8) La vida útil (en miles de horas) de una batería es una variable aleatoria $X$ con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $\bar{X}_{36}$ es la media de la muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_{36}$ escogida de $X$, ¿con qué probabilidad $\bar{X}_{36}$ es mayor que 420 horas?

Solución:

$\Longrightarrow E(x) = \int_0^1 x(2-2x)dx = \int_0^1 (2x-2x^2)dx = (\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3})/_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\Longrightarrow Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \int_0^1 x^2(2-2x)dx - \frac{1}{9} = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)dx - \frac{1}{9}$
$= (\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4})/_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

$\Longrightarrow P(\bar{X} > 0{,}42) = P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0{,}42-1/3}{1/\sqrt{18}\sqrt{36}}) = P(Z > 2{,}21) = 1 - P(Z < 2{,}21)$

$= 1 - 0{,}98645 = 0{,}01355$

9) Sea $\bar{X}_{40}$ la media de la muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_{40}$ de tamaño $n = 40$ escogida de una población $X$ cuya distribución es geométrica con función de probabilidad:
$f(x) = \frac{1}{5}(\frac{4}{5})^{x-1}, x = 1, 2, ...$

Halle la probabilidad de que la media muestral difiera de la media poblacional en a lo más el 10 % del valor de la varianza de la población.

Solución:

$\Longrightarrow E(x) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q}(q^x) = p\frac{\partial}{\partial q}(\sum_{x=1}^{\infty} q^x) = p\frac{\partial}{\partial q}(\frac{q}{1-q})$
$= p\frac{1}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

$*\ E(x(x-1)) = E(x^2) - E(x) \Longrightarrow E(x^2) = E(x(x-1)) + E(x)$

$\Longrightarrow E(x(x-1)) = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)pq^{x-1} = pq\sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)q^{x-2}$
$= pq\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial q^2}(q^x) = pq\frac{\partial^2}{\partial q^2}(\sum_{x=1}^{\infty} q^x) = pq\frac{\partial^2}{\partial q^2}(\frac{q}{1-q}) = pq\frac{2}{(1-q)^3}$
$= pq\frac{2}{p^3} = q\frac{2}{p^2}$

$\Longrightarrow E(x^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$

$\Longrightarrow Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0{,}2}{0{,}2^2} = \frac{0{,}8}{0{,}04} = 20$

$\Longrightarrow P(|\bar{X}-\mu| < 0{,}1Var(x)) = P(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0{,}1(20)}{\sqrt{20}/\sqrt{40}}) = P(|Z| < 2{,}83)$

$= P(-2{,}83 < Z < 2{,}83) = P(Z < 2{,}83) - P(Z < -2{,}83)$

$= 0{,}99767 - 0{,}00233 = 0{,}99534$

10) El tiempo de vida de una batería es una variable aleatoria $X$ con distribución exponencial de parámetro: $\frac{1}{\theta}$. Se escoge una muestra de $n$ baterías.

a) Halle el error estándar de la media muestral $\bar{X}$.
b) Si la muestra aleatoria es de tamaño $n = 64$, ¿con qué probabilidad diferirá $\bar{X}$ del valor verdadero de $\theta$ en menos de un error estándar?
c) ¿Qué tamaño de muestra mínimo sería necesario para que la media muestral $\bar{X}$ tenga un error estándar menor a un 5 % del valor real de $\theta$?
d) Asumiendo muestra grande, qué tamaño de muestra sería necesario para que $\bar{X}$ difiera de $\theta$ en menos del 10 % de $\theta$ con 95 % de probabilidad.

Solución:

$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}, 0 \leq x \geq \infty$

$\Longrightarrow E(x) = \int_0^\infty \frac{x}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}dx = \int_0^\infty xe^{\frac{-x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta}) = \theta\int_0^\infty \frac{x}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta}) = \theta\Gamma(1) = \theta$

$\Longrightarrow Var(x) = \int_0^\infty \frac{x^2}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}dx - E(x)^2 = \int_0^\infty x^2e^{\frac{-x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta}) - \theta^2$

$= \theta^2\int_0^\infty (\frac{x}{\theta})^2e^{\frac{-x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta}) - \theta^2 = \theta^2\Gamma(2) - \theta^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$

a) $E.S. = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$

b) $P(|\bar{X}-\mu| < \frac{\theta}{\sqrt{n}}) = P(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\theta/\sqrt{n}}{\theta/\sqrt{n}}) = P(|Z| < 1) = P(-1 < Z < 1)$
$= P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0{,}84134 - 0{,}15866 = 0{,}6826$

c) $\frac{\theta}{\sqrt{n}} < 0{,}05\theta \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \Longrightarrow \frac{1}{0{,}05} < \sqrt{n} \Longrightarrow 20^2 < \sqrt{n}^2$

$\Longrightarrow 20 < \sqrt{n} \Longrightarrow 400 < n$

d) $P(|\bar{X}-\mu| < 0{,}1\theta) = 0{,}95 \Longrightarrow P(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{0{,}1\theta}{\theta/\sqrt{n}}) = 0{,}95$

$\Longrightarrow P(|Z| < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95 \Longrightarrow P(-0{,}1\sqrt{n} < Z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$

$\Longrightarrow P(Z < 0{,}1\sqrt{n}) - P(Z < -0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$

$$\Longrightarrow P(Z < 0{,}1\sqrt{n}) - (1 - P(Z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$\Longrightarrow 2.P(Z < 0{,}1\sqrt{n}) = 1{,}95 \Longrightarrow P(Z < 0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}975$$

$$\Longrightarrow 0{,}1\sqrt{n} = 1{,}96 \Longrightarrow 19{,}6 = \sqrt{n} \Longrightarrow n = 385$$