



پرسش ۱ (۱۵ نمره)

فرآیندی برای افزودن یال در یک گراف به این شکل تعریف می‌کنیم که در هر گام، دو راس غیرمتصل که مجموع درجاتشان بزرگتر مساوی تعداد راس‌های گراف باشد به تصادف انتخاب می‌شوند و یال بین آن‌ها ایجاد می‌شود. این گام آنقدر تکرار می‌شود تا مجموع درجات هر دو راس غیرمتصل کمتر از تعداد راس‌های گراف شود. ثابت کنید گرافی که پس از اجرای این فرآیند بر روی یک گراف ساده به دست می‌آید دور همیتونی دارد اگر و تنها اگر گراف اولیه دور همیتونی داشته بوده باشد.

پرسش ۲ (۱۵ نمره)

یک گراف ساده n راسی حداکثر چند local bridge می‌تواند داشته باشد است؟

پرسش ۳ (۱۵ نمره)

گراف G را یک گراف علامت‌دار تصادفی می‌نامیم اگر به ازای هر جفت راس به احتمال p یال مثبت و به احتمال q یال منفی وجود داشته باشد و به احتمال $1 - p - q$ نیز میان این دو جفت راس یال وجود نداشته باشد. می‌گوییم مجموعه H از یال‌های G منفی است اگر و تنها اگر تعداد یال‌های منفی آن فرد باشد و در غیر این صورت می‌گوییم مثبت است. برای مجموعه H (شامل h یال) نشان دهید که احتمال مثبت بودن H برابر با

$$\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^h \right)$$

و احتمال منفی بودن H برابر با

$$\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^h \right)$$

است.

پرسش ۴ (۲۵ نمره)

نشان دهید که در مدل Poisson، تابع $t(n) = n^{-\frac{2}{3}}$ یک تابع threshold برای پارامتر p برای ویژگی «وجود یک زیرگراف کامل ۴ راسی» است.

پرسش ۵ (۳۰ نمره)

فرآیندی برای حذف یال در یک گراف به این شکل تعریف می‌کنیم که هر کدام از یال‌ها به طور مستقل به احتمال t از آن حذف می‌شوند.

(آ) (۵ نمره) اثبات کنید اگر این فرآیند بر روی گرافی با توزیع درجات $P(d)$ اجرا شود، توزیع درجات گراف تصادفی حاصل به صورت زیر خواهد بود.

$$P'(d) = \sum_{d' \geq d} P(d') \binom{d'}{d} (1-t)^d t^{d'-d}$$

(ب) (۱۰ نمره) اثبات کنید امید میانگین درجات در گراف حاصل $1 - t$ برابر گراف اولیه خواهد بود.

پ) (۱۵ نمره) می‌خواهیم تاثیر این فرآیند بر روی اندازه بزرگ‌ترین مولفه همبندی در مدل Erdős-Rényi را مشاهده کنیم.

- برای p تمام مقادیر بین 0 تا 1 و مضرب 10^{-4} را در نظر بگیرید و به ازای هر کدام، 10 گراف 1000 راسی با مدل Erdős-Rényi ایجاد کنید. نمودار متوسط اندازه بزرگ‌ترین مولفه همبندی بر حسب p را رسم کنید. اگر برای 10 مقدار p متوالی متوسط اندازه بزرگ‌ترین مولفه همبندی برابر تعداد راس‌های گراف شد، می‌توانید عملیات را متوقف کنید و برای مقادیر p بزرگ‌تر نیز همان تعداد راس‌های گراف را در نظر بگیرید.
- بر روی هر کدام از گراف‌هایی که در بخش قبل تولید کردید، با $t = \frac{1}{2}$ فرآیند حذف یال را انجام دهید و سپس به همان شکل توضیح داده شده، نمودار متوسط اندازه بزرگ‌ترین مولفه همبندی بر حسب p را برای گراف‌های به دست آمده رسم کنید.

نکات بخش عملی

- لازم است تا کدهای نوشته شده برای محاسبه موارد خواسته شده را نیز به صورت کامل ارسال کنید. کدهای ارسالی باید قابلیت اجرای مجدد را داشته باشند.
- نمودارهای خواسته سوال باید در PDF ارسالی قرار داده شده باشند.
- امکان استفاده از Package‌ها وجود دارد.

موفق باشید.