Introduction to Linear Algebra

If you can not render Mathematical formula, please read this Introduction_to_Linear_Algebra.pdf

目录

Vectors

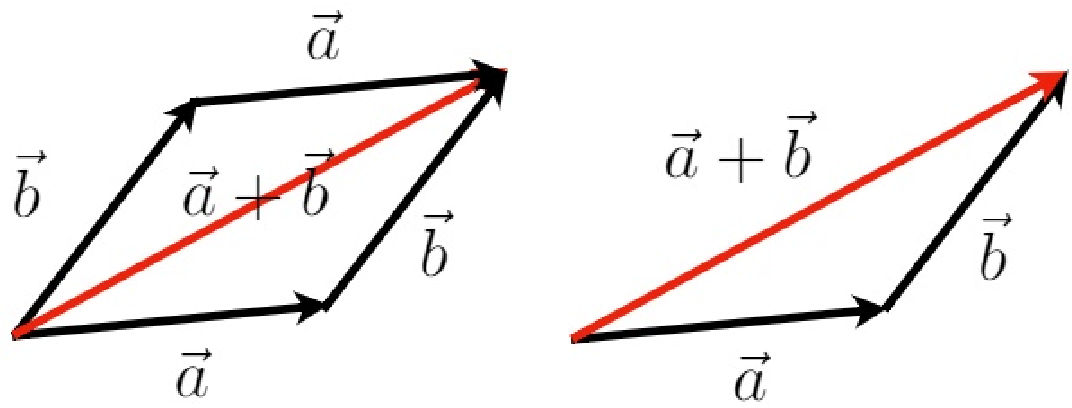
Basic

- 向量常被写作 $\overrightarrow{a}$ 或者 $\boldsymbol{a}$
- 也可以表示为由起始点指向结束点 $\overrightarrow{AB} = B - A$
- 同时具有方向和大小（方向和长度）
- 没有起始位置，表示两个点的相对关系
- 向量的长度表示为 $\|\overrightarrow{a}\|$

单位向量（Unit vector)

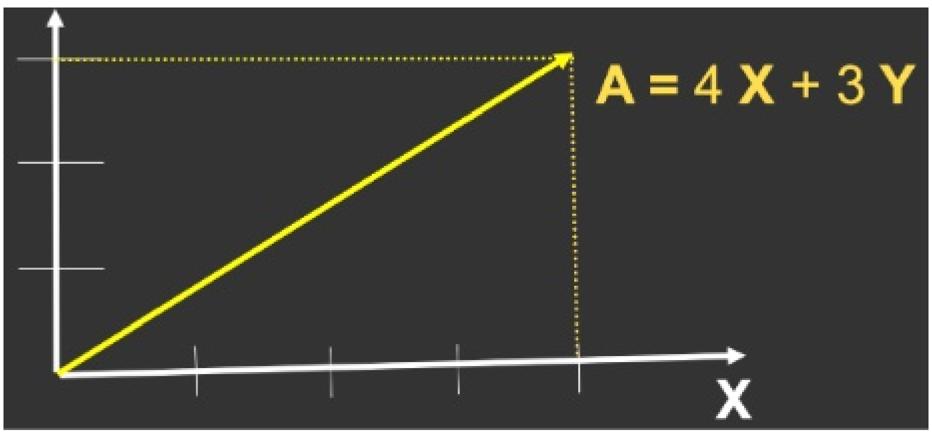
- 长度为1，$\|\overrightarrow{a}\| = 1$
- 求某个向量 $\overrightarrow{a}$ 的单位向量：$\hat{a} = \overrightarrow{a}/\|\overrightarrow{a}\|$
- 我们一般默认单位向量表示方向，这一点被计算机图形学广泛使用

向量求和



- 几何表示：如图，根据平行四边形法则或三角形法则求和
- 代数表示：坐标值直接相加即可（参照下面的坐标系表示向量）
- $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$，相减时可以转换为做加法

向量的坐标系表示



- 向量可以用坐标系（常用正交坐标系）表示
- 表示时默认向量的起始位置在原点

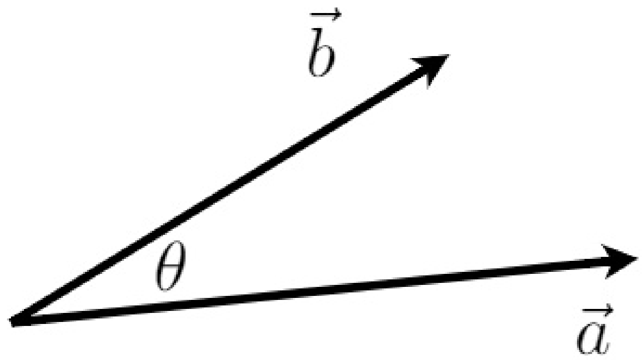
图形学中默认向量为列向量：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

转置，行列互换：$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=(x,y)$

向量求长度：$\|\mathbf{A}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

向量的乘法

点乘



> $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|\cos\theta$$
> $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$$
> 对于单位向量来说：$\cos\theta = \hat{a} \cdot \hat{b}$

性质

> - 交换律：$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
> - 结合律：$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$
> - 分配率：$(k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (k\overrightarrow{b}) = k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$

坐标表示

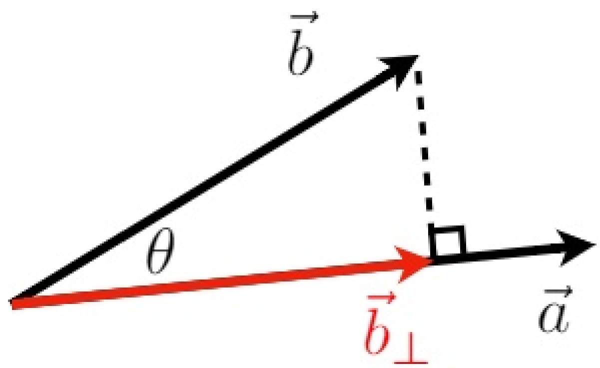
> - 2维：$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a x_b + y_a y_b$
> - 3维：$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

图形学中的应用

- **获取两个向量之间的夹角**

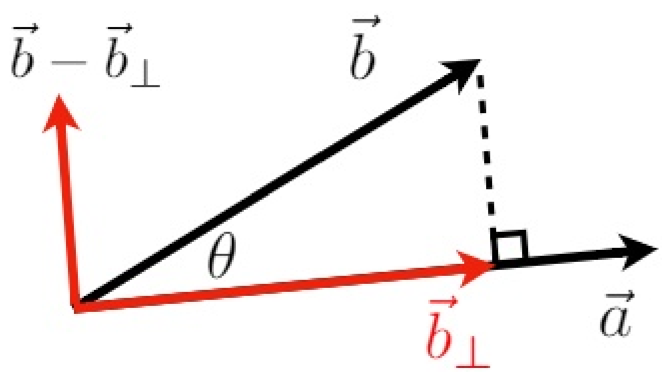
> $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$$

- **获取一个向量在另一个向量上的投影**



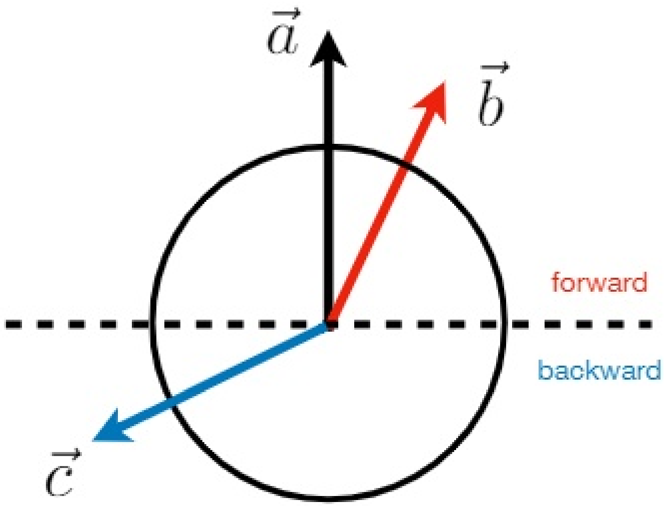
> 定义$\overrightarrow{b}_\perp$是$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$上的投影
> 显然，$\overrightarrow{b}_\perp$属于$\overrightarrow{a}$（或者说是属于$\hat{a}$），$\overrightarrow{b}_\perp = k\hat{a}$
> $k = \|\overrightarrow{b}_\perp\| = \|\overrightarrow{b}\|$

- **将向量按某个方向垂直和水平的分解**



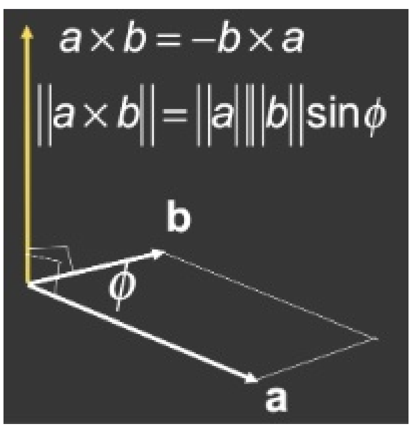
> 将$\overrightarrow{b}$投影到$\overrightarrow{a}$方向上，得到水平的分解量：$\overrightarrow{b}_\perp$
> 设垂直分量为$\overrightarrow{b_n}$，显然$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}_\perp + \overrightarrow{b_n}$
> 移项得到垂直分量：$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}_\perp$

- **判断向量相较于另一方向是向前还是向后**



> $\overrightarrow{b}$相对于$\overrightarrow{a}$是朝前的：$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0$
>
> $\overrightarrow{c}$相对于$\overrightarrow{a}$是朝后的：$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0$

叉乘



> 两个向量叉乘获得一个垂直于原向量的一个新向量
>
> 方向：右手螺旋定则：握手比大拇指的，四指按图中$\overrightarrow{a}$朝向$\overrightarrow{b}$的逆时针方向握，大拇指自然指向上，大拇指方向就是叉乘向量的方向
>
> 大小：$\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \| = \| \overrightarrow{a} \| \| \overrightarrow{b} \| \sin\theta$

性质

> - 性质一：$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$，由性质一可得：
>   - $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = +\overrightarrow{z}$
>   - $\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{z}$
>   - $\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z} = +\overrightarrow{x}$
>   - $\overrightarrow{z} \times \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$

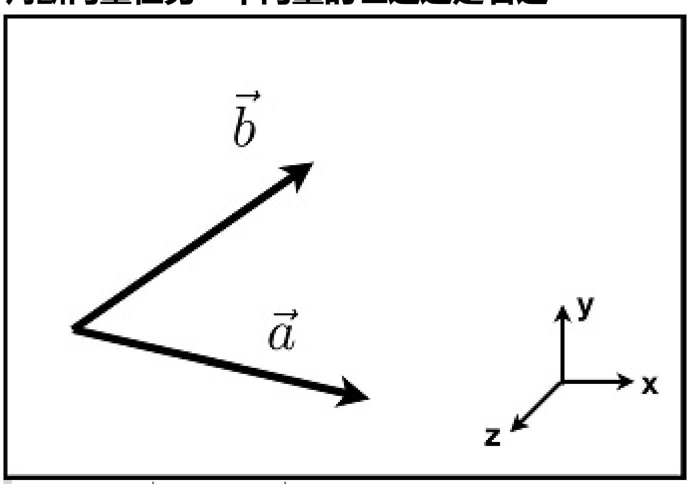
> - $\overrightarrow{z} \times \overrightarrow{x} = +\overrightarrow{y}$
>   - $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{z} = -\overrightarrow{y}$
> - 性质二：$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
> - 性质三：$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
> - 性质四：$\overrightarrow{a} \times k\overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

坐标表示

> $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - y_b z_a \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$
>
> 这里先列出矩阵表示：
>
> $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \mathbf{A}\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

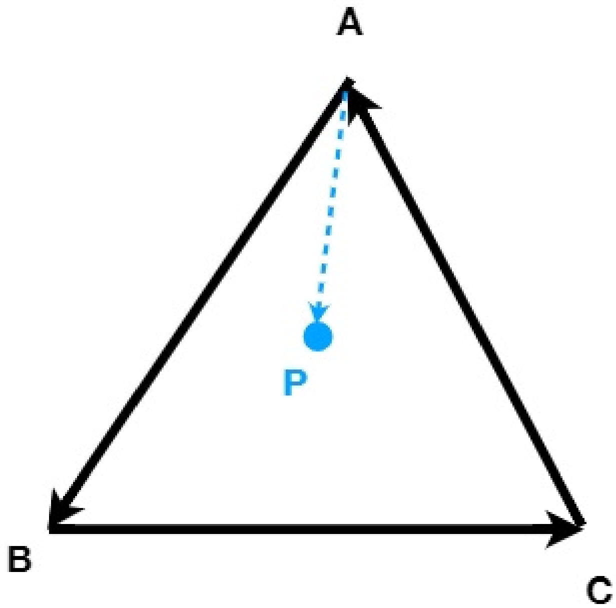
图形学中的应用

- **判断向量在另一个向量的左边还是右边**



> $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$为正：$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$的右侧
>
> $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$为负：$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{a}$的左侧

- **判断点P在三角形内还是外**



> - 计算$(\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB})$、$(\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BC})$、$(\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CA})$得到的三个向量是否同向
>   *ABC三个点必须按顺时针或者逆时针取边的向量*
> - 如果同向，则点P在三角形内，否则点P就在三角形外

Matrices

图形学中常用矩阵来表示变换信息

- 平移、旋转、缩放、切变等

Basic

- 矩阵是什么：m行n列的实数集，被称作$m \times n$的矩阵
  - 一个3×2的矩阵：
    > $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
- 数的加法和乘法：
  - 矩阵$\mathbf{M}$加上一个数k：
    > $$k + \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1+k & 3+k \\ 5+k & 2+k \\ 0+k & 4+k \end{pmatrix}$$
  - 矩阵$\mathbf{M}$乘上一个数k：

> $$k\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1k & 3k \\ 5k & 2k \\ 0 & 4k \end{pmatrix}$$

- 矩阵的加法：
  矩阵只有行列相同时才能相加减，$m \times n$的矩阵相加：
  > $$\mathbf{M} + \mathbf{M} = 2M = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+3 \\ 5+5 & 2+2 \\ 0+0 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

矩阵需要前矩阵的列数等于后矩阵行数才能相乘：$(M \times \mathbf{N})(\mathbf{N} \times P) = (M \times P)$
来看一下这个例子：

> $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 33 & 13 \\ 10 & 44 & 61 & 26 \\ 0 & 28 & 32 & 12 \end{pmatrix}$$

- $(3 \times 2)(2 \times 4) = (3 \times 4)$，结果必然是3行4列
- 令 $\mathbf{Result}(i, j)$ 为结果矩阵 $\mathbf{Result}$ 的第 i 行第 j 列的数，它的值为**前矩阵第 i 行的元素和后矩阵第 j 列的元素一一对应相乘的和**
  > 例如结果矩阵第 1 行第 2 列的数 $\mathbf{Result}(1, 2) = 1 \times 6 + 3 \times 7 = 27$

性质

- 没有交换律，有一下两点说明：
  - 从乘法的约束来说：$(M \times \mathbf{N})(\mathbf{N} \times P) = (M \times P)$，如果$M \neq P$，交换之后根本不能相乘
  - 从乘法的定义来说：$(M \times \mathbf{N})(\mathbf{N} \times M) = (M \times M)$，交换之后的结果为 $(N \times N)$
    - 这里举一个 $(3 \times 3)(3 \times 3)$ 的例子：
      > $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 30 & 36 \\ 24 & 30 & 36 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix} \neq$$
      > $$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 45 \\ 15 & 30 & 45 \\ 15 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$
    - 这里的例子同时也可以说明 $\mathbf{MVP}$ 变换为什么不能随意的交换顺序
- 结合律
  > $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

- 分配率
  > $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
  > $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

矩阵和向量相乘

把向量看成 $m \times 1$ 的矩阵（或 $1 \times m$ 的矩阵）来做乘法：

- 左乘：矩阵在向量的左侧，即 $(n \times m)(m \times 1)$
- 右乘：矩阵在向量的右侧，即 $(1 \times m)(m \times n)$
  图形学中，根据向量的结构定义（ $m \times 1$ 或 $1 \times m$ ）采取左乘或者右乘进行计算
  并且，我们希望做完乘法后，得到的结果仍然是一个维度不变的向量，因此矩阵往往是 $m \times m$ 的形式
  举一个例子，2维向量绕 y 轴旋转：
  > $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

转置

将矩阵转置，就是将该矩阵的行列互换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

比较特别的一点：
$(AB)^T = B^T A^T$

矩阵的逆

- 单位矩阵
  - 对角线上的元素为1，其余的元素为0的方阵（行列数相同的矩阵）
    > $$\boldsymbol{I}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- 逆矩阵
  - 矩阵 A 和它的逆矩阵 A^{-1} 相乘的结果为单位矩阵 I
    > $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
    > $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

向量乘法的矩阵表示

- 向量点乘
  - > $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}^T \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{pmatrix}$$
- 向量叉乘
  - > $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \mathbf{A} * b = \begin{pmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$