Př. 1

$$Ax=b,\quad A=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&10&3\\1&1&5\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$$

a) Jacobiho metoda

Matice A je diagonálně dominantní $(|4|>|2|+|1|,\ |10|>|3|+|3|,\ |5|>|1|+|1|$, viz poznámky$)$

$$\Downarrow$$

Jacobiho metoda konverguje ✓

Zopakujme postup:

- zvolíme počáteční odhad řešení x^0
- nový odhad řešení určíme pomocí předpisu:

číslo iterace

x^k … odhad řešení z předchozí iterace

$$x_i^{k+1}=\frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{i,j}\,x_j^k\right)\qquad(*)$$

index prvku ve vektoru x^{k+1}

V našem případě:

$$x^0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\text{(dle zadání)}$$

diagonální prvek A

odpovídající prvek vek. b

mimodiagonální prvky A

odpovídající prvky vektoru řešení z předchozí iterace

1. iterace:

$$\left.\begin{aligned}
x_1^1&=\frac{1}{4}(2-2\cdot 1-1\cdot 1)=-\frac{1}{4}=-0{,}25\\
x_2^1&=\frac{1}{10}(4-3\cdot 1-3\cdot 1)=-\frac{1}{5}=-0{,}2\\
x_3^1&=\frac{1}{5}(3-1\cdot 1-1\cdot 1)=\frac{1}{5}=0{,}2
\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^1=\begin{bmatrix}-0{,}25\\-0{,}2\\0{,}2\end{bmatrix}$$

2. iterace:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{1}{4}(2+0{,}2\cdot 2-0{,}2\cdot 1) = 0{,}55 \\ x_2^2 &= \frac{1}{10}(4+0{,}25\cdot 3-0{,}2\cdot 3) = 0{,}415 \\ x_3^2 &= \frac{1}{5}(3+0{,}25\cdot 1+0{,}2\cdot 1) = 0{,}69 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = \begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}415 \\ 0{,}69 \end{bmatrix}$$

3. iterace:

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 &= \frac{1}{4}(2-\cancel{0{,}45}\ 0{,}415\cdot 2-0{,}69\cdot 1) = 0{,}12 \\ x_2^3 &= \frac{1}{10}(4-0{,}55\cdot 3-0{,}69\cdot 3) = 0{,}028 \\ x_3^3 &= \frac{1}{5}(3-0{,}55\cdot 1-0{,}415\cdot 1) = 0{,}407 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^3 = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}028 \\ 0{,}407 \end{bmatrix}$$

Pozn. Vzorec (*) neznamená nic jiného, než že v každé iteraci postupně procházíme jednotlivé rovnice soustavy a vyjádříme diagonální prvky x, mimodiagonální nahradíme hodnotami z předchozí iterace; tzn:

V k+1. iteraci:

$$4\underbrace{x_1^{k+1}}_{\text{neznámé}} + 2\underbrace{x_2^k}_{\text{známé}} + 1\underbrace{x_3^k}_{\text{známé}} = 2 \Rightarrow x_1^{k+1} = \frac{1}{4}(2-2\cdot x_2^k-1\cdot x_3^k)$$

$$3x_1^k + 10x_2^{k+1} + 3x_3^k = 4 \Rightarrow x_2^{k+1} = \dots$$

$$1x_1^k + 1x_2^k + 5x_3^{k+1} = 3 \Rightarrow x_3^{k+1} = \dots$$

b) Gaussova - Seidelova metoda

A diagonálně dominantní $\Rightarrow$ G.-S. metoda konverguje

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\underbrace{x_j^{k+1}}_{\text{známe z aktuální iterace}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\underbrace{x_j^{k}}_{\text{známe z předchozí iterace}}\right)$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- při výpočtu x_i^{k+1} můžeme využít již spočtené prvky $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$

1. iterace:

$$\left.\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{1}{4}(2-2\cdot 1-1\cdot 1) = -0{,}25 \\ x_2^1 &= \frac{1}{10}(4-3\cdot(-0{,}25)-3\cdot 1) = 0{,}175 \\ x_3^1 &= \frac{1}{5}(3-1\cdot(-0{,}25)-1\cdot 0{,}175) = 0{,}615 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^1 = \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ 0{,}175 \\ 0{,}615 \end{bmatrix}$$

2. iterace: $x_1^2 = \frac{1}{4}(2 - 2\cdot 0{,}175 - 1\cdot 0{,}615) = 0{,}2587$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \tfrac{1}{4}(2 - 2\cdot 0{,}175 - 1\cdot 0{,}615) = 0{,}2587 \\ x_2^2 &= \tfrac{1}{10}(4 - 3\cdot 0{,}2587 - 3\cdot 0{,}615) = 0{,}1379 \\ x_3^2 &= \tfrac{1}{5}(3 - 1\cdot 0{,}2587 - 1\cdot 0{,}1379) = 0{,}5207 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = \begin{bmatrix} 0{,}2587 \\ 0{,}1379 \\ 0{,}5207 \end{bmatrix}$$

3. iterace

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 &= \tfrac{1}{4}(2 - 2\cdot 0{,}1379 - 1\cdot 0{,}5207) = 0{,}3009 \\ x_2^3 &= \tfrac{1}{10}(4 - 3\cdot 0{,}3009 - 3\cdot 0{,}5207) = 0{,}1535 \\ x_3^3 &= \tfrac{1}{5}(3 - 1\cdot 0{,}3009 - 1\cdot 0{,}1535) = 0{,}5091 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^3 = \begin{bmatrix} 0{,}3009 \\ 0{,}1535 \\ 0{,}5091 \end{bmatrix}$$

c)

$$x = A \backslash b \quad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0{,}2930 \\ 0{,}1592 \\ 0{,}5096 \end{bmatrix}$$

$$\|e_{Jacobi}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}028 \\ 0{,}407 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2930 \\ 0{,}1592 \\ 0{,}5096 \end{bmatrix} \right\| = \cancel{0{,}2346}\ 0{,}2401$$

$$\|e_{G.-S.}\| = \left\| \cancel{\begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}28 \\ 0{,}407 \end{bmatrix} - [} \right. = \left\| \begin{bmatrix} 0{,}3009 \\ 0{,}1535 \\ 0{,}5091 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2930 \\ 0{,}1592 \\ 0{,}5096 \end{bmatrix} \right\| = 0{,}0098$$

$$\|r_{Jacobi}\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}028 \\ 0{,}407 \end{bmatrix} \right\| = \cancel{0{,}8776}\ 2{,}5219$$

$$\|r_{G.-S.}\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3009 \\ 0{,}1535 \\ 0{,}5091 \end{bmatrix} \right\| = 0{,}0402$$