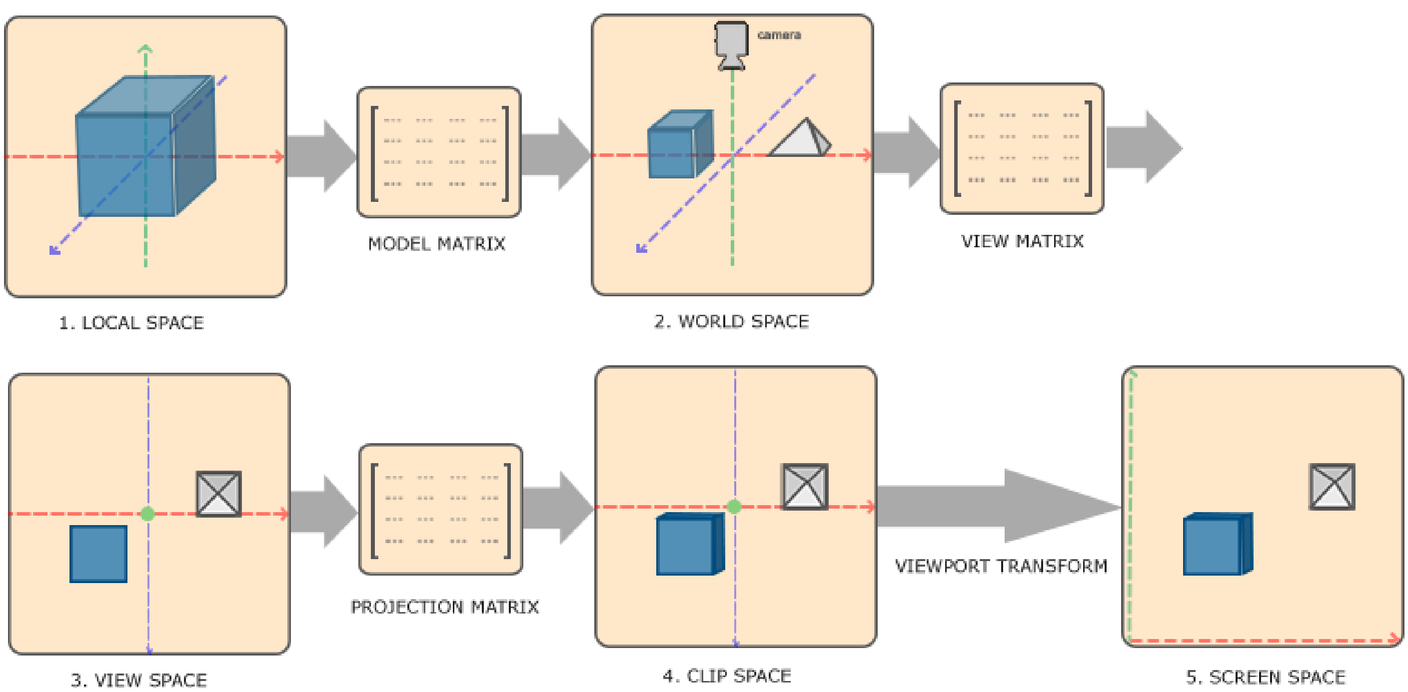
Viewing transformation

闫令琪博士将视图变换和投影变换合在一起，统称为观测变换

If you can not render Mathematical formula, please read this Viewing_transformation.pdf

目录

将 3维空间中的东西放到 2维的窗口显示出来需要经过以下几个步骤：

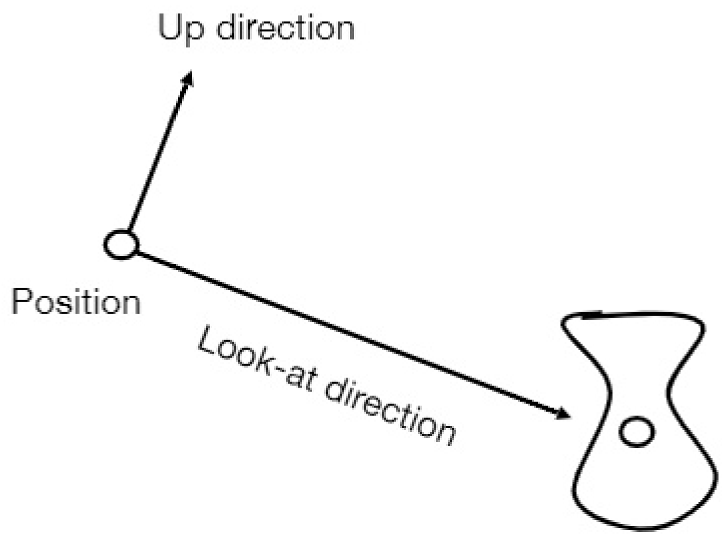


- model transformation
  将模型从模型空间转换到世界空间
- view transformation
  将世界空间的模型转换到摄像机位置所对的观察空间

- projection transformation
  将观察空间 3维的模型映射到 2维空间坐标，转换到裁剪空间
- viewport transformation
  将裁剪空间得到的平面映射到屏幕的分辨率范围内，转换到屏幕空间

View Transformation

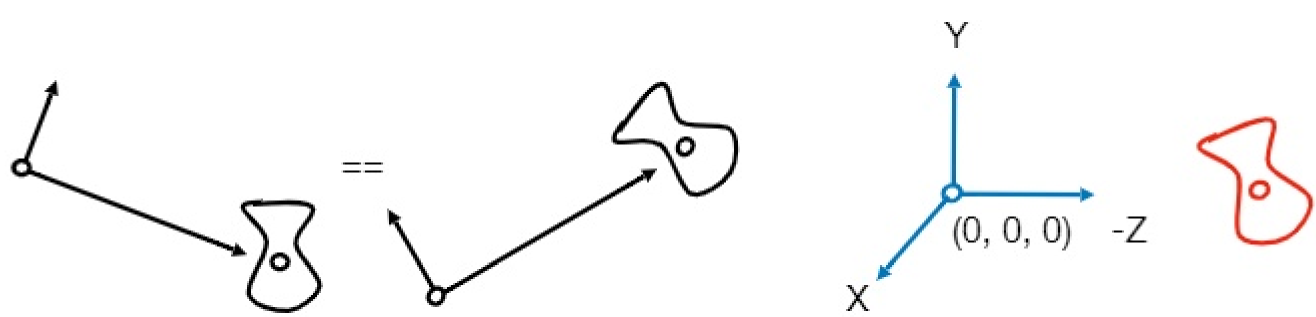
define a camera



- 位置（eye position）： $\overrightarrow{e}$
- 观察方向（Look-at/gaze direction)： $\hat{g}$
- 向上方向（Up direction）： $\hat{t}$

通过这个三个属性，我们在世界空间中定义了一个相机。

观察空间

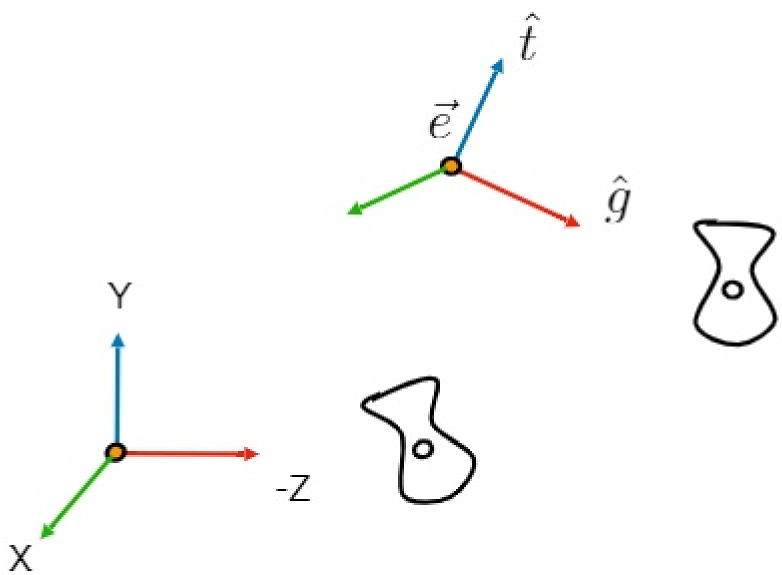


相机和模型的相对位置固定，现在我们做视图变换，变换后的相机和模型的相对位置没有改变。
我们假定，变换后的相机在观察空间的位置：

- 位置（eye position）：$\overrightarrow{e} = (0,0,0)$
- 观察方向（Look-at/gaze direction)：$\hat{g} = -Z$
- 向上方向（Up direction）：$\hat{t} = Y$

视图变换

由于相对位置没有改变，我们对相机做视图变换，就相当于对模型做了视图变换。现在我们需要求一个矩阵，将我们定义在世界空间的相机变换到观察空间的固定位置，所得的矩阵就是我们需要的视图变换矩阵。



使用变换矩阵 M_{view} 将相机从世界空间变换到观察空间

- 将 $\overrightarrow{e}$ 平移到原点
- 将 $\hat{g}$ 旋转到 $-Z$ 轴
- 将 $\hat{t}$ 旋转到 Y 轴
- 将 $\hat{g} \times \hat{t}$ 旋转到 X 轴

可以简写为：$M_{view} = R_{view} T_{view}$

直接写出平移的变换矩阵：$T_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

但是 R_{view} 就非常复杂，不是很好求解出来，这个时候我们反过来想，将观察空间旋转到世界空间：

- X 轴旋转到 $\hat{g} \times \hat{t}$
- Y 轴旋转到 $\hat{t}$
- $-Z$ 轴旋转到 $\hat{g}$

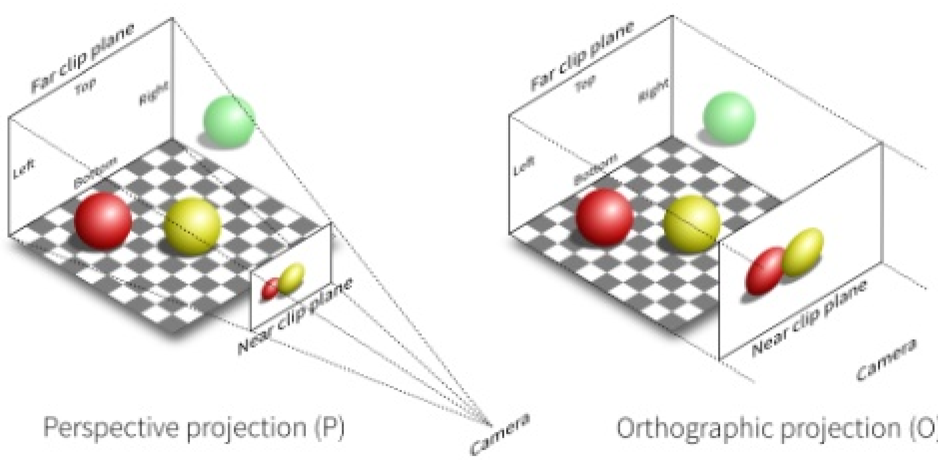
$$R=\begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & x_{\hat{t}} & x_{-\hat{g}} & 0 \\ y_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{t}} & y_{-\hat{g}} & 0 \\ z_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{t}} & z_{-\hat{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于旋转矩阵的特性性质：$R_{-\theta}=R_{\theta}^{-1}=R_{\theta}^{T}$

我们就得到了视图变换的旋转矩阵：$R_{view}=R^{-1}=\begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{g}\times\hat{t}} & 0 \\ x_{\hat{t}} & y_{\hat{t}} & z_{\hat{t}} & 0 \\ x_{-\hat{g}} & y_{-\hat{g}} & z_{-\hat{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

我们已经求得了视图变换矩阵 M_{view}，模型乘上这个矩阵就获得了观察空间的模型位置。

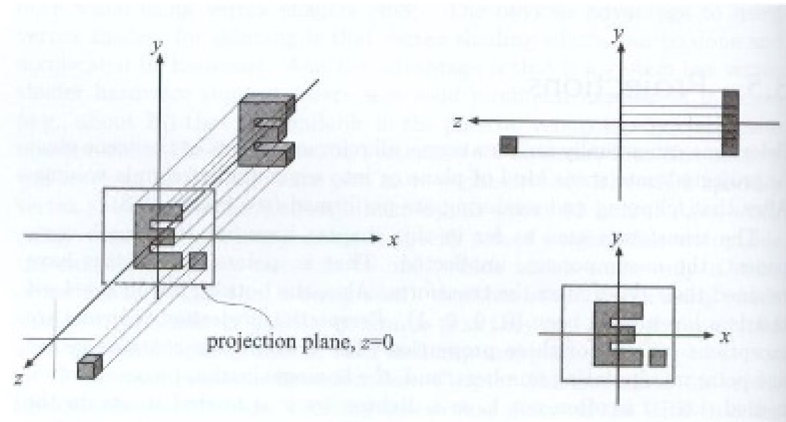
Projection Transformation



相机和截面形成一个锥体，把锥体中远截面到近截面的相机所看到的物体给映射到 2维屏幕上的过程，被称为投影变换。

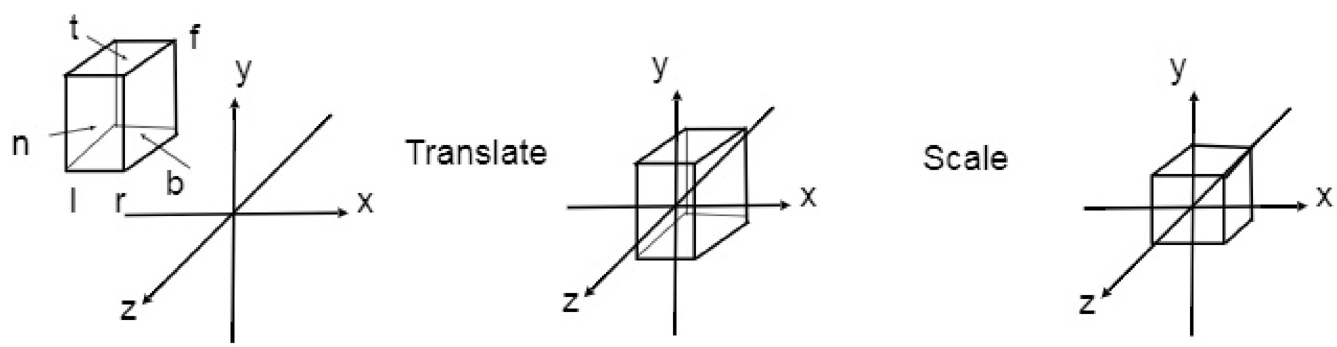
- 透视投影：相机在**不远处**的一个点上，近截面小远截面大，把近远截面所形成的视锥体内的物体映射到近截面上
- 正交投影：相机在**无限远**的一个点上，近截面和远截面一样大，将视锥体（长方体）内的物体映射到近截面上

Orthographic Projection



我们从原点，以 y轴为向上方向，看向 $-z$的方向，然后忽略 z轴就能得到这个模型在 xy平面的投影，然后我们把它挪到 $[-1,1]$的矩阵上，就得到了正交投影

我们如何求取变换矩阵?



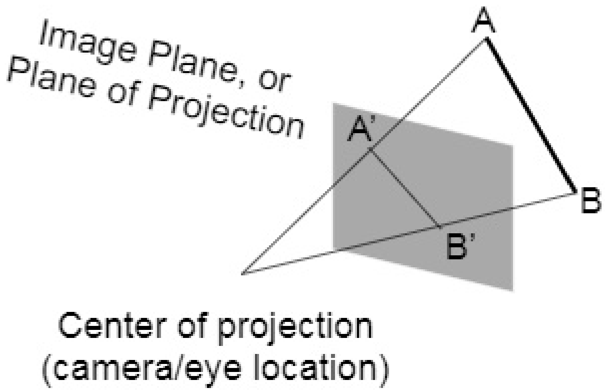
我们把 $[l,r]\times[b,t]\times[f,n]$的视锥体映射到原点的 $[-1,1]^3$的规范立方体（canonical cube）的过程就是正交投影的过程
投影过程简写为：$M_{ortho}=S_{ortho}T_{ortho}$

- 将视锥体中心平移到原点
- 将视锥体缩放到标准立方体的范围内

我们可以直接写出上图例子的变换矩阵：

$$M_{ortho}=\begin{bmatrix}\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{r+l}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{r+l}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

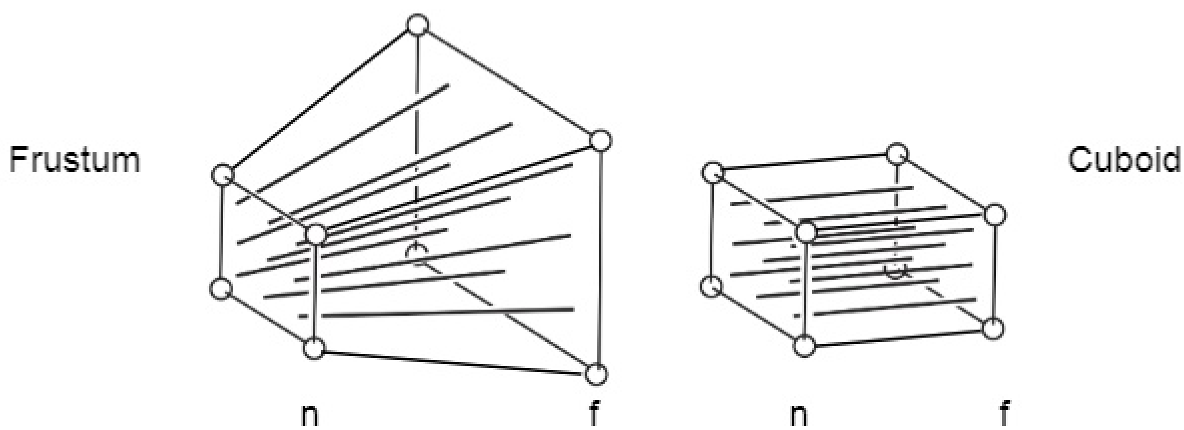
Perspective Projection



- 在计算机图形学，美术等领域使用广泛
- 近大远小
- 平行线不再平行，相交于一个点
  欧式几何里的平行线永不相交，只的是在同一平面内，透视投影这里不是同一平面所以相交了

现在我们来做透视投影：

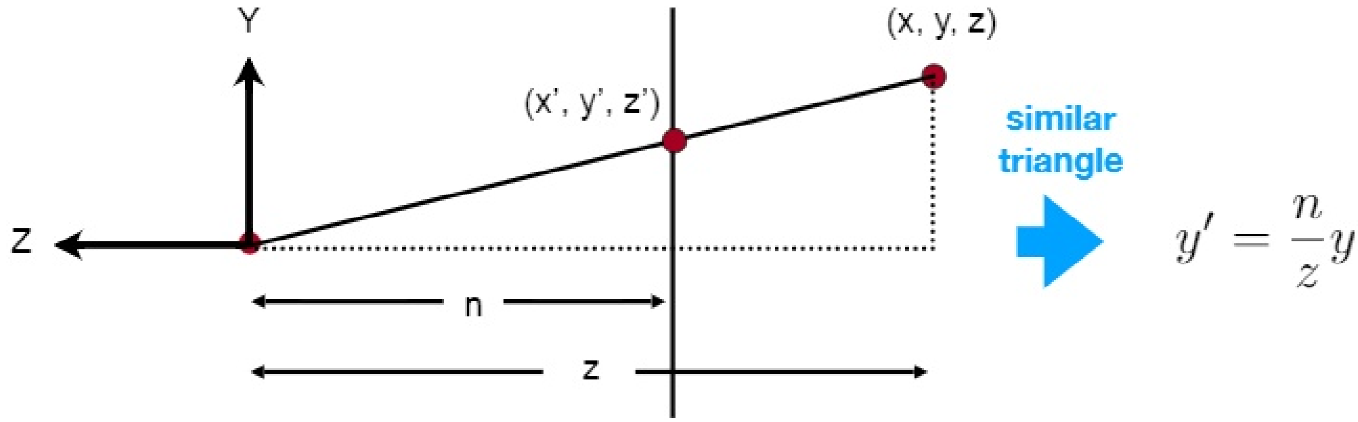
- 将透视投影的视锥体变换到正交投影的视锥体（$M_{persp->ortho}$）



- 得到的视锥体做一次正交投影

这样我们就能得到透视投影的结果

那么，$M_{persp->ortho}$该如何求取？
我们从透视投影视锥体的侧面来看，这里我们只关注上半部分
变换后的点 (x', y', z') 和原来的点 (x, y, z) 的关系如下：



$x' = \frac{n}{z}x$ 和 $y' = \frac{n}{z}y$

我们写出它的齐次坐标表示: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} nx/z \\ ny/z \\ unknown \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\times z}{=\!=} \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ z \end{pmatrix}$

> 齐次坐标表示点的时候，乘以一个数，仍然表示这个点（做归一化即可）

透视视锥体变换到正交视锥体的过程如下:

$$M_{persp->ortho}^{4\times4}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ z \end{pmatrix}$$

这个时候我们可以写出部分的 $M_{persp->ortho}$

$$M_{persp->ortho} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这个时候我们将近截面的坐标 $(x, y, n, 1)^T$ 带入式子中，用 n 来代替 z，可以得到下面的式子:

$$M_{persp->ortho}^{4\times4}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ z \end{pmatrix} \xRightarrow{replace\ z\ with\ n} M_{persp->ortho}^{4\times4}\begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ n \end{pmatrix}$$

我们观察可以发现，近截面的点在变换后，坐标不会发生改变，且**近截面点的坐标同时乘以一个数，仍然表示这个点**，可以写出:

$$M_{persp->ortho}^{4\times4}\begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ unknown \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ n^2 \\ n \end{pmatrix}$$

可以看到，带入近截面的点，$unknown$ 的值是 n^2 ，与 x y 没有任何关系，可以直接进一步的写出变换矩阵的第三行未知量：

$(0\ 0\ A\ B)\begin{pmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = n^2$，写成代数式子：$An + B = n^2$

再观察另一个特殊点，远截面的中心点 $(0,0,f,1)^T$ ，这个点再变换后，坐标也不会发生改变，同理可以写出：

$M^{4\times4}_{persp->ortho}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{pmatrix}$ ，写出代数式子：$Af + B = f^2$

n 和 f 都是我们的已知量，根据两个代数式可以直接求得 A 和 B 的值：

$A = n + f$

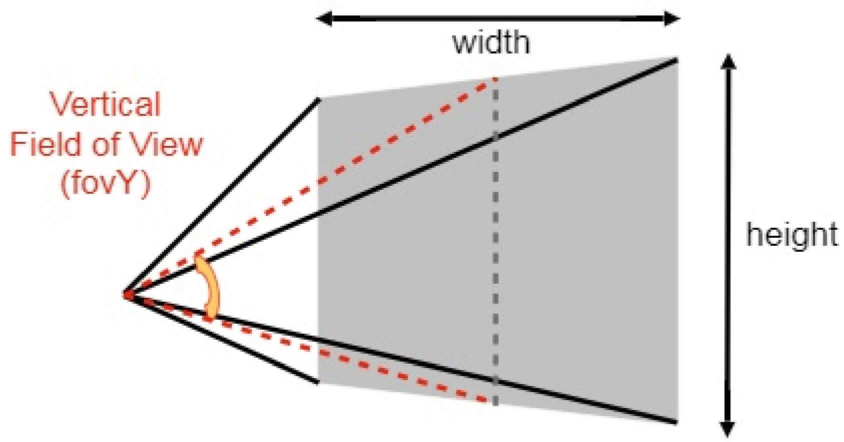
$B = -nf$

整理一下我们的结果：$M_{persp->ortho} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

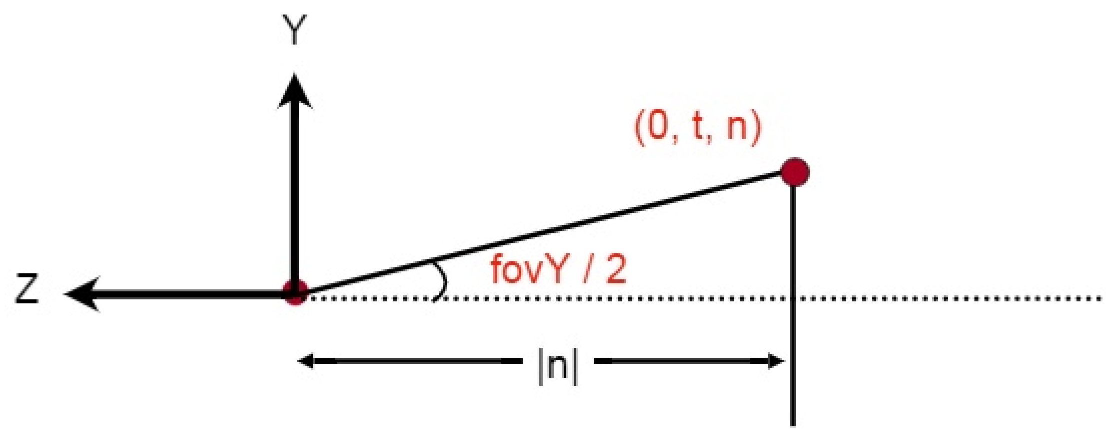
做完透视投影视锥体到正交投影视锥体的变换后，再做一次正交投影就得到透视投影的变换结果了
写出透视投影的变换矩阵：$M_{persp} = M_{ortho}M_{persp->ortho}$

现在我们已经确定了透视投影的变换矩阵的求解方法，但是还需要解决一个问题：
透视投影视锥体做变换得到一个 $[l,r]\times[b,t]\times[f,n]$的正交投影视锥体，其中 f 和 n 是已知的近截面和远截面的 z 值，那么，我们该如何定义 l、r、b、t呢
我们定义相机到近截面的关系：

- **field-of-view(fovY)**：视角，表示相机可以看到的近截面的上下范围，如下图两个红色线段的夹角
- **aspect ratio**：宽高比，表示相机可以看到的近截面的大小，如下图近截面的宽高之比



我们同样从侧面来观察这个四棱锥，看一下 l、r、b、t 与定义之间的关系：



$$\tan\frac{fovY}{2}=\frac{t}{\|n\|}$$
$$aspect=\frac{r}{t}$$

现在我们已经可以通过 $fovY$、$aspect$、n、f 来做透视投影变换了