Antialiasing and Visibility

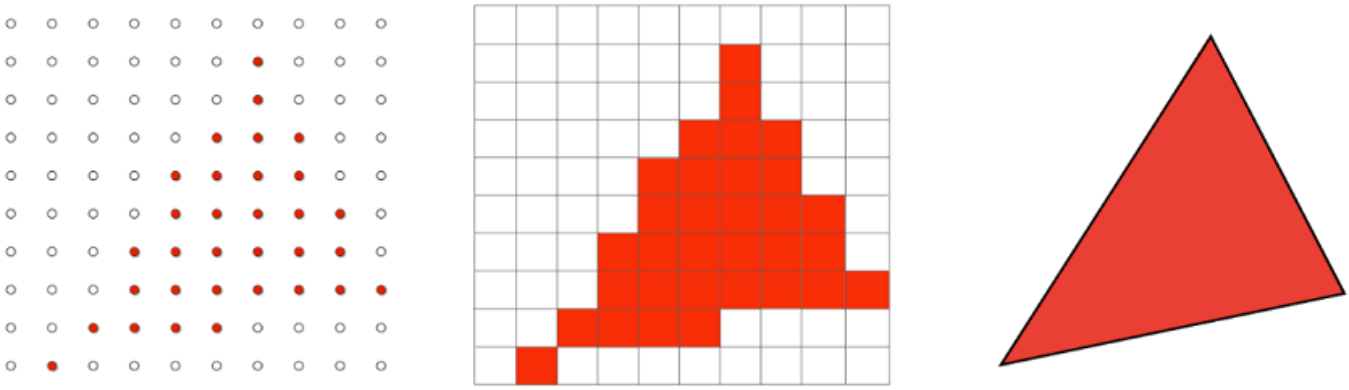
If you can not render Mathematical formula, please read this Antialiasing_and_Visibility.pdf

目录

Antialiasing

Aliasing

我们光栅化三角形的三角形就像这样：



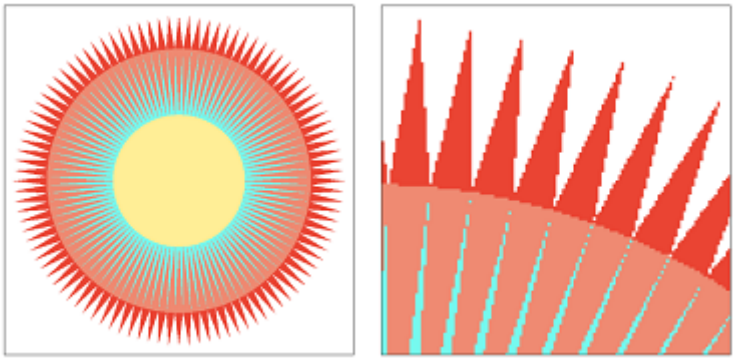
似乎有点不对，我们的三角形被像素表示出来就不是一个完整的三角形。像素是一个有大小的方块，被填色表示某些形状的时候，由于大小限制，就表示得有些问题。这个现象被叫做**走样（Aliasing）**，即像素作为采样过程中的最小单位来说过大了，采样频率过小。

这里举出几个常见的采样的例子：

- Rasterization = Sample 2D Positions
- Photograph = Sample Image Sensor Plane
- Video = Sample Time

接下来看一下常见的走样所形成的问题：

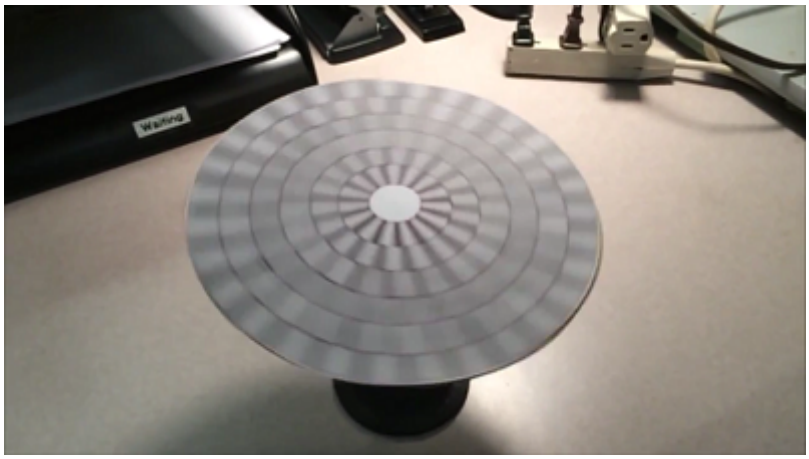
- Jaggies（锯齿），空间中采样



- Moire（摩尔纹），对图片做降采样（把图片中的奇数列和奇数行给去掉）

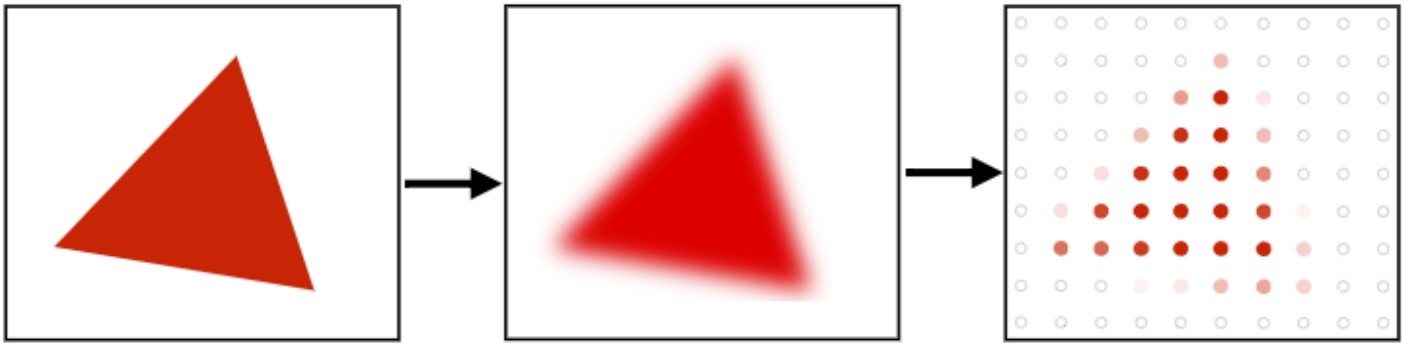
Skip odd rows and columns

- Wagon wheel effect（车轮效应），时间中采样（常见于高速行驶的车辆，人眼观察车轮会有向后转的假象）

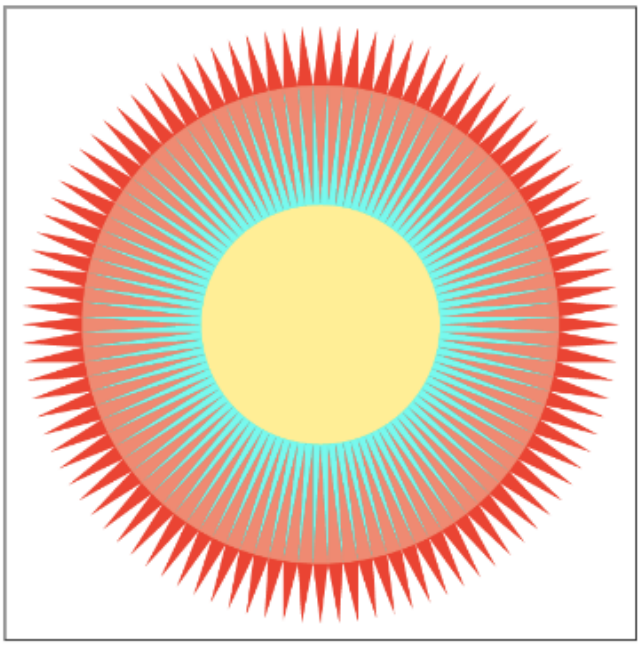


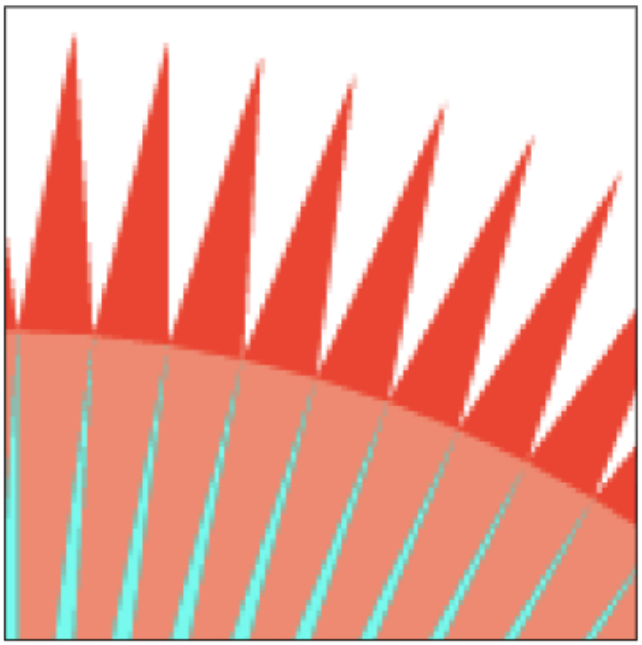
总结一下这些问题，走样的本质就是**信号的变换太快（高频），采样的频率太慢（采样间隔大）**

这里我们先给出反走样的方法：**采样之前先做模糊**
以光栅化三角形为例：



先对三角形做一次模糊（去掉高频的信号），把它变成一个边界模糊的三角形，采样边界时，离三角形边界近的地方像素颜色深一些，远的地方像素颜色浅一些
对于刚才的锯齿问题，我们做完预先模糊后采样的结果如下：



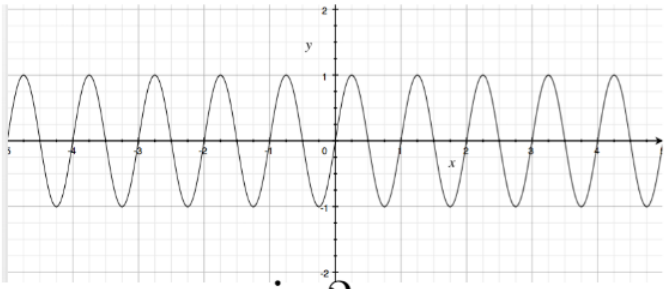


可以看见锯齿明显减少了，但是为什么做完模糊之后采样会减少我们的走样现象？
让我们来研究一下根本原因

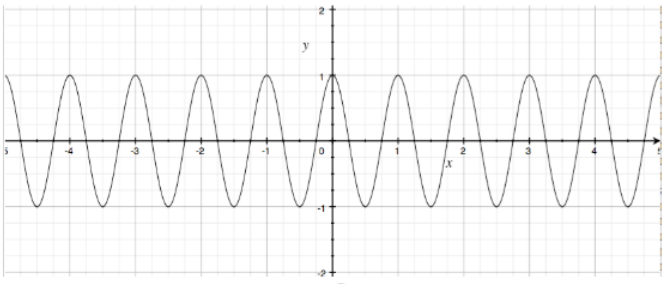
采样的理论基础

频域

正弦波（Sines）和余弦波（Cosines）



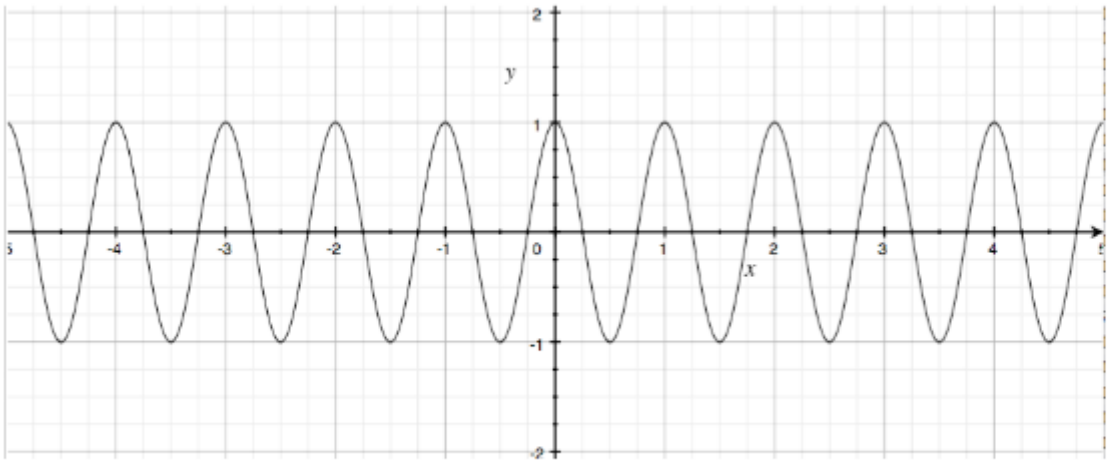
$\sin 2\pi x$



$\cos 2\pi x$

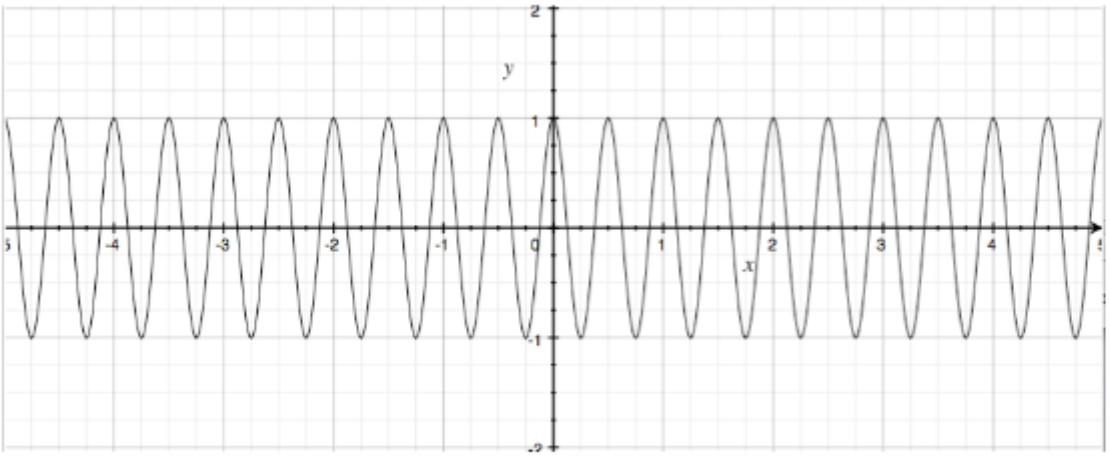
我们以 $\cos 2\pi f x$ 为例

- 周期（T），每个多久重复自己一次，这里 $T = 1$，$\cos 2\pi x$ 函数每隔1个周期重复自己一次
- 频率（f），周期的倒数，这里 $f = \frac{1}{T}$



$f = 1$

$\cos 2\pi x$



$f = 2$

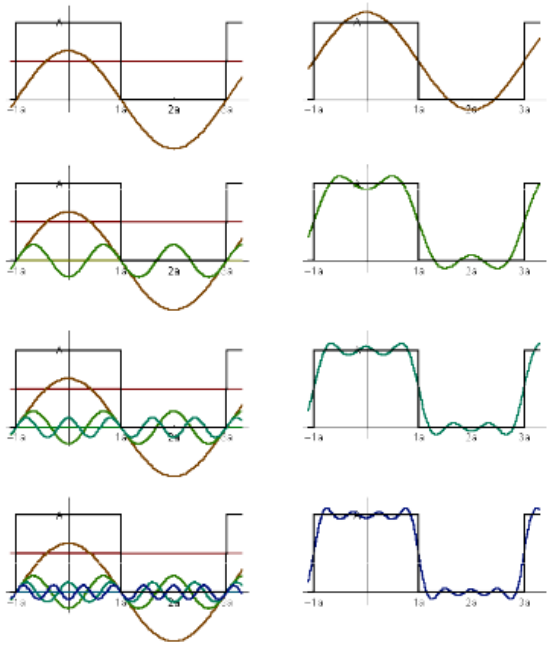
$\cos 4\pi x$

我们可以看出，频率越高代表重复自己一次的间隔越短

傅里叶级数展开（Fourier Series Expansion），周期函数可以由 $\sin$ 和 $\cos$ 函数展开式的权重和近似得到

Represent a function as a weighted sum of sines and cosines

Joseph Fourier 1768 - 1830



$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A\cos(t\omega)}{\pi} - \frac{2A\cos(3t\omega)}{3\pi} + \frac{2A\cos(5t\omega)}{5\pi} - \frac{2A\cos(7t\omega)}{7\pi} + \cdots$$

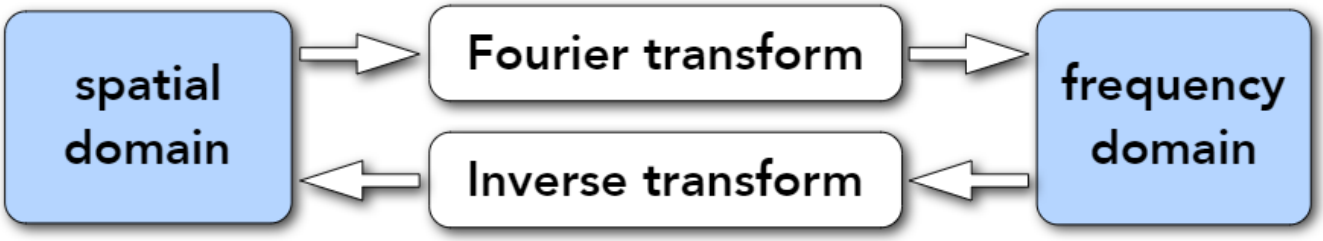
可以看到图中的周期函数经过傅里叶变换得到的结果，相似程度随着展开次数的增加而提高

傅里叶变换（Fourier Transform），任何一个函数都可以经过变换得到周期函数

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$f(x) = \int_{-1}^{1} F(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega$$

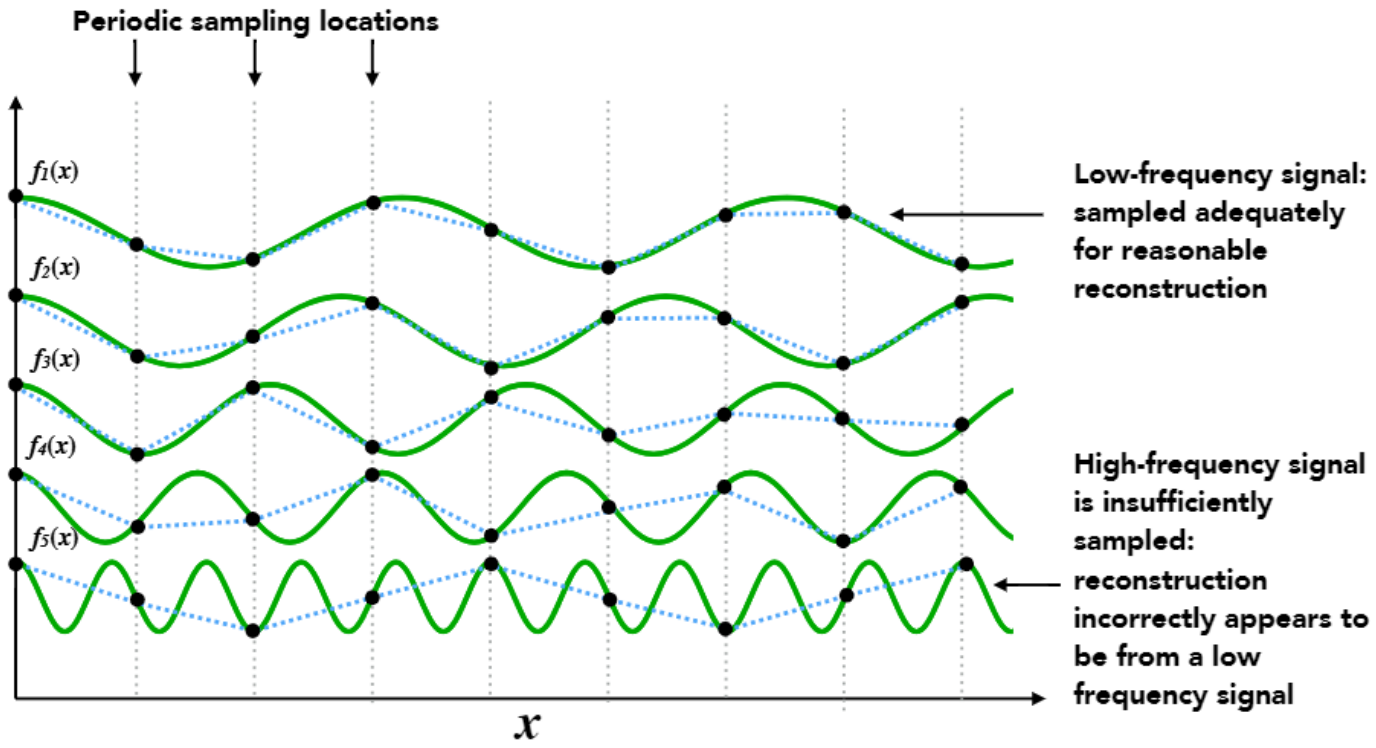


我们可以把转换后的结果定义为频域，也就是：傅里叶变换把信号从时域（spatial domain）转换到频域（frequency domain）

那么对于任何函数 $f(x)$ 来说

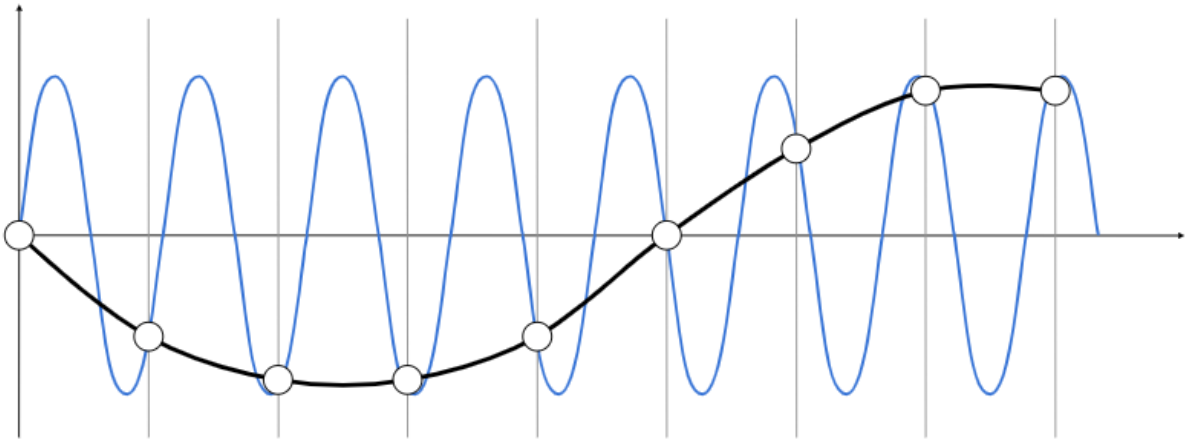
- 我们通过傅里叶变换把 $f(x)$ 转换为周期函数 $F(\omega)$
- 我们通过傅里叶级数展开，用正弦和余弦函数去模拟 $F(\omega)$
- 结合正弦和余弦的频率可知，频率越高得到的结果与原函数越相似

信号可以看做一种函数，那么看下图



这里展示了在固定的采样频率下，信号的频率越高，采样出来的结果就越差

现在我们从频率的角度理解走样



灰色的线条代表采样的频率，我们可以看见，在相同的采样频率下去采样频率差异巨大的两种函数，得到了相同的结果

也就是说，在当前的采样频率下，我们无法区分两种函数表示的信号

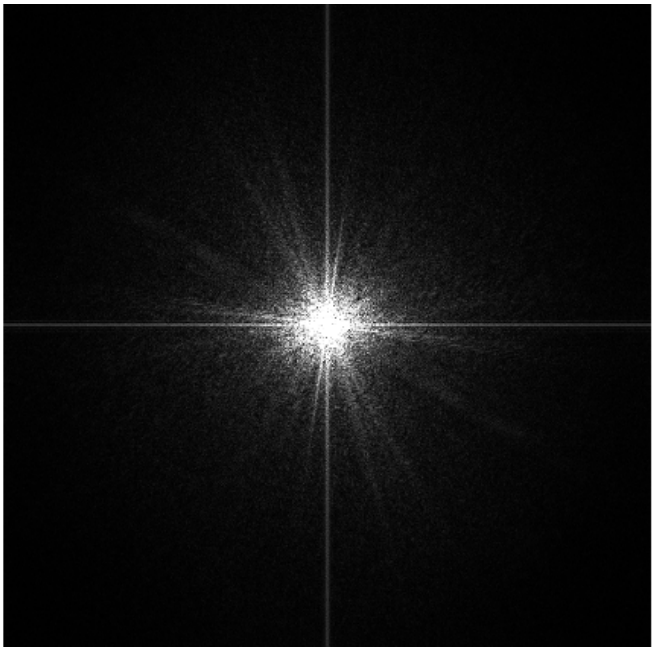
滤波

前面我们提到反走样就是在采样之前先做一次模糊，把高频的信号给去掉，这个去掉某些频率信号的过程被叫做滤波（Filtering）。

滤波就是去掉某些特定频率的信号（Filtering = Getting rid of certain frequency contents）

现在我们借助前面提到的频域来理解滤波的过程和结果

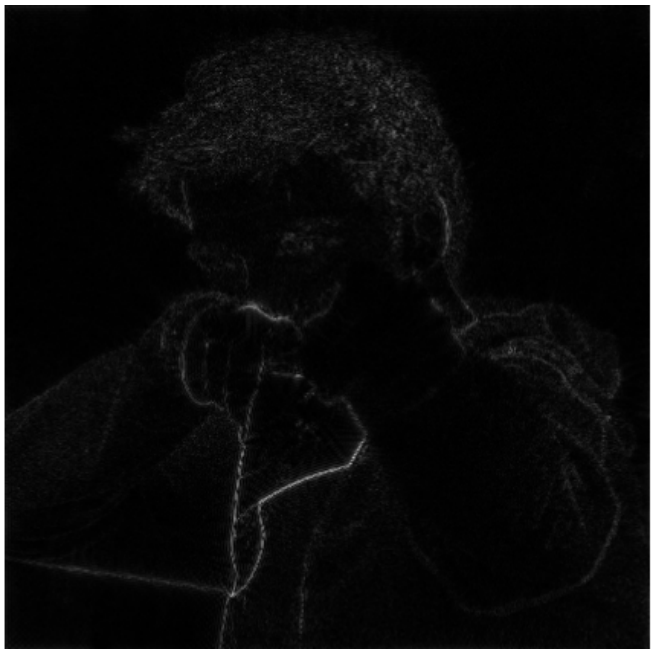
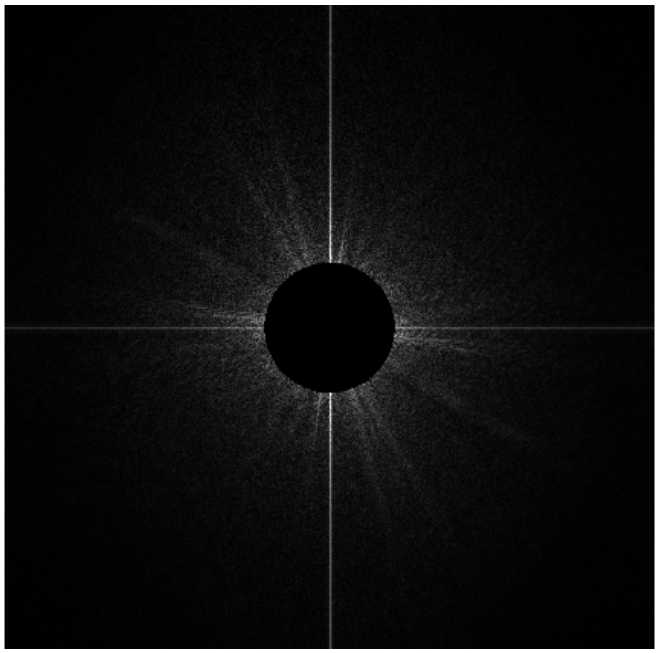
频域可视化

- 我们把左边的信号做傅里叶变换，它从时域变到频域
- 我们把它的频域表示可视化出来，得到右边的图案
  这里有几点需要注意：
  - 中心定义为低频区域，周围定位高频区域，也就是说从中心到四周，频率是在变高的
  - 用亮度来表示不同位置（频率）上有多少信息，图里的中心位置比较亮就表示图片大多是信息都是低频信息
  - 水平和竖直的线含义
    我们分析信号的时候会认为信号是周期性的，在处理非周期信号时（例如图片），我们会人为的重复这个段信号（图片水平和竖直重复），但是这段信号的左右边界不相同，在边界连接处信号发生了剧烈变换（同一张图片首尾相连，这个连接的地方有非常明显的差异），在频域中就呈现出明显的高频差异，表现上就是一条水平和竖直的白色线条

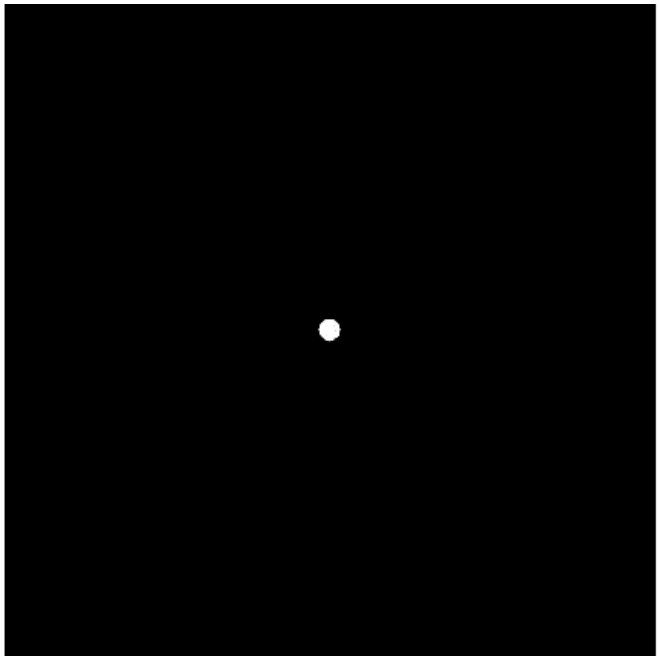
现在我们尝试对这个图片进行滤波，即去除频域中某一块区域（某一段频率）的信息

高通滤波

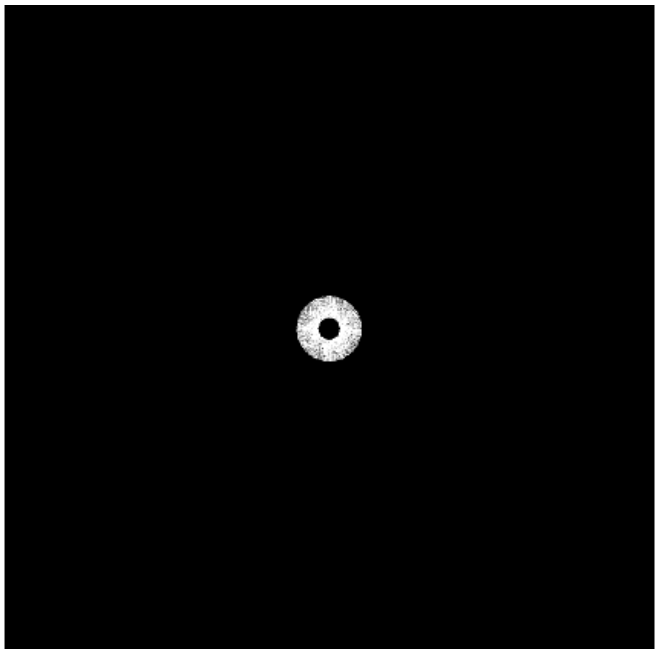
- 我们把低频区域全部去掉，仅保留高频区域，这被称为高通滤波（High-pass filter），如图中右边所示
- 然后我们对频域的信号做逆傅里叶变换，还原剩余的高频信息，得到了左边的图像
- 还原后的信息表示了图像内容的边界（轮廓），边界的两边信号的差异比较大

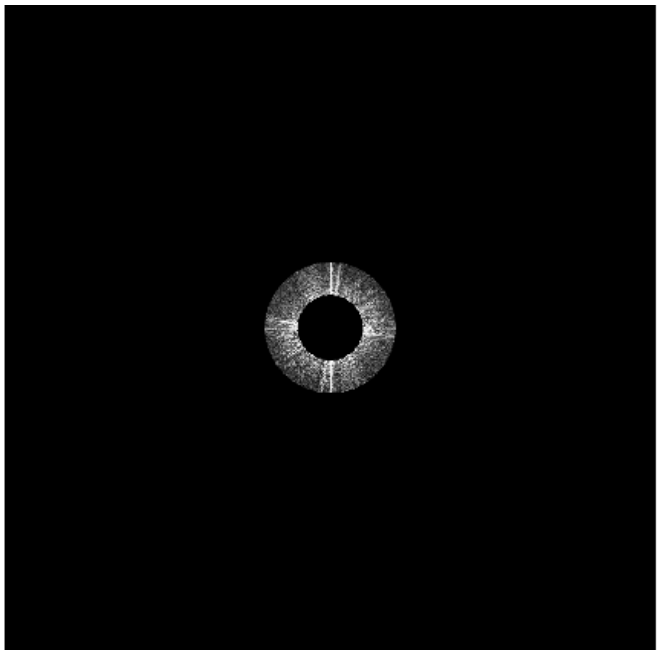
低通滤波

- 我们把高频区域全部去掉，仅保留低频区域，这被称为低通滤波（Low-pass filter），如图中右边所示
- 然后我们对频域的信号做逆傅里叶变换，还原保留的低频信息，得到了左边的图像
- 我们发现图像变模糊了，图像内容的轮廓不见了

去掉高频和低频信息



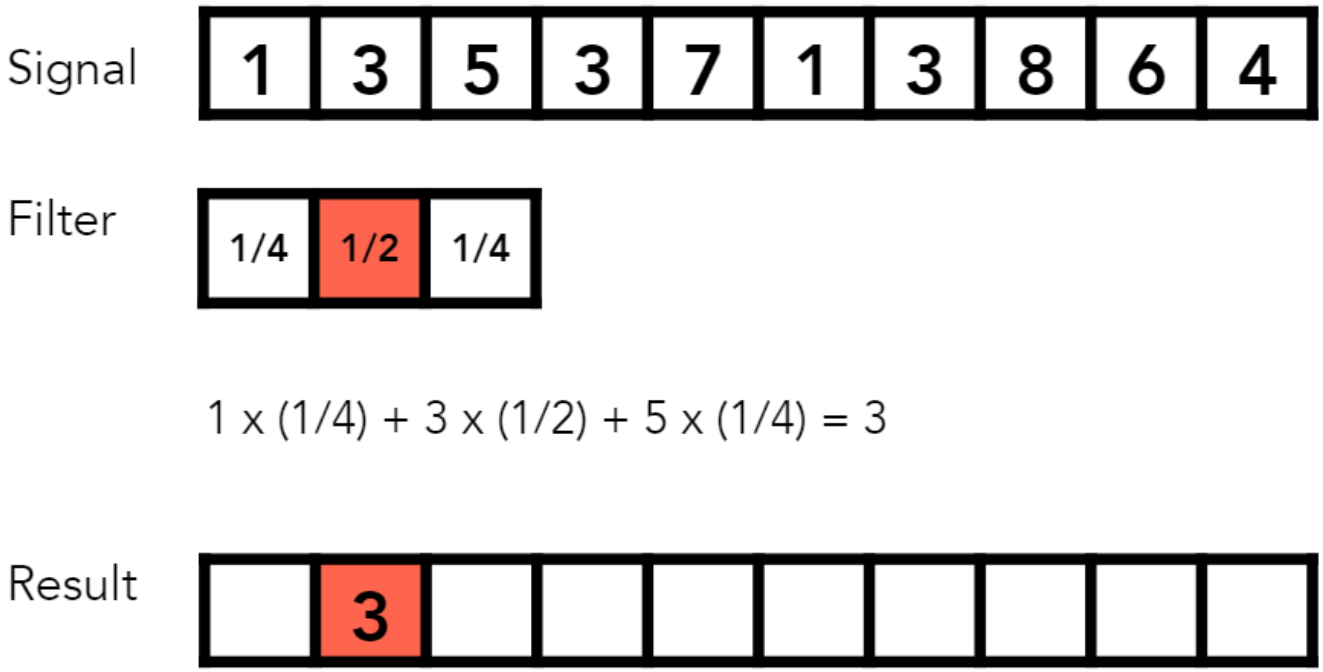
这里对比了分别保留不同的频率信号时，图像的变化，我们可以观察得出**保留的频率越高，图像内容的边界越明显**

卷积与滤波

Filtering = Convolution = Averaging

卷积

我们认识一下什么是卷积，如图所示



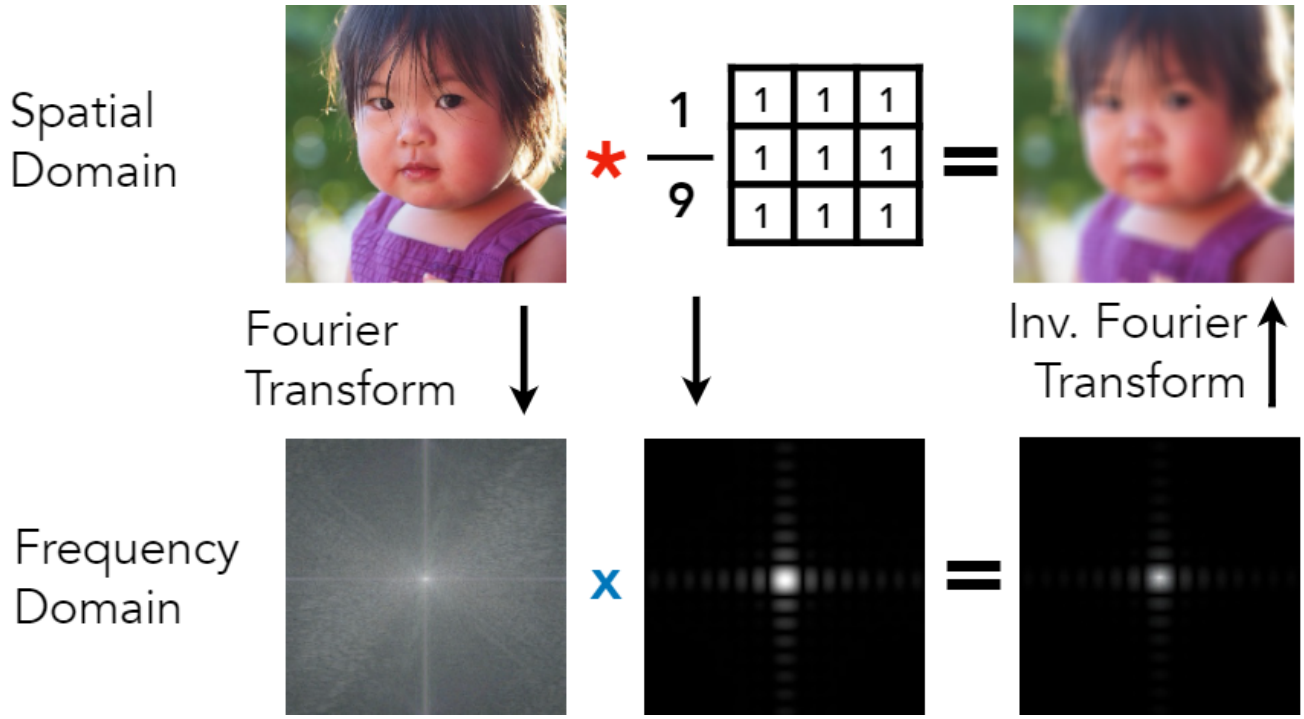
- 用滤波器Filter对信号数组Signal做卷积，得到结果Result
- 信号值与滤波器做点乘，再将结果写回，这个过程被称为卷积
  如图中的第二个信号值做卷积，就是将信号值按照Filter的权重值进行平均计算，然后把结果写回第二个信号值
  $Signal[1] = Signal[0] * Filter[0] + Signal[1] * Filter[1] + Signal[2] * Filter[2]$
- **卷积（Convolution）就是按照滤波器的权重对周围的信号值做加权平均（这里是不完全正确的说法，只是用来简易理解，并非数学上的卷积）**

重要的结论

时域上做卷积就是在频域上做乘积，在时域上做乘积就是在频域上做卷积
现在对信号做卷积有两种方法：

- 用滤波器在时域上对信号做卷积（加权平均）
- 在频域上做乘积
  - 把信号和滤波器变换到频域上（傅里叶变换）
  - 变换后的信号和滤波器相乘
  - 将结果逆变换回时域（逆傅里叶变换）

这里给出这个结论的例子：



- 对图像信号做卷积，对像素做3x3的平均，即对图像做均值模糊
- 对应就是频域上，将两个频域信号做乘积
- 从频域观察可得，相当于在频域做了一个低通滤波，只留下了低频信号（前面提到了频域低通滤波就是对图像做模糊）

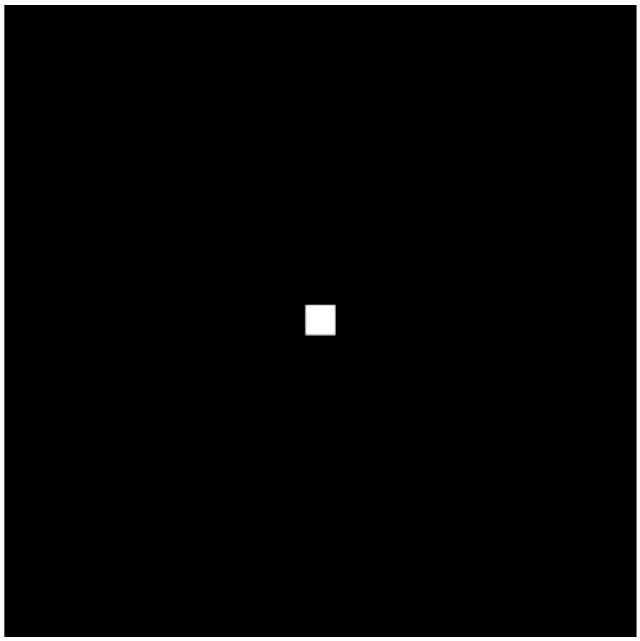
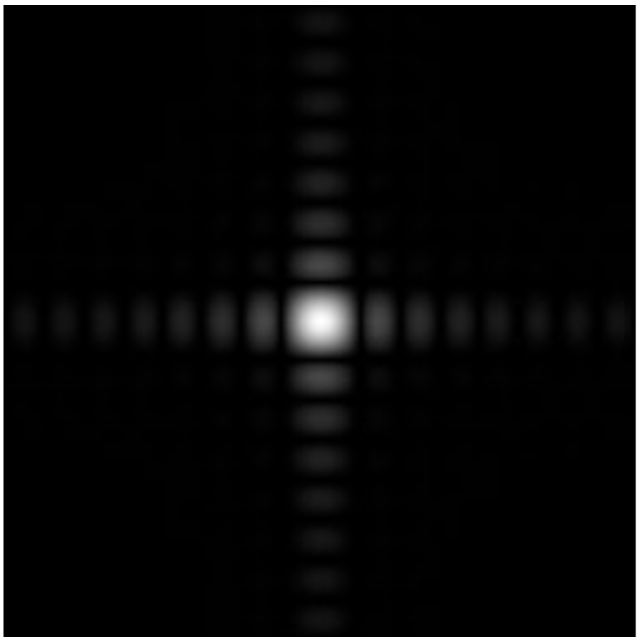
Box Filter

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

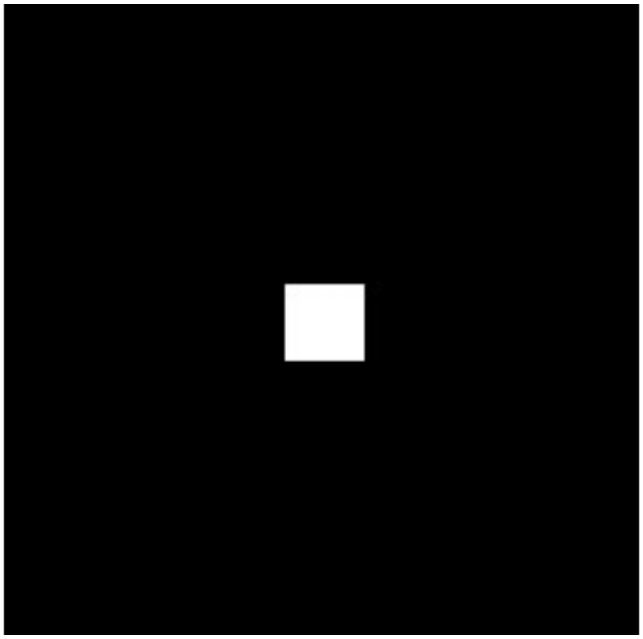
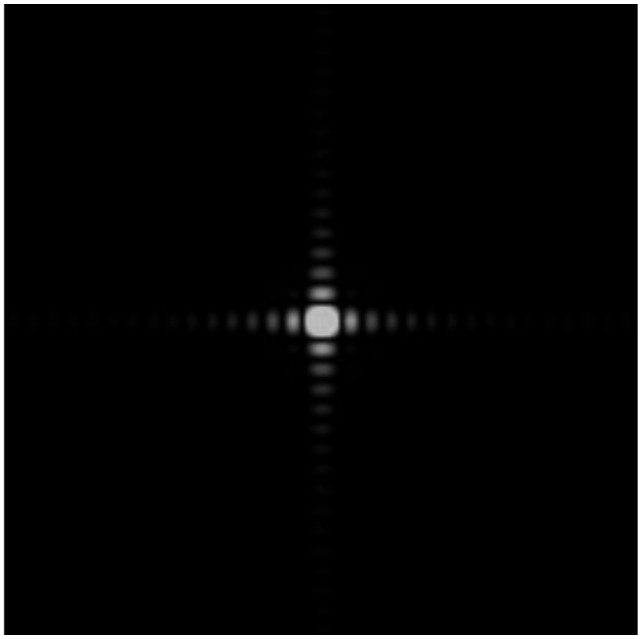
Example: 3x3 box filter

这个滤波器（数学上称为卷积核）是把像素周围9个点的值做平均，然后乘上 1/9 做归一化，而作用就是我们上面提到的做模糊

用傅里叶变换把它变到频域上，就得到了我们上面提过的低通滤波：

如果把这个filter kernel的范围放大，那么对应的时域将会怎么样变换?

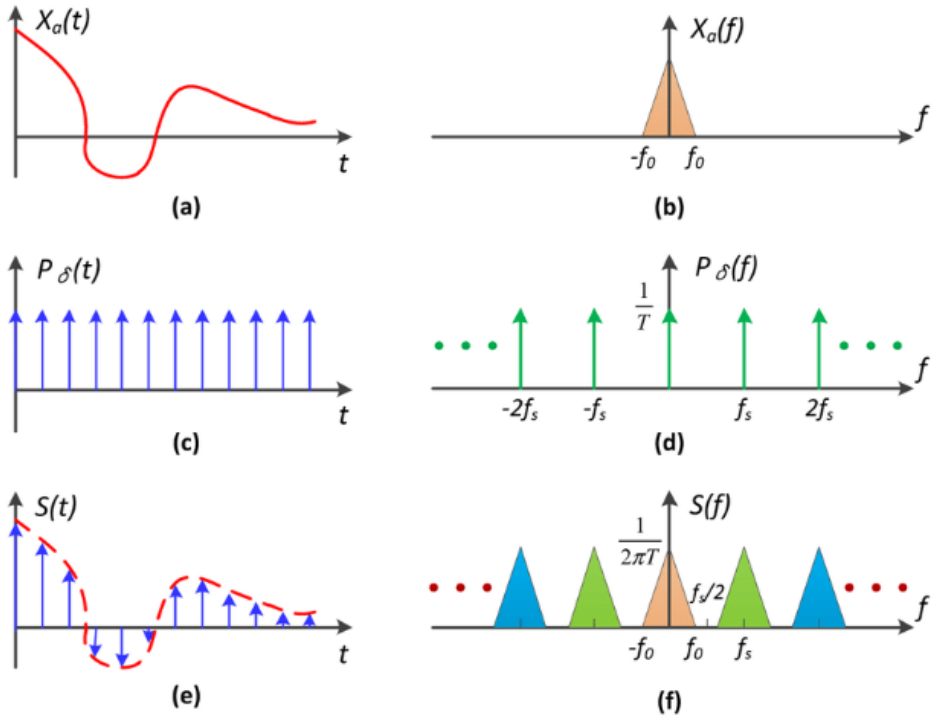



卷积核越大，对应频率就越低

- 如果图片做平均的范围越大，那么图像就会越模糊，频域保留的低频信号区域就越小
- 推到极限，如果平均的范围囊括了整张图，那么每个像素的值都一样，也就是说图像的信号值没有差异，在频域也就表示为中心的一点

从频域的角度理解走样

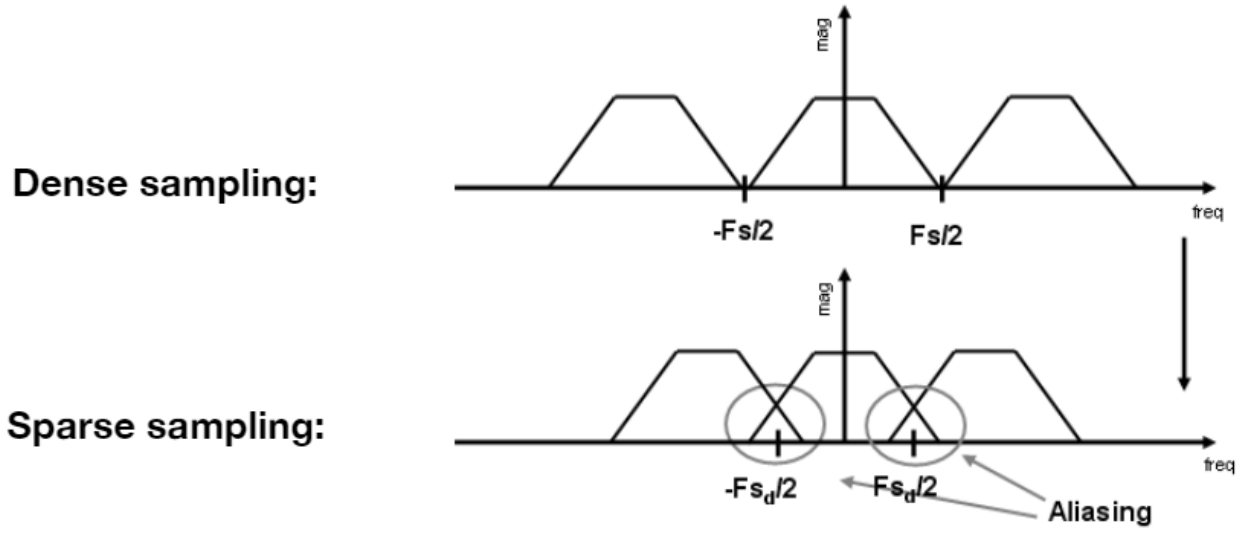
Sampling = Repeating Frequency Contents



- 时域上有一个函数 $X_\alpha(t)$，如图（a）所示
- $X_\alpha(t)$ 的频域表示为 $X_\alpha(f)$（被称为频谱），如图（b）所示
- 函数 $P_\delta(t)$ 是冲激函数，只在固定位置有值的函数（用来采样的函数），如图（c）所示
- 冲激函数 $P_\delta(t)$ 的频域表示为 $P_\delta(f)$，也是一个冲激函数，如图（d）所示
- 对函数 $X_\alpha(t)$ 用冲激函数 $P_\delta(t)$ 采样，也就是将两个函数乘起来，得到采样结果 $S(t)$，如图（e）所示
- 在时域做乘积，就是对频域做卷积，采样也就是对频域 $X_\alpha(f)$ 函数用冲激函数 $P_\delta(f)$ 做卷积，得到采样结果 $S(f)$，如图（f）所示

经过上述操作我们可以得出结论，采样就是在重复原始信号的频谱（在频域做重复）

那么由此可知，Aliasing = Mixed Frequency Contents，走样就是频谱在频域卷积冲激函数时发生了混叠，如下图：



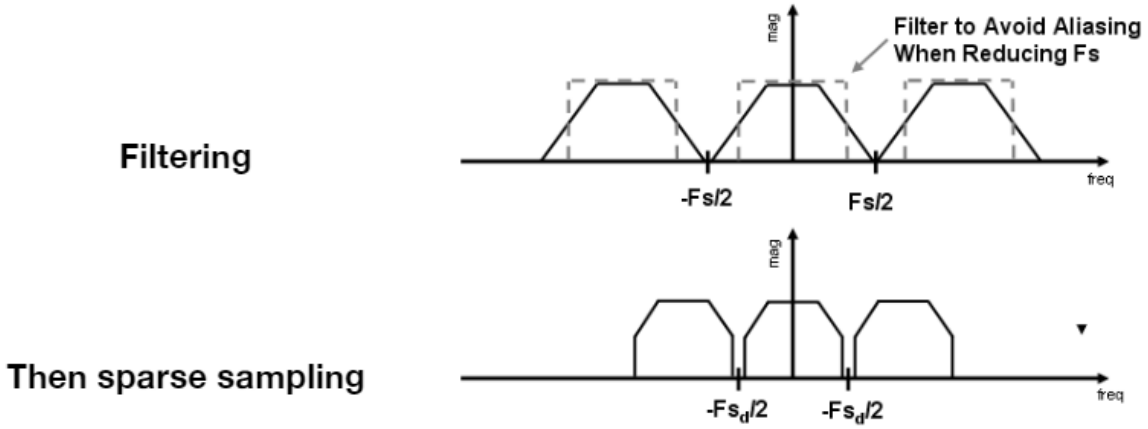
- 采样的间隔会影响在频域对原始信号重复的步长，即采样间隔越大（采样频率约小）对应的频域重复信号的步长越小
- 在密集采样（Dense sampling）时，采样间隔很小，那么它在频域重复原始信号时的步长足够大，大到足以在一个步长内容纳完整的原始信号
- 在稀疏采样（Sparse sampling）时，采样间隔很大，它在频域重复原始信号的步长较小，导致一个步长内不能完整重复原始信号，导致了频谱混叠

Antialiasing（反走样）

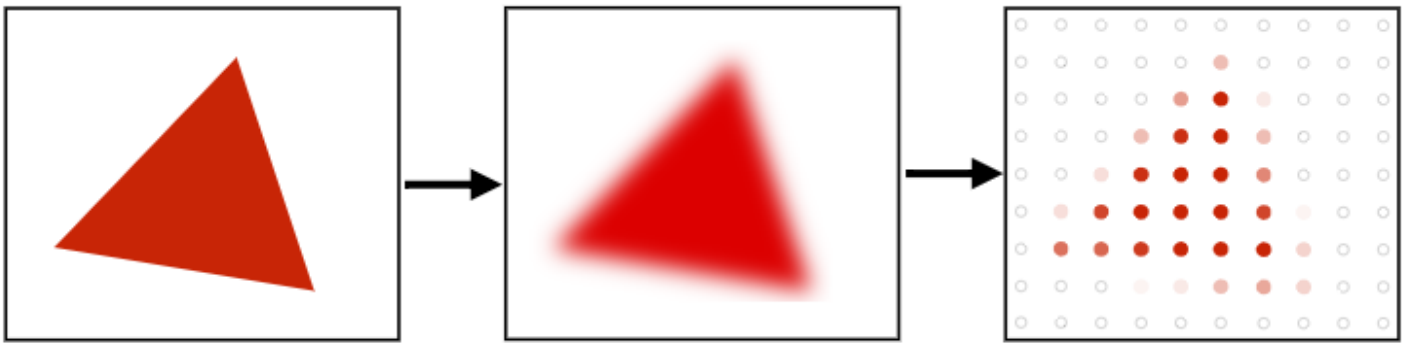
减少采样瑕疵的方法

- 增加采样率（本质的方法）
  - 在频域上增加重复原始信号的步长，即提高采样率
  - 对光栅化来说，就是提高设备的像素
  - 分辨率足够高，锯齿就会很小，小到一定程度就会被人眼忽略（放大看也会有锯齿效果），但是代价太了
- 反走样
  - 把频域中的频谱变窄，窄到在我们设定的小步长的采样时间内也能完整的重复整个频谱
  - 最简单的做法就是在采样之前把高频信号给去掉（收窄频谱），采样就可以在步长内完整容纳当前仅剩的频谱

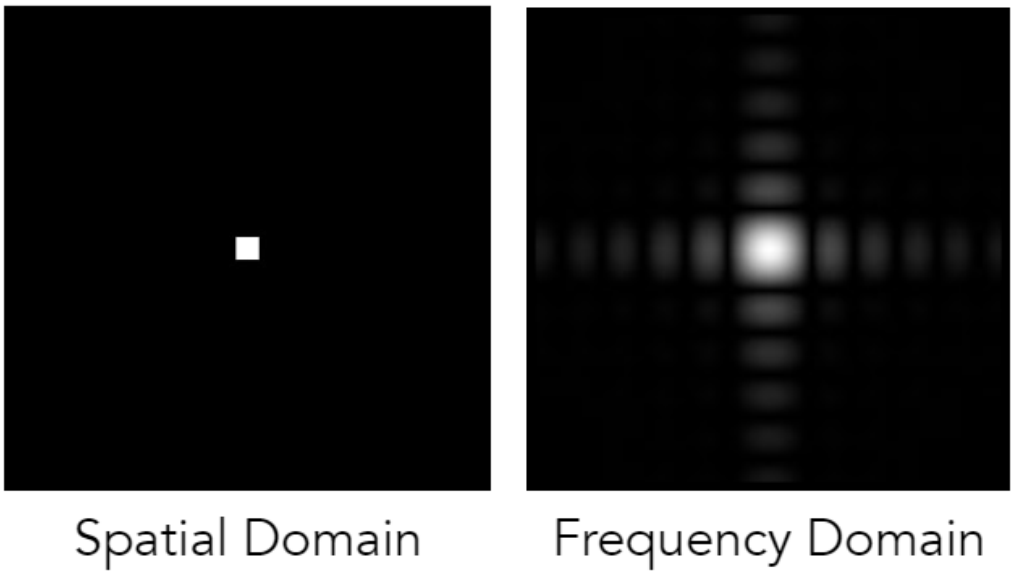
Antialiasing = Blur + Sample



对应到光栅化的步骤，我们使用低通滤波在采样之前做一次卷积



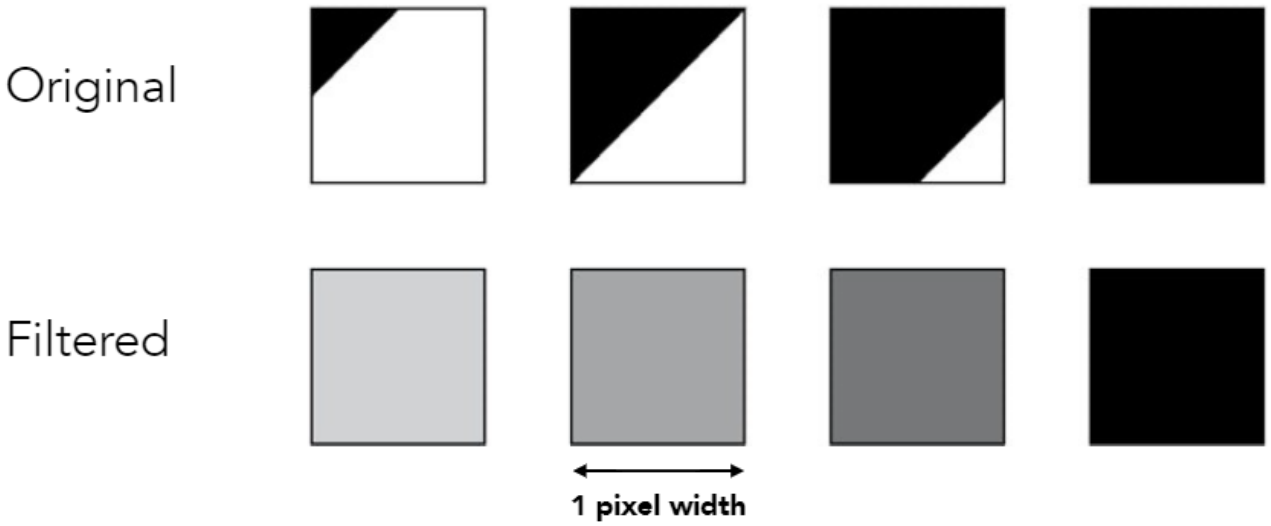
我们知道低通滤波对应时域就是一个方块，频域就是保留中心位置的低频区域
在光栅化的过程中使用1个像素长度的低通滤波器来对每个像素做模糊，如下图：



- 使用单像素低通滤波器对所有像素点对应的方块做卷积，也就是对这个像素做平均
  - convolving = filtering = averaging

- 使用这个平均值来进行采样

计算像素平均值，算法很简单，计算要光栅化的对象占像素面积的比例，算取面积比的过程就是平均的过程



MSAA

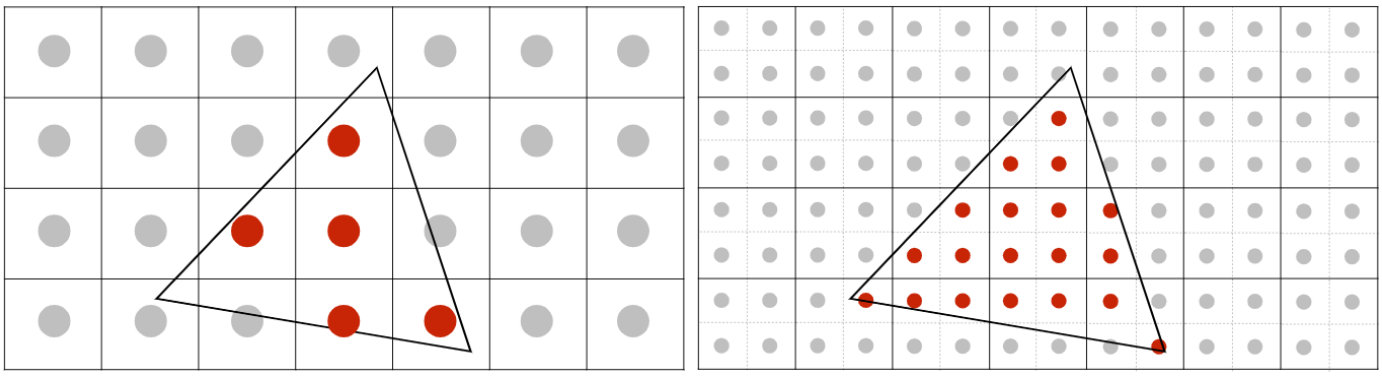
现在我们把反走样问题，转换成了求取光栅化对象占据像素的面积比，这里介绍MSAA反走样方法

核心思想

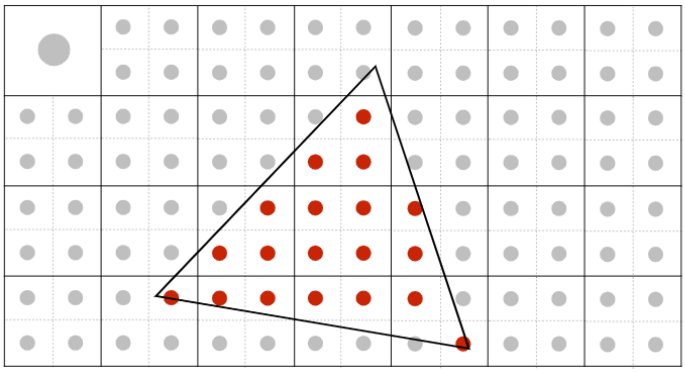
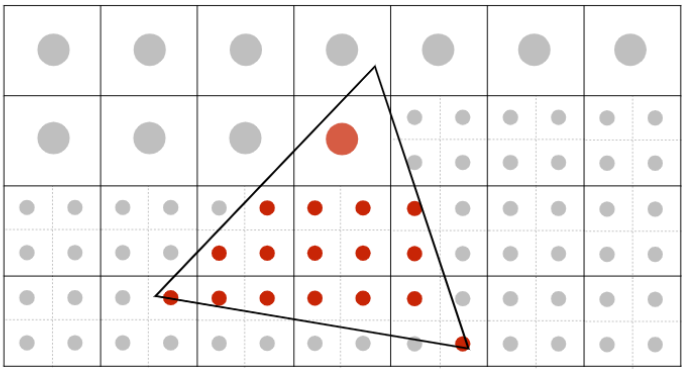
我们为每个像素增加多个采样点，通过计算每个像素有多少个采样点在三角形内来近似判断三角形占据像素的面积比，根据得到的面积比来把像素值计算为平均值

MSAA基本步骤

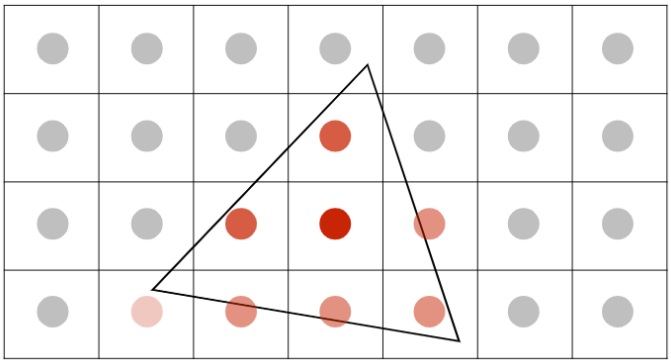
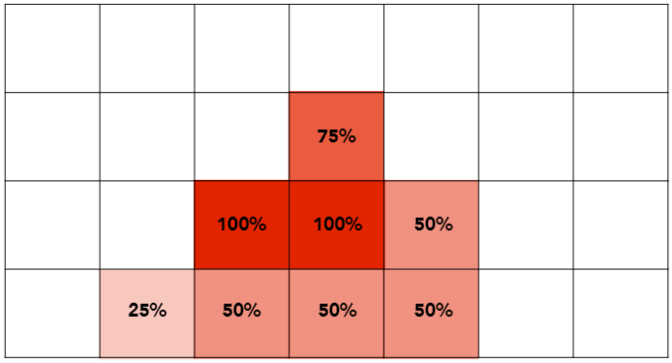
- 增加采样点
  - 把每个像素由原来的单采样点增加到 $N \times N$ 个采样点，这里以 2×2 为例



- 计算每个像素的采样点占比
  - 给像素每个在三角形内的采样点做计数，使用我们前文提到的判断点是否在三角形内的方法

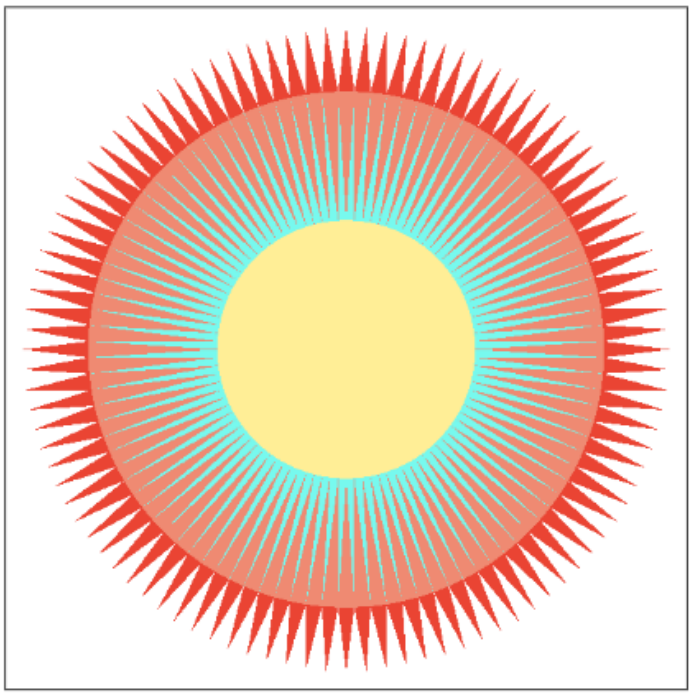
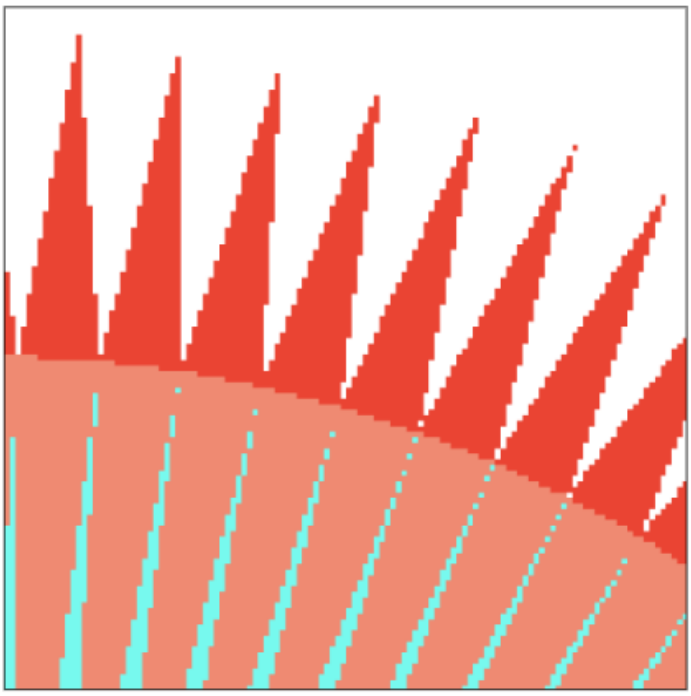



- 根据采样点占比计算每个像素的值
  - 我们使用像素在三角形内的采样点的数量比例来近似得到三角形占像素的面积，从而近似得到像素平均值，达到低通滤波的效果

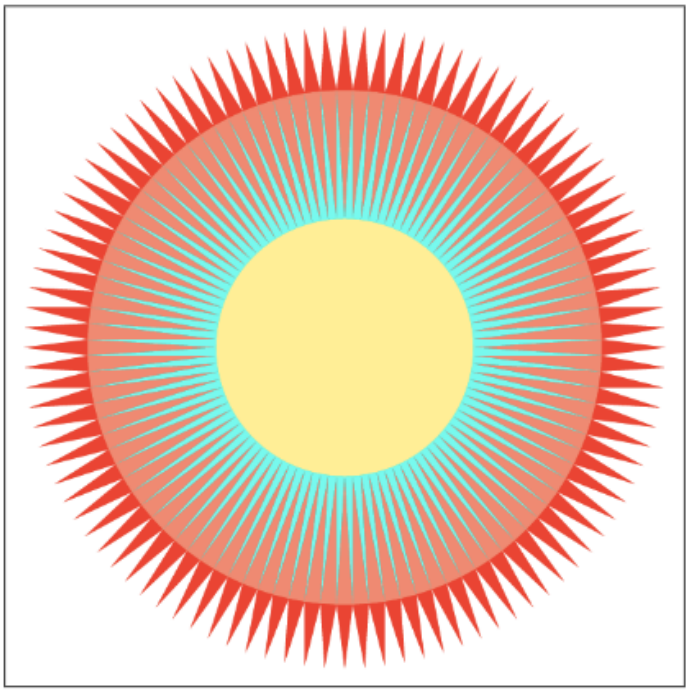



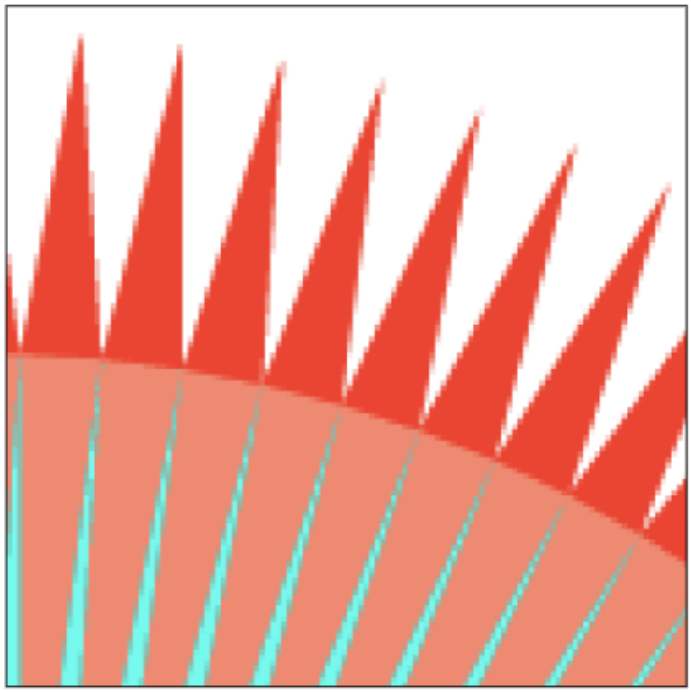
效果

- 点采样的结果

- 4×4 MSAA采样的结果

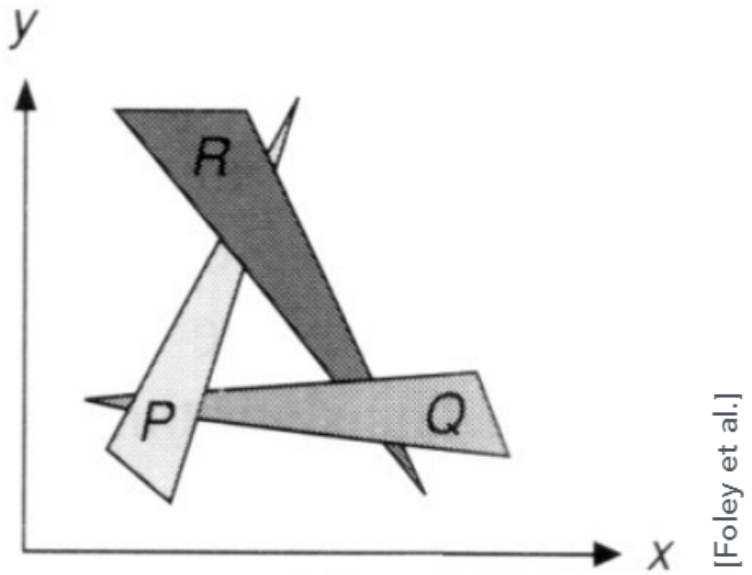




Visibility

Painter Algorithm

按照画家（油画画家）作画的方式，从远往近的把物体一个一个的画出来。油画作画时，会先从远景画起，然后画近景，在处理近景遮挡远景的时候，会将近处的物体直接画在远景上，用新画出的物体来覆盖远景的内容
如果光栅化很多物体到屏幕上，按照画家算法的方式是可以成功将物体绘制到屏幕上的，但是这种方法有一个致命的缺陷，如下图所示：



在处理这类混叠图形的时候，我们无法准确的分辨物体谁在前面谁在后面，此时已经不再适合用物体的深度来决定这些遮挡区域的绘制顺序了

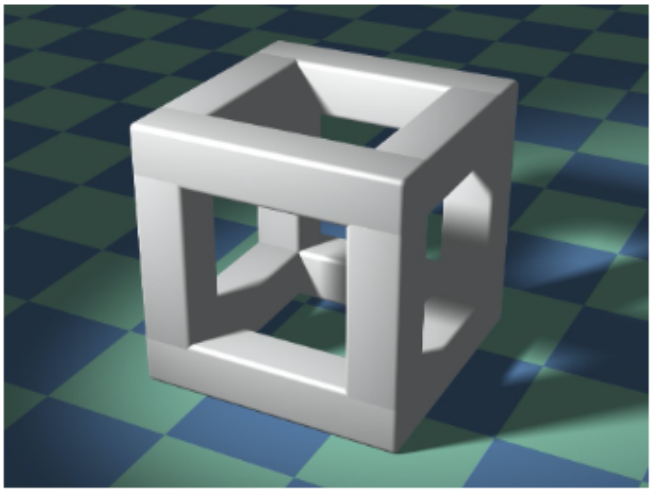
Z-Buffer Algorithm

步骤

Z-Buffer算法可以完美的解决画家算法的缺陷，它沿用了画家算法按照物体远近关系来决定绘制顺序的思路，只是我们不在关注物体本身，而是关注每一个屏幕像素的深度

- 记录每个像素当前时刻的最小深度值
- 我们会生产一张额外的z-buffer来存储像素的z-value
- 我们现在有两个buffer
  - frame buffer，用来存储颜色值
  - depth buffer（z-buffer），用来存储最小深度值
- 在我们光栅化最后，绘制到屏幕上时，会根据这两个buffer来决定每个像素的颜色值
- 我们之前定义过相机和Lookat，对于深度来说数值都是正数，z-value越小表示离摄像机越近，z-value越小表示离摄像机越远

这里给出一个z-buffer的例子：
左边是光栅化的结果，我们得到了一个远近顺序正确的结果；右边是每个像素深度的可视化，颜色越深表示值越小，那么对应深度就越近。



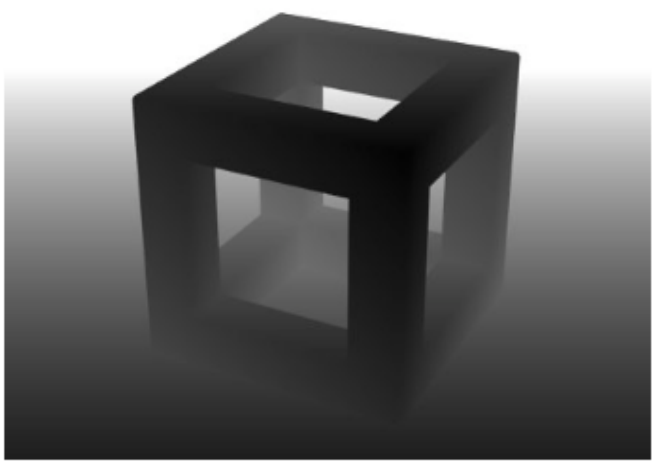


Image source: Dominic Alves, flickr.

Rendering

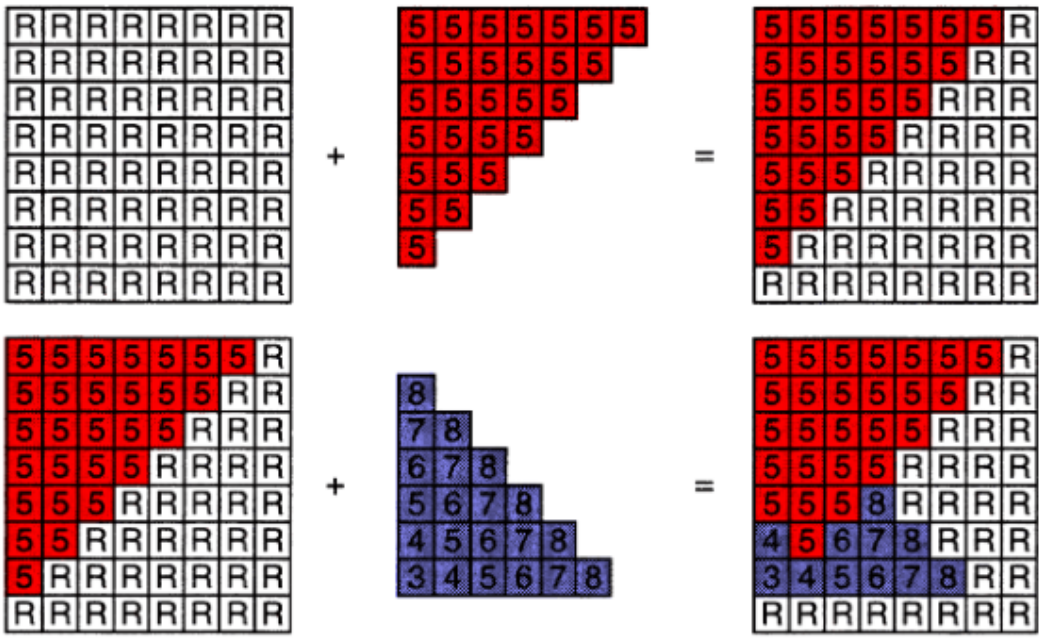
Depth / Z buffer

核心过程

给出核心过程的伪代码

```
// Initialize depth buffer to Infinity
for (each triangle T)
    for (each sample(x,y,z) in T)
        if (z < zbuffer[x, y])          // closest sample so far
            framebuffer[x, y] = rgb;    // update color
            zbuffer[x, y] = z;          // update depth
```

其实就这么多内容，仅仅多了一个分支判断和一个全像素大小的buffer
我们来看一下具体的例子，帮助理解核心的深度更新流程：



- 初始化一个全像素的大小的buffer，初始值为无穷远处
- 采样一个深度全为5的三角形，得到更新后的深度缓冲
- 采样第二个深度值复杂且与第一个三角形有重叠的三角形，根据深度关系更新深度缓冲

算法复杂度

在不计算采样三角形的复杂度的情况下：

- 画家算法处理需要遍历每个三角形做采样外，还需要额外的排序，加入我们把采样步骤优化到了排序里，那么画家算法的复杂度是 $O(nlogn)$
- Z-Buffer算法只用做一次遍历即可做完整个绘制，复杂度是 $O(n)$ ，我们并没有做排序，只是记录最小值

而采样三角形的复杂度取决于三角形的包围盒的大小，这里考虑最差情况就是包围盒大于或等于屏幕大小，这样对每个三角形来说都是全分辨率采样。