Problémától a diszkrét modellig

4. óra: Hazudós barkóba, hibajavító kódok

Burcsi Péter

ELTE IK

2025-09-29

x > 5 ? I

x < 6 ? I

PS N

x > 5 I

PRIMKÁM I

7

Második témakör: keresés hibatűréssel

- Hazudós barkóba (Rényi–Ulam-játék)
- Csoporttesztelés
- Hibajavító kódok
- Kis információelmélet

Mai óra

- Hazudós barkóba konkrét példán
- Alsó becslés
- Hibajavító kódokkal való kapcsolat, Hamming-korlát
- Paramétertér mérése, stratégia a játékhoz

Barkóba hazugsággal

- Gondoltam egy számra 1 és 10 között, mi lehet az? Igen-nem kérdések
  - Hagyományos játék: legalább $\log_2 N$ kérdés, ha 1 és N között
  - Akkor is, ha előre el kell küldeni a kérdéseket (adaptív / non-adaptív változat)?
- Most: a válaszadó hazudhat (legfeljebb egyszer)
- Kérdések: „Eleme-e a szám a H részhalmaznak?"
- Érvénytelen: „Hazudtál-e már?"
- Biztosan jó: 3-szor megkérdezek mindent
- Picit jobb: 2-szer kérdezek mindent, csak inkompatibilis válasznál kérdezek rá harmadszor

Alsó becslés a kérdések számára

- Alsó becslés hagyományos barkóba esetén:
- Különböző szám $\implies$ különböző válaszsorozat
- Ha n hosszú bináris sorozatok száma legalább N, akkor $n \geq \log N$
  - Most: minden számra írjuk fel, mi lenne a HELYES válasz az n kérdésre.
  - Minden kapott sorozat különböző, SŐT:
  - Minden kapott sorozat eltér legalább 3 helyen
  - (Miért nem elég kettő helyen?)
- Hány ilyen sorozat lehetséges $N = 10$ esetén?

	$x>5$	2. kérdés		7.
1	N	N		I
		I		I
2	N	I		
3	N			
⋮	N	–		I
	I			
10	I	N N		N I

?

3: I I N N I I I

V: I I I N I I I

4: I I I I I I I

?

STRAT: KERESSÜNK 10 db k hosszú sorozatot, melyek páronként $\boxed{\geq 3}$ pozíción eltérnek.

$\boxed{k = ?}$

Hamming-korlát

- n hosszú bitsorozatok
- Egy helyen elrontott (hazug) sorozatok is különbözők
- Egy igaz sorozathoz n hazug tartozik

$$(n+1)\cdot 10 \le 2^n$$

- $n \ge 7$
- Általánosan (t hazugságnál):

$$N \cdot \sum_{k=0}^{t} \binom{n}{k} \le 2^n$$

Gondolt 3: $n+1$

igazi: 0111001
0111101
0011001
⋮
$\to 3$

$n+1$

igazi: 111--
011--
$\to 4$

Hibajavító kódolás

- El kell küldenem egy üzenetet (pl. 1-től 10-ig egy szám), n bitet használhatok
- Az üzenet egy helyen megsérülhet, de még el akarjuk olvasni
- Általánosabban: t helyen sérülhet.
- Ehhez bármelyik két kódszó távolsága legyen $2t + 1$ legalább

Zárójel: négyelemű test

- Cél: három hosszúságú üzenet elküldése
- Plusz két betűt használhatunk
- Egy hibát ki kell tudni javítani
- Hamming-korlát: binárisan nem megy
- Modulo 5: rendben
- Modulo 4: elvileg működhetne, de nem megy lineárisan
- Négyelemű test: pont elég („tökéletes kód”)

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z, x+y+z, x+2y+3z)$$

pl.

$$(1, 2, 4, \cancel{2}, \underline{2})$$

$$3$$

$$1+2+4 \overset{?}{=} 3 \quad \times$$

			STÁTUSZ
1.k	$x > 5$	I	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2.k.	$x \le 8$	I	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
3.k.	PÁROS	N	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
4.k	PRÍM	N	1 3 5 6 7 8 9

HOGY ÁLLUNK: – MIK LEHETNEK

KELLETT MÁR HAZUDNI — darab

EDDIG MINDEN VALASZ OK — darab

LÉNYEG:

Vissza: barkóba hazugsággal

- Rögzítsük, hogy q kérdésünk van
- Hogy állunk, miután feltettünk pár kérdést?
  - Maradt még néhány kérdésünk
  - Életben maradt néhány szám
  - NAGYON életben maradt néhány szám
- Csak az a fontos, hogy melyikből mennyi:
- x_0 darab számhoz még nem kellett hazudni
- x_1 darab szám már csak akkor lehet, ha hazudtunk egyet
- Hogy mennyi munka van még hátra: SÚLY

$$w_q(x_0, x_1) = (q+1) \cdot x_0 + x_1$$

HÁTRALEVŐ K. SZÁMA

Súlyfüggvény és stratégia

- Mi történik a számokkal, ha választ kapunk egy új kérdésre:
- Az x_0 szám közül mondjuk a_0-ra igaz
- Az x_1 szám közül a_1-re.
- Igen válasz esetén az új helyzet:

régi sárga lapos

$$(y_0, y_1) = (a_0, a_1 + (x_0 - a_0))$$

új sárga

- Nem válasz esetén:

$$(z_0, z_1) = (x_0 - a_0, x1 - a_1 + a_0))$$

- Mindenképpen teljesül (bármilyen a_0, a_1 esetén:

$$w_q(x_0, x_1) = w_{q-1}(y_0, y_1) + w_{q-1}(z_0, z_1)$$

- Cél: lehető legjobb kérdést feltenni, ami (kb.) felezi a súlyt

Stratégia, kis példával

- Mi legyen az első kérdés $N = 10$ esetén?

$q = 7$ kérdés

$$W_7(10,0) = (7+1)\cdot 10 + 0 = \boxed{80}$$

Kérdés: $(5,0)$ $\xrightarrow{I}$ $(5,5)$; $\xrightarrow{N}$ $(5,5)$

5-re igaz

$$W_6(5,5) = (6+1)\cdot 5 + 5 = 40$$

Pl.: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Kérdés: PRIM

2 3 5 | 7

$(3, 1)$

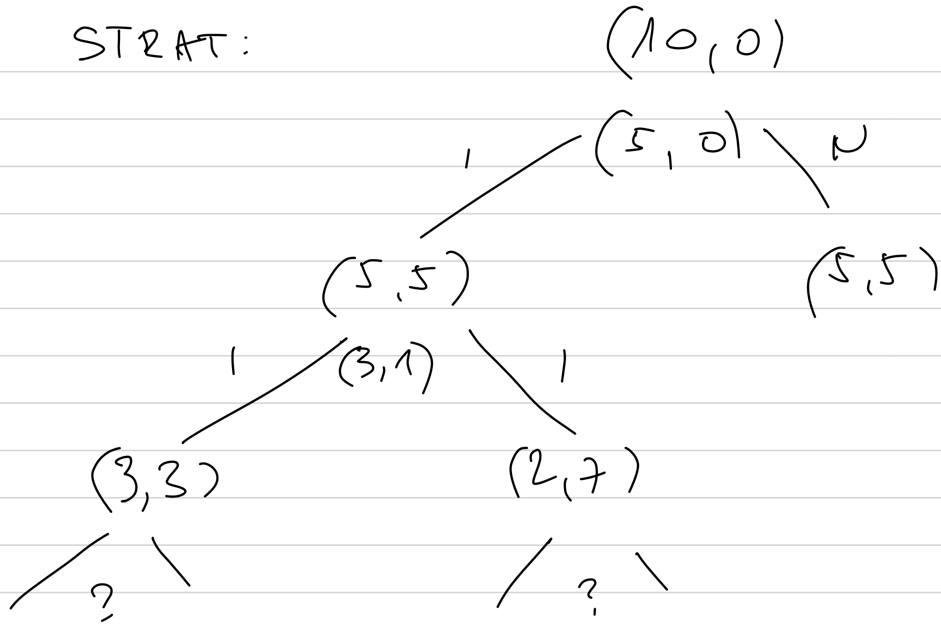
$\xrightarrow{I}$ 2 3 5, 1 4 7

$(3, 3)$ $\quad W_5(3,3) = 21$

$\xrightarrow{N}$ 1, 4 | 2 3 5 6 8 9 10

$(2, 7)$ $\quad W_5(2,7) = 19$

STRAT:



HF: program.

Jövő hét