3. HALMAZOK, RÉSZHALMAZOK

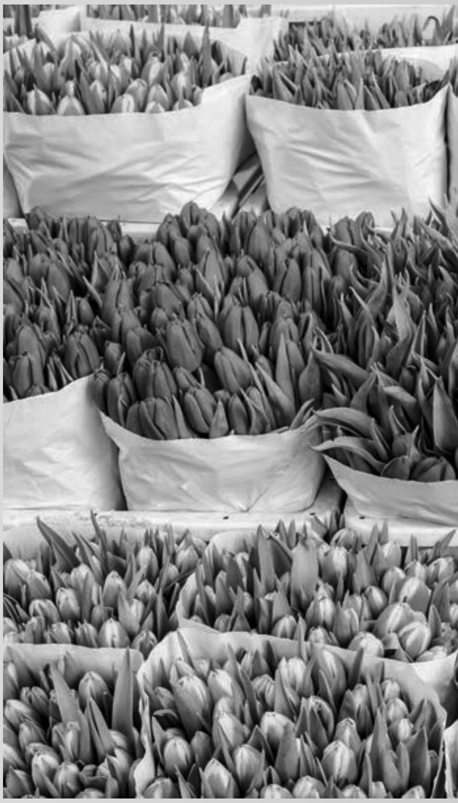
Általános iskolai tanulmányaink során már megismerkedtünk a halmazokkal: az egyforma tulajdonságú objektumokat egy-egy csoportba soroltuk, s ezeket a csoportokat halmazoknak neveztük. A **halmaz** alapfogalom, általában az azonos tulajdonságú elemek együttesét, összességét jelenti.

A halmazok elemei a legkülönfélébb „dolgok” lehetnek. A matematikában általában számhalmazokkal és ponthalmazokkal dolgozunk, melyek természetesen számokból, illetve pontokból állnak. De találkozhatunk olyan halmazokkal is, melyek elemei geometriai objektumok (például különféle négyszögek), fogalmak, tételek vagy akár személynevek is lehetnek (például adott időszak magyar minisztereinek a halmaza).

A mindennapi életünkben lépten-nyomon „halmazokba botlunk” – csak legfeljebb ezt a tényt nem tudatosítjuk. Amikor az előző fejezetben példaként említett András felszáll a 6-os villamosra, akkor a városban közlekedő villamosok *halmazából* száll fel az egyikre; az utazás során ő is a villamoson utazó emberek *halmazának* egyik eleme lesz; de beletartozik a saját osztálya tanulóinak a *halmazába* is; és ha felel magyar irodalomból, akkor azon tanulók *halmazába* kerül, akik éppen aznap feleltek.

Látjuk, hogy gyakorlatilag bármilyen objektumból (élőlényekből, tárgyakból, fogalmakból) készíthetünk halmazt, ha közös tulajdonságuk alapján vagy valamilyen indokkal azonos csoportba soroljuk őket. Ezzel kapcsolatban egyetlen – szigorú – megkötés van: a halmaz megadásának egyértelműnek kell lennie. Azaz: bármely objektumról egyértelműen el kell tudni dönteni, hogy hozzátartozik a halmazhoz, vagy sem.

(Persze elképzelhető, hogy a halmazba sorolás technikailag nehézséget okoz. Például egy több ezer jegyű számról nehéz lehet eldönteni, hogy a prímszámok halmazába tartozik, vagy sem.)



HALMAZOK MEGADÁSA, JELÖLÉSEK

A halmazokat általában nagybetűkkel jelöljük, és ha felsoroljuk az elemeiket, akkor azokat kapcsos zárójel közé tesszük. A leggyakrabban használt számhalmazok jelölése az egész világon ugyanaz:

a természetes számok halmazát **N**, az egész számok halmazát **Z**,
a racionális számok halmazát **Q** és a valós számok halmazát **R** betűvel jelöljük.
(Ezek általában a megfelelő nemzetközi elnevezések kezdőbetűi.)

A halmazokat megadhatjuk az elemek **közös tulajdonság**ával.

Például: A = {pozitív páros számok}; vagy B = {az Európai Unió tagállamai}; vagy C = {Ady Endre versei}.

Egy másik megadási lehetőség a halmaz elemeinek a **felsorolása**.

Például: $D = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; vagy $E = \left\{1{,}2; -3{,}6; \frac{5}{7}; 5\pi\right\}$; vagy F = {Szent István, Péter, Aba Sámuel}.

A végtelen elemszámú halmazokat is megadhatjuk „felsorolással”: $G = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$;
$H = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$ vagy $H = \{0;\ 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ \ldots\}$; $I = \{10;\ 12;\ 14;\ 16;\ \ldots\}$. Ekkor vigyáznunk kell arra, hogy a három pont (…) által jelzett folytatás egyértelmű legyen.

Megállapodás szerint a halmazok minden elemét csak egyszer soroljuk fel. Tekintsük az 1; 1; 1; 2; 2; 3 számokat (gondoljunk például mérési eredményekre). Ha a felsorolásban szereplő mérések számértékét soroljuk halmazba, akkor ez helyesen {1; 2; 3}. De ha a konkrét értékekre van szükségünk – például a mért számok átlagának a kiszámításakor –, akkor nem halmazról, hanem ún. *adatsokaságról* vagy a hat szám *sorozatáról* beszélünk.

Gyakori megadási mód valamilyen **szabály, formula, képlet** alkalmazása. Ha a halmazt elemeire vonatkozó feltétellel vagy tulajdonsággal adjuk meg, akkor

- a függőleges vonal elé írjuk a változót, amivel a halmaz elemét jelöljük;
- a függőleges vonal után pedig megadjuk azt a feltételt vagy tulajdonságot, amely a halmaz elemeire vonatkozik.

Az $\{x \mid t(x)\}$ halmaz tehát azokból az x elemekből áll, amelyekre teljesül a $t(x)$ tulajdonság.

Például

$J = \{x \mid 7 < x < 15\}$ azokból az x számokból álló halmaz, melynek elemei 7-nél nagyobbak és 15-nél kisebbek.

$K = \{n \mid n = k^2,\ k = 0, 1, 2, 3\}$ az egyjegyű négyzetszámok halmaza. (Vagy kissé rövidebben: $K = \{k^2 \mid k = 0, 1, 2, 3\}$).

$L = \{x \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$ azokból az x számokból álló halmaz, amelyekre teljesül az $(x - 1)(x + 2) = 0$ feltétel. Az egyenlet megoldásai 1 és –2, így $L = \{1; -2\}$.

$M = \{k \mid k = 2n$, n egész szám$\}$ azon k számok M halmazát jelenti, amelyek felírhatók $2n$ alakban, ahol n egész szám. Ezt röviden úgy mondanánk, hogy M a páros számok halmaza, ami egyúttal a halmaz tulajdonsággal, körülírással történő megadása.

A halmazok megadásakor előfordulhat, hogy a függőleges vonal előtt azt is megadjuk, hogy milyen alaphalmazra vonatkozik a feltétel. Az $\{x \in H \mid t(x)\}$ tehát az a halmaz, melynek elemei hozzátartoznak a H halmazhoz, és rendelkeznek a $t(x)$ tulajdonsággal.

Például

$O = \{x \in \mathbf{R} \mid 7 < x < 15\}$ olyan valós számokból álló halmaz, melynek elemei 7-nél nagyobbak és 15-nél kisebbek. (Tehát $O = J$.)

De a $P = \{x \in \mathbf{Q} \mid 7 < x < 15\}$ halmaz elemei racionális számok, így $P \neq J$.

$S = \{x \in \mathbf{N} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$ olyan természetes számokból álló halmaz, melyek gyökei (megoldásai) az $(x - 1)(x + 2) = 0$ egyenletnek. Az 1 és –2 gyökök közül csak az 1 természetes szám, így $S = \{1\}$.

A szakirodalomban a függőleges vonal helyett a kettőspontot is alkalmazzák jelölésként.

Definíció

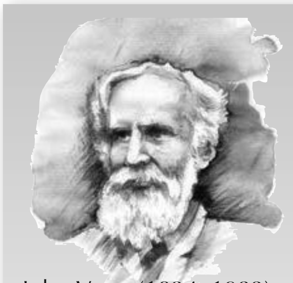
Speciális halmaz az **üres halmaz**, amelynek egyetlen eleme sincs. Jelölése $\varnothing$ vagy { }.

Figyeljünk arra, hogy többféle halmazmegadás is vezethet az üres halmazhoz, például a {negatív négyzetszámok} $= \varnothing$, hiszen negatív négyzetszám nem létezik.

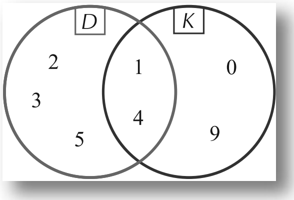
Mikor melyik megadási módot célszerű használni? Általában azt mondhatjuk, a konkrét példától függ, hogy melyik módszer a leginkább áttekinthető, esetleg az ízlésünknek megfelelő, vagy egyáltalán melyik használható. Például az A = {pozitív páros számok} halmazt megadhatjuk felsorolással is: $A = \{2; 4; 6; \dots\}$, s ez a megoldás sem bonyolultabb, mint a körülírás. Ugyanakkor a képlettel történő megadás: $A = \{x \mid x = 2k, k = 1, 2, 3, \dots\}$ már elvontabb megoldásnak tűnik.

Az F = {első három magyar király} megadás esetleg precízebb, mint az F = {Szent István, Péter, Aba Sámuel} megadás, s a $G = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ elemeinek a felsorolása helyett a természetes számokra alkalmazott **N** jelölés az egységesen elfogadott.

Nem mindig van választási lehetőségünk. A C = {Ady Endre versei} halmaz megadása felsorolással nem gyakorlatias, a legtöbb esetben haszontalannak tűnik; arra pedig, hogy C elemeit valamilyen képlettel adjuk meg, esélyünk sincs.



John Venn (1834–1923) angol matematikus. Elsőként ő ábrázolta körökkel a logikai állítások kapcsolatait. A *Symbolic Logic* (Szimbolikus logika) című 1881-es munkájában vezette be a később róla elnevezett Venn-diagram fogalmát.



A halmazok *szemléltetése, szemléletes megadása* történhet táblázattal, grafikonnal, különböző diagramokkal. Az általános iskolában általában a Venn-diagramot alkalmaztuk. Az ábrán a D és K halmazok Venn-diagramja látható.

TARTALMAZÁS, ELEM, RÉSZHALMAZ

Említettük, hogy bármely objektumról el kell tudnunk dönteni, hogy az adott halmazhoz hozzátartozik, vagy sem. Ezek jelölésére az $\in$, illetve $\notin$ szimbólumokat használjuk. Például $10 \in J$, $10 \notin K$ ('10 eleme J-nek, 10 nem eleme K-nak'); vagy Magyarország $\in B$.

Előfordulhat, hogy egy halmaz minden eleme beletartozik egy másik halmazba. Ilyen kapcsolat áll fenn a példákban szereplő A és H, vagy a D és H, vagy a K és **N** halmazok között. A halmazok közötti tartalmazásra külön fogalmat és jelölést vezetünk be.

Definíció

Az A halmaz **részhalmaza** (vagy **része**) a H halmaznak, ha A minden eleme egyúttal a H halmaznak is eleme. Ezt a kapcsolatot az $A \subseteq H$ szimbólummal jelöljük.

A korábbi példában a jelölés tehát: $D \subseteq H$, $K \subseteq \mathbf{N}$.

Például

$\{2; 4; 6\} \subseteq A$, {Magyarország, Ausztria} $\subseteq B$.

Helytelen lenne a Magyarország $\subseteq B$ jelölés, mert példánkban Magyarország nem halmaz. Helyesen: {Magyarország} $\subseteq B$, azaz a Magyarországot tartalmazó halmaz részhalmaza B-nek.

A részhalmaz definíciójából több állítás is levezethető:
– minden halmaz része önmagának;
– az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza;
– ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subseteq H_3$, akkor $H_1 \subseteq H_3$ is teljesül.

(Az állítások bizonyítását a lecke végén emelt szintű feladatként tűzzük ki.)

1. példa

Az alábbi táblázatban egy település önkormányzati testületének a szavazatait soroltuk fel. A tíz képviselő (jelölésük: A, B, C, …, J) három kérdésre szavazott, az „igen, nem, tartózkodom" szavazatokat a táblázatban i, n, t betűkkel jelöltük.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1. kérdés	i	i	n	i	t	i	n	t	i	i
2. kérdés	i	n	i	i	n	t	t	i	n	i
3. kérdés	i	n	n	t	n	t	n	n	i	n

a) Legyen H_1 azon képviselők halmaza, akik az 1. kérdésre „igen"-nel szavaztak. Adjuk meg a H_1 halmazt felsorolással!
b) Legyen H_2 azon képviselők halmaza, akik az első két kérdésre „igen"-nel szavaztak. Adjuk meg a H_2 halmazt felsorolással!
c) Legyen H_3 azon képviselők halmaza, akik az első két kérdés egyikére sem szavaztak „nem"-mel. Soroljuk fel a H_3 halmaz elemeit!
d) Milyen kapcsolat áll fenn a H_1, H_2 és H_3 halmazok között?
e) Mi volt a szavazások eredménye? (Az előterjesztés elfogadásához – a tartózkodásokat nem számítva – egyszerű többségre van szükség.)
f) Van olyan képviselő, aki mindhárom kérdésre a többséggel egyetértésben szavazott?

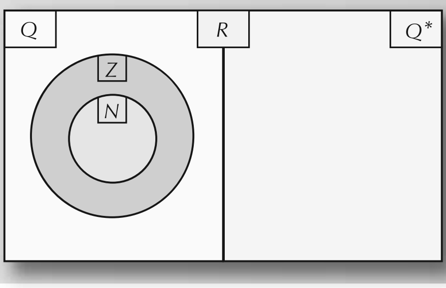
Megoldás

a) $H_1 = \{A, B, D, F, I, J\}$.
b) $H_2 = \{A, D, J\}$.
c) A H_3 halmazba azok a képviselők tartoznak, akik az első két kérdésre az „igen" vagy „tartózkodom" válaszokat adták: $H_3 = \{A, D, F, H, J\}$.
d) $H_2 \subseteq H_1$, hiszen minden olyan képviselő, aki az első két kérdésre „igen"-nel szavazott, szükségképpen „igen"-nel szavazott az első kérdésre is.
H_3 nem része sem H_1-nek, sem H_2-nek, mert van olyan képviselő, aki a második kérdésnél igennel szavazott, de az első kérdésnél tartózkodott (H). Igaz viszont, hogy $H_2 \subset H_3$: ha valaki az első két kérdésre „igen"-nel szavazott, akkor nem szavazott „nem"-mel.
e) A testület az első két előterjesztést elfogadta, a harmadikat nem.
f) Van ilyen, a J képviselő.

A halmazokkal kapcsolatos problémák közül a mindennapi életünkben leggyakrabban előforduló esetekre láttunk példákat, ezek: az osztályba sorolás (kategorizálás, tipizálás), illetve a szűrés (valamilyen feltételrendszer szerint). A halmazműveletekkel a következő leckében részletesen foglalkozunk.

2. példa

Ábrázoljuk Venn-diagramon **N, Z, Q, R** és az irracionális számok **Q*** halmazát!



Megoldás

A halmazok kapcsolatát a mellékelt Venn-diagram szemlélteti.

Az ábráról leolvasható az $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ és $\mathbf{Q}^* \subseteq \mathbf{R}$ tartalmazás (minden természetes szám egyúttal egész szám is stb.). A valós számok a racionális és irracionális számokból állnak, s minden szám csak egyfajta lehet: vagy racionális, vagy irracionális.

3. példa

Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ és $C = \{4; 5; 6; 7; A\}$ halmazokat. (A C halmaz egyik eleme az A halmaz.) Melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) $1 \in A$; *b)* $1 \notin B$; *c)* $1 \in C$; *d)* $\{1\} \in A$; *e)* $1; 2; 3 \subseteq A$;
f) $\{1\} \subseteq A$; *g)* $\{1; 2; 3\} \subseteq A$; *h)* $A \in C$; *i)* $A \subseteq C$; *j)* $\{A\} \in C$;
k) $\{A\} \subseteq C$.

Megoldás

Definíció szerint az *a)* és *b)* állítások igazak, a *c)* hamis.

A *d)* állítás hamis, mert az 1-et tartalmazó $\{1\}$ halmaz nincs felsorolva A elemei között.

Az *e)* állítás értelmetlen, hiszen csak halmaz lehet egy másik halmaz részhalmaza. A helyes forma a *g)* állításban látható, s ez igaz is.

Hasonlóan igaz definíció szerint *f)*: az $\{1\}$ halmaz minden eleme (azaz az 1-es) egyúttal eleme A-nak is.

A *h)* állítás igaz, mert az A halmazt felsoroltuk C elemei között.

Az *i)* hamis. Van olyan eleme az A halmaznak, ami nincs benne C-ben: például az 1.

A *j)* állítás hamis. Az A halmazt tartalmazó halmaz nem eleme C-nek (csak $A \in C$ igaz, a *h)* állításnak megfelelően).

A *k)* igaz. Az A halmazt tartalmazó halmaz minden eleme (azaz A) egyúttal eleme C-nek is.

Definíció

Két halmaz, ***A* és *B* egyenlő**, ha elemeik ugyanazok.

4. példa

Fogalmazzuk meg ezt a definíciót az
a) „eleme”, illetve
b) „részhalmaza”
szimbólumok segítségével!

Megoldás

a) $A = B$, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül; és fordítva, ha minden $x \in B$ esetén $x \in A$ is igaz.
b) $A = B$, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

Az *a)* megoldásban a „minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül" feltétel azt jelenti, hogy az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme. Észrevehetjük, hogy ekkor éppen az $A \subseteq B$ kapcsolatot fogalmaztuk meg.

Kissé zavaró, hogy $A \subseteq B$ esetén $A = B$ is megengedett. A köznyelvben „B része" alatt általában B egy összetevőjét, kisebb egységét értjük. S valóban, a köznyelv számára például az $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$ tartalmazás nem tűnik „igazi" résznek.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **valódi részhalmaza** (vagy **valódi része**) a B halmaznak, ha A része B-nek, de a két halmaz nem egyenlő. Jelölés: $A \subset B$. (A két halmaz kapcsolatát formulákkal is megadhatjuk: $A \subseteq B$, de $A \neq B$.)

Általában az $A \subseteq B$ jelölést használjuk, mert ez a valódi tartalmazást is magában foglalja. Az $A \subset B$ jelölést csak akkor – és csak ritkán – alkalmazzuk, amikor hangsúlyozni kívánjuk, hogy $A \neq B$.

5. példa

Soroljuk fel az alábbi halmazok összes részhalmazát! Ezek közül melyek valódi részhalmazok?
a) $H_0 = \{\ \}$; *b)* $H_1 = \{a\}$; *c)* $H_2 = \{a, b\}$; *d)* $H_3 = \{a, b, c\}$.

Megoldás

a) Az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van, az üres halmaz: $\varnothing$. Valódi részhalmaza nincs.
b) H_1-nek két részhalmaza van: $\varnothing$, $\{a\}$. Valódi részhalmaz: $\varnothing$.
c) Négy részhalmazt találunk: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Valódi részhalmazok: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$.
d) H_3-nak nyolc részhalmaza van: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. Nem valódi részhalmaz: $\{a, b, c\}$.

Fogalmak, név
halmaz;
üres halmaz;
részhalmaz;
halmazok egyenlősége;
valódi részhalmaz;
Venn-diagram;
Venn

A részhalmazok száma az egyes feladatokban 1, 2, 4, 8. Ez alapján vajon milyen sejtést fogalmazhatunk meg?[3]

FELADATOK

1. K1 Az alábbi meghatározások egy adott osztály tanulóira vonatkoznak. A definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy halmazt?

a) az osztályba járó fiúk;
b) a magas tanulók;
c) a barna hajú lányok;
d) a budapesti lakosok;
e) akiknek tavaly év végén 5-ös matematikaosztályzatuk volt;
f) akik szeretnek iskolába járni.

2. K1 Az alábbi A, B és C halmazokat megadhatjuk felsorolással, közös tulajdonsággal és képlettel is. Pótoljuk a hiányzó megadásokat, és ábrázoljuk a halmazokat a Venn-diagramon!

halmaz	felsorolás	közös tulajdonság	képlet
A	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$		
B		egyjegyű, pozitív prímszámok	
C			$C = \{x \mid 4 \le x \le 9 \text{ és } x \in \mathbf{N}\}$

[3] A sejtés megfogalmazása és bizonyítása megtalálható a *10. Halmazokról és számokról* c. leckében.

3. K2 Az alábbi táblázatban egy osztály tanulóit két-két csoportra osztottuk a nemük szerint, valamint attól függően, hogy év végi matematikaeredményük „jó” (4-es vagy 5-ös), illetve „gyenge” (2-es vagy 3-as) volt. A táblázat mezőibe írt számok a megfelelő tulajdonságú tanulók számát jelentik.

	jók (4-es, 5-ös érdemjegy)	gyengék (2-es, 3-as érdemjegy)
F (fiúk)	8	7
L (lányok)	10	7

Értelmezzük a táblázat adatait!
a) Mennyi az osztálylétszám?
b) Az összes tanuló hány százaléka „jó” matematikából?
c) Az összes fiú hanyadrésze „gyenge” matematikából?
d) Ábrázoljuk az adatokat az F (fiúk) és J („jók”) halmazok Venn-diagramján! (Az alaphalmaz az osztály tanulóinak a halmaza, az egyes tartományokba a megfelelő elemszámot írjuk.)

4. K1 Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {egyjegyű négyzetszámok}. Adjuk meg az A halmaz egy lehetséges X és a B halmaz egy lehetséges Y részhalmazát úgy, hogy
a) $Y \subset X$; *b)* $Y \subseteq X$; *c)* $X \subset A$ és $Y \subset X$; *d)* $X \subset A$ és $Y \subseteq X$; *e)* $Y = X$.

5. K1 Fogalmazzuk meg, mit jelent, hogy
a) az A halmaz *nem* üres halmaz;
b) az A halmaz *nem* részhalmaza B-nek (jelölés: $A \not\subset B$);
c) az A halmaz *nem* egyenlő B-vel!

A matematikai irodalomban gyakran találkozhatunk az $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ jelölésekkel. Jelentésük sorban: *pozitív természetes számok*, *pozitív egész számok*, *negatív egész számok*, *pozitív racionális számok*, *negatív racionális számok*, *pozitív valós számok*, *negatív valós számok* halmaza. A $\mathbf{Q}_0^+$ jelölés a pozitív racionális számokat és a 0-t tartalmazó halmazt jelenti, s hasonlóan jelölhetjük a $\mathbf{Z}_0^+$, $\mathbf{R}_0^+$ stb. halmazokat is.

6. K1 Fogalmazzunk meg a fenti számhalmazok között néhány tartalmazáskapcsolatot (melyik halmaz melyiknek részhalmaza, valódi részhalmaza vagy nem része)!
Például igaz-e, hogy:
a) $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{Z}^+$; *b)* $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z}^+$; *c)* $\mathbf{Q}_0^+ \subseteq \mathbf{R}^+$; *d)* $\mathbf{R}^- \not\subset \mathbf{Q}$ stb.?

7. K2 Tekintsük az A = {3-mal osztható egész számok}, $B = \{x \mid x = 10k - 3,\ k \in \mathbf{Z}^+\}$, C = {négyzetszámok} halmazokat. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?
a) Az A halmaznak négy olyan eleme van, amelyik egyjegyű szám.
b) Van olyan egyjegyű szám, amelyik mindhárom halmaznak eleme.
c) Van olyan kétjegyű szám, amelyik két halmaznak is eleme.
d) Van olyan kétjegyű szám, amelyik mindhárom halmaznak eleme.
e) Van olyan 2-esre végződő szám, amelyik két halmaznak is eleme.
f) Van olyan 4-esre végződő szám, amelyik két halmaznak is eleme.
g) $0 \in A$. *h)* $0 \notin C$. *i)* $\{0; 576; 1296\} \subseteq C$. *j)* $\{0; 576; 1296\} \subset A$.
k) $\{0; 576; 1296\} \not\subset B$. *l)* $0 \subseteq A$. *m)* $\{0\} \subseteq A$. *n)* $\varnothing \subset B$.
o) $\{\ \} \subseteq C$. *p)* $A \subseteq A$. *q)* $B \subset B$.

8. K2 Az alábbi állításokban A és B tetszőleges halmazok. Melyik igaz az állítások közül?
(1) Ha $1 \in A$, akkor $\{1\} \subseteq A$.
(2) Ha $A \subset B$, akkor $A \subseteq B$.
(3) Ha $1 \in A$, akkor $1 \not\subset A$.

9. K2 Ugyanazt jelenti-e az alábbi két állítás?
a) Az A halmaz minden x eleméhez van a B halmaznak olyan b eleme, hogy $x < b$.
b) A B halmaznak van olyan b eleme, hogy az A halmaz minden x elemére $x < b$.
(Melyik állításból következik a másik?)

10. E1 Igazoljuk a következő állításokat!
a) Minden halmaz része önmagának.
b) Ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subseteq H_3$, akkor $H_1 \subseteq H_3$ is teljesül.
c) Ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subset H_3$, akkor $H_1 \subset H_3$ is teljesül.
d) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
e) Egyetlen üres halmaz van.

11. K2 $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
a) Hány részhalmaza van A-nak?
b) Hány valódi részhalmaza van A-nak?
c) Hány 2 elemű részhalmaza van B-nek?
d) Hány 4 elemű részhalmaza van B-nek?
e) Hány olyan halmaz van, amelyik A-nak és B-nek is részhalmaza?

12. E1 Az a és b különböző számok elemei az A véges elemszámú számhalmaznak. Tudjuk, hogy A-nak eleme bármely két (különböző) elemének
a) összege is;
b) szorzata is.
Mennyi lehet A elemszáma az *a)* és a *b)* esetben?

4. MŰVELETEK HALMAZOKKAL

1. példa

A táblázatban egy adott osztályból azon tanulókat soroltuk fel, akik az iskola komplex természettudományos versenyén a három tantárgy (biológia, fizika, kémia) valamelyikéből elindultak. Az első oszlopban a diákokat nevük kezdőbetűivel jelöltük, a másik három oszlopban pedig a tantárgyi versenyen elért pontszámuk látható. (Mindegyik tantárgyból legfeljebb 30 pontot lehetett elérni.)

név	biológia	fizika	kémia
A. K.		22	26
C. R.	30	24	
D. Cs.	23	12	14
G. B.	29		18
H. H.			25
K. M.	25	25	
M. Gy.	25	11	12
N. G.		19	18
O. G.	21		
P. Zs.	29	29	25
R. A.	18	20	
S. E.	16	16	12
Sz. K.	30	22	
T. E.	17	22	23
V. B.	27	21	16
Z. M.		28	27

Biológiából azok a tanulók jutottak tovább a második fordulóba, akik legalább 21 pontot elértek. Ilyen tanuló kilenc van (elegendő a vezetéknevük kezdőbetűit használni): C, D, G, K, M, O, P, Sz, V.

Ugyanez a továbbjutási ponthatár fizikából 20 pont volt. Ebből a tantárgyból a második fordulóba jutott versenyzők névsora: A, C, K, P, R, Sz, T, V, Z.

Ha a tanulók eredményességét vizsgáljuk, különböző kérdéseket tehetünk fel. Például:

Hány olyan tanuló van, aki

– mindkét tantárgyból bejutott a második fordulóba;
– biológia tantárgyból továbbjutott, fizikából nem;
– egyik tantárgyból sem jutott tovább?

És persze a kapott válaszokat összevethetjük a kémiaverseny eredményeivel. Például:

A második fordulóba kémiából a legalább 18 pontot elért versenyzők jutottak. Hány tanuló van, aki mindhárom tantárgyból továbbjutott? Hány olyan, aki kettőből jutott tovább? És így tovább.

A mindennapi életben hasonló feladatokkal gyakran találkozunk. A köznyelvben ezeket a „műveleteket" kategorizálásnak (csoportosításnak) és szűrésnek (kiválogatásnak) nevezzük.

A problémát matematikailag is modellezhetjük. Az adatok egyszerű és egységes kezelése érdekében a tanulókat egy-egy halmazba soroljuk; például a biológiából továbbjutott diákok halmazát jelölje B, a fizikából továbbjutottak halmazát F. Ekkor $B = \{C, D, G, K, M, O, P, Sz, V\}$, $F = \{A, C, K, P, R, Sz, T, V, Z\}$.

Ekkor a matematika nyelvén megfogalmazott kérdések a következők:

Hány olyan tanuló van, aki

– a B és F halmaznak is eleme;
– a B halmaznak eleme, de az F halmaznak nem;
– sem a B, sem az F halmaznak nem eleme (pedig elindult a versenyen)?

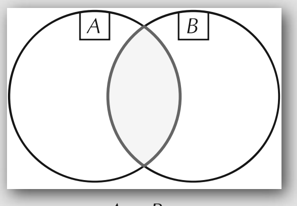
Hasonló kérdéseket három halmaz esetén is feltehetünk. Például: hány olyan tanuló van, aki a B, F, K halmazok mindegyikének eleme? (Természetesen K a kémia tantárgyból továbbjutott versenyzők halmazát jelenti: $K = \{A, G, H, N, P, T, Z\}$.)

A válaszok minden esetben a tanulók egy-egy csoportját, azaz egy-egy *halmazát* adják meg. Ez alapján úgy tűnik tehát, hogy érdemes a halmazok között ható műveleteket definiálnunk. Ezek eredménye ismét halmaz lesz, s a fenti példákhoz hasonló gyakorlati eljárásokat (szűrések, kiválogatások) írják le a matematika nyelvén.

METSZET, UNIÓ (EGYESÍTÉS), KÜLÖNBSÉG

A leggyakrabban használt halmazműveletekkel már az általános iskolában megismerkedtünk.

Definíció



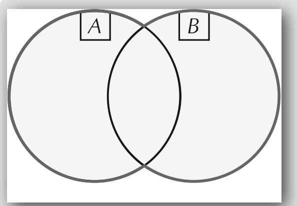
$A \cap B$

Két halmaz **metszete** *(közös része)* azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei. A művelet jele: $\cap$. Az A és B halmazok metszetét szemléltethetjük Venn-diagrammal, vagy megadhatjuk képlettel is.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$. (Tehát az $A \cap B$ halmaz azon x elemekből áll, amelyek elemei az A és a B halmaznak is.)

Az 1. példa $B = \{C, D, G, K, M, O, P, Sz, V\}$ és $F = \{A, C, K, P, R, Sz, T, V, Z\}$ halmazának metszete: $B \cap F =$ $=\{C, K, P, Sz, V\}$. A metszet azon tanulókból áll, akik biológiából *és* fizikából is továbbjutottak a versenyen.

Definíció



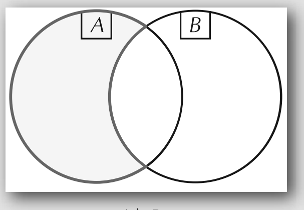
$A \cup B$

Két halmaz **uniója** *(egyesítése)* azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. A művelet jele: $\cup$.

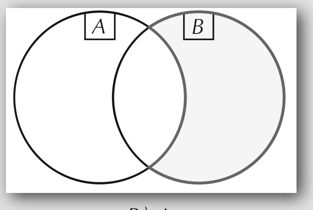
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$. (Tehát az $A \cup B$ halmaz azon x elemekből áll, amelyek elemei az A *vagy* a B halmaznak.)

A példában a B és F halmazok uniója: $B \cup F = \{A, C, D, G, K, M, O, P, R, Sz, T, V, Z\}$. Az unió azon tanulókból áll, akik biológiából *vagy* fizikából továbbjutottak.

Definíció



$A \setminus B$



$B \setminus A$

Az A és B halmazok **különbsége** az A halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei. A művelet jelölése: $\setminus$.

Képlettel: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$. (Az $A \setminus B$ halmaz azon x elemekből áll, amelyek elemei az A halmaznak, *de* nem elemei B-nek.) Hasonlóan $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ és } x \notin A\}$.

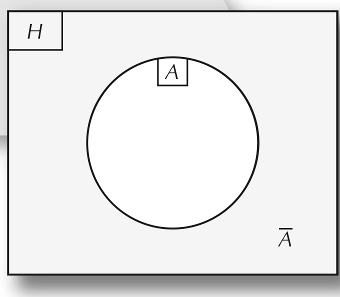
A definícióból következik, hogy az A és B halmazok sorrendje lényeges: $A \setminus B$ és $B \setminus A$ általában különböző halmazok, hiszen a $B \setminus A$ halmaz elemei benne vannak a B halmazban, de az A halmazban nem.

A B és F halmazok különbsége: $B \setminus F = \{D, G, M, O\}$; az F és B halmazok különbsége: $F \setminus B = \{A, R, T, Z\}$. Szöveggel megfogalmazva például a B és F halmazok különbsége azon tanulókból áll, akik biológiából továbbjutottak, *de* fizikából nem.

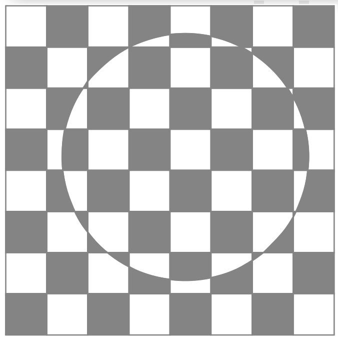
KOMPLEMENTER HALMAZ

Definíció

Ha $A \subseteq H$, akkor az A halmaz H alaphalmazra vonatkozó **komplementer halmazának** (komplementerének, kiegészítő halmazának) nevezzük a $H \setminus A$ halmazt. Jelölés: $\overline{A}$.



$\overline{A}$ ('A komplementer halmaza') tehát a H halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek az A halmaznak nem elemei: $\overline{A} = \{x \in H \mid x \notin A\}$. Például ha H azon tanulók halmaza, akik elindultak a biológiaversenyen, akkor $H = \{C, D, G, K, M, O, P, R, S, Sz, T, V\}$ és $\overline{B} = \{R, S, T\}$. Ha viszont a H alaphalmaz a természettudományos verseny valamelyik tantárgyán (biológia, fizika, kémia) elindult tanulókat jelenti, akkor $H = \{A, C, D, G, H, K, M, N, O, P, R, S, Sz, T, V, Z\}$ és $\overline{B} = \{A, H, N, R, S, T, Z\}$.



A metszet, unió és különbség művelete *két* halmazhoz, A-hoz és B-hez rendelt egy újabb halmazt, $A \cap B$-t, $A \cup B$-t vagy $A \setminus B$-t. A komplementerképzés más jellegű művelet: *egyetlen* halmazhoz, A-hoz rendel egy újabb halmazt, $\overline{A}$-t. Ugyanakkor az is igaz, hogy a művelet eredménye egy másik halmaztól, a H alaphalmaztól is függ.

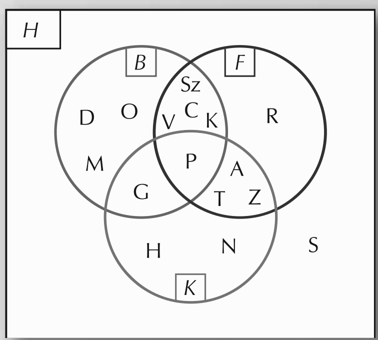
További kétváltozós halmazműveletek is megadhatók, de ezek az eddigi műveleteinkkel kifejezhetők. Például két halmaz ún. *szimmetrikus differenciája* $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ alakú. (Kiolvasva: 'A delta B'.)

2. példa

Ábrázoljuk az 1. példában szereplő B, F, K halmazokat egy Venn-diagramon (a H alaphalmaz legyen azon tanulók halmaza, akik valamelyik tantárgy versenyén elindultak). Határozzuk meg a következő halmazokat:

a) $F \cap K$; *b)* $B \cup K$; *c)* $K \setminus F$;
d) $F \setminus K$; *e)* $\overline{K}$ (a H alaphalmazra vonatkozóan); *f)* $(B \cap F) \cap K$;
g) $B \cup (F \cup K)$; *h)* $B \setminus (F \setminus K)$; *i)* $B \setminus F \setminus K$.

Megoldás



a) $F \cap K = \{A, P, T, Z\}$;
b) $B \cup K = \{A, C, D, G, H, K, M, N, O, P, Sz, T, V, Z\}$;
c) $K \setminus F = \{G, H, N\}$;
d) $F \setminus K = \{C, K, R, Sz, V\}$;
e) $\overline{K} = \{C, D, K, M, O, R, S, Sz, V\}$;
f) $(B \cap F) \cap K = \{P\}$;
g) $B \cup (F \cup K) = \{A, C, D, G, H, K, M, N, O, P, R, Sz, T, V, Z\}$;
h) $B \setminus (F \setminus K) = B \setminus \{C, K, R, Sz, V\} = \{D, G, M, O, P\}$.
i) A $B \setminus F \setminus K$ kifejezésben egyforma rendű (egyforma „erősségű") műveletek szerepelnek, ezért a kiértékelésekor balról jobbra haladunk.
$B \setminus F \setminus K = (B \setminus F) \setminus K = \{D, G, M, O\} \setminus K = \{D, M, O\}$.

A MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

Fogalmak, név
metszet;
unió;
különbség;
komplementer halmaz;
de Morgan

A definíciók segítségével tetszőleges A, B, C halmazokra igazolhatók a következő **tulajdonságok**:

$A \cap B = B \cap A$, $\quad A \cup B = B \cup A$,

(a metszet-, illetve unióképzés **kommutatív** művelet, azaz felcserélhető a halmazok sorrendje);

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

(a metszet-, illetve unióképzés **asszociatív** művelet, azaz szabadon zárójelezhető);

$A \cap A = A$, $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$,
$A \cup A = A$, $\quad A \cup \varnothing = A$,
$A \setminus A = \varnothing$, $\quad A \setminus \varnothing = A$, $\quad \varnothing \setminus A = \varnothing$,
$\overline{\overline{A}} = A$, $\quad \overline{\varnothing} = H$, $\quad \overline{H} = \varnothing$.

FELADATOK

1. K1 Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {5-nél nem nagyobb természetes számok}, s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát.

a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

Adjuk meg – például felsorolással – az alábbi halmazokat!

b) $A \cap B$; *c)* $B \cap A$; *d)* $A \cup B$; *e)* $B \cup A$; *f)* $A \setminus B$; *g)* $B \setminus A$;
h) $\overline{A}$; *i)* $\overline{B}$; *j)* $\overline{A \cap B}$; *k)* $\overline{A \cup B}$; *l)* $\overline{A \setminus B}$; *m)* $\overline{B \setminus A}$;
n) $\overline{A} \cap B$; *o)* $\overline{A} \cap \overline{B}$; *p)* $A \cup \overline{B}$; *q)* $\overline{A} \cup \overline{B}$.

A kapott eredmények között vannak-e egyenlők?

2. K2 Legyen A = {15-nél nem nagyobb, 2-vel osztható természetes számok}, B = {15-nél nem nagyobb, 3-mal osztható természetes számok}, C = {15-nél nem nagyobb, 5-tel osztható természetes számok}, s a H alaphalmaznak tekintsük a 15-nél nem nagyobb természetes számok halmazát.

a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

Adjuk meg – például felsorolással – az alábbi halmazokat!

b) $(A \cap B) \cap C$; *c)* $A \cap (B \cap C)$; *d)* $(A \cup B) \cup C$; *e)* $A \cup (B \cup C)$;
f) $(A \setminus B) \setminus C$; *g)* $A \setminus (B \setminus C)$; *h)* $(A \cup B) \cap C$; *i)* $A \cup (B \cap C)$;
j) $(A \cup B) \setminus C$; *k)* $A \cup (B \setminus C)$; *l)* $(A \cap B) \setminus C$; *m)* $A \cap (B \setminus C)$;
n) $A \setminus (B \cup C)$; *o)* $A \setminus (B \cap C)$; *p)* $\overline{B}$; *q)* $\overline{B \cap C}$;
r) $\overline{B \cup C}$; *s)* $\overline{B \setminus C}$; *t)* $\overline{B} \cap C$; *u)* $\overline{B} \cap \overline{C}$;
v) $\overline{B} \cup C$; *z)* $\overline{B} \cup \overline{C}$.

A kapott eredmények között vannak-e egyenlők?

3. K2 Adjuk meg – például felsorolással vagy egyszerűbb műveletek segítségével – az alábbi halmazokat (*A*, *B*, *C*, *H* az előző feladatban definiált halmazok)!

a) $\overline{(A\cup B)\cap C}$; *b)* $\overline{A\cup(B\cap C)}$; *c)* $\overline{(B\cap C)\setminus A}$; *d)* $\overline{B\cap(C\setminus A)}$;

e) $\overline{A\setminus(B\cup C)}$; *f)* $\overline{(A\setminus B)\cup C}$; *g)* $\overline{A}\cap(B\setminus C)$; *h)* $\overline{B\cup C}\cap A$;

i) $A\cap(B\setminus\overline{C})$; *j)* $A\setminus(\overline{B}\setminus C)$; *k)* $(A\cup B)\setminus(A\cup C)$;

l) $(A\cap B)\cup(A\setminus C)$; *m)* $(A\cap B)\cup(B\setminus C)$; *n)* $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$.

4. K1 A *H* alaphalmazon adott az *A* és *B* halmaz (azaz $A\subseteq H$, $B\subseteq H$). Határozzuk meg az alábbi halmazokat!

a) $A\cap B$, ha $A=\varnothing$; *b)* $A\cup B$, ha $A=\varnothing$; *c)* $A\setminus B$, ha $A=\varnothing$; *d)* $B\setminus A$, ha $A=\varnothing$;

e) $\overline{A}$, ha $A=\varnothing$; *f)* $A\cap B$, ha $A\subseteq B$; *g)* $A\cup B$, ha $A\subseteq B$; *h)* $A\setminus B$, ha $A\subseteq B$;

i) $\overline{B}\setminus\overline{A}$, ha $A\subseteq B$; *j)* $\overline{\overline{A}}$; *k)* $\overline{\overline{\overline{A}}}$.

5. K2 Az $A\not\subset B$ kapcsolatot fogalmazzuk meg a metszet, illetve a különbség művelete segítségével!

6. K1 Mivel egyenlők az alábbi halmazok?

a) $\overline{\mathbf{Z}^+}$ a **Z** alaphalmazon; *b)* $\overline{\mathbf{Z}^-}$ a **Z** alaphalmazon; *c)* $\overline{\mathbf{N}}$ a **Z** alaphalmazon;

d) $\overline{\mathbf{Z}}$ a **Q** alaphalmazon; *e)* $\overline{\mathbf{Q}}$ az **R** alaphalmazon; *f)* $\overline{\mathbf{R}_0^+}$ az **R** alaphalmazon.

7. E1 Az 1. és 2. feladat megoldása alapján megsejthetjük az alábbi összefüggéseket (az *a)* és *b)* az ún. de Morgan-azonosságok):

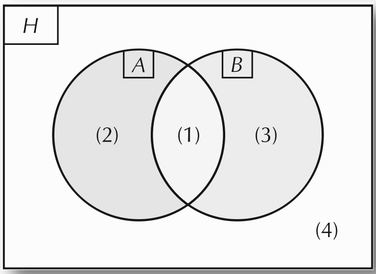
a) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; *c)* $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

b) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; *d)* $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

A Venn-diagram segítségével bizonyítsuk be a sejtéseket!

Augustus de Morgan (1806–1871) Indiában született angol matematikus, 1828-ban lett a University College első matematikaprofesszora. Kezdeményezte az algebra formális megközelítésének a kidolgozását, foglalkozott a szimbolikus logika megalapozásával. 1838-ban tisztázta a teljes indukció elvét.

8. K2



Adott a *H* alaphalmaz, valamint két halmaz, *A* és *B*. Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat. (Például (2) jelenti az $A\setminus B$ részhalmazt.)

Az alábbi, logikai kötőszókat tartalmazó megfogalmazások az egyes tartományok elemeire vonatkoznak. Állapítsuk meg, hogy az *a)*–*p)* meghatározások mely részhalmazok elemeire igazak, azaz a feladatokban megadott *x* elemek mely tartományokat határozzák meg!

Például: az „*x* eleme *A*-nak és *x* eleme *B*-nek” meghatározás az $A\cap B$ részhalmazra vonatkozik (ennek *x* elemeire teljesül), tehát az (1) tartományt határozza meg.

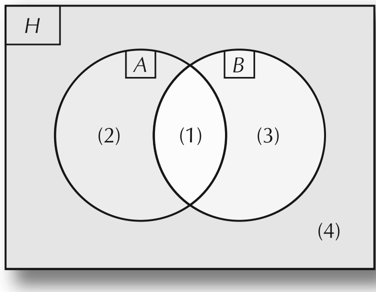
a) *x* eleme *A*-nak *vagy* *x* eleme *B*-nek;
b) *x* (*A* és *B* közül) *legalább az egyik* halmaznak eleme;
c) *x* *legfeljebb az egyik* halmaznak eleme;
d) *x* *pontosan az egyik* halmaznak eleme;
e) *x* *legalább* az *A* halmaznak az eleme;
f) *x* *legfeljebb* az *A* halmaznak az eleme;
g) *x* *nem* eleme *A*-nak;
h) *x* *sem* *A*-nak, *sem* *B*-nek nem eleme;
i) *x* *egyik* halmaznak *sem* eleme;

j) x *csak az egyik* halmaznak eleme;
k) x *csak* A-nak eleme;
l) x eleme A-nak, *de* B-nek nem;
m) x eleme az *egyik* halmaznak, de a másiknak nem;
n) x *vagy* A-nak, *vagy* B-nek eleme *(de csak az egyiknek);*
o) *ha* x eleme A-nak, *akkor* x eleme B-nek is;
p) *ha* x eleme az egyik halmaznak, akkor eleme a másik halmaznak is.

9. K2 Tekintsük az A = {egyjegyű páros természetes számok} és B = {egyjegyű (pozitív) prímszámok} halmazokat, s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát.

Fogalmazzuk meg, hogy mi jellemzi az alább felsorolt tartományok elemeit, s ezeket adjuk meg az unió és kivonás halmazműveleteivel is!

a) (1); *b)* (2); *c)* (4); *d)* (2), (3);
e) (2), (4); *f)* (1), (4); *g)* (1), (3), (4); *h)* (2), (3), (4).



5. EGYSZERŰ ÖSSZESZÁMOLÁSI FELADATOK

A tanító a kisdiákról jelentést tett elöljáróinak, s ennek hatására a braunschweigi herceg vállalta a csodagyermek neveltetését. Karl Friedrich Gauss (1777–1855) korának legnagyobb matematikusa, fizikusa, csillagásza lett, s már életében kiérdemelte kortársaitól a „princeps mathematicorum” (a matematikusok fejedelme) címet.

1783-ban a braunschweigi iskola tanítója – az akkori szokásoknak megfelelően – egyszerre több különböző osztállyal is foglalkozott. Négy évfolyam diákjai tanultak párhuzamosan, ugyanabban a tanteremben. A tanító a legkisebb, hatéves gyerekeknek önállóan megoldandó feladatot tűzött ki, hogy míg ők dolgoznak, addig az idősebbekkel is foglalkozhasson. A feladat a természetes számok összeadása volt, 1-től 40-ig. Azonban alig hangzott el a feladat, néhány pillanattal később már a szegény nyergesmester fia, a kicsi Gauss vitte is ki a palatábláját, rajta néhány számolással. (Képzelhetjük, mennyire örült ennek a tanító, aki már ment volna az idősebbekhez, s úgy gondolta, hogy egy elkapkodott s hibás megoldásról van szó.) De az eredmény helyes volt, a gondolatmenet pedig – egy hatéves gyerektől – zseniális: $1 + 40 = 41$, $2 + 39 = 41$ stb. Húsz ilyen pár van, a keresett összeg tehát $20 \cdot 41 = 820$.

Ma úgy mondanánk, hogy a kisfiú a *párosítás*, a *párba állítás* módszerét alkalmazta. A tanító a „frontális” műveletvégzéssel 39 összeadást várt a tanulóktól, ehelyett Gauss egy összeadással, egy osztással ($40 : 2 = 20$) és egy szorzással, azaz összesen 3 művelettel (és persze a párosítás lehetőségének a felismerésével) oldotta meg a feladatot. A módszer „erejét” akkor érthetjük meg igazán, ha például 1-től egymillióig kell összeadnunk a számokat. Ekkor a számok sorban történő összeadása 999 999, míg Gauss módszere továbbra is 3 (igaz, kissé bonyolultabb) műveletet igényel.