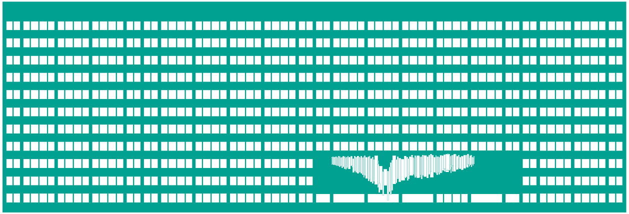
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Numerická lineární algebra 1

Řešení soustav lineárních rovnic - motivační příklad

Michal Merta

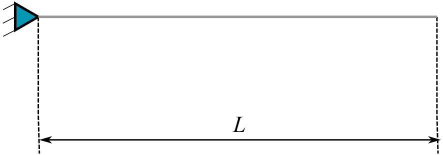
VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

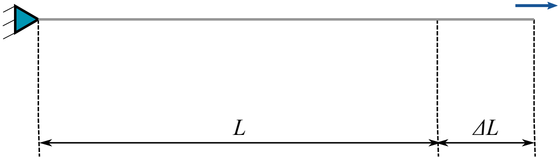
4. března 2021

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM

Rovnice průhybu struny

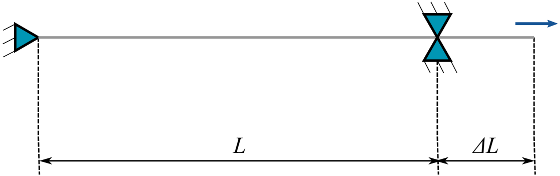


Rovnice průhybu struny



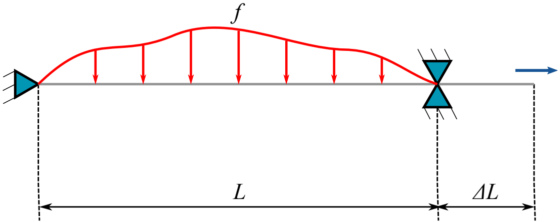
- Napnutím vzniká ve struně předepínací síla $T = EA\frac{\Delta L}{L}$
  - E je Youngův modul pružnosti ($E_{\text{ocel}} = 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$, $E_{\text{nylon}} = 2.1 \cdot 10^3 \text{MPa}$)
  - A je obsah průřezu struny

Rovnice průhybu struny



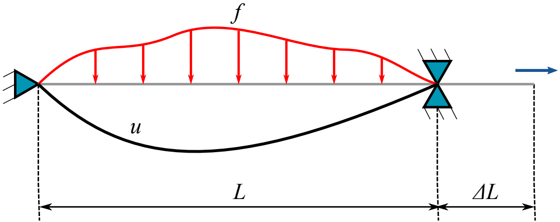
- Napnutím vzniká ve struně předepínací síla $T = EA\frac{\Delta L}{L}$
  - E je Youngův modul pružnosti ($E_{\mathrm{ocel}} = 2.1 \cdot 10^5 \mathrm{MPa}$, $E_{\mathrm{nylon}} = 2.1 \cdot 10^3 \mathrm{MPa}$)
  - A je obsah průřezu struny

Rovnice průhybu struny



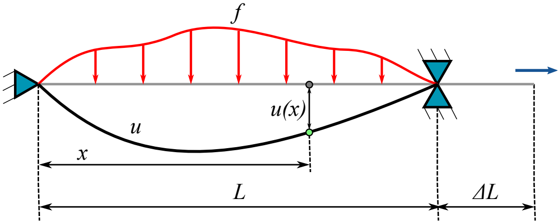
- Napnutím vzniká ve struně předepínací síla $T = EA\frac{\mathit{\Delta}L}{L}$
    - E je Youngův modul pružnosti ($E_{\text{ocel}} = 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$, $E_{\text{nylon}} = 2.1 \cdot 10^3 \text{MPa}$)
    - A je obsah průřezu struny

Rovnice průhybu struny



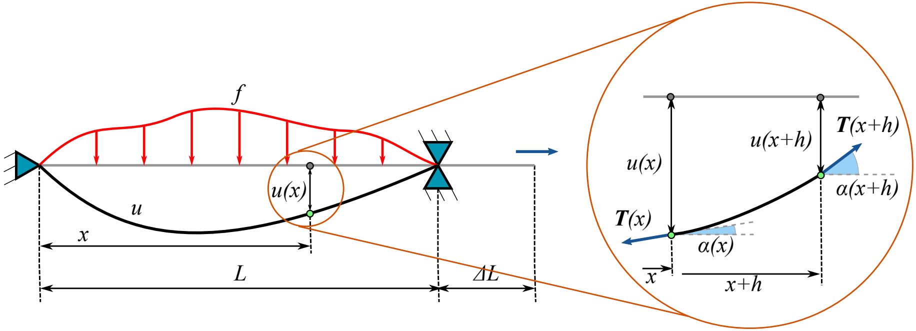
- Napnutím vzniká ve struně předepínací síla $T = EA\frac{\Delta L}{L}$
  - E je Youngův modul pružnosti ($E_{\mathrm{ocel}} = 2.1 \cdot 10^5 \mathrm{MPa}$, $E_{\mathrm{nylon}} = 2.1 \cdot 10^3 \mathrm{MPa}$)
  - A je obsah průřezu struny

Rovnice průhybu struny

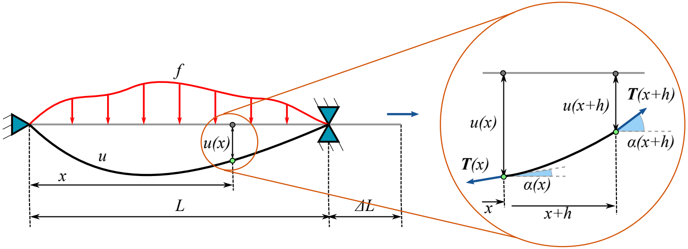


- Napnutím vzniká ve struně předepínací síla $T = EA\frac{\Delta L}{L}$
  - E je Youngův modul pružnosti ($E_{\mathrm{ocel}} = 2.1 \cdot 10^5 \mathrm{MPa}$, $E_{\mathrm{nylon}} = 2.1 \cdot 10^3 \mathrm{MPa}$)
  - A je obsah průřezu struny
- Při odvozování obyčejné diferenciální rovnice, kterou se řídí průhyb struny, vyjdeme z rovnováhy sil na nějakém malém úseku struny.

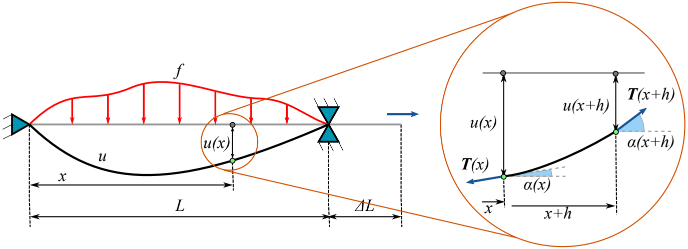
Rovnice průhybu struny

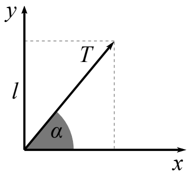


- Napnutím vzniká ve struně předepínací síla $T = EA\frac{\Delta L}{L}$
  - E je Youngův modul pružnosti ($E_{\text{ocel}} = 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$, $E_{\text{nylon}} = 2.1 \cdot 10^3 \text{MPa}$)
  - A je obsah průřezu struny
- Při odvozování obyčejné diferenciální rovnice, kterou se řídí průhyb struny, vyjdeme z rovnováhy sil na nějakém malém úseku struny.

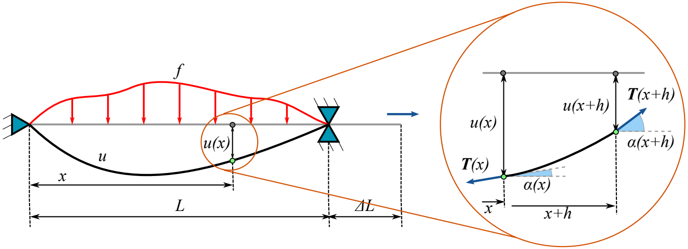


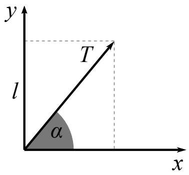
f
u
u(x)
x
L
ΔL
u(x)
u(x+h)
T(x+h)
α(x+h)
T(x)
α(x)
x
x+h



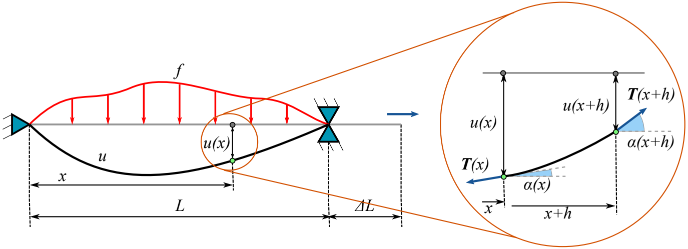


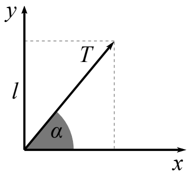
$$\sin\alpha = \frac{l}{T}$$





$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

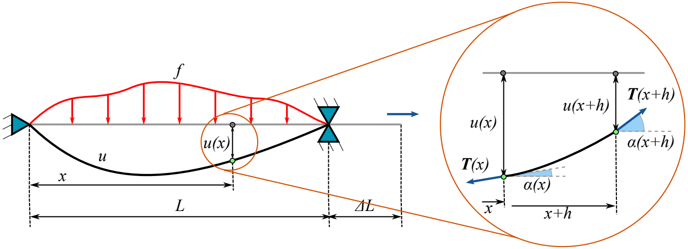


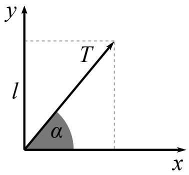


$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

- V rovnovážném stavu musí být součet sil ve směru osy y nulový:

$$0 = T\sin\left(\alpha(x+h)\right) + \left(-T\sin\alpha(x)\right) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$



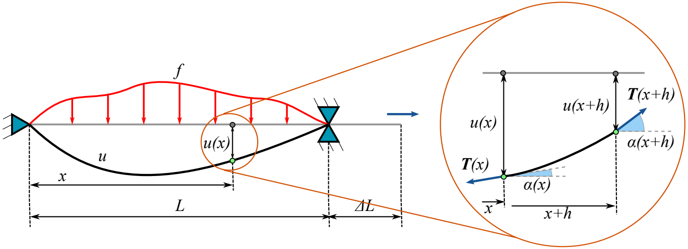


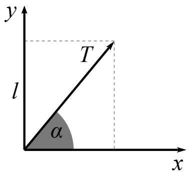
$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

- V rovnovážném stavu musí být součet sil ve směru osy y nulový:

$$0 = T\sin\left(\alpha(x+h)\right) + \left(-T\sin\alpha(x)\right) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

- Pro dostatečně malá α: $\sin\alpha \approx \alpha$



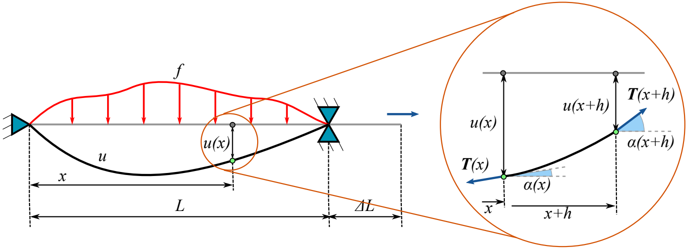


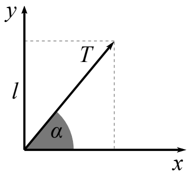
$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

- V rovnovážném stavu musí být součet sil ve směru osy y nulový:

$$0 = T\sin\left(\alpha(x+h)\right) + \left(-T\sin\alpha(x)\right) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

- Pro dostatečně malá α: $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$



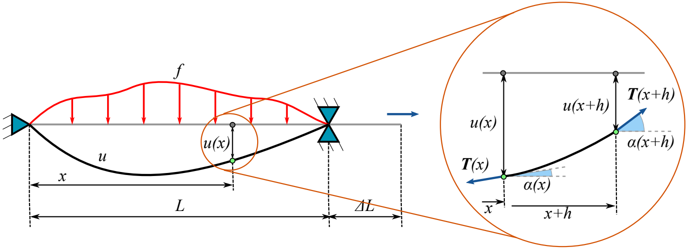


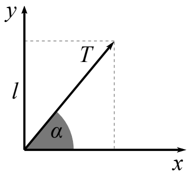
$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

- V rovnovážném stavu musí být součet sil ve směru osy y nulový:

$$0 = T\sin\left(\alpha(x+h)\right) + \left(-T\sin\alpha(x)\right) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

- Pro dostatečně malá α: $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$
- Navíc: $\operatorname{tg}\left(\alpha(x)\right) =$



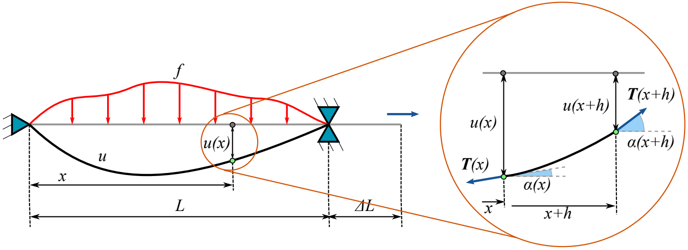


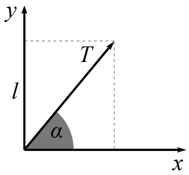
$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

- V rovnovážném stavu musí být součet sil ve směru osy y nulový:

$$0 = T\sin\left(\alpha(x+h)\right) + \left(-T\sin\alpha(x)\right) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

- Pro dostatečně malá α: $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$
- Navíc: $\operatorname{tg}\left(\alpha(x)\right) = u'(x)$





$$\sin\alpha = \frac{l}{T} \Rightarrow l = T\sin\alpha$$

- V rovnovážném stavu musí být součet sil ve směru osy y nulový:

$$0 = T\sin\left(\alpha(x+h)\right) + \left(-T\sin\alpha(x)\right) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

- Pro dostatečně malá α: $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$
- Navíc: $\operatorname{tg}\left(\alpha(x)\right) = u'(x)$

$$0 = Tu'(x+h) - Tu'(x) + \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad / \cdot \frac{1}{h}$$

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad / \cdot \frac{1}{h}$$

$$\downarrow$$

$$-T\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad / \cdot \frac{1}{h}$$

$$\downarrow$$

$$-T\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\downarrow$$

$$-T\lim_{h\to 0}\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad / \cdot \frac{1}{h}$$

$$\downarrow$$

$$-T\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\downarrow$$

$$-T\lim_{h\to 0}\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\downarrow$$

$$-Tu''(x) = f(x)$$

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad / \cdot \frac{1}{h}$$

$$\downarrow$$

$$-T\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\downarrow$$

$$-T\lim_{h\to 0}\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\downarrow$$

$$-Tu''(x) = f(x)$$

- Musíme přidat okrajové podmínky.
  - např. $u(0) = 0, u(L) = 0$ (Dirichletovy okrajové podmínky)

$$-Tu'(x+h) + Tu'(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad / \cdot \frac{1}{h}$$

$$\downarrow$$

$$-T\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\downarrow$$

$$-T\lim_{h\to 0}\frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

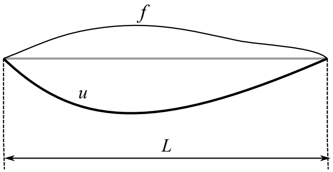
$$\downarrow$$

$$-Tu''(x) = f(x)$$

- Musíme přidat okrajové podmínky.
  - např. $u(0) = 0, u(L) = 0$ (Dirichletovy okrajové podmínky)
- Pokud funkci f umíme zintegrovat, můžeme v 1D (na intervalu) snadno najít analytické řešení. Ale co ve 2D/3D, na krychli, kouli, elipse, karoserii auta? Při složitější diferenciální rovnici?

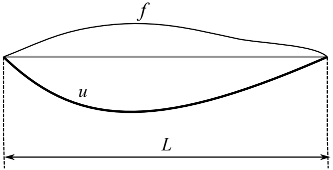
Metoda konečných diferencí – metoda sítí

$$
\begin{aligned}
-u'' &= f \\
u(0) &= 0 \\
u(L) &= 0
\end{aligned}
$$



Metoda konečných diferencí – metoda sítí

$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0$$
$$u(L) = 0$$



- Numerické řešení pomocí metody konečných diferencí spočívá v
  1. diskretizaci intervalu $\langle 0, L\rangle$,
  2. nahrazení derivací konečnými diferencemi,
  3. sestavení matice systému,
  4. vyřešení soustavy lineárních rovnic.

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) =$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x)$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

$$u(x-h) =$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

$$u(x-h) = u(x)$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)\frac{1}{1!}h$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_2(h^3)$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_2(h^3)$$

- Odečteme od sebe tyto rovnice (první od druhé).

$$u(x-h) - u(x+h) \approx -2u'(x)h$$

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

- Aproximujme vhodně druhé derivace u.
- Vyjdeme z Taylorova rozvoje.

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_1(h^3)$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)\frac{1}{1!}h + u''(x)\frac{1}{2!}h^2 + C_2(h^3)$$

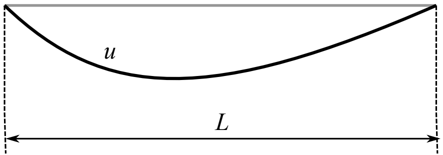
- Odečteme od sebe tyto rovnice (první od druhé).

$$\begin{aligned} u(x-h) - u(x+h) &\approx -2u'(x)h \\ u'(x) &\approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

- Sečteme obě rovnice.

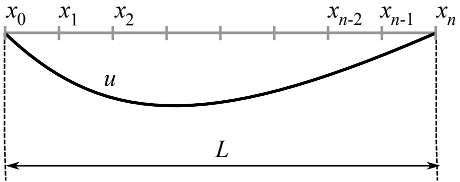
$$\begin{aligned} u(x-h) + u(x+h) &\approx 2u(x) + 2u''(x)\frac{1}{2}h^2 \\ u''(x) &\approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \end{aligned}$$

$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$



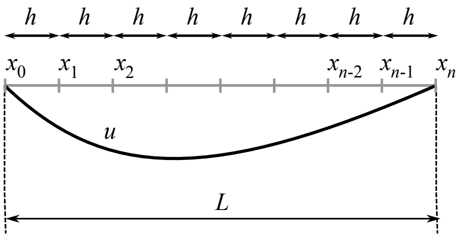
$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Interval diskretizujeme - po celé délce vložíme uzly sítě x_i, které interval rozdělí na podintervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$



$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

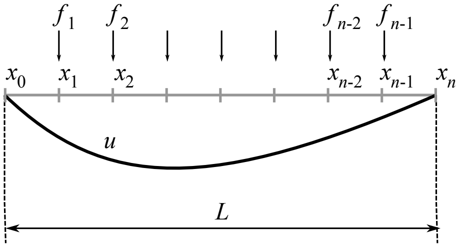
- Interval diskretizujeme - po celé délce vložíme uzly sítě x_i, které interval rozdělí na podintervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$
- Uzly jsou vloženy s ekvidistantním krokem h (tzn. vzdálenost mezi uzly je konstantní)



$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Interval diskretizujeme - po celé délce vložíme uzly sítě x_i, které interval rozdělí na podintervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$
- Uzly jsou vloženy s ekvidistantním krokem h (tzn. vzdálenost mezi uzly je konstantní)
- Označme

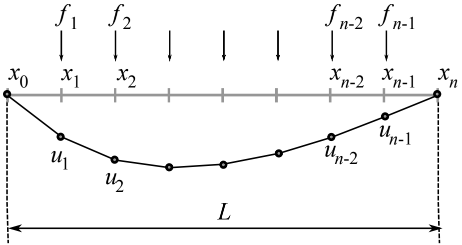
$$u(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} u_i, \quad f(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} f_i$$



$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Interval diskretizujeme - po celé délce vložíme uzly sítě x_i, které interval rozdělí na podintervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$
- Uzly jsou vloženy s ekvidistantním krokem h (tzn. vzdálenost mezi uzly je konstantní)
- Označme

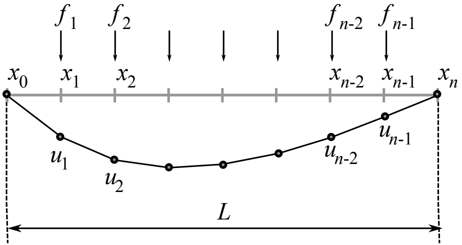
$$u(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} u_i, \quad f(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} f_i$$



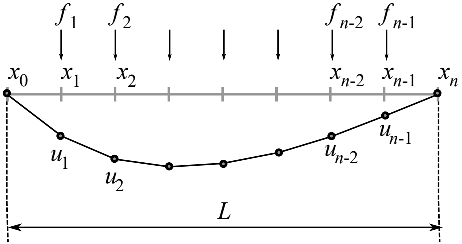
$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Interval diskretizujeme - po celé délce vložíme uzly sítě x_i, které interval rozdělí na podintervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$
- Uzly jsou vloženy s ekvidistantním krokem h (tzn. vzdálenost mezi uzly je konstantní)
- Označme
$$u(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} u_i, \quad f(x_i) \stackrel{\text{ozn}}{=} f_i$$
- u'' v každém uzlu sítě nahradíme aproximací (konečnou diferencí)

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}$$
$$= \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$



$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$



- Ve všech vnitřních uzlech musí platí

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i.$$

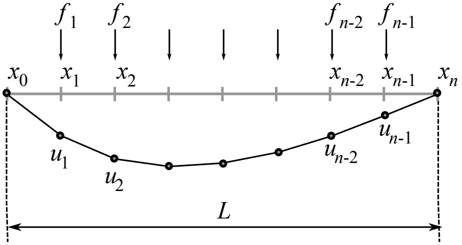
$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Ve všech vnitřních uzlech musí plati

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i.$$

- Dostaneme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 : &\quad -(u_0 - 2u_1 + u_2) = h^2 f_1 \\
x_2 : &\quad -(u_1 - 2u_2 + u_3) = h^2 f_2 \\
&\vdots \\
x_{n-1} : &\quad -(u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) = h^2 f_{n-1}
\end{aligned}$$



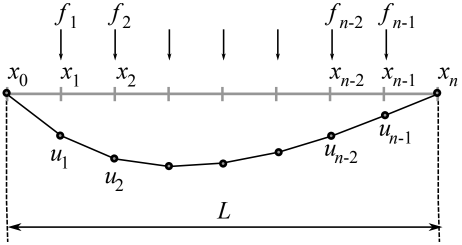
$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Ve všech vnitřních uzlech musí plati

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i.$$

- Dostaneme tedy soustavu rovnic

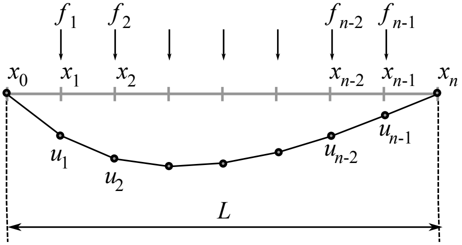
$$\begin{aligned}
x_1 : \quad & -u_0 + 2u_1 - u_2 = h^2 f_1 \\
x_2 : \quad & -u_1 + 2u_2 - u_3 = h^2 f_2 \\
\vdots \\
x_{n-1} : \quad & -u_{n-2} + 2u_{n-1} - u_n = h^2 f_{n-1}
\end{aligned}$$



$$-u'' = f$$
$$u(0) = 0, u(L) = 0$$

- Ve všech vnitřních uzlech musí plati
$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i.$$
- Dostaneme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 &: & 2u_1 - u_2 &= h^2 f_1 + u_0 \\
x_2 &: & -u_1 + 2u_2 - u_3 &= h^2 f_2 \\
&\vdots & & \\
x_{n-1} &: & -u_{n-2} + 2u_{n-1} &= h^2 f_{n-1} + u_n
\end{aligned}$$



- Maticový zápis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathsf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} h^2 f_1 + u_0 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_{n-2} \\ h^2 f_{n-1} + u_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

- K - matice tuhosti
- $\boldsymbol{f}$ - vektor pravé strany (vektor zatížení)

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$
$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0\colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0\colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$u(\pi) = 0\colon\ 0 = 0 - A\pi + 0 \Rightarrow A = 0$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0\colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$u(\pi) = 0\colon\ 0 = 0 - A\pi + 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(x) = -\sin x$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

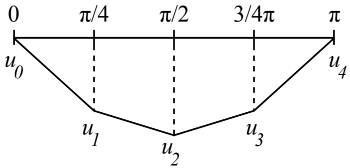
$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0 \colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$u(\pi) = 0 \colon\ 0 = 0 - A\pi + 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(x) = -\sin x$$



Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

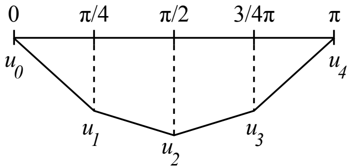
$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0\colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$u(\pi) = 0\colon\ 0 = 0 - A\pi + 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(x) = -\sin x$$



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{16} \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ -\frac{\pi^2}{16} \cdot 1 \\ -\frac{\pi^2}{16} \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \end{pmatrix}$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

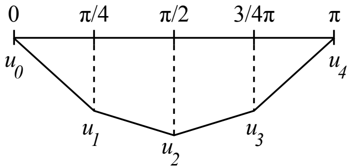
$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A \mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0\colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$u(\pi) = 0\colon\ 0 = 0 - A\pi + 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(x) = -\sin x$$



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ -\frac{\pi^2}{16} \cdot 1 \\ -\frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{\text{num.}} = \begin{pmatrix} -0,7446 \\ -1,053 \\ -0,7446 \end{pmatrix},$$

Příklad (analytické vs. numerické řešení)

$$-u''(x) = -\sin x$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

$$u''(x) = \sin x$$

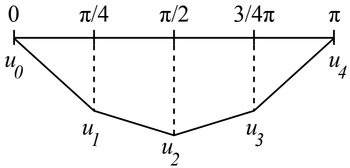
$$u'(x) = \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + A$$

$$u(x) = \int -\cos x + A\mathrm{d}x = -\sin x - Ax + B$$

$$u(0) = 0\colon\ 0 = -\sin 0 - A0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$u(\pi) = 0\colon\ 0 = 0 - A\pi + 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u(x) = -\sin x$$



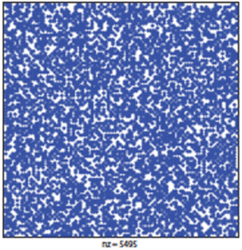
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ -\frac{\pi^2}{16} \cdot 1 \\ -\frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \end{pmatrix}$$

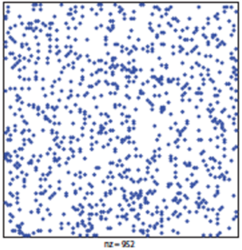
$$\boldsymbol{x}_{\text{num.}} = \begin{pmatrix} -0,7446 \\ -1,053 \\ -0,7446 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{\text{an.}} = \begin{pmatrix} -\sin(\pi/4) \\ -1 \\ -\sin(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,7071 \\ -1 \\ -0,7071 \end{pmatrix}$$

Řídké (sparse) matice

- Řešení velkého množství úloh vede na soustavy s maticí, která má málo nenulových prvků.
- Je paměťově nevýhodné ukládat všechny (i nulové) prvky takových matic.
- Efektivní ukládat pouze nenulové prvky
  - $\rightarrow$ řídké matice
- Existuje několik formátů pro ukládání řídkých matic.
- Hustota (density) = počet nenulových prvků / celkový počet prvků.





- Coordinate format (COO)
  - Souřadnicová komprese
  - Souřadnice + hodnota
  - (i, j, v): (řádek, sloupec, hodnota)
  - Výhoda: lehce okem čitelný formát, lze jej využít k vytvoření řídké matice v Matlabu.
  - Nevýhoda: Zabírá více paměti než jiné řídké formáty ($8 \cdot 3n_{\mathrm{nnz}}$ B).

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{v} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2.0 \\ 1 & 3 & 1.0 \\ 2 & 1 & 3.0 \\ 2 & 4 & 1.0 \\ 3 & 5 & 4.0 \\ 4 & 1 & 4.0 \\ 4 & 3 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- CSR formát
  - Compressed Sparse Row
  - Ukládá data o matici A do tří polí
    - `hodnoty` (`A`) – reálné nebo komplexní pole obsahující prvky matice A (po řádcích).
    - `indexyRadku` (`IA`) – i-tý prvek vrací index v poli `hodnoty` prvku, který je prvním nenulovým prvkem v i-tém řádku matice A, na poslední pozici počet prvků + 1.
    - `sloupce` (`JA`) – j-tý prvek obsahuje index sloupce v matici A prvku na j-té pozici v poli `hodnoty`.
  - Lepší komprese než COO formát: $8n_{\mathrm{nnz}} + 8(n_{\mathrm{nnz}} + n_{\mathrm{rows}} + 1)$ B

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
hodnoty = [2.0, 1.0, 3.0, 1.0, 4.0, 4.0, 1.0]
indexyRadku = [1, 3, 5, 6, 8]
sloupce = [2, 3, 1, 4, 5, 1, 3]
```

Poslední prvek je počet nenulových prvků v matici +1

- CSR formát
  - Počet nenulových prvků v i-tém řádku = `indexyRadku(i+1)-indexyRadku(i)`
  - V případě nulového řádku: v poli `indexyRadku` se dvakrát zopakuje index začátku následujícího řádku.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
hodnoty = [2.0, 1.0, 3.0, 1.0, 4.0, 4.0, 1.0]
indexyRadku = [1, 3, 5, 6, 8]
sloupce = [2, 3, 1, 4, 5, 1, 3]
```

- CSR formát
  - Příklad násobení matice-vektor: $x_i = \sum_j a_{i,j} b_j$

```
for i = 1:m
    x(i) = 0;
    for J = indexyRadku(i):indexyRadku(i+1)-1
        x(i)  = x(i) + hodnoty(J)*b(sloupce(J));
    end
end
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
hodnoty = [2.0, 1.0, 3.0, 1.0, 4.0, 4.0, 1.0]
indexyRadku = [1, 3, 5, 6, 8]
sloupce = [2, 3, 1, 4, 5, 1, 3]
```

- CSC formát
  - Compressed Sparse Column
  - CSC = CSR(A^T)
  - Interní Matlab formát řídkých matic
  - Ukládá data o matici A do tří polí
    - `hodnoty` (`A`) – reálné nebo komplexní pole obsahující prvky matice A (po sloupcích).
    - `indexySloupcu` (`IA`) – i-tý prvek vrací index v poli `hodnoty` prvku, který je prvním nenulovým prvkem v i-tém sloupci matice A, na poslední pozici počet prvků + 1.
    - `radky` (`JA`) – j-tý prvek obsahuje index řádku v matici A prvku na j-té pozici v poli `hodnoty`.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
hodnoty = [3.0 4.0 2.0 1.0 1.0 1.0 4.0]
indexySloupcu = [1, 3, 4, 6, 7, 8]
radky = [2, 4, 1, 1, 4, 2, 3]
```

Poslední prvek je počet nenulových prvků v matici +1

- CSC formát
  - Pole `indexySloupcu` rozdělí pole `hodnoty` na sloupce: $(3.0, 4.0), (2.0), (1.0, 1.0), (4.0)$
  - Pole `radky` přiřadí hodnoty ve sloupcích do řádků: $(0.0, 3.0, 0.0, 4.0)^T, (2.0, 0.0, 0.0, 0.0)^T, \ldots$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
hodnoty = [3.0 4.0 2.0 1.0 1.0 1.0 4.0]
indexySloupcu = [1, 3, 4, 6, 7, 8]
radky = [2, 4, 1, 1, 4, 2, 3]
```

Poslední prvek je počet nenulových prvků v matici +1

- řídké matice a výpočty s nimi jsou v Pythonu k dispozici v knihovně SciPy, ktterou budete detailněji probírat v kurzu VVP

Řešení soustav lineárních rovnic

- Při řešení soustavy lineárních rovnic na počítači můžeme využít dva přístupy
  1. Přímé metody
  2. Iterační metody

Řešení soustav lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Ekvivalentní úpravy
  1. Vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy.
  2. Násobení obou stran některé z rovnic nenulovým číslem.
  3. Přičtení násobku některé rovnice k jiné rovnici.

Řešení soustav lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Ekvivalentní úpravy
  1. Vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy.
  2. Násobení obou stran některé z rovnic nenulovým číslem.
  3. Přičtení násobku některé rovnice k jiné rovnici.

Lemma

Jestliže soustava $\tilde{\mathrm{A}}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ vznikla ze soustavy $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pomocí ekvivalentních úprav, pak jsou soustavy $\tilde{\mathrm{A}}\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ a $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ekvivalentní.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

- Ekvivalentní úpravy
  1. Vzájemná výměna dvou řádků.
  2. Násobení některého řádku nenulovým číslem.
  3. Přičtení nenulového násobku některého řádku k jinému řádku.

- Soustavy s trojúhelníkovou maticí
  - Tradiční algoritmy pro řešení soustav lineárních rovnic (Gaussova eliminace, LU, Choleského faktorizace, LDLT, ...) převádějí pomocí ekvivalentních úprav systém s obecnou maticí na systémy s horní a dolní trojúhelníkovou maticí.
  - Trojúhelníkové systémy lze jednoduše řešit pomocí *dopředné/zpětné substituce*

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} & & & & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & & & \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} & \ell_{n,n} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & & & & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Soustavy s trojúhelníkovou maticí
  - Inverze horní (dolní) trojúhelníkové matice je horní (dolní) trojúhelníková matice
  - Součin dvou horních (dolních) trojúhelníkových matic je horní (dolní) trojúhelníková matice

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} & & & & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & & & \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} & \ell_{n,n} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & & & & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Soustavy s *dolní* trojúhelníkovou maticí L
  - Dopředná substituce
  - Př.

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = b_1/\ell_{11},$$
$$x_2 = (b_2 - \ell_{21}x_1)/\ell_{22}.$$

  - Obecné řešení i-té rovnice v soustavě L$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j \right) /l_{ii}$$

- Soustavy s *dolní* trojúhelníkovou maticí L
- Pokud $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dolní trojúhelníková regulární matice a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, pak následující algoritmus uloží řešení soustavy L$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ do vektoru $\boldsymbol{x}$:

$x(1) \leftarrow b(1)/L(1,1)$
for $i = 2$ **to** n **do**
  $x(i) \leftarrow (b(i) - L(i, 1 : i-1) \cdot b(1 : i-1))/L(i,i)$
end for

- Soustavy s *horní* trojúhelníkovou maticí U
  - Zpětná substituce
  - Př.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= b_2/u_{22} \\ x_1 &= (b_1 - u_{12}x_2)/u_{11} \end{aligned}$$

  - Obecné řešení i-té rovnice v soustavě L$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) / u_{ii}$$

- Soustavy s *horní* trojúhelníkovou maticí U
- Pokud $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková regulární matice a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, pak následující algoritmus uloží řešení soustavy U$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ do vektoru $\boldsymbol{x}$:

$x(n) \leftarrow b(n)/N(n, n)$
for $i = n - 1$ **to** 1 **do**
  $x(i) \leftarrow (b(i) - U(i, i + 1 : n) \cdot b(i + 1 : n))/U(i, i)$
end for

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

4. března 2021

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM