Problémától a diszkrét modellig

1. óra: Mennyit várunk FIFI-re?

Burcsi Péter

ELTE IK

2025-09-08

Kurzusinformációk

- Cél: olyan problémákat megsimerni, ahol a probléma (egyik) megoldási módszere valamilyen diszkrét matematikai modellre épít
- Cél: ezen eszközök használatához mintákat adni, alkalmazásokat mutatni
- Eszközök: gráfok, mátrixok, polinomok, kombinatorika, (kevés) számelmélet
- Órák menete: 14:05-15:35 hétfő (előadás-gyakorlat hibrid, hosszú távon 50-50)
- Számokérés módja: folyamatos + beadandó (opcionálisan vizsga, ha van rá igény)
- Folyamatos számonkérés: heti canvas feladat (2. órától): egy darab elméleti ellenőrző kérdés, egy darab gyakorlati kihívás
- Beadandó: könnyű / nehezebb (4-5-ös jegyért)

Első óra

- Egy pénzdobálós játék és kapcsolata gráfokkal
- Valószínűségi fogalmak
- Néhány paradoxon
- A játék leírása
- Elemzés gráfokkal

Valószínűségek

- Formálisan: analízis, mértékterek, integrál stb.
- Itt most: informálisan (diszkrét, csak szumma, kedvező esetek / összes eset stb.)
- Intuíció néha cserben hagyja az embert ...

Jelölések

- Valószínűségi változó: nagy betű, pl. X
- Konkrét esemény bekövetkezésének valószínűsége: pl. $\mathrm{P}(X = 3) = 1/6$
- Várható érték (csak szám értékű változóknál): a valószínűségekkel súlyozott „átlag"

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i} \mathrm{P}(X = x_i) \cdot x_i$$

- Példa: kockadobás

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} \mathrm{P}(X = k) \cdot k = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} k = \frac{7}{2}$$

Várható érték – további példák

- Kockázatelemzés: Szint = Valószínűség $\times$ hatás
- Alkalmazás: pl. tesztek prioritásának meghatározásánál
- Végtelen szumma
- Mennyit kell várni arra, hogy egy kockával dobálva 6-os jöjjön ki?

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i} \mathrm{P}(X = x_i) \cdot x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} k = ???$$

- Kiszámolás: analízis (számítógép)
- Más módszer?
- Teljes várható érték tétel!
- Lényegében esetszétválasztás

Várható érték – teljes v.é.t

- Példa: kockadobás értéke. Két eset – A: négyzetszámot dobtam (1, 4), B: nem (2, 3, 5, 6)
- $\mathrm{P}(A) = 1/3$, $\mathrm{P}(B) = 2/3$.
- Tétel:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{E}(X|A) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{E}(X|B) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

- Várakozás esetén:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(\text{elsőre!}) \cdot \mathrm{E}(X|A) + \mathrm{P}(\text{hoppá}) \cdot \mathrm{E}(X|B) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}\mathrm{E}(X) \end{aligned}$$

- Intuitív érvelés?

Zárójel: két paradoxon

- Nemtranzitív kockák
- K1: 2, 2, 4, 4, 9, 9 – K2: 1, 1, 6, 6, 8, 8 – K3: 3, 3, 5, 5, 7, 7
- K1 „>" K2 „>" K3 „>" K1, bár a várható érték ugyanaz.

- Simpson-paradoxon
- A-nak ősszel is, tavasszal is jobb átlaga van, mint B-nek de egész évre vetítve rosszabb

A feladat: mennyit várunk FIFI-re

- Addig dobálok egy pénzérmét, amíg meg nem jelenik a fej-írás-fej-írás dobássorozat (FIFI)
- Mennyit kell átlagosan várni?
- Egyszerűbb eset: FF

FIFI

- Gráf FIFI esetén

Conway-módszer

- Átfedési sorozat

- Várható érték: átfedési sorozat alapján
- Intuíció: játék értéke...

Zárójel: Conway

- Csoportelmélet
- Életjáték
- Look and say sequence
- Fractran
- Doomsday algoritmus

Folytatás: FFF vs. IFF

- Házi feladat
- egyszerűbb példa: FF vs IF