1-paralelepipedon 1 dimenziós térfogata (hossza) a kifeszítő vektorának normája.

A k-paralelepipedon térfogatát úgy kapjuk, hogy egyik oldallapjának (ami egy $k-1$ dimenziós paralelepipedon) $k-1$ dimenziós térfogatát megszorozzuk az ehhez az oldallaphoz tartozó magassággal.

27.7. Definíció. Az előző definíció jelöléseit megtartva, a k-paralelepipedon (k-dimenziós) térfogatát rekurzívan értelmezzük:

1. $V_{P(a_1)} := \| a_1\|$

2. $V_{P(a_1, \ldots, a_k)} := V_{P(a_1, \ldots, a_{k-1})} \cdot \| b\|$,

   ahol a b vektor az a_k merőleges komponense a Span $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ altérre vonatkozóan.

27.8. Megjegyzés.

Könnyen meggondolható, hogy az elfajuló paralelepipedon térfogata 0.

E szakasz fő eredménye a következő tétel:

27.9. Tétel. *Az előző definíció jelöléseit megtartva jelölje*

$$G_k = G(a_1, \ldots, a_k)$$

az $a_1, \ldots, a_k \in E$ vektorokból felépített Gram-mátrixot (ld. 22.21 definíció). Ekkor

$$\det G_k \geq 0, \quad \textit{és} \quad V_{P(a_1, \ldots, a_k)} = \sqrt{\det G_k}\,.$$

Bizonyítás. A bizonyítás az alábbi lemmán alapul:

27.10. Lemma. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$. Az eddigi jelöléseket megtartva, tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ számokkal legyen

$$b := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i\,.$$

Ekkor

$$\det G(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) = \det G(a_1, \ldots, a_{k-1}, b)\,.$$

Bizonyítás. A G_k Gram-mátrix elemei (ld. 22.21 definíció):

$$(G_k)_{ij} = \langle a_j,\, a_i\rangle\,.$$

Vonjuk le G_k k-adik sorából az első sor λ_1-szeresét, az így kapott mátrix k-adik sorából a második sor λ_2-szörösét, …, az így kapott mátrix k-adik sorából a $k-1$-edik sor λ_{k-1}-szeresét. Ezzel a determináns nem változik, és az eredeti mátrix első $k-1$ sora sem. Az utolsó sor j-edik eleme pedig így módosul:

$$(G_k)_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i\,(G_k)_{ij} = \langle a_j,\, a_k\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle a_j,\, a_i\rangle = \langle a_j,\, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i\rangle = \langle a_j,\, b\rangle\,.$$

Tehát a kapott $G_k^{'}$ mátrix elemei:

$$\left(G_k^{'}\right)_{ij} = \begin{cases} (G_k)_{ij} & \text{ha} \quad i = 1,\dots,k-1 \\[2ex] \langle a_j,\, b\rangle & \text{ha} \quad i = k \end{cases}$$

Most végezzünk hasonló átalakításokat a $G_k^{'}$ mátrix k-adik oszlopán. Vonjuk le $G_k^{'}$ k-adik oszlopából az első oszlop λ_1-szeresét, az így kapott mátrix k-adik oszlopából a második oszlop λ_2-szörösét, …, az így kapott mátrix k-adik oszlopából a $k-1$-edik oszlop λ_{k-1}-szeresét. Ezzel a determináns továbbra sem változik, és a $\left(G_k^{'}\right)$ mátrix első $k-1$ oszlopa sem. Az utolsó oszlop i-edik eleme pedig így módosul:

$$\left(G_k^{'}\right)_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \left(G_k^{'}\right)_{ij} =$$

$$= \begin{cases} \langle a_k,\, a_i\rangle - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j \langle a_j,\, a_i\rangle = \langle a_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_j,\, a_i\rangle = \langle b,\, a_i\rangle & \text{ha} \quad i = 1,\dots,k-1 \\[3ex] \langle a_k,\, b\rangle - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j \langle a_j,\, b\rangle = \langle a_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_j,\, b\rangle = \langle b,\, b\rangle & \text{ha} \quad i = k \end{cases}$$

Tehát a kapott mátrix:

$$\begin{bmatrix} \langle a_1,\, a_1\rangle & \langle a_2,\, a_1\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, a_1\rangle & \langle b,\, a_1\rangle \\ \langle a_1,\, a_2\rangle & \langle a_2,\, a_2\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, a_2\rangle & \langle b,\, a_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle a_1,\, a_{k-1}\rangle & \langle a_2,\, a_{k-1}\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, a_{k-1}\rangle & \langle b,\, a_{k-1}\rangle \\ \langle a_1,\, b\rangle & \langle a_2,\, b\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, b\rangle & \langle b,\, b\rangle \end{bmatrix} = G(a_1,\, \dots,\, a_{k-1},\, b)\,.$$

A determináns egyetlen lépésben sem változott, ezzel a lemmát igazoltuk. □

Térjünk vissza a tétel bizonyításához. Mivel b az a_k merőleges komponense a $\operatorname{Span}(a_1, \dots,\, a_{k-1})$ altérre vonatkozóan, ezért

$$b := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i\,,$$

alakú, alkalmas λ_i együtthatókkal. Ezért a lemma alapján

$$\det G_k = \det G(a_1,\, \dots,\, a_{k-1},\, a_k) = \det G(a_1,\, \dots,\, a_{k-1},\, b)\,. \tag{27.4}$$

Azonban b merőleges a $\mathrm{Span}\,(a_1, \dots,\, a_{k-1})$ altérre, ezért

$$\langle a_j,\, b\rangle = 0 \quad (j = 1, \dots, k-1) \qquad \text{és} \qquad \langle b,\, a_i\rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, k-1)\,,$$

tehát ekkor

$$G(a_1,\, \dots,\, a_{k-1},\, b) = \begin{bmatrix} \langle a_1,\, a_1\rangle & \langle a_2,\, a_1\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, a_1\rangle & 0 \\ \langle a_1,\, a_2\rangle & \langle a_2,\, a_2\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, a_2\rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle a_1,\, a_{k-1}\rangle & \langle a_2,\, a_{k-1}\rangle & \dots & \langle a_{k-1},\, a_{k-1}\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \langle b,\, b\rangle \end{bmatrix}.$$

Az utolsó sor szerinti kifejtéssel:

$$\det G(a_1,\, \dots,\, a_{k-1},\, b) = \langle b,\, b\rangle \cdot \det G(a_1,\, \dots,\, a_{k-1}) = \|\, b\|^2 \cdot \det G_{k-1}\,.$$

Ezt összevetve a (27.4) egyenlőséggel, azt kapjuk, hogy:

$$\det G_k = \|\, b\|^2 \cdot \det G_{k-1}\,. \tag{27.5}$$

Mivel $\det G_1 = \|\, a_1\|^2$, ezért indukcióval egyszerűen adódik, hogy $\det G_k \geq 0$.
A térfogatképlet hasonlóan, indukcióval adódik. $k = 1$-re az állítás igaz, mivel:

$$V_{P(a_1)} = \|\, a_1\| = \sqrt{\langle a_1,\, a_1\rangle} = \sqrt{G(a_1)}\,.$$

$k-1$-ről k-ra pedig – a végén felhasználva (27.5)-et is – hasonlóan egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$V_{P(a_1,\, \dots,\, a_k)} = V_{P(a_1,\, \dots,\, a_{k-1})} \cdot \|\, b\| = \sqrt{\det G_{k-1}} \cdot \|\, b\| = \sqrt{\|\, b\|^2 \cdot \det G_{k-1}} = \sqrt{\det G_k}\,.$$

□

Alkalmazzuk a kapott eredményt az $E = \mathbb{R}^n$ euklideszi térben. Ehhez először azt kell megvizsgálnunk, hogyan írhatjuk fel kényelmesen egy $a_1, \dots,\, a_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer Gram-mátrixát.

Legyen tehát $a_1, \dots,\, a_k \in \mathbb{R}^n$, és jelölje $G_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ e vektorrendszer Gram-mátrixát. Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix az $a_1, \dots,\, a_k$ oszlopvektorokból összerakott mátrix:

$$A := [a_1, \dots,\, a_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$$

A mátrix-szorzás szabálya alapján egyszerűen igazolható, hogy

$$(G_k)_{ij} = \langle a_j,\, a_i\rangle = \left(A^T A\right)_{ij}\,,$$

azaz $G_k = A^T A \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

Így az $\mathbb{R}^n$-beli k-paralelepipedon (k dimenziós) térfogatára az alábbi képletet kaptuk:

$$V_{P_k} = \sqrt{\det(A^T A)}\,.$$

Kiemeljük a $k = n$ speciális esetet. Ekkor az A^T és az A mátrixok négyzetesek, így külön-külön is van determinánsuk, nem csak az $A^T A$ szorzatnak. A determinánsok szorzására vonatkozó tételt is alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$V_{P_n} = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{(\det A^T)\cdot(\det A)} = \sqrt{(\det A)\cdot(\det A)} = \sqrt{(\det A)^2} = |\det A|\;.$$

Ezzel eljutottunk a determináns geometriai jelentéséhez:

Egy $n\times n$-es determináns abszolút értéke megegyezik az oszlopvektorai által kifeszített $\mathbb{R}^n$-beli n-paralelepipedon (n-dimenziós) térfogatával.

Lássunk néhány számpéldát:

3. Példa. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ térben fekvő, az $a = (3,-1,2)$ és a $b = (-1,2,1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma T területét.

Megoldás.
Példánkban $n = 3$, $k = 2$.

Az a és b vektorokból mint oszlopokból összeállítjuk az A mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}\,.$$

Ebből könnyen kiszámíthatjuk, hogy

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \det(A^T A) = 75$$

Innen pedig:

$$T = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{75} = 5\sqrt{2}\,.$$

27.11. Megjegyzés. A példában szereplő paralelogramma négy csúcsa:

$$0 = (0,0,0), \quad a = (3,-1,2), \quad b = (-1,2,1), \quad a+b = (2,1,3)\,.$$

4. Példa. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ térben fekvő, az $a = (1,0,-1)$, $b = (-1,1,3)$ és a $c = (2,4,1)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V térfogatát.

Megoldás.
Példánkban $n = 3$, $k = 3$.

Az a, b, c vektorokból mint oszlopokból összeállítjuk az A mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \det A = -5\,.$$

Innen pedig:

$$V = |\det A| = 5\,.$$

27.12. Megjegyzés. A példában szereplő paralelepipedon nyolc csúcsa:

$$0 = (0,0,0), \quad a = (1,0,-1), \quad b = (-1,1,3), \quad c = (2,4,1),$$

$$a+b = (0,1,2), \quad a+c = (3,4,0), \quad b+c = (1,5,4), \quad a+b+c = (2,5,3)\,.$$