Transformation

If you can not render Mathematical formula, please read this Transformation.pdf

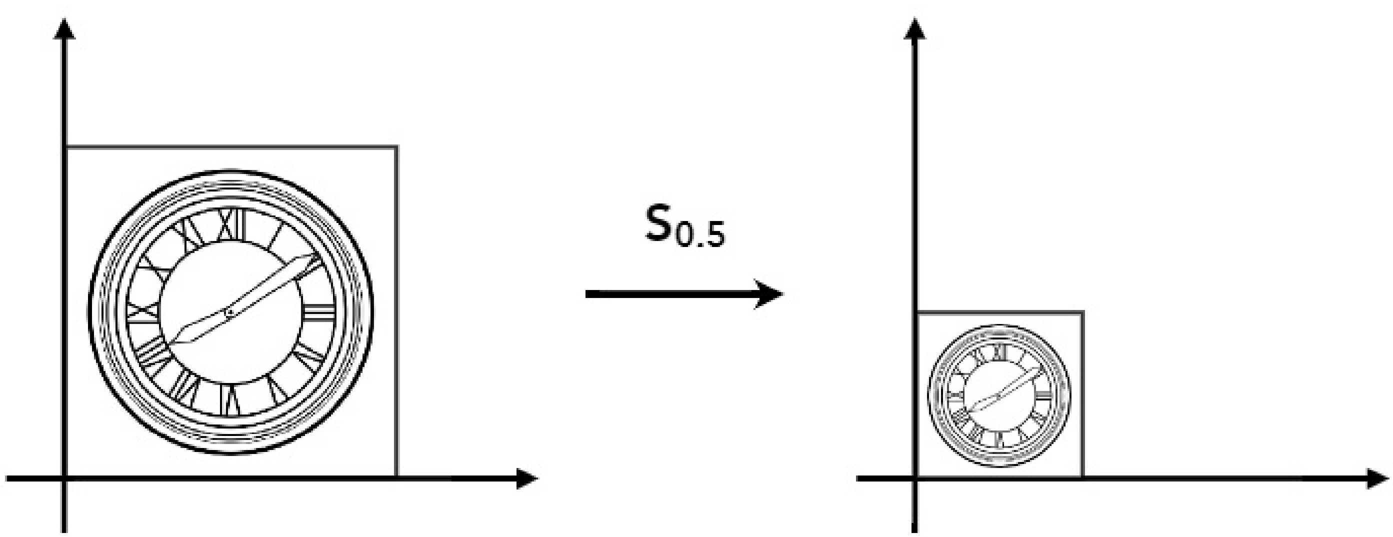
目录

- 2维变换
- 齐次坐标
- 变换的合成
- 3D Transforms

2D transformations

Scale Transform

等比缩放：将图像的横轴和纵轴都缩放0.5，变为原来的 $1/2$



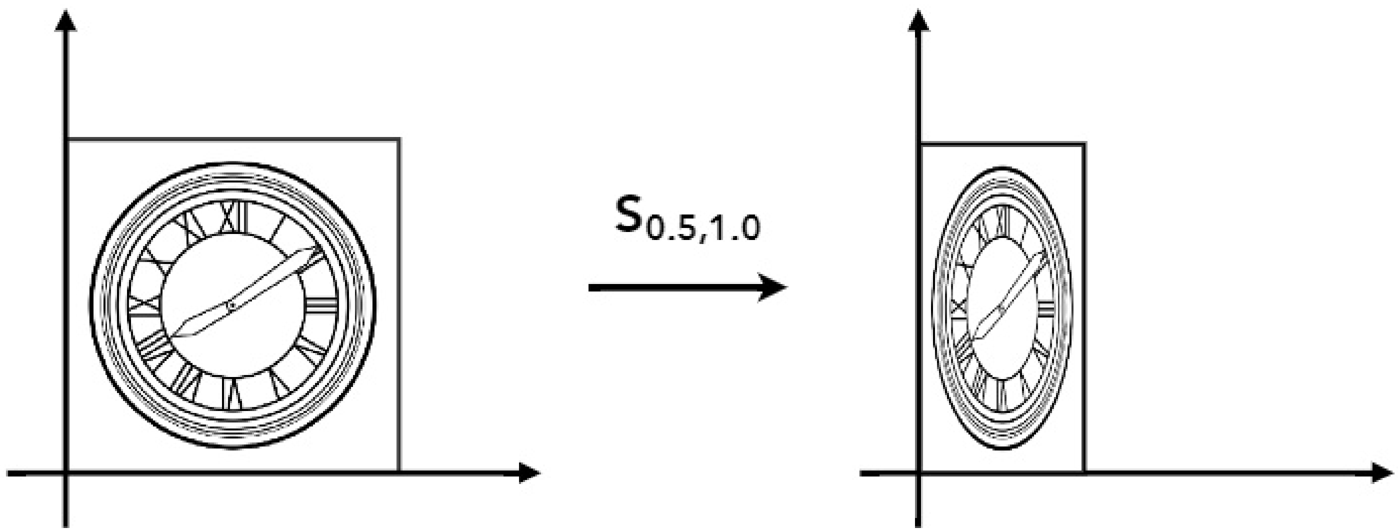
- 数学形式：

  > $x' = sx$
  > $y' = sy$

- 缩放矩阵：

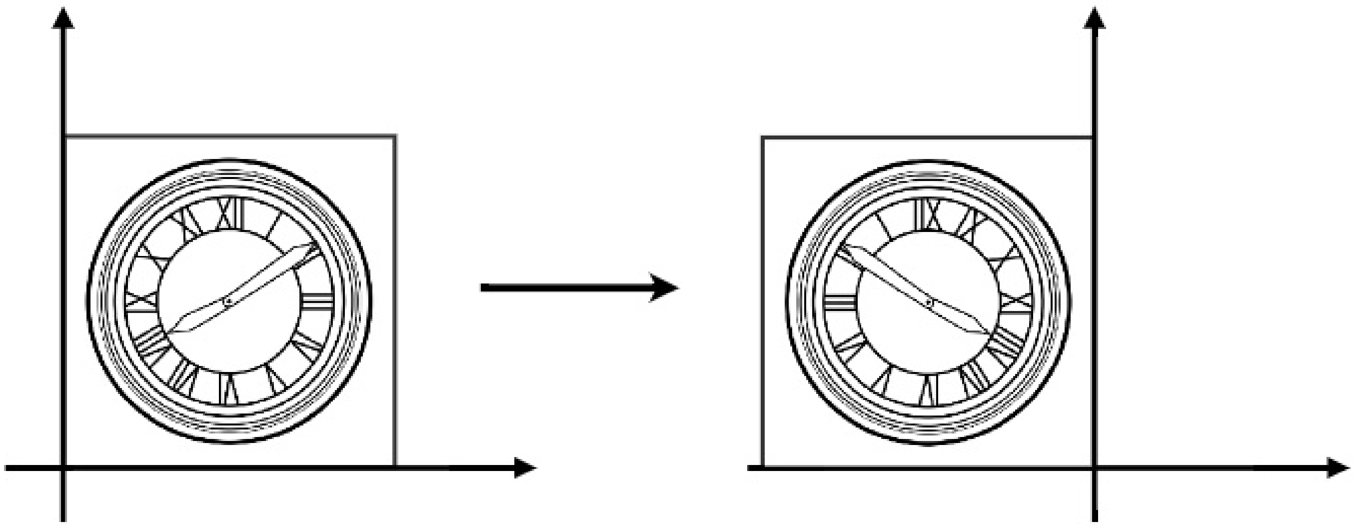
> $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

非等比缩放：将图像的横轴缩放0.5，纵轴不变



- 缩放矩阵：
  > $s_x = 0.5$
  > $s_y = 1$
  >
  > $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflection Matrix



水平方向翻转，图像相对于 y 轴做了翻转

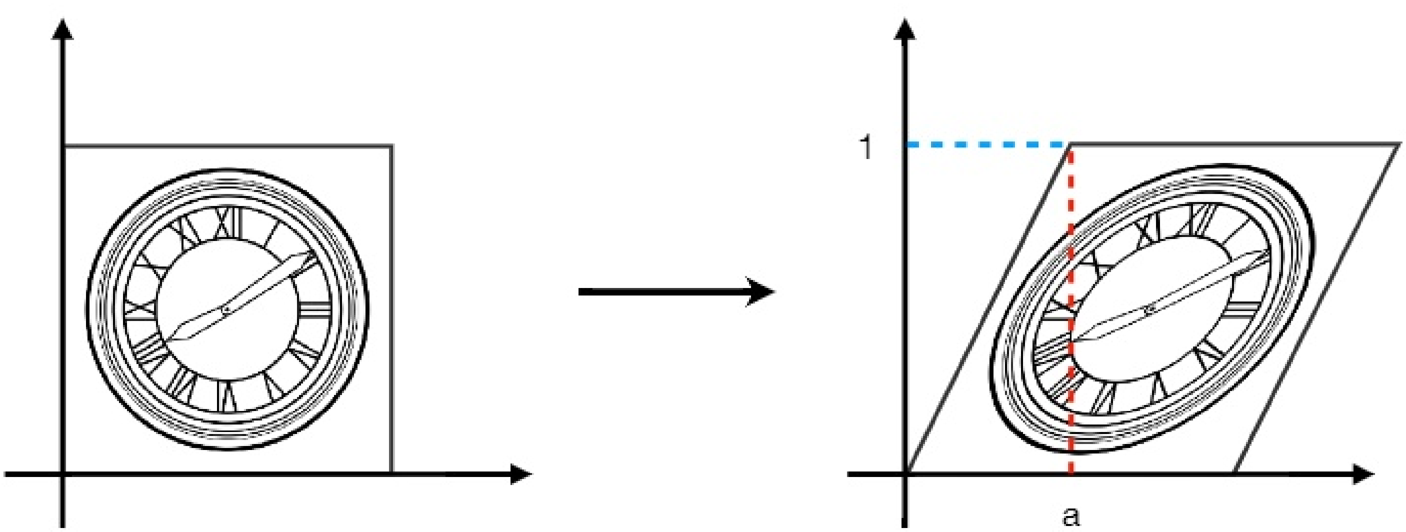
- 数学形式：

> $x' = -x$
> $y' = y$

- 反射矩阵：

> $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Shear Matrix



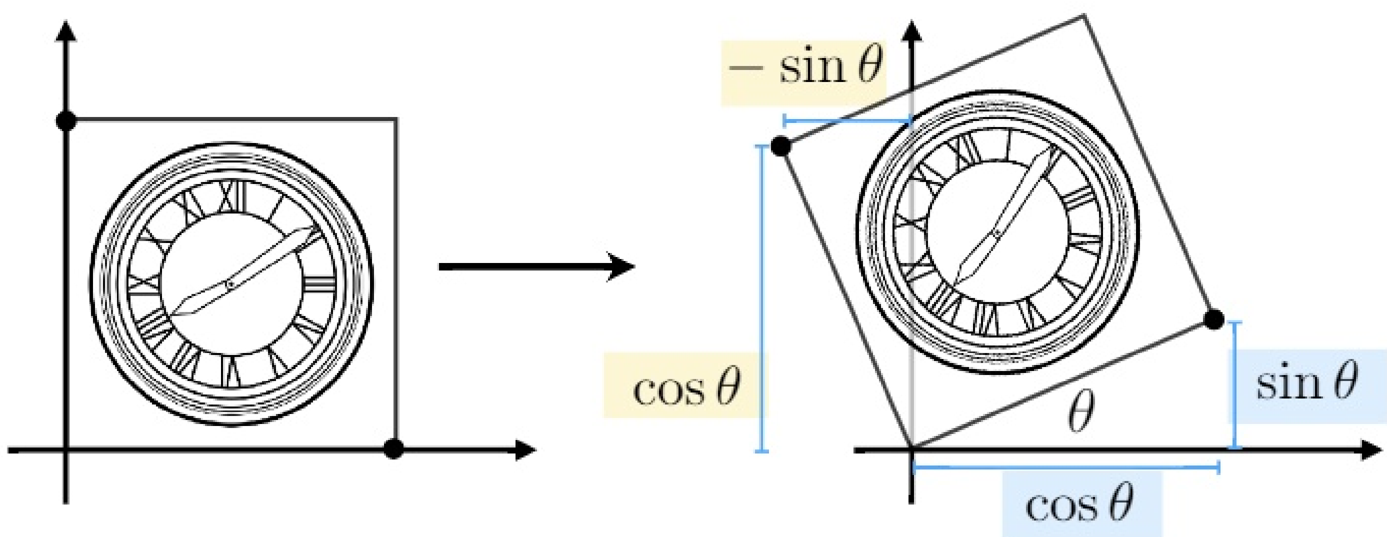
图像所有的点，竖直方向没有改变，水平方向做了一定规律的移动

- 数学形式:
  > $x' = x + ay$
  > $y' = y$

- 反射矩阵:
  > $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotation Matrix

默认情况下，绕远点做逆时针旋转



图像旋转45°（默认绕远点 $(0, 0)$ 逆时针旋转45°）

- 数学形式:
  > $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$
  > $y' = x\cos\theta + y\cos\theta$

- 旋转矩阵:
  > $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

旋转矩阵的特殊性质

> $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
> $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta^T$
> $R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$

在旋转里面，旋转矩阵的逆就是旋转矩阵的转置：$R_{-\theta} = R_\theta^{-1} = R_\theta^T$
在数学上，我们称矩阵的逆和矩阵的转置相同的矩阵为正交矩阵

线性变换

满足以下形式的变换被称为线性变换, $X' = \mathbf{M}X$:

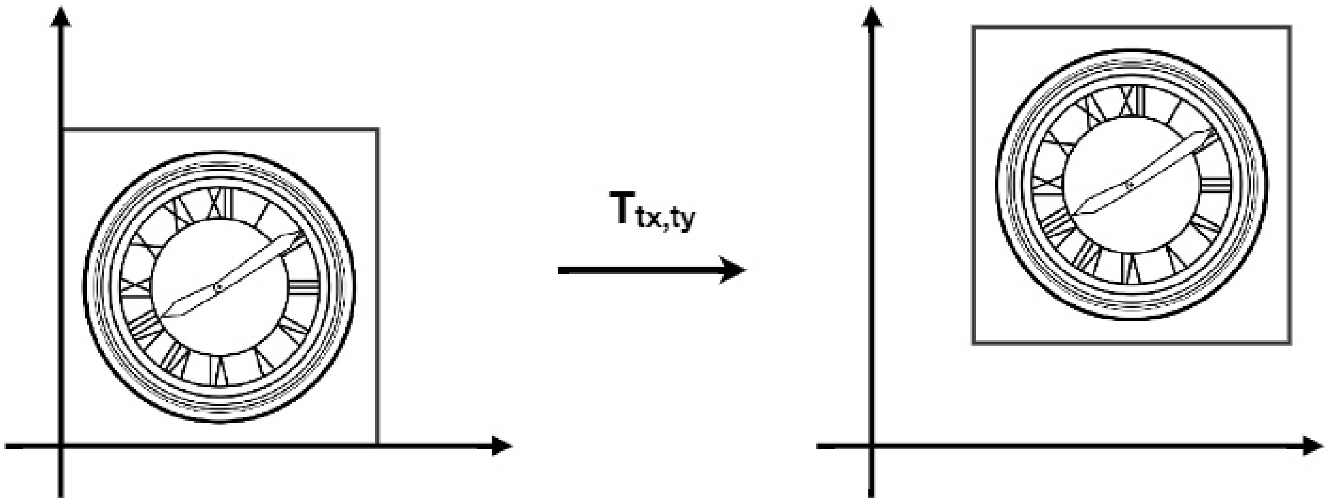
- 数学形式：
  > $x' = ax + by$
  >
  > $y' = cx + dy$

- 变换矩阵：
  > $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
  > 在图形学中，用矩阵来表示位置的变换

Homogeneous coordinates

Translation

水平和竖直方向加上一定的偏移量



- 数学形式：

> $x' = x + t_x$
> $y' = x + t_y$

- 变换矩阵：

> $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

我们发现，不能把偏移量放到变换矩阵里边了
因此，**平移不是线性变换**
我们应该如何把平移和线性变换组合到同一个变换矩阵里——齐次坐标

齐次坐标

给任意的点或向量增加一个维度（w-coordinate）

- 2维的点：$(x, y, 1)^T$
- 2维的向量：$(x, y, 0)^T$

这个时候，我们重新为三维表示的点或向量给出变平移的变换矩阵：

> $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

这样我们只用一个矩阵乘以向量的形式表示了平移变换

为什么向量和点的新增维度 w 的值定义不一致

向量具有**平移不变性**，向量乘以平移矩阵之后的结果不应该发生改变
我们以点和向量加减的几何意义来理解点和向量的区别：

- 向量加上向量后仍然得到一个向量：
  > $$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ 0 \end{bmatrix}$$
- 两个点相减得到一个向量：
  > $$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ 0 \end{bmatrix}$$
- 点加上一个向量，表示点沿着向量移动向量长度这么远的距离，仍然是一个点：
  > $$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们扩充一下，连个点相加表示什么呢

- > $$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ 2 \end{bmatrix}$$

因为 w 轴必须是 0 或 1，我们对其做个除法，得到：$\begin{bmatrix} (x_a + x_b)/2 \\ (y_a + y_b)/2 \\ 1 \end{bmatrix}$，这是两个点的中点

Affine Transformations

仿射变换，是线性变换和平移变换的组合

- 数学形式：
  > $x' = ax + by + t_x$
  > $y' = cx + dy + t_y$
- 变换矩阵：

> $$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_x\\t_y\end{bmatrix}$$

- 齐次坐标表示:

> $$\begin{bmatrix}x'\\y'\\w'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & t_x\\c & d & t_y\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

现在我们使用一个矩阵既能表示线性变换又能表示平移变换:

现在我们给出每种变换的齐次坐标表示的变换矩阵:

- **缩放**

> $$S(s_x,s_y)=\begin{pmatrix}s_x & 0 & 0\\0 & s_y & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- **旋转**

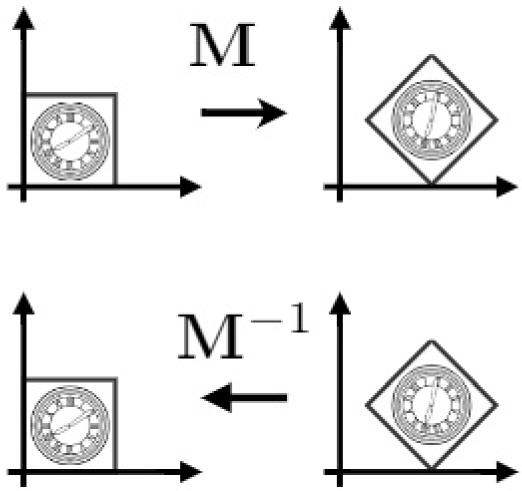
> $$R(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- **平移**

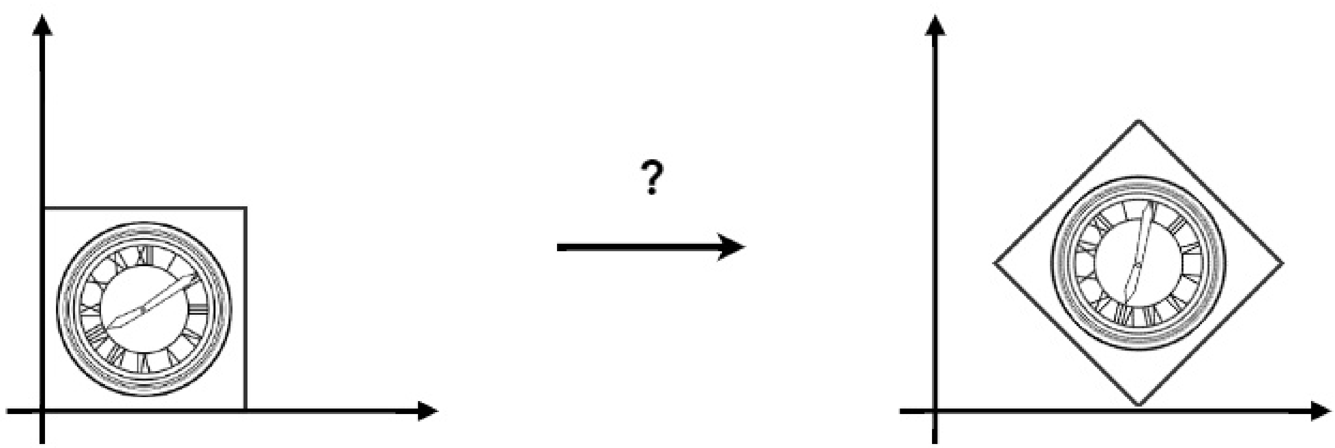
> $$T(t_x,t_y)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t_x\\0 & 1 & t_y\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Inverse Transform

图像经过变换矩阵 M 变换得到新的图像，此时把新图像变换回原来的图像，这个变换过程被称为逆变换，变换矩阵数学上就是矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1}



变换的合成

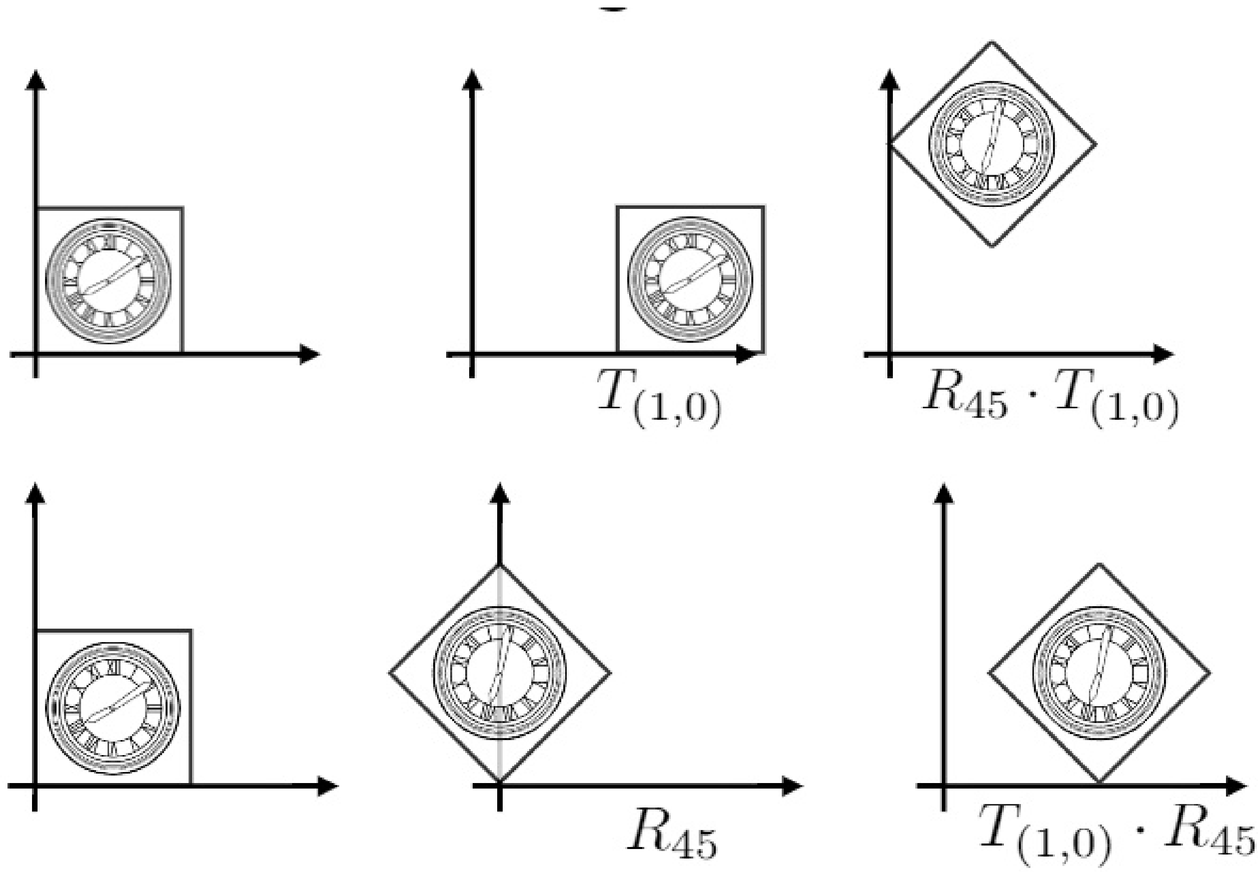


我们要得到这样一个结果，需要经过多个变换过程，先旋转后平移或者先平移后旋转都能达到目的

变换的顺序

我们实际看一下先旋转后平移或者先平移后旋转的结果是否有区别：

- 先平移后旋转，得到图中上方的结果
- 先旋转后平移，得到图中下发的结果



有几个值得注意的点：

- 从结果来看，变换的顺序会影响变换的结果：
  > $R_{45} \cdot T_{(1,0)} \neq T_{(1,0)} \cdot R_{45}$
- 后进行的变换写在了矩阵的左侧：$Result = R_{45} \cdot T_{(1,0)} \cdot Point$
  上一节讲矩阵和向量的乘法时说到过，为了和点的列矩阵形式配合，使得变换之后的结果仍然是列矩阵，**变换矩阵的应用是从右往左进行的**：
  > $Result = R_{45} \cdot T_{(1,0)} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

合成变换矩阵

我们把前面变换 $T_{(1,0)} \cdot R_{45}$ 推广到多次连续变换，我们把图像进行从 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 的 n 次变换：

> $A_n(...(A_3(A_2(A_1(x)))))$
> 我们使用矩阵乘法的交换律来做一下调整，得到：
> $A_n(...(A_3(A_2(A_1(x))))) = (A_n \cdots A_3 \cdot A_2 \cdot A_1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

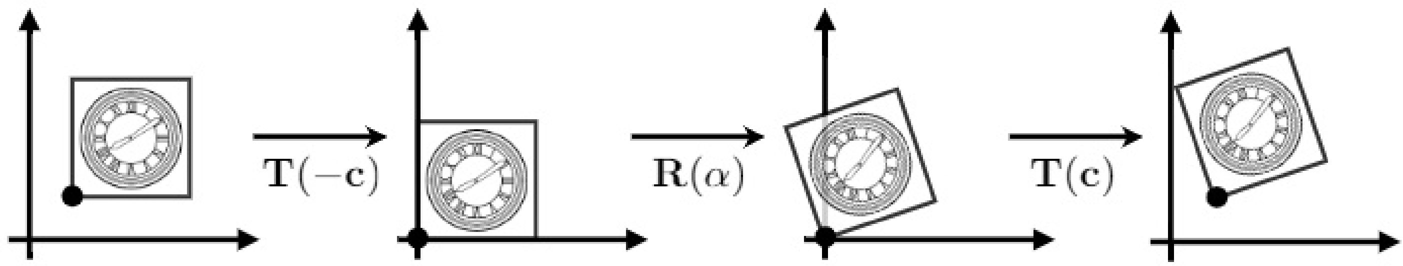
n 个 3×3 的矩阵相乘得到的结果仍然是一个 3×3 的矩阵，我们可以用一个矩阵表示一串非常复杂的变换：

> $$Result = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

现在，我们将很多不同的矩阵合成了一个矩阵

分解复合的变换

矩阵可以合成，那么就可以分解
举个例子，我们想绕给定的点 c 进行旋转：



我们先将图像移回原点，然后绕原点旋转，再把得到的结果移回给定的点，这样就得到了这个变换的结果
我们把它记为：$Result = M_c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
我们按照图示中的过程把它分解出来得到

$$Result = T(c) \cdot R(\alpha) \cdot T(-c) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3D Transforms

我们前面已经搞清楚了 2维的变换，现在我们将它推广到 3维

齐次坐标

我们仍然需要使用齐次坐标：

- 3维的点：$(x, y, z, 1)^T$
- 3维的向量：$(x, y, z, 0)^T$

使用齐次坐标描述 3维空间中的仿射变换：

> $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

仿射变换

Scale

> - $S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Translation

> - $S(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation

> - 绕 x 轴旋转：$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

> - 绕 y 轴旋转：$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

> - 绕 z 轴旋转：$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

为什么这里绕 y 轴旋转跟绕其他轴旋转的变换矩阵符号不一样呢？
因为在 xyz 坐标系中，x坐标由$y \times z$得到，z坐标由$x \times y$得到，而y坐标由$z \times x$得到
我们默认为逆时针旋转，而由$z \times x$所组成的 2维坐标系就需要转动$-\alpha$度才行

3维旋转的合成

绕任意轴做任意角度的旋转都可以由绕xyz三个轴分别旋转得到：$R_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma) = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$
在数学上我们将这三个角度叫做欧拉角（Euler angles），绕xyz轴旋转分别被称为 Roll，Pitch，Yaw
现在我们使用罗德里格斯旋转公式（Rodrigues' Rotation Formula）将它表示出来：

> 绕任意轴 $\mathbf{n}$ 旋转 α度：
>
> $$R(\mathbf{n},\alpha) = \cos(\alpha)\mathbf{I} + (1-\cos(\alpha))\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathbf{T}} + \sin(\alpha)\underbrace{\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}}$$
>
> $\mathbf{N}$ 是向量叉乘的矩阵表示中的矩阵