



پرسش ۱

در گراف Wattz-Strogatz با پارامترهای n, m و $p = 0$ مقدار Average و Overall Clustering Coefficient و Path Length را حساب کنید.

پرسش ۲

یک گراف تصادفی با n راس را در نظر بگیرید، یال‌های این گراف را این‌گونه می‌سازیم که به ازای هر مثلث (هر ترکیب سه‌تایی از راس‌ها) به احتمال p یال‌های بین این سه راس را به گراف اضافه می‌کنیم (یک مثلث بین این سه راس تشکیل می‌دهیم). دقت کنید که گراف حاصل ممکن است ساده نباشد. اگر $p = \frac{k}{\binom{n-1}{2}}$ باشد:

(آ) نشان دهید درجه میانگین یک راس در این شبکه $2k$ است.

(ب) نشان دهید که توزیع درجات این گراف به صورت $p_{2i+1} = 0$ و $p_{2i} = \frac{e^{-k} k^i}{i!}$ است.

(پ) نشان دهید Clustering Coefficient این گراف برابر $\frac{1}{2k+1}$ است.

(ت) نشان دهید وقتی یک مولفه عظیم در شبکه وجود دارد، کسر رئوس متعلق به این مولفه (که آن را با S نشان می‌دهیم) در معادله زیر صدق می‌کند.

$$S = 1 - e^{-kS(2-S)}$$

(ث) اگر مولفه عظیم دقیقاً شامل نصف رئوس باشد، مقدار Clustering Coefficient چه قدر خواهد شد؟

پرسش ۳

جامعه‌ای شامل n فرد را در نظر بگیرید که ارتباطات‌شان با استفاده از یک گراف تصادفی ایستای همبند مدل می‌شود. فرض کنید یکی از افراد این جامعه به ویروسی مبتلا شده است که می‌دانیم میزان واگیری آن ۱۰۰٪ است (تمامی افراد در ارتباط با هر فرد بیمار، بیمار می‌شوند). فرض کنید واکسنی برای این ویروس ساخته شده و می‌خواهیم π درصد از افراد جامعه را به طور تصادفی واکسینه کنیم. افراد واکسینه شده نسبت به این ویروس مصون می‌شوند یعنی نه به بیماری دچار می‌شوند و نه قادر به سرایت بیماری هستند. هدف این است که مقدار π را به نحوی پیدا کنیم که زیرگراف القایی روی افراد واکسینه نشده دارای هیچ مولفه همبندی بزرگی نباشد و از شیوع ویروس جلوگیری کنیم. فرمول پیدا کنید که مقدار π مورد نیاز را بر حسب $\langle d \rangle$ و $\langle d^2 \rangle$ حساب کند.

پرسش ۴

با استفاده از توابع مولد نشان دهید که تعداد درخت‌های دودویی با n برگ که تمام رئوس به جز برگ‌ها حتماً دارای دو فرزند هستند برابر است با:

$$\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

پرسش ۵

آ) با استفاده از شبیه‌سازی مدل Erdos-Renyi شبکه‌ای با 1,000 راس ایجاد کنید و نموداری که درجه یک راس مشخص (مثلاً راس شماره 1) را برای p ‌های مختلف نشان می‌دهد را به دست آورید. برای p تمامی مقادیر از 0 تا 1 و مضرب 0.001 (جمعاً 1,000 مقدار) را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن مقادیر نمودار، برای هر p ، 10 گراف ایجاد کنید و متوسط درجه راس مورد نظر در این 10 گراف را در نظر بگیرید.

ب) یک گراف تصادفی Erdos-Renyi $G(n, p)$ را در نظر بگیرید. A را این رخداد در نظر بگیرید که راس شماره 1 در این گراف حداقل $l > 0$ همسایه داشته باشد. Threshold Function را برای این رخداد به دست آورید.

نکات سوالات عملی

- توجه کنید که محاسبه موارد خواسته شده برای سوالات عملی می‌تواند زمان‌بر باشد.
- لازم است تا کدهای نوشته شده برای محاسبه موارد خواسته شده را نیز به صورت کامل ارسال کنید. کدهای ارسالی باید قابلیت اجرای مجدد را داشته باشند.
- تمام خروجی‌های کدها و خواسته‌های سوالات باید در PDF ارسالی قرار داده شده باشند و در صورتی که کدها را به صورت فایل جداگانه ارسال می‌کنید، برای هر سوال یک فایل جداگانه منظور کنید.
- امکان استفاده از Package‌ها وجود دارد.