



Numerická lineární algebra 1

Singulární rozklad

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

6. května 2021

1 Singulární rozklad

Singulární rozklad

Věta

Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak existují ortogonální matice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální matice $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ takové, že platí

$$A = USV^T.$$

Singulární rozklad

Věta

Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak existují ortogonální matice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální matice $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ takové, že platí

$$A = USV^T.$$

- Mluvíme o singulárním rozkladu matice (singular value decomposition, SVD).
- Matice S obsahuje na diagonále nezáporná singulární čísla (σ_i) seřazené od největšího po nejmenší.
- Sloupce matice U jsou levé singulární vektory, sloupce matice V jsou pravé singulární vektory.

The diagram illustrates the Singular Value Decomposition (SVD) of a matrix A . Matrix A is represented by a rectangle with height m and width n . It is equal to the product of three matrices: U , S , and V^T . Matrix U is a square with side length n . Matrix S is a rectangle with height n and width m , containing a diagonal line from the top-left to the bottom-right corner. Matrix V^T is a square with side length m .

$$\begin{matrix} & n \\ m & \boxed{A} \\ & \end{matrix} = \begin{matrix} & n \\ \boxed{U} \\ & \end{matrix} \begin{matrix} & n \\ \boxed{S} \\ & \end{matrix} \begin{matrix} & m \\ \boxed{V^T} \\ & \end{matrix}$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T U S V^T$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $A^T A$ a získáme

$$A^T A = QDQ^T \Rightarrow \text{diag}(S) = \sqrt{\text{diag}(D)}$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $A^T A$ a získáme

$$A^T A = QDQ^T \Rightarrow \text{diag}(S) = \sqrt{\text{diag}(D)}$$

a

$$V = Q$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $A^T A$ a získáme

$$A^T A = QDQ^T \Rightarrow \text{diag}(S) = \sqrt{\text{diag}(D)}$$

a

$$V = Q$$

- **Pozn.** Využili jsme toho, že vlastní čísla $A^T A$ jsou nezáporná:

$$\text{Bud' } A^T A v = \lambda v: \lambda = \lambda \|v\|^2 = v^T \lambda v = v^T A^T A v = (Av)^T Av = \|Av\|^2 \geq 0$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $A^T A$ a získáme

$$A^T A = QDQ^T \Rightarrow \text{diag}(S) = \sqrt{\text{diag}(D)}$$

a

$$V = Q$$

- **Pozn.** Využili jsme toho, že vlastní čísla $A^T A$ jsou nezáporná:

$$\text{Bud' } A^T A v = \lambda v: \lambda = \lambda \|v\|^2 = v^T \lambda v = v^T A^T A v = (Av)^T A v = \|Av\|^2 \geq 0$$

- Zbývá určit U

$$A = USV^T$$

$$A = USV^T$$

$$AV = US$$

$$A = USV^T$$

$$AV = US = [s_1 \mathbf{u}_1 \mid s_2 \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid s_n \mathbf{u}_n]$$

$$A = USV^T$$

$$AV = US = [s_1 \mathbf{u}_1 \mid s_2 \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid s_n \mathbf{u}_n]$$

- \Rightarrow určíme součin AV a každý sloupec normujeme (vydělíme) příslušným singulárním číslem

$$A = USV^T$$

$$AV = US = [s_1 \mathbf{u}_1 \mid s_2 \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid s_n \mathbf{u}_n]$$

- \Rightarrow určíme součin AV a každý sloupec normujeme (vydělíme) příslušným singulárním číslem
- můžeme doplnit do čtvercové matice (úplný SVD rozklad) doplněním $m - n$ nezávislých ortonormálních vektorů

- Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$

■ Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = V D V^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = V D V^T$$

■ Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = V D V^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = V D V^T = \underbrace{V P^T}_{=\tilde{V}} \underbrace{P D P^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{P V^T}_{=\tilde{V}^T}$$

■ Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = V D V^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = V D V^T = \underbrace{V P^T}_{=\tilde{V}} \underbrace{P D P^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{P V^T}_{=\tilde{V}^T} = \tilde{V} \tilde{D} \tilde{V}^T$$

■ Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = V D V^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = V D V^T = \underbrace{V P^T}_{=\tilde{V}} \underbrace{P D P^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{P V^T}_{=\tilde{V}^T} = \tilde{V} \tilde{D} \tilde{V}^T$$

- 3 Z odmocnin prvků $\tilde{d}_{i,i}$ sestavíme $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

■ Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = V D V^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = V D V^T = \underbrace{V P^T}_{=\tilde{V}} \underbrace{P D P^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{P V^T}_{=\tilde{V}^T} = \tilde{V} \tilde{D} \tilde{V}^T$$

- 3 Z odmocnin prvků $\tilde{d}_{i,i}$ sestavíme $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- 4 $V = \tilde{V}$

■ Postup:

- 1 Sestavme $A^T A$
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = V D V^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = V D V^T = \underbrace{V P^T}_{=\tilde{V}} \underbrace{P D P^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{P V^T}_{=\tilde{V}^T} = \tilde{V} \tilde{D} \tilde{V}^T$$

- 3 Z odmocnin prvků $\tilde{d}_{i,i}$ sestavíme $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- 4 $V = \tilde{V}$
- 5 Nalezneme U z rovnosti $US = AV$.

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singularní rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US, A^T U = VS$.

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singularní rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US, A^T U = VS$.
- Sestavme matici

$$H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}.$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singularní rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US, A^T U = VS$.
- Sestavme matici

$$H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T U & -A^T U \\ AV & AV \end{pmatrix}$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singularní rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US, A^T U = VS$.
- Sestavme matici

$$H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T U & -A^T U \\ AV & AV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VS & -VS \\ US & US \end{pmatrix}$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singularní rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US, A^T U = VS$.
- Sestavme matici

$$H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T U & -A^T U \\ AV & AV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VS & -VS \\ US & US \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US, A^T U = VS$.
- Sestavme matici

$$H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T U & -A^T U \\ AV & AV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VS & -VS \\ US & US \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

- Platí tedy

$$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}}_{=H} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{H} jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{S}$:

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}}_{=H} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic U, V, S :

$$H \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad H tedy můžeme pomocí prvků matic U, V, S vyjádřit jako

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}}_{=H} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic U, V, S :

$$H \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad H tedy můžeme pomocí prvků matic U, V, S vyjádřit jako

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

$$H = QDQ^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{H} jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{S}$:

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad \mathbf{H} tedy můžeme pomocí prvků matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{S}$ vyjádřit jako

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{V}^T & -\mathbf{U}^T \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{H} jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{S}$:

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{:,i} \\ \mathbf{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad \mathbf{H} tedy můžeme pomocí prvků matic $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{S}$ vyjádřit jako

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -\mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{V}^T & -\mathbf{U}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{U}^T \\ 2\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.

2 Nalezneme spektrální rozklad $H = QDQ^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$H = QDQ^T$$

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

- 1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.
- 2 Nalezneme spektrální rozklad $H = QDQ^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$H = QDQ^T = \underbrace{QP^T}_{=\tilde{Q}} \underbrace{QDQ^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{PQ^T}_{=\tilde{Q}^T}$$

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.

2 Nalezneme spektrální rozklad $H = QDQ^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$H = QDQ^T = \underbrace{QP^T}_{=\tilde{Q}} \underbrace{QDQ^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{PQ^T}_{=\tilde{Q}^T} = \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T$$

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.

2 Nalezneme spektrální rozklad $H = QDQ^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$H = QDQ^T = \underbrace{QP^T}_{=\tilde{Q}} \underbrace{QDQ^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{PQ^T}_{=\tilde{Q}^T} = \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T$$

3 Přenásobme $\sqrt{2}\tilde{Q}$

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.

2 Nalezneme spektrální rozklad $H = QDQ^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$H = QDQ^T = \underbrace{QP^T}_{=\tilde{Q}} \underbrace{QDQ^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{PQ^T}_{=\tilde{Q}^T} = \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T$$

3 Přenásobme $\sqrt{2}\tilde{Q}$

4 Sestavme S z poloviny diagonálních prvků D .

■ Postup výpočtu singulárního rozkladu

1 Sestavíme $H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$.

2 Nalezneme spektrální rozklad $H = QDQ^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$H = QDQ^T = \underbrace{QP^T}_{=\tilde{Q}} \underbrace{QDQ^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{PQ^T}_{=\tilde{Q}^T} = \tilde{Q}\tilde{D}\tilde{Q}^T$$

3 Přenásobme $\sqrt{2}\tilde{Q}$

4 Sestavme S z poloviny diagonálních prvků D .

5 Z prvních n sloupců \tilde{Q} sestavme U, V

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Věta

Nenulová singulární čísla A jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic $A^T A$ a AA^T .

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Věta

Nenulová singulární čísla A jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic $A^T A$ a AA^T .

Věta

Je-li $A = A^T$, pak singulární čísla A získáme jako absolutní hodnoty vlastních čísel A .

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Věta

Nenulová singulární čísla A jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic $A^T A$ a AA^T .

Věta

Je-li $A = A^T$, pak singulární čísla A získáme jako absolutní hodnoty vlastních čísel A .

Věta

Maticová norma indukovaná Eukleidovskou vektorovou normou je rovna největšímu singulárnímu číslu

$$\|A\|_2 = \sigma_1.$$

Redukovaná forma singulárního rozkladu

- Pro matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $n < m$ můžeme sestavit SVD ve formě:

$$\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

-
- The diagram shows an equation between two expressions. On the left, a large rectangle is labeled with n at the top and m on the left. This rectangle is equal to the product of three rectangles. The first rectangle is the same as the one on the left. The second rectangle is a square with a diagonal line from the top-left corner to the bottom-right corner. The third rectangle is a square.

-
- The diagram shows the equation: $m \times n = (m \times r) \times (r \times r) \times (r \times n)$. The first rectangle has width n and height m . The second rectangle has width r and height m . The third rectangle is a square with width r and height r , with a diagonal line from the top-left to the bottom-right corner. The fourth rectangle has width n and height r .

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Matici A s hodnotí r lze zapsat jako součet matic o hodnoti jedna:

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T.$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Matici A s hodnotí r lze zapsat jako součet matic o hodnoti jedna:

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T.$$

Důkaz vychází ze zápisu

$$S = \sum_{j=1}^r S_j,$$

kde $S_j = \text{diag}(0, 0, \dots, \sigma_j, 0, \dots, 0)$. Tzn.

$$A = U \sum_{j=1}^r S_j V^T = US_1 V^T + US_2 V^T + \dots + US_r V^T.$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta (Eckart-Young-Mirsky)

Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro $k \leq h(A)$ poskytuje zkrácený singulární rozklad

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

nejlepší aproximaci matice A s hodnotí k . Tzn.

$$\|A - A_k\|_2 = \min_{\substack{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ h(\tilde{A}) \leq k}} \|A - \tilde{A}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta (Eckart-Young-Mirsky)

Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro $k \leq h(A)$ poskytuje zkrácený singulární rozklad

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

nejlepší aproximaci matice A s hodnotí k . Tzn.

$$\|A - A_k\|_2 = \min_{\substack{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ h(\tilde{A}) \leq k}} \|A - \tilde{A}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Pozn.

$$A - A_k = \sum_{j=1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T - \sum_{j=1}^k \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T = \sum_{j=k+1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta (Eckart-Young-Mirsky)

Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro $k \leq h(A)$ poskytuje zkrácený singulární rozklad

$$A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

nejlepší aproximaci matice A s hodnotí k . Tzn.

$$\|A - A_k\|_2 = \min_{\substack{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ h(\tilde{A}) \leq k}} \|A - \tilde{A}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Pozn.

$$A - A_k = \sum_{j=1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T - \sum_{j=1}^k \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T = \sum_{j=k+1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \quad \Rightarrow \quad \|A - A_k\|_2 = \left\| \sum_{j=k+1}^r \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \right\|_2 = \sigma_{k+1}$$

Mooreova-Penroseova inverze

■ Mooreova-Penroseova inverze

- Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje zobecněná inverze A^+ , pro kterou platí

$$\begin{aligned}AA^+A &= A, \\A^+AA^+ &= A^+, \\A^+A &= (A^+A)^T, \\AA^+ &= (AA^+)^T.\end{aligned}$$

A^+ nazýváme Mooreovou-Penroseovou inverzí.

Mooreova-Penroseova inverze

■ Mooreova-Penroseova inverze

- Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje zobecněná inverze A^+ , pro kterou platí

$$\begin{aligned} AA^+A &= A, \\ A^+AA^+ &= A^+, \\ A^+A &= (A^+A)^T, \\ AA^+ &= (AA^+)^T. \end{aligned}$$

A^+ nazýváme Mooreovou-Penroseovou inverzí.

- Známe-li SVD rozklad, můžeme A^+ snadno určit:

$$A^+ = US^+V^T,$$

kde S^+ je diagonální matice s prvky

$$\begin{aligned} s_{i,i}^+ &= \frac{1}{s_{i,i}} \quad \text{pro } s_{i,i} > 0, \\ s_{i,i}^+ &= 0 \quad \text{pro } s_{i,i} = 0. \end{aligned}$$

- Mooreovu-Penroseovu inverzi lze využít např. k řešení problému nejmenších čtverců.
 - Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, řešme soustavu $Ax = b$ ve smyslu nejmenších čtverců:

$$x = \arg \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\tilde{x} - b\| = A^+b.$$

- Mooreovu-Penroseovu inverzi lze využít např. k řešení problému nejmenších čtverců.
 - Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, řešme soustavu $Ax = b$ ve smyslu nejmenších čtverců:

$$x = \arg \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\tilde{x} - b\| = A^+b.$$

- Pomocí Mooreovy-Penroseovy inverze můžeme nalézt všechna řešení soustavy $Ax = b$:

$$x = A^+b + (I - A^+A)w,$$

kde w je libovolný vektor.

- Nevýhodou singularního rozkladu je jeho vysoká výpočetní náročnost, vyžaduje přibližně $4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$ operací.

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

6. května 2021