*Név : ......................................................., NEPTUN-kód ........................*

*Csoport, gyak.vez. : ..........................................................*

*Pontszám : ......................................*

*Programtervező informatikus szak I. évfolyam*
*Matematikai alapok 1. zárthelyi*
*2023. október 13.*

*Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.*

**1. (7 pont)** Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést ($a$, $b$ olyan valós számokat jelöl, melyekkel egyik nevező sem 0) :

$$\left(\frac{a+b}{ab-b^2}-\frac{2a+3b}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{a^4b-a^2b^3}{a^4-4b^4}\cdot\left(1+\frac{2b^2}{a^2}\right)$$

**2. (3 pont)** Igazoljuk, hogy $x_0=-1$ kétszeres gyöke az alábbi polinomnak, és emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt annyiszor, ahányszor csak lehet :

$$P(x):=x^5+4x^4+x^3-4x^2+2$$

**3. (8 pont)** Az $a\in\mathbb{R}$ valós paraméter milyen értékei mellett igaz az alábbi egyenlőtlenség minden $x\in\mathbb{R}$ számra ?

$$(2+a-a^2)\cdot x^2+\sqrt{a-2}\cdot x-1<0$$

**4. (8 pont)** Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán :

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\cos(2x)$$

**5. (3+6 pont)** Adott az alábbi egyenlőtlenség a valós számok halmazán :

$$\log_2(1-|x|)-\log_4(x)\le\frac{1}{2}\cdot\log_2\left(x-x^2\right)$$

a) Határozzuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.
b) Oldjuk meg az egyenlőtlenséget.

**6. (1+6+1 pont)**

a) Fogalmazzuk meg kvantorok segítségével az alábbi állítást :

*Minden elég nagy $n$ természetes szám esetén :*

$$\frac{2n^4-3n^3+n^2-n+141}{7n^6-3n^5+5n^4-n^2+11n-59}<\frac{1}{2023}$$

b) Megfelelő küszöb megadásával igazoljuk az állítást.

c) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

**7. (7 pont)** Igazoljuk teljes indukcióval az alábbi egyenlőtlenséget :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ n\ge 2:\quad \frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$