

基于有理样条的图像缩放算法

王 强¹⁾ 檀结庆²⁾ 胡 敏²⁾

¹⁾(安徽理工大学数理系 淮南 232001)

²⁾(合肥工业大学计算机与信息学院 合肥 230009)

(qwangaust @163.com)

摘 要 提出基于双三次有理插值样条模型的图像缩放算法. 用有理插值样条函数将离散数字图像建成相应的连续数学模型, 然后按缩放要求进行重新采样, 实现图像的缩放. 实验结果表明: 该算法能有效地应用于数字图像的缩放处理, 得到的图像轮廓清晰、边界分明, 且算法简单, 易于实现.

关键词 有理样条; 图像放大; 图像缩小; 图像处理
中图分类号 TN911.73

Image Zooming Based on Rational Interpolatory Spline

Wang Qiang¹⁾ Tan Jieqing²⁾ Hu Min²⁾

¹⁾(Department of Mathematics and Physics, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001)

²⁾(School of Computer & Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

Abstract An image zooming method using bicubic rational interpolatory spline is presented. The experimentations show that the proposed method is able to maintain clear borders of source images and the algorithm is efficient in computation for making image zooming.

Key words rational interpolating spline; image enlargement; image reduction; image processing

图像放大是从一幅低分辨率图像获得其高分辨率版本的一种图像处理技术. 图像放大和缩小处理技术在实际应用中具有重要的作用, 如在医学、遥感、航天系统等及一些图像处理软件中, 为适用特殊的场合和获得较好的视觉效果, 常常需要一种有效的方法来改变已有图像的大小, 并保证缩放后的图像有较好的质量.

常用的图像处理软件普遍采用插值方法进行放大和缩小, 各种插值技术是实现图像放大的最常用的方法, 其实质是对源图像建立连续的数学模型, 然后按缩放要求进行重采样得到目的图像, 如最近邻插值、双线性插值、双三次插值等^[1]. 另外, 杨朝霞等将数字图像格点上的颜色值插值成 B 样条曲面, 然后按某种误差最小构造新的多项式样条^[2]; 孙庆

杰等提出了基于 Bézier 插值曲面的图像放大方法^[3]. 这些方法均可看成将离散数字图像建成相应的连续数学模型, 其优点是能够快速生成目的图像. 然而, 这些方法都是基于简单的多项式模型, 均表现为低通滤波器, 在不同程度上抑制了高频成分, 当放大倍数较高时, 会造成边缘层次模糊和虚假的人工痕迹(锯齿状条纹和方块效应等). 其中的原因是图像受光照自然背景的影响, 以及图像自身纹理的特点, 其相邻像素之间一般不是成线性关系. Kretzmer 和 Candy 分别对数字图像相邻像素间及帧间差值进行了测定, 其分布近似于指数分布^[4]. 由于人们的视觉感知特性也是非线性的, 因此用非线性函数中的有理函数建立数学模型可能会得到更理想的效果. 有理函数逼近是典型的非线性逼近方法之一,

收稿日期: 2007-01-25; 修回日期: 2007-05-24. 基金项目: 国家自然科学基金(10171026, 60473114). 王 强, 男, 1963 年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为 CAGD. 檀结庆, 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为计算数学、CAGD. 胡 敏, 女, 1967 年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为计算机图形学.

能够克服多项式逼近存在的对大扰度函数、指数函数逼近效果不理想的弊端,文献[5-6]采用多项式和有理函数的一种连分式的混合形式——Newton-Thiele 插值进行图像的缩放,取得了较好的效果。但是,用连分式插值时是整块进行的,可能出现奇异点,且计算复杂。因此,本文用双三次有理样条模型,将由原始图像给出的离散数据用二元连续函数表示,然后按缩放要求进行重采样来得到目标图像。

1 基于双三次插值有理样条的图像放大

1.1 图像放大

图像数据是二维平面上的灰度值,其大小受物体表面的材料、背景物体的物理性质、光照强度和角度,以及成像过程中的噪声等影响,这种数据既不是纯随机的,也不是完全结构性的。空间连续性是空间属性的最基本性质,空间中相近的样品点具有某种相似性,而相距较远的样品点往往取不相近的值。这些数据整体不是随机的,而是高值倾向其他高值附近,低值倾向其他低值附近,且值的改变可以是渐变的,也可以是突变的,一般并不完全呈线性关系。若用多项式逼近其收敛性太差,而用有理函数逼近则可以克服上述缺点。这是因为有理函数既可以描述函数的渐变性质,也可以描述函数的突变性。本文采用双三次有理样条^[7-8],它具有以下优点:1) 形式简单,具有显式表达式;2) 局部性,表达式是分片的;3) 插值性,过已知数据点;4) 每片含有参数,便于局部修改。

1.2 双三次插值有理样条方法

设 $\Omega: [a, b; c, d]$ 为一平面区域, $\{(x_i, y_j, f_{i,j}), i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m\}$ 为给定数据点, $f_{i,j}$ 为被插函数在节点 (x_i, y_j) 上的函数值,其中 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b, c < y_1 < y_2 < \dots < y_m < d$ 。记 $h_i = x_{i+1} - x_i, l_j = y_{j+1} - y_j$, 对平面上任意一点 $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}, y_j, y_{j+1}]$, 令 $\theta = (x - x_i)/h_i, \eta = (y - y_j)/l_j$, 对每一个 $y = y_j$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 构造 X-方向插值曲线为

$$P_{i,j}^*(x) = p_{i,j}^*(x)/q_{i,j}^*(x) \quad (1)$$

其中,

$$p_{i,j}^*(x) = \alpha_{i,j} f_{i,j} (1 - \theta)^3 + V_{i,j}^* (1 - \theta)^2 \theta +$$

$$W_{i,j}^* (1 - \theta) \theta^2 + f_{i+1,j} \theta^3,$$

$$q_{i,j}^*(x) = \alpha_{i,j} (1 - \theta) + \theta;$$

$$V_{i,j}^* = (\alpha_{i,j} + 1) f_{i,j} + \alpha_{i,j} f_{i+1,j},$$

$$W_{i,j}^* = (\alpha_{i,j} + 2) f_{i+1,j} - h_i \Delta_{i+1,j}^*.$$

参数 $\alpha_{i,j} > 0, \Delta_{i,j}^* = (f_{i+1,j} - f_{i,j})/h_i$ 。容易验证,由式(1)定义的三次有理函数满足插值性质

$$P_{i,j}^*(x_i) = f_{i,j}, \quad P_{i,j}^*(x_{i+1}) = f_{i+1,j};$$

$$[P_{i,j}^*(x_i)]' = \Delta_{i,j}^*, \quad [P_{i,j}^*(x_{i+1})]' = \Delta_{i+1,j}^*.$$

用 $P_{i,j}^*(x)$ 在区域 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 构造二元插值曲面

$$P_{i,j}(x, y) = p_{i,j}(x, y)/q_{i,j}(x, y) \quad (2)$$

其中,

$$p_{i,j}(x, y) = \beta_{i,j} P_{i,j}^*(x) (1 - \eta)^3 + V_{i,j} (1 - \eta)^2 \eta +$$

$$W_{i,j} (1 - \eta) \eta^2 + P_{i,j+1}^* \eta^3,$$

$$q_{i,j}(y) = \beta_{i,j} (1 - \eta) + \eta;$$

$$V_{i,j} = (\beta_{i,j} + 1) P_{i,j}^*(x) + \beta_{i,j} P_{i,j+1}^*(x),$$

$$W_{i,j} = (\beta_{i,j} + 2) P_{i,j+1}^*(x) - l_j \Delta_{i,j+1}^*(x).$$

参数 $\beta_{i,j} > 0, \Delta_{i,j}^*(x) = (P_{i,j+1}^*(x) - P_{i,j}^*(x))/l_j$ 。 $p_{i,j}(x, y)$ 称为基于函数值的双三次有理插值函数,满足 $p_{i,j}(x_r, y_s) = f(x_r, y_s), r = i, i+1; s = j, j+1$ 。函数 $p_{i,j}(x, y)$ 可用矩阵形式表示为

$$p_{i,j}(x, y) = \mathbf{A}_1 \mathbf{C} \mathbf{A}_2^T.$$

其中,

$$\omega_0(\theta, \alpha_i) = \frac{(1 - \theta)^2(\alpha_i + \theta)}{(1 - \theta)\alpha_i + \theta},$$

$$\omega_1(\theta, \alpha_i) = \frac{\theta(1 - \theta)\alpha_i + 3\theta^2 - 2\theta^3}{(1 - \theta)\alpha_i + \theta},$$

$$\omega_2(\theta, \alpha_i) = \frac{-\theta^2(1 - \theta)}{(1 - \theta)\alpha_i + \theta};$$

$$\mathbf{A}_1 = (\omega_0(\theta, \alpha_i) \quad \omega_1(\theta, \alpha_i) \quad \omega_2(\theta, \alpha_i)),$$

$$\mathbf{A}_2 = (\omega_0(\eta, \beta_j) \quad \omega_1(\eta, \beta_j) \quad \omega_2(\eta, \beta_j)),$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} f_{i,j} & f_{i,j+1} & f_{i,j+2} \\ f_{i+1,j} & f_{i+1,j+1} & f_{i+1,j+2} \\ f_{i+2,j} & f_{i+2,j+1} & f_{i+2,j+2} \end{bmatrix}.$$

可以看出,函数 $p_{i,j}(x, y)$ 在区域 $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ 上由给定的函数值 $(x_r, y_s, f(x_r, y_s)), r = i, i+1, i+2; s = j, j+1, j+2$ 及参数 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ 唯一确定。

2 数字图像缩放方法

设输入图像 $f(x, y)$ 是一个 $M \times N$ 的数字图像,它的实质就是一个采样点在整数点上的二维离散信号,通过第 1.2 节的双三次有理样条方法就建立了原始离散图像的三元连续函数表示,我们便可以进行重采样,以满足任意倍数的缩放要求。对于一个 $M \times N$ 的数字图像 $f(x, y)$,处理后的图像

$f'(x,y)$ 大小为 $M' \times N'$,则在 X 方向的伸缩比为 M'/M ,在 Y 方向的伸缩比为 N'/N . $R(i,j)$ 是图像 $f(x,y)$ 的第 i 行第 j 列像素点 $P(i,j)$ 的红色分量,则由映射关系知 $P(i,j)$ 对应于 $f'(x,y)$ 中的点 $P'(i',j')$,其中 $i' = i \times \frac{M'}{M}$, $j' = j \times \frac{N'}{N}$.

令 $x = \lfloor i' \rfloor$, $y = \lfloor j' \rfloor$, 则 $R(i,j)$ 就是 $f'(x,y)$ 中的插值节点 (x,y) 处红色分量的值. 用同样方法可求出插值节点绿色分量 $G(i,j)$ 和蓝色分量 $B(i,j)$ 的值. 因此,原图像的像素点值 $P(i,j)$, $i = 0,1,\dots,M-1$; $j = 0,1,\dots,N-1$ 就是处理后图像的插值节点 $\left\{ \left\lfloor i \times \frac{M'}{M} \right\rfloor, \left\lfloor j \times \frac{N'}{N} \right\rfloor \right\}$, $i = 0,1,\dots,M-1$; $j = 0,1,\dots,N-1$ 的值.

3 实验结果和评价

我们在 P IV 微机上用 Delphi7.0 实现了本文算法. 图 1 所示为原图像,其分辨率为 $220 \times 170 \times 24$ bit,图 2 所示为采用本文算法分别对图 1 局部区域放大 3 倍和 5 倍的结果图像. 可以看出,放大后的图像没有出现明显的马赛克或 Block 现象,保持了较好的轮廓边缘信息,甚至放大倍数再高一些时,仍然具有较好的视觉效果.

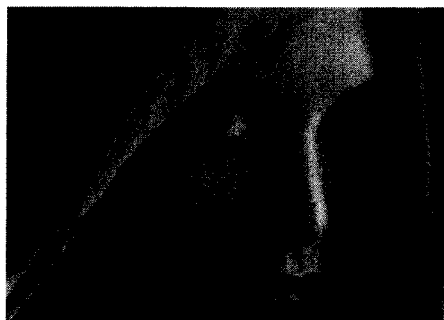
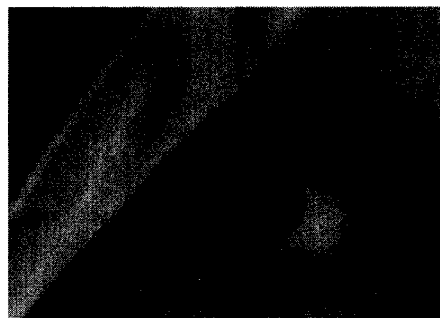


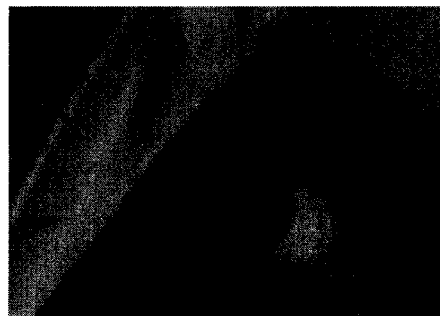
图 1 原始图像

为了比较说明本文算法应用于图像插值处理的效果,我们分别使用双三次多项式插值算法和本文算法对 4 幅不同的灰度或彩色图像进行插值处理. 首先将图像通过双线性插值算法缩小一定的倍数(本文取 2 倍),然后用不同的插值算法放大到原来的大小. 将原图像看作无失真的图像,插值图像看作是失真的图像,则可得到图像峰值信噪比(PSNR). 用本文算法和双三次多项式插值算法得到图像的 PSNR 如表 1 所示,2 种算法的执行时间分别为 85 ms 和 100 ms. 从表 1 可以看出,本文算法与双三次卷积算法的插值图像相比,PSNR 平均提高了约 1.7 dB.

因此,图像在缩放处理之后具有较小的失真.



a 局部放大 3 倍



b 局部放大 5 倍

图 2 用本文算法进行局部放大的结果图像

表 1 与双三次插值算法的 PSNR 比较 dB

算法	图像名称			
	Lena	House	Peppers	Panda
Bicubic	29.572 7	30.955 0	25.738 9	30.484 0
本文算法	31.073 1	31.867 2	27.587 3	33.202 5

表 2 插值结果图像的 PSNR 比较 dB

算法	图像名称		
	Lena	Girl	House
双线性插值	26.70	31.86	32.15
双三次卷积插值	27.35	33.00	31.94
本文算法	27.37	33.48	33.09

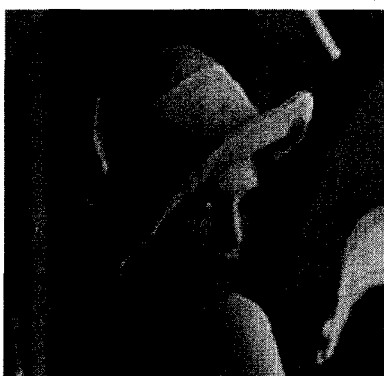
另外,我们采用经典的图像 Lena, Girl, House 等进行实验,实验结果如表 2 所示. 以 Lena 图像为例,用以上插值算法分别对其先进行 2 倍以下采样后再进行 2 倍以上采样,以便比较各种插值算法的效果. 图 3 所示为不同插值算法得到的结果图像. 可以看出,图 3d 的效果比图 3b 好得多,尤其是图像的轮廓区域,如羽毛和帽子的边沿;图 3d 在细节保持、清晰度方面比图 3c 也略好,这是因为图 3d 保留了更多的图像细节.



a Lena 原始图像



b 双线性插值



c 双三次卷积插值



d 本文算法

图 3 不同插值方法的结果图像

参 考 文 献

- [1] Castleman Kenneth R. Digital image processing [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998
- [2] Yang Zhaoxia, Lu Feng, Guan Lutai. Image enlargement and reduction with arbitrary accuracy through scaling relation of B-spline [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2001, 13(9): 824-827 (in Chinese)
(杨朝霞, 逯 峰, 关履泰. 用 B-样条的尺度关系来实现图像任意精度的放大缩小[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(9): 824-827)
- [3] Sun Qingjie, Zhang Xiaopeng, Wu Enhua. A method of image zooming-in based on Bézier surface interpolation [J]. Journal of Software, 1999, 10(6): 570-574 (in Chinese)
(孙庆杰, 张晓鹏, 吴恩华. 一种基于 Bézier 插值曲面的图像放大方法[J]. 软件学报, 1999, 10(6): 570-574)
- [4] Ruan Qiuqi. Digital image processing science [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001 (in Chinese)
(阮秋琦. 数字图像处理学[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001)
- [5] Hu Min, Zhang Yousheng. Image zooming based on Thiele's rational interpolation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(8): 1004-1007 (in Chinese)
(胡 敏, 张佑生. Newton-Thiele 插值方法在图像放大中的应用研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(8): 1004-1007)
- [6] Hu Min, Tan Jieqing, Liu Xiaoping. Method of image zooming based on bivariate vector valued rational interpolation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(11): 1496-1500 (in Chinese)
(胡 敏, 檀结庆, 刘晓平. 用二元向量有理插值实现彩色图像缩放的方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(11): 1496-1500)
- [7] Duan Q, Wang L, Twizell E H. A new C^2 rational interpolation based on function values and constrained control of the interpolant curves [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 161(1): 311-322
- [8] Duan Q, Wang L, Twizell E H. A new bivariate rational interpolation based on function values [J]. Information Sciences, 2004, 166(1/4): 181-191