Rasterization

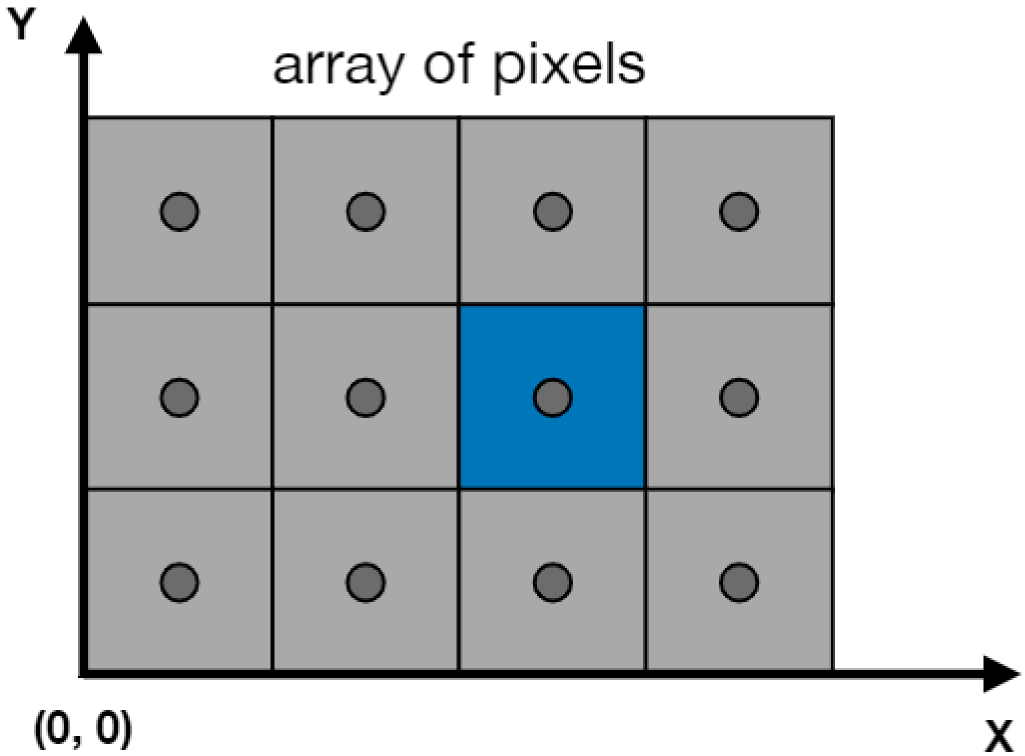
If you can not render Mathematical formula, please read this Rasterization.pdf

目录

Canonical Cube to Screen

经过 MVP 变换，得到了一个 $[-1,1]^3$ 的标准立方体，我们需要把这个标准立方体绘制到屏幕上。在了解这个过程之前，先做一些定义

- 屏幕（screen）
  - 二维像素数组
  - 数组的大小被叫做分辨率（resolution），1920x1440就是1920列1440行像素（2k）
- 光栅化（rasterize）
  - 绘制到屏幕上的过程
- 像素（pixel，抽象意义上的概念，与实际不符）
  - 屏幕上显式的最小单位，只显示一种颜色
  - 像素颜色由 R G B 三个颜色值表示
- 屏幕空间（screen space）



- 用 2维坐标表示屏幕空间
- 像素的坐标范围 $(0,0)$ 到 $(width-1, height-1)$
- 像素 (x,y) 的中心是 $(x+0.5, y+0.5)$，可以看图中的蓝色像素 $(2,1)$ 的中心为 $(2.5, 1.5)$
- 由于每个像素宽度为 1，那么屏幕的范围实际是 $(0,0)$ 到 $(width, height)$

现在，就可以把 $[-1,1]^3$ 的标准立方体绘制到屏幕空间：

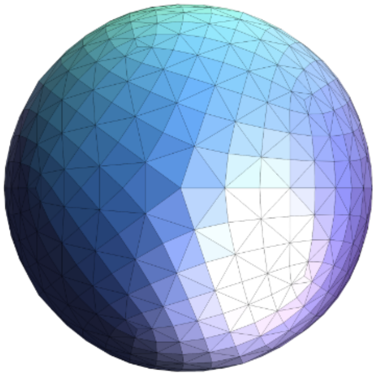
- 舍弃 z 轴得到 $[-1,1]^2$ 的 2维图像
- 将 $[-1,1]^2$ 的 2维图像变换到屏幕空间 $[0, width] \times [0, height]$
- 这个变换叫做视口变换，变换矩阵：

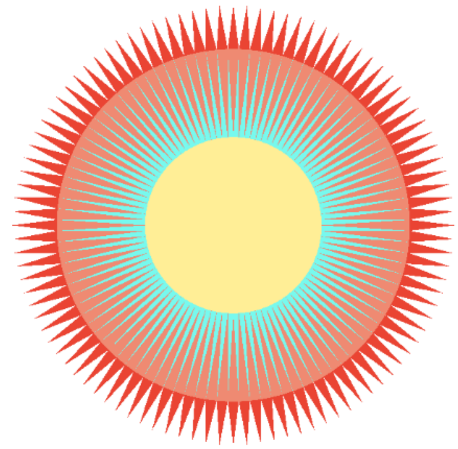
$$M_{viewport} = \begin{pmatrix} \frac{width}{2} & 0 & 0 & \frac{width}{2} \\ 0 & \frac{height}{2} & 0 & \frac{height}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

绘制一个三角形

基础图元

图形学中常用三角形作为基础图元去表示其他复杂的形状



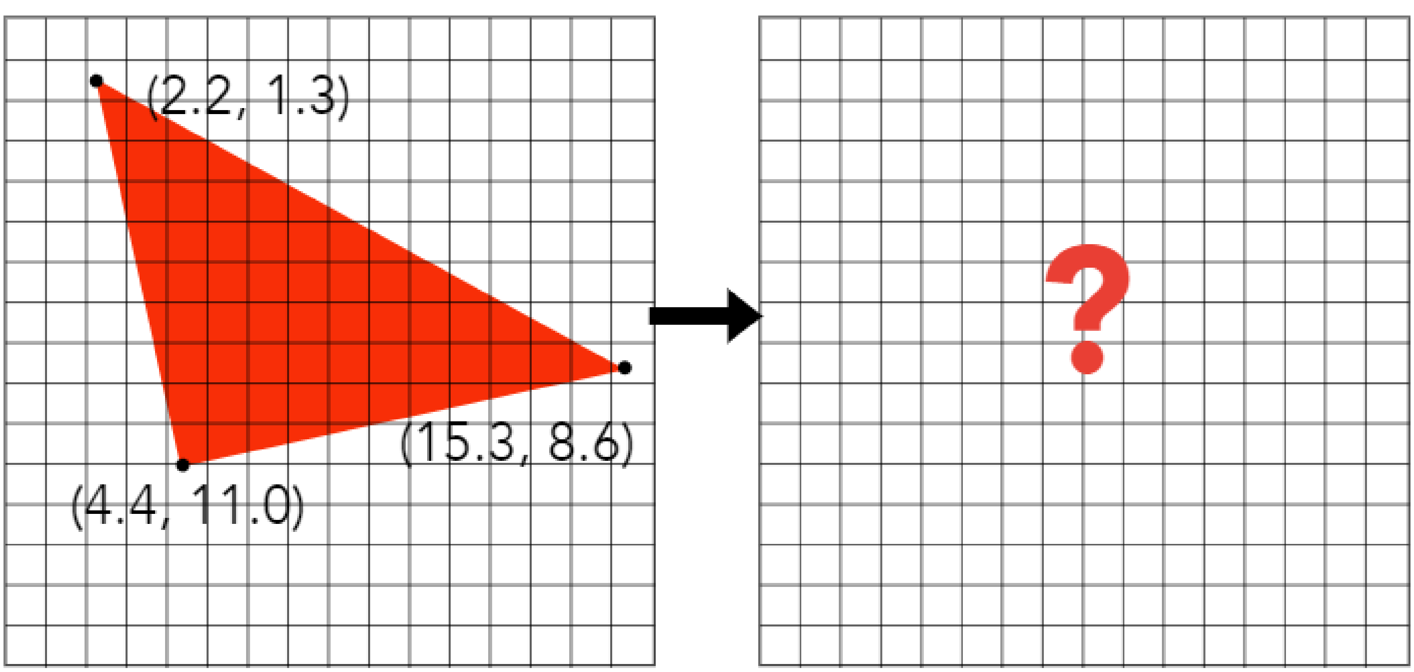


为什么要用三角形：

- 三角形是最基本的几何单位
  - 复杂几何单位可以分解为三角形表示
- 特殊性质
  - 三角形一定是在一个平面上
  - 明确的内外关系，可以使用叉乘快速计算点与三角形的内外关系
  - 良好的插值计算，使用重心坐标插值，计算简单效果好

采样三角形

现在三角形经过 MVP + viewport 变换，变成了屏幕空间里的三角形，我们如何用像素近似表示出这个三角形？



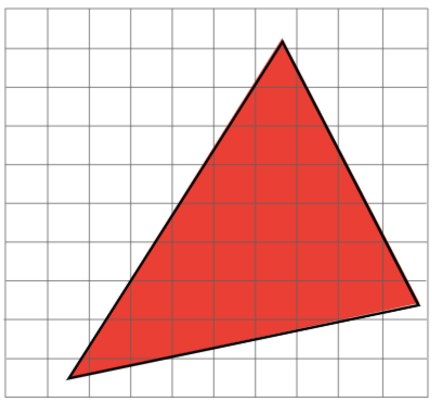
一个简单的光栅化方法，**采样**

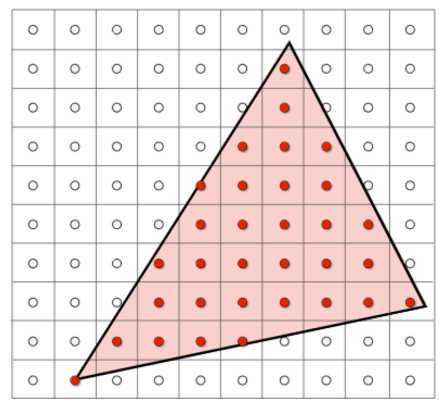
- 将连续的函数离散化的过程
  一个连续的函数，我们在各个不同的地方去取它的值，这个过程就被叫做采样

如果用代码表示就像这样

```
for (int x = 0; x < xmax; ++x)
    output[x] = f(x);
```

那么我们做出定义，**光栅化的本质就是对屏幕空间做 2D采样**
那么对于光栅化一个三角形来说，采样就是判断像素的中心是否在三角形内





数学表达式：

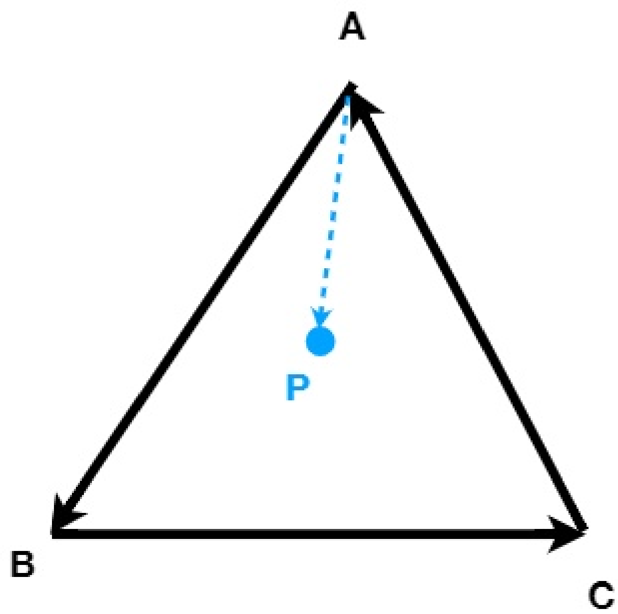
$$inside(tri, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if Point(x, y) in triangle tri} \\ 0 & \text{if not} \end{cases}$$

伪代码

```
for (int x = 0; x < xmax; ++x)
    for (int y = 0; y < ymax; ++y)
        image[x][y] = inside(tri, x + 0.5, y + 0.5); // 还记得吗 像素中心点要偏移0.5个单位
```

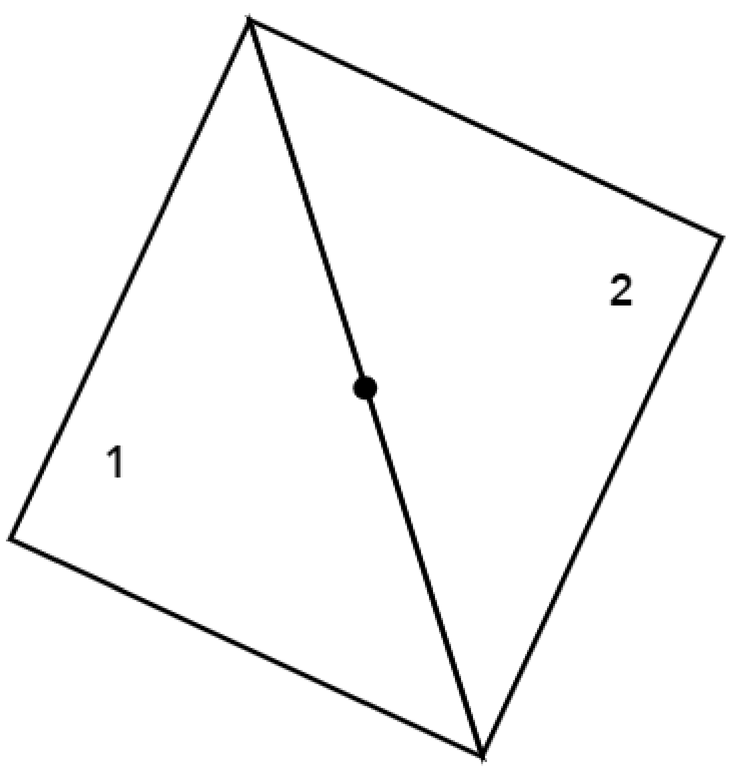
判断点是否在三角形内

我们做采样的时候需要判断点是否在三角形内，前面我们已经提到过方法，做三次叉乘



> - 计算 $(\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB})$、$(\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BC})$、$(\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CA})$ 得到的三个向量是否同向
>   *ABC三个点必须按顺时针或者逆时针取边的向量*
> - 如果同向，则点P在三角形内，否则点P就在三角形外

如果点恰好落在了两个三角形共线的边上，如何处理呢



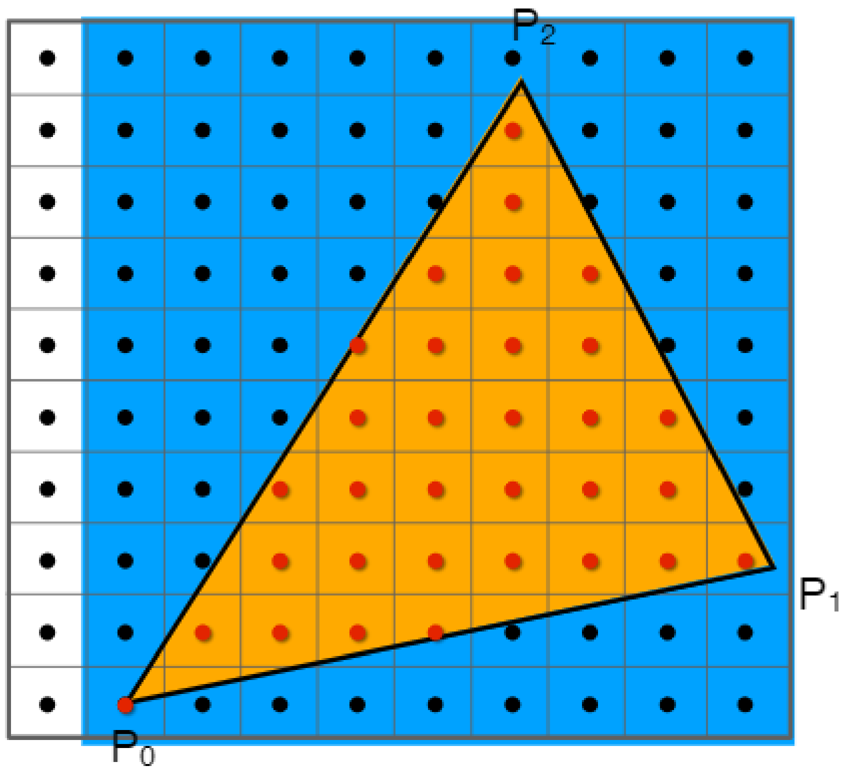
常见的做法

- 不做处理，课程里就不做处理，那么点既在三角形 1 内也在三角形 2 内

- 自定义规则处理

优化计算

前面我们提到，对三角形做光栅化，就是判断像素是否在三角形内，但是我们有必要对所有像素都做一次判断吗



像图中展示这样，我们完全没有必要对白色区域做判断，这块区域显然不在三角形内。
包围三角形的蓝色区域被称为包围盒，我们可以在用三角形三个点来得到这个包围盒的范围

$$[MinX_{\text{bounding box}}, MaxX_{\text{bounding box}}] = [min(x_{P_0}, x_{P_1}, x_{P_2}), max(x_{P_0}, x_{P_1}, x_{P_2})]$$
$$[MinY_{\text{bounding box}}, MaxY_{\text{bounding box}}] = [min(y_{P_0}, y_{P_1}, y_{P_2}), max(y_{P_0}, y_{P_1}, y_{P_2})]$$

最终我们采用像素，得到了所有在三角形内的像素点，并将该像素绘制为对应的颜色