Numerická lineární algebra - cvičení 9

1. Mějme symetrickou pozitivně definitní matici

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Pomocí čtyř iterací mocninné metody nalezněte odhad dominantního vlastního vektoru a příslušného dominantního vlastního čísla. Jako počáteční odhad použijte vektor samých jedniček. Po každé iteraci aktuální odhad normujte a určete příslušný odhad vlastního čísla. Zaokrouhlujte na čtyři desetinná místa.

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}_0 = \frac{\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0\|} = \qquad \lambda_0^{\max} = \boldsymbol{q}_0^\top \mathsf{A} \boldsymbol{q}_0 =$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \mathsf{A}\boldsymbol{q}_0 = \qquad \boldsymbol{q}_1 = \qquad \lambda_1^{\max} =$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \qquad \boldsymbol{q}_2 = \qquad \lambda_2^{\max} =$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \qquad \boldsymbol{q}_3 = \qquad \lambda_3^{\max} =$$

$$\boldsymbol{x}_4 = \qquad \boldsymbol{q}_4 = \qquad \lambda_4^{\max} =$$

   (b) Matlabovská funkce `[ V, D ] = eig( A )` vrací vlastní vektory uložené ve sloupcích matice `V` a příslušná vlastní čísla jako diagonální prvky matice `D`. Ověřte pomocí této funkce, že se váš odhad skutečně blíží k dominantnímu vlastnímu vektoru a dominantnímu vlastnímu číslu.

(c) Matice A je symetrická pozitivně definitní. Všechna její vlastní čísla jsou reálná a kladná. Můžeme tedy díky znalosti odhadu dominantního (největšího) vlastního čísla určit také odhad jejího nejmenšího vlastního čísla. Využijeme k tomu posun spektra. Hledejme tedy pomocí čtyř iterací mocninné metody normovaný dominantní vlastní vektor $\boldsymbol{y}_4$ a vlastní číslo $\sigma_4^{\max}$ matice[1]

$$\mathsf{B} = \mathsf{A} - \lambda_4^{\max}\mathsf{I} =$$

$\boldsymbol{y}_4 =,$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma_4^{\max} =$

Díky vlastnostem matice A a posunu spektra platí, že $\sigma_4^{\max} \approx \lambda^{\min} - \lambda_4^{\max}$. Určeme tedy přibližnou hodnotu nejmenšího vlastního čísla matice A

$$\lambda^{\min} \approx$$

(d) Porovnejte váš odhad nejmenšího vlastního čísla s hodnotou získanou pomocí metody `eig`. Odhad není po čtyřech iteracích zdaleka tak přesný jako v případě největšího vlastního čísla. Můžeme to nějak zdůvodnit (co můžeme říct o poměru největšího a druhého největšího vlastního čísla matic A a B)?

2. Přibližnou znalost nejmenšího a největšího vlastního čísla můžeme použít k určení rychlosti konvergence iteračních metod řešení soustav lineárních rovnic.

(a) S číslem podmíněnosti matice jsme se setkali u iteračních metod řešení soustav lineárních rovnic, kde bylo důležitým parametrem určujícím rychlost konvergence dané metody k řešení. Ze znalosti přibližných hodnot největšího a nejmenšího vlastního čísla matice A určete odhad jejího čísla podmíněnosti:

$$\kappa(\mathsf{A}) \approx \frac{\lambda_4^{\max}}{\lambda^{\min}} =$$

(b) Připomeňme tvar Richardsonovy iterační metody: $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega \boldsymbol{r}^k$. Určete přibližnou optimální hodnotu parametru

$$\omega_{\text{opt}} =$$

zajišťující nejrychlejší konvergenci k řešení. Kolik iterací v takovém případě potřebujeme, abychom dosáhli relativní změny rezidua $\|\boldsymbol{r}^k\|/\|\boldsymbol{r}^0\| \leq 10^{-2}$?

$$k \geq$$

[1] Jako počáteční vektor volte opět vektor samých jedniček, zaokrouhluje na čtyři desetinná místa.