1. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

- matice je symetrická, diagonálně dominantní $\Rightarrow$ pozitivně definitní $\Rightarrow$ můžeme použít metodu největšího spádu

a) $= \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$

$$f(x) = \frac{1}{2}[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - [6, 9]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} - 6x_1 - 9x_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(4x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 4x_2^2) - 6x_1 - 9x_2 =$$

$$= 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 - 6x_1 - 9x_2$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 6 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + x_1 - 9$

$$\text{grad } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 6 \\ 4x_2 + x_1 - 9 \end{bmatrix} = \checkmark$$

$$Ax - b = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 6 \\ x_1 + 4x_2 - 9 \end{bmatrix}$$

c) $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\alpha^0 = \frac{r^T r}{r^T A r} = \frac{[6,9]\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}{[6,9]\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}} =$

$= \frac{36+81}{576} = 0,2031$

Iterace 1: $x^1 = x^0 + \alpha r^0 =$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,2031 \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2188 \\ 1,8281 \end{bmatrix}$

$r^1 = b - Ax_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,2188 \\ 1,8281 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7033 \\ 0,4688 \end{bmatrix}$

$\alpha_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_1^T A r_1} = 0,325$

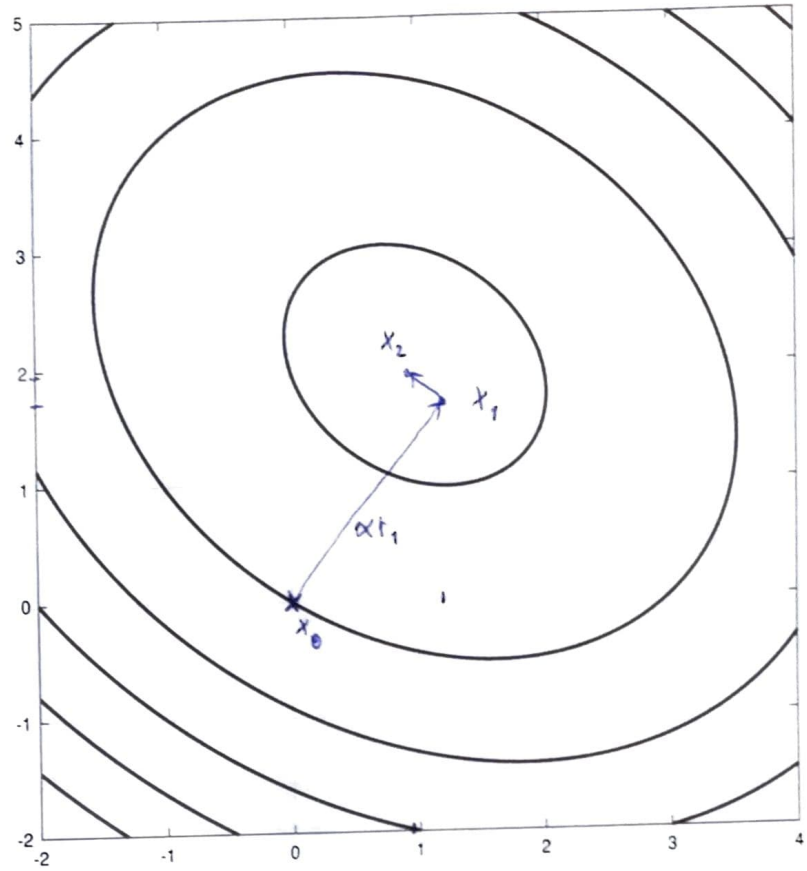
Iterace 2: $x^2 = x^1 + \alpha r^1 = \begin{bmatrix} 1,2188 \\ 1,8281 \end{bmatrix} + 0,325 \begin{bmatrix} -0,7033 \\ 0,4688 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0,9902 \\ 1,9805 \end{bmatrix}$

$r^2 = b - Ax^2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,9902 \\ 1,9805 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0,0587 \\ 0,0878 \end{bmatrix}$

d) $\frac{\|r^2\|}{\|r^0\|} = \frac{0,1056}{10,817} = 0,0098$


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
x_2
x_1
αr_1
x_0