38. MIT NEVEZÜNK FÜGGVÉNYNEK?

Leonhardt Euler

A függvény fogalma az egyik leghasznosabb azok közül, amit a matematikusok bevezettek. Rengeteg, a gyakorlatban felmerülő probléma megoldását kaphatjuk meg a függvények tulajdonságainak tanulmányozásával. Azt nem mondhatjuk, hogy már a görögök is használták ezt a fogalmat a mai formájában. Egy ilyen definíció megalkotása hosszú folyamat. Az első komoly lépéseket Descartes (1596–1650) tette meg a róla elnevezett koordináta-rendszer elterjesztésével és azzal, hogy a függvényeket hozzárendeléseknek tekintette egyszerű táblázatok helyett. Euler (1707–1783) vezette be az f betűt függvények jelölésére. A mai értelemben is használatos meghatározást Dirichlet (1805–1859) írta le 1839-ben: „Ha az y és x változók olyan viszonyban vannak egymással, hogy x valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli y-nak egy értékét, akkor azt mondjuk, hogy y az x független változó függvénye."

Lejeune Dirichlet

Nézzünk két egyszerű példát!

1. példa

Legyen az alaphalmaz A = {az osztály 5 legjobb tanulója}.

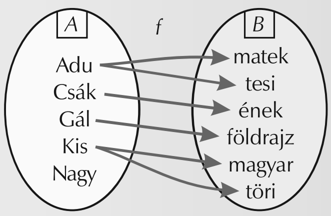
A hozzárendeléseket kisbetűkkel fogjuk jelölni.

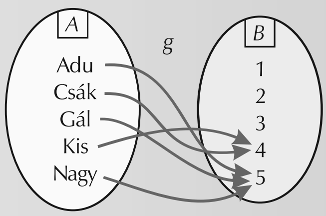
Mindenkihez rendeljük hozzá
f: a kedvenc tantárgyait;
g: az év végi matematikaosztályzatát;
h: a naplóbeli sorszámát;
i: a szeptemberi matekjegyeit;
j: a hajszínét!

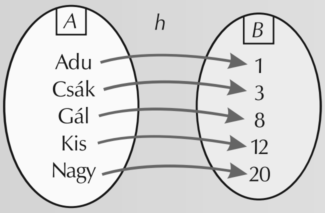
Az alábbi táblázat egy lehetséges hozzárendelést tartalmaz:

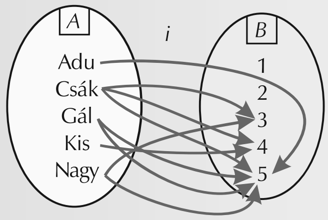
x	Adu Ádám	Csák Máté	Gál Rozi	Kis Éva	Nagy Gyula
f	matek, tesi	ének	földrajz	magyar, töri	–
g	5	4	5	4	5
h	1	3	8	12	20
i	5	4, 5, 3	5, 5	4	3, 5
j	barna	szőke	fekete	szőke	barna

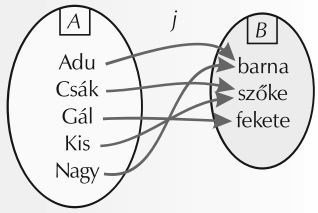
Rajzoljuk le halmazábrák segítségével mind az öt hozzárendelést külön-külön! A hozzárendeléseket nyilakkal fogjuk jelezni.









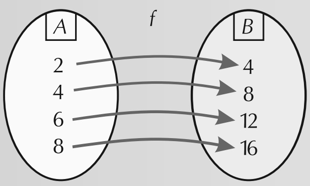


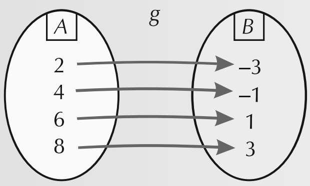
2. példa

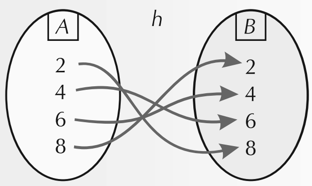
Tekintsük az A = {egyjegyű pozitív páros számok} halmazát. Adjuk meg táblázat, majd halmazábra segítségével a következő hozzárendeléseket!

f: minden $x \in A$-ra $x \mapsto 2x$ (minden számhoz a kétszeresét rendeljük);
g: $x \mapsto x - 5$;
h: $x \mapsto 10 - x$.

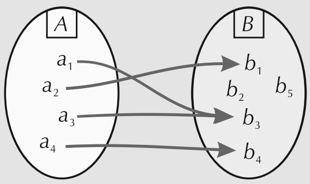
x	2	4	6	8
$2x$	4	8	12	16
$x - 5$	–3	–1	1	3
$10 - x$	8	6	4	2







Definíció



Legyen adott két nem üres halmaz, A és B.

Ha az *A* halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük a *B* egy-egy elemét, akkor ezzel egy függvényt határozunk meg.

Az A halmazt a függvény **értelmezési tartományának** hívjuk, és ÉT-vel vagy D_f-fel jelöljük (a jobb alsó index a függvény betűjele, nem feltétlenül f).

A B-t pedig képhalmaznak nevezzük. A képhalmaznak a hozzárendelésben részt vevő elemei alkotják az **értékkészletet,** amit ÉK-val vagy R_f-fel jelölünk.

Megjegyzés

A hozzárendelések közül **csak az egyértelműeket** nevezzük függvénynek.

Ez nem jelent feltétlenül kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Előfordulhat, hogy az A halmaz két különböző eleméhez is ugyanazt az elemet rendeljük a B halmazból. A B halmaznak nem kell pontosan megegyeznie a hozzárendelésben részt vevő elemekkel. Megadhatunk ezeknél egy bővebb halmazt is. Ha pontosan szeretnénk tudni, hogy mely elemekről van szó, akkor ezt külön hangsúlyozzuk. Az $R_f \subseteq B$.

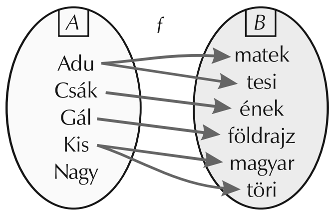
A függvényeket az *ábécé* kisbetűivel jelöljük. Ha az f függvényt szeretnénk megadni, a következő módon járhatunk el:

$\boxed{f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x).}$

A jelölés első része $f\colon A \to B$ azt fejezi ki, hogy az f az A halmazon értelmezett, B-beli értékeket felvevő függvény. Gyakran mondjuk azt is, hogy f az A-t B-be leképező függvény.

A jelölés második része $x \mapsto f(x)$ a hozzárendelés szabályát adja meg, ami legtöbbször egy képlettel történik, de lehet valamilyen előírás vagy utasítás is.

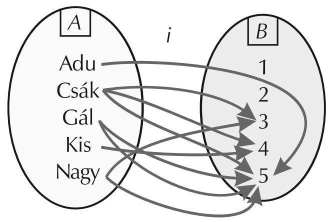
A függvénnyel kapcsolatos *érték* szó szimbolikus jelentésű, hiszen mind az A, mind a B elemei tetszőleges dolgok lehetnek.



Ezek után vizsgáljuk meg az első két példában szereplő hozzárendeléseket!

Az **1. példában** az ***f*** semmiképpen nem függvény. Először is az A-nak nem minden eleméhez rendeltünk valamit. Másodszor például Adu Ádámhoz két tárgyat is rendeltünk.

Ugyanígy ***i*** sem függvény, hiszen ez sem egyértelmű hozzárendelés, például Csák Mátéhoz három elemet is rendeltünk.

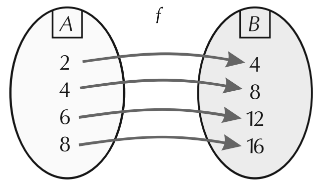


A másik három ***g***, ***h***, ***j*** mindegyike egyértelmű hozzárendelés, tehát függvény.

A **2. példában** ***f***, ***g*** és ***h*** egyértelműek, tehát függvénykapcsolatot határoznak meg.

Itt mindhárom példában az ÉT és az ÉK is egy számhalmaz. Ezeket valós függvényeknek nevezzük. A továbbiakban csak ilyenekkel foglalkozunk.

A **2. példában** az ***f*** jelű hozzárendelés függvény, amelyet a következő módon adhatunk meg:



$f\colon \{2,4,6,8\} \to \{4,8,12,16\},\ x \mapsto 2x$ (először megadjuk a függvény betűjelét, rögtön utána az értelmezési tartományt és a képhalmazt, majd a hozzárendelési szabályt, amit *'x talpas nyíl két x'*-nek olvasunk).

Az $x \mapsto 2x$ jelölés helyett az $f(x) = 2x$-et is használhatjuk, ami az f függvény x helyen vett helyettesítési értékét jelenti. Például: $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ és általában $f(x) = 2x$.

A függvényeket megadhatjuk más módon is, például táblázattal, grafikonjukkal (erre még visszatérünk), vagy akár **rendezett számpárokkal** is. Ha rendezett párokkal adjuk meg a függvényt, akkor az első tag mindig az ÉT egyik eleme, a második pedig a hozzárendelt függvényérték. Nyilvánvalóan ahány eleme van az ÉT-nak, annyi számpárt kell megadnunk.

Az f-et **rendezett számpárokkal** a következő módon adhatjuk meg:

$f\colon (2;\ 4), (4;\ 8), (6;\ 12), (8\ ;\ 16)$.

Pontosvesszővel vagy vesszővel elválasztott, zárójelben felsorolt két számmal jelöljük a rendezett számpárokat, mint például $(2;\ 3)$. A 2 a számpár első, a 3 pedig a második tagja. Természetesen $(2;\ 3) \neq (3;\ 2)$, mert két rendezett számpárt akkor tekintünk egyenlőnek, ha az első és a második tag is megegyezik. Tehát $(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow$ ha $a = c$ és $b = d$.

Ha megváltoztatjuk az értelmezési tartományt, akkor azzal egy új függvényt adunk meg. Legyen f az előbb meghatározott függvény, vagyis $f\colon \{2, 4, 6, 8\} \to \{4, 8, 12, 16\},\ x \mapsto 2x$, a g pedig: $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2x$ ('a g valós-valós függvény hozzárendelési szabálya, x talpas nyíl két x'), most $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli. Az f és g függvényeknek csak a hozzárendelési szabálya egyezik meg, az értelmezési tartományuk nem.

Két függvényt akkor és csak akkor tekintünk **azonosnak,** ha értelmezési tartományuk és a hozzárendelési szabályuk is megegyezik.

Fogalmak
egyértelmű hozzárendelés;
függvény;
függvények egyenlősége;
értelmezési tartomány;
értékkészlet;
képhalmaz;
rendezett számpár

Megállapodás:

Ha a függvények megadásakor nem adunk meg értelmezési tartományt, akkor ez azt jelenti, hogy a lehető legbővebb halmazra gondolunk.

Ha az értelmezési tartomány az összes valós szám, akkor azt nem szoktuk külön jelezni.

Például az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Természetesen ha más értelmezési tartományt akarunk, akkor azt jelezni kell. Például ha csak a pozitív számokon akarjuk értelmezni a függvényt, akkor g: $]0, \infty[\rightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{x}$ egy lehetséges megadás. Gyakran használjuk az $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, vagy $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ meghatározást is.

FELADATOK

1. K1 Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
f: (1; 2), (3; 4), (4; 5), (6; 5), (7; 7), (8; 7).

2. K1 Legyen $D_f = \{1, 2, 3\}$ és $R_f = \{5, 6, 7\}$. Adjuk meg az összes ilyen függvényt rendezett számpárokkal! Hány megoldást kapnánk, ha {5, 6, 7} a képhalmaz lenne?

3. K1 Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

a) f: {pozitív páros számok} $\rightarrow \mathbf{Z}$, $f(x) = \frac{x}{2}$;

b) g: $[0; 10] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{2}$;

c) h: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{x}{2}$;

d) i: $[-1; 5] \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x + 3$;

e) j: $\{-2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbf{R}$, $j(x) = 1$;

f) k: $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow \mathbf{R}$, $k(x) = -x$.

4. K1 Adjuk meg a táblázattal megadott függvények hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	7	10	13	16	19	22	25

b)

x	2	4	6	8	10	12	14	16
$g(x)$	3	1	–1	–3	–5	–7	–9	–11

5. K1 Adjunk meg egy olyan függvényt, aminek az értelmezési tartománya {1, 2, 3, 4} és értékkészlete az {1, 2, 3, 4, 5} halmaz!