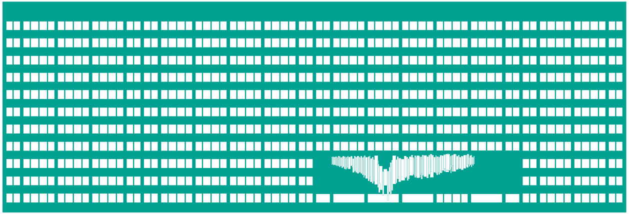
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA



www.vsb.cz

# Numerická lineární algebra 1

## Řešení soustav lineárních rovnic - LDMT, LDLT, Choleského rozklad, výpočetní náročnost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

23. března 2023

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM

# LDMT (LDU) dekompozice

- Uvažujme rozklad obecné čtvercové matice $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathsf{A} = \mathsf{LDM}^T,$$

- kde $\mathsf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathsf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou dolní trojúhelníkové matice s jedničkami na diagonálách a $\mathsf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonální matice:

$$\mathsf{A} = \mathsf{LDM}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 1 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců matice L, řádků matice M (tedy sloupců M$^T$) a diagonálních prvků matice D.

- Předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců matice L, řádků matice M (tedy sloupců M$^T$) a diagonálních prvků matice D.
- Chceme odvodit předpisy pro $j$. sloupec matice L (tzn. L$(j+1:n,j)$), $j$. řádek matice M (tzn. M$(j,1:j-1)$ neboli M$^T(1:j-1,j)$) a diagonální prvek $d_j$,

- Předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců matice L, řádků matice M (tedy sloupců $\mathsf{M}^T$) a diagonálních prvků matice D.
- Chceme odvodit předpisy pro $j$. sloupec matice L (tzn. $\mathsf{L}(j+1:n,j)$), $j$. řádek matice M (tzn. $\mathsf{M}(j,1:j-1)$ neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1,j)$) a diagonální prvek $d_j$,
- Vyjádřeme $j$. sloupec matice A pomocí našeho rozkladu jako

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T\boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T\boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců matice L, řádků matice M (tedy sloupců $\mathsf{M}^T$) a diagonálních prvků matice D.
- Chceme odvodit předpisy pro $j$. sloupec matice L (tzn. $\mathsf{L}(j+1:n,j)$), $j$. řádek matice M (tzn. $\mathsf{M}(j,1:j-1)$ neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1,j)$) a diagonální prvek $d_j$,
- Vyjádřeme $j$. sloupec matice A pomocí našeho rozkladu jako

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T\boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T\boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Vektor $\boldsymbol{v}$ je nenulový pouze na pozicích $1:j$

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T\boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T\boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T \boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T \boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.
- Pro první část platí

$$\mathsf{A}(1:j,j) = \mathsf{L}(1:j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j).$$

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T \boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T \boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.
- Pro první část platí

$$\mathsf{A}(1:j,j) = \mathsf{L}(1:j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j). \qquad \text{(dopř. substituce)}$$

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T \boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}\underbrace{(\mathsf{DM}^T \boldsymbol{e}_j)}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.
- Pro první část platí

$$\mathsf{A}(1:j,j) = \mathsf{L}(1:j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j). \qquad \text{(dopř. substituce)}$$

- Určeme prvky M

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j,1:j)\mathsf{M}^T(1:j,j)$$

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T\boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T\boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.
- Pro první část platí

$$\mathsf{A}(1:j,j) = \mathsf{L}(1:j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j). \qquad \text{(dopř. substituce)}$$

- Určeme prvky M

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j,1:j)\mathsf{M}^T(1:j,j)$$

$$\mathsf{D}(1:j,1:j)^{-1}\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{M}^T(1:j,j)$$

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T\boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}(\underbrace{\mathsf{DM}^T\boldsymbol{e}_j}_{=\boldsymbol{v}}) = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.
- Pro první část platí

$$\mathsf{A}(1:j,j) = \mathsf{L}(1:j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j). \qquad \text{(dopř. substituce)}$$

- Určeme prvky M

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j,1:j)\mathsf{M}^T(1:j,j)$$

$$\mathsf{D}(1:j,1:j)^{-1}\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{M}^T(1:j,j) \Rightarrow \frac{1}{d_i}\boldsymbol{v}(i) = \mathsf{M}^T(i,j),$$

$$\mathsf{A}(1:n,j) = (\mathsf{LDM}^T)(1:n,j) = \mathsf{LDM}^T \boldsymbol{e}_j = \mathsf{L}\underbrace{(\mathsf{DM}^T \boldsymbol{e}_j)}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Rozdělme sloupec $\mathsf{A}(1:n,j)$ na dvě části – $\mathsf{A}(1:j,j)$ a $\mathsf{A}(j+1:n,j)$.
- Pro první část platí

$$\mathsf{A}(1:j,j) = \mathsf{L}(1:j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j). \qquad \text{(dopř. substituce)}$$

- Určeme prvky M

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j,1:j)\mathsf{M}^T(1:j,j)$$

$$\mathsf{D}(1:j,1:j)^{-1}\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{M}^T(1:j,j) \Rightarrow \frac{1}{d_i}\boldsymbol{v}(i) = \mathsf{M}^T(i,j),$$

- tedy pro $i = 1,\ldots,j-1$ :

$$\mathsf{M}(j,i) = \frac{1}{d_i}\boldsymbol{v}(i).$$

- Protože $M(j,j) = 1$, platí pro diagonální prvek $d_j$

$$d_j = \boldsymbol{v}(j)$$

- Protože $M(j,j) = 1$, platí pro diagonální prvek $d_j$

$$d_j = \boldsymbol{v}(j)$$

- Určili jsme $j$. řádek matice M a $j$. diagonální prvek D. Zbývá určit $j$. sloupec matice L
- Využijme k tomu druhou část sloupce $\mathsf{A}(1:n,j)$

$$\mathsf{A}(j+1:n,j) = \mathsf{L}(j+1:n,1:j)\boldsymbol{v}(1:j)$$

- Protože $M(j,j) = 1$, platí pro diagonální prvek $d_j$

$$d_j = \boldsymbol{v}(j)$$

- Určili jsme $j$. řádek matice M a $j$. diagonální prvek D. Zbývá určit $j$. sloupec matice L
- Využijme k tomu druhou část sloupce $\mathsf{A}(1:n,j)$

$$\mathsf{A}(j+1:n,j) = \mathsf{L}(j+1:n,1:j)\boldsymbol{v}(1:j)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{A}(j+1:n,j) = \mathsf{L}(j+1:n,1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1) + \mathsf{L}(j+1:n,j)\boldsymbol{v}(j).$$

- Protože $M(j,j) = 1$, platí pro diagonální prvek $d_j$

$$d_j = \boldsymbol{v}(j)$$

- Určili jsme $j$. řádek matice M a $j$. diagonální prvek D. Zbývá určit $j$. sloupec matice L
- Využijme k tomu druhou část sloupce $\mathsf{A}(1:n,j)$

$$\mathsf{A}(j+1:n,j) = \mathsf{L}(j+1:n,1:j)\boldsymbol{v}(1:j)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{A}(j+1:n,j) = \mathsf{L}(j+1:n,1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1) + \mathsf{L}(j+1:n,j)\boldsymbol{v}(j).$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{L}(j+1:n,j) = \frac{\mathsf{A}(j+1:n,j) - \mathsf{L}(j+1:n,1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1)}{\boldsymbol{v}(j)}$$

- Zbývá určit, jak vypadá první krok.

- Zbývá určit, jak vypadá první krok.

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}\underbrace{\mathsf{D}\mathsf{M}^T\boldsymbol{e}_1}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

- Zbývá určit, jak vypadá první krok.

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}\underbrace{\mathsf{D}\mathsf{M}^T\boldsymbol{e}_1}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}(1:n,1)\boldsymbol{v}(1)$$

- Zbývá určit, jak vypadá první krok.

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}\underbrace{\mathsf{D}\mathsf{M}^T\boldsymbol{e}_1}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}(1:n,1)\boldsymbol{v}(1)$$

$$\mathsf{L}(1,1) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{v}(1) = \mathsf{A}(1,1)$$

- Zbývá určit, jak vypadá první krok.

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}\,\underbrace{\mathsf{D}\mathsf{M}^T\boldsymbol{e}_1}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}(1:n,1)\boldsymbol{v}(1)$$

$$\mathsf{L}(1,1) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{v}(1) = \mathsf{A}(1,1) \Rightarrow \mathsf{L}(2:n,1) = \mathsf{A}(2:n,1)/\boldsymbol{v}(1)$$

- Zbývá určit, jak vypadá první krok.

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}\underbrace{\mathsf{D}\mathsf{M}^T\boldsymbol{e}_1}_{=\boldsymbol{v}} = \mathsf{L}\boldsymbol{v}$$

$$\mathsf{A}(1:n,1) = \mathsf{L}(1:n,1)\boldsymbol{v}(1)$$

$$\mathsf{L}(1,1) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{v}(1) = \mathsf{A}(1,1) \Rightarrow \mathsf{L}(2:n,1) = \mathsf{A}(2:n,1)/\boldsymbol{v}(1)$$

$$\boldsymbol{v}(1) = \mathsf{D}(1,1)\underbrace{\mathsf{M}^T(1,1)}_{=1} \Rightarrow \mathsf{D}(1,1) = \boldsymbol{v}(1)$$

**function** ldmt($A$)

 $n = \text{size}(\mathsf{A})$

 $\mathsf{L} = \text{eye}(n, n)$, $\mathsf{M} = \text{eye}(n, n)$, $\mathsf{D} = \text{zeros}(n, n)$

 $\boldsymbol{v}(1) = \mathsf{A}(1, 1)$

 $\mathsf{D}(1, 1) = \boldsymbol{v}(1)$

 $\mathsf{L}(2:n, 1) = A(2:n, 1)/\boldsymbol{v}(1)$

 **for** $j = 2, \ldots, n$ **do**

  Solve $\mathsf{L}(1:j, 1:j)\boldsymbol{v}(1:j) = A(1:j, j)$ for $\boldsymbol{v}(1:j)$

  **for** $i = 1, \ldots, j-1$ **do**

   $\mathsf{M}(j, i) = \boldsymbol{v}(i)/\mathsf{D}(i, i)$

  **end for**

  $\mathsf{D}(j, j) = \boldsymbol{v}(j)$

  $\mathsf{L}(j+1:n, j) = \frac{\mathsf{A}(j+1:n, j) - \mathsf{L}(j+1:n, 1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1)}{\boldsymbol{v}(j)}$

 **end for**

**end function**

# LDLT dekompozice

**Věta**

Pokud $A = LDM^T$ je LDMT rozklad regulární symetrické matice, pak $L = M$.

- Symetrickou matici jsme tedy schopni rozložit na součin $A = LDL^T$
- Můžeme snížit počet operací v předchozím algoritmu na polovinu.

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože M $=$ L, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe M$(j, 1:j-1)$, neboli M$^T(1:j-1, j)$

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože M $=$ L, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe M$(j, 1:j-1)$, neboli M$^T(1:j-1, j)$
- Toho můžeme využít k dopočítání $\boldsymbol{v}(1:j)$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{M}^T(1:j, j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{L}^T(1:j, j)$$

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože $\mathsf{M} = \mathsf{L}$, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe $\mathsf{M}(j, 1:j-1)$, neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1, j)$
- Toho můžeme využít k dopočítání $\boldsymbol{v}(1:j)$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{M}^T(1:j, j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{L}^T(1:j, j)$$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}^T(1,j) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}^T(2,j) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}^T(j-1,j) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix}$$

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože M = L, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe $\mathsf{M}(j, 1:j-1)$, neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1, j)$
- Toho můžeme využít k dopočítání $\boldsymbol{v}(1:j)$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{M}^T(1:j, j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{L}^T(1:j, j)$$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}^T(1,j) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}^T(2,j) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}^T(j-1,j) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}(j,1) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}(j,2) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}(j,j-1) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix}$$

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože $\mathsf{M}=\mathsf{L}$, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe $\mathsf{M}(j,1:j-1)$, neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1,j)$
- Toho můžeme využít k dopočítání $\boldsymbol{v}(1:j)$

$$\boldsymbol{v}(1:j)=\mathsf{D}(1:j,1:j)\mathsf{M}^T(1:j,j)=\mathsf{D}(1:j,1:j)\mathsf{L}^T(1:j,j)$$

$$\boldsymbol{v}(1:j)=\begin{bmatrix}\mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}^T(1,j)\\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}^T(2,j)\\ \vdots\\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}^T(j-1,j)\\ \mathsf{D}(j,j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}(j,1)\\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}(j,2)\\ \vdots\\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}(j,j-1)\\ \mathsf{D}(j,j)\end{bmatrix}$$

- Známe všechny prvky vektoru napravo, kromě posledního. Zbývá tedy nalézt $\boldsymbol{v}(j)$.
- Vyjádřeme si, jak vypadá prvek $\mathsf{A}(j,j)$:

$$\mathsf{A}(j,j)=\mathsf{L}(j,1:j)\boldsymbol{v}(1:j)$$

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože M = L, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe $\mathsf{M}(j, 1:j-1)$, neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1, j)$
- Toho můžeme využít k dopočítání $\boldsymbol{v}(1:j)$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{M}^T(1:j, j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{L}^T(1:j, j)$$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}^T(1,j) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}^T(2,j) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}^T(j-1,j) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}(j,1) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}(j,2) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}(j,j-1) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix}$$

- Známe všechny prvky vektoru napravo, kromě posledního. Zbývá tedy nalézt $\boldsymbol{v}(j)$.
- Vyjádřeme si, jak vypadá prvek $\mathsf{A}(j,j)$:

$$\mathsf{A}(j,j) = \mathsf{L}(j, 1:j)\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{L}(j, 1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1) + \mathsf{L}(j,j)\boldsymbol{v}(j) = \mathsf{L}(j, 1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1) + 1\boldsymbol{v}(j)$$

- Opět předpokládejme, že známe $j-1$ sloupců L, řádků M a diagonálních prvků D.
- Navíc, protože M = L, známe prvních $j-1$ *sloupců* matice M. Tedy známe $\mathsf{M}(j, 1:j-1)$, neboli $\mathsf{M}^T(1:j-1, j)$
- Toho můžeme využít k dopočítání $\boldsymbol{v}(1:j)$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{M}^T(1:j, j) = \mathsf{D}(1:j, 1:j)\mathsf{L}^T(1:j, j)$$

$$\boldsymbol{v}(1:j) = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}^T(1,j) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}^T(2,j) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}^T(j-1,j) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(1,1)\mathsf{L}(j,1) \\ \mathsf{D}(2,2)\mathsf{L}(j,2) \\ \vdots \\ \mathsf{D}(j-1,j-1)\mathsf{L}(j,j-1) \\ \mathsf{D}(j,j) \end{bmatrix}$$

- Známe všechny prvky vektoru napravo, kromě posledního. Zbývá tedy nalézt $\boldsymbol{v}(j)$.
- Vyjádřeme si, jak vypadá prvek $\mathsf{A}(j,j)$:

$$\mathsf{A}(j,j) = \mathsf{L}(j, 1:j)\boldsymbol{v}(1:j) = \mathsf{L}(j, 1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1) + \mathsf{L}(j,j)\boldsymbol{v}(j) = \mathsf{L}(j, 1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1) + 1\boldsymbol{v}(j)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}(j) = \mathsf{A}(j,j) - \mathsf{L}(j, 1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1).$$

- Nalezli jsme $\boldsymbol{v}(1:j)$ aniž bychom museli řešit soustavu rovnic.

- Nalezli jsme $\boldsymbol{v}(1:j)$ aniž bychom museli řešit soustavu rovnic.

**function** ldlt($A$)
 $n = \text{size}(\mathsf{A})$
 $\mathsf{L} = \text{eye}(n,n)$, $\mathsf{D} = \text{zeros}(n,n)$
 $\boldsymbol{v}(1) = \mathsf{A}(1,1)$
 $\mathsf{D}(1,1) = \boldsymbol{v}(1)$
 $\mathsf{L}(2:n,1) = A(2:n,1)/\boldsymbol{v}(1)$
 **for** $j$ = 2, $\ldots$, $n$ **do**
  **for** $i$ = 1, $\ldots$, $j-1$ **do**
   $\boldsymbol{v}(i) = \mathsf{L}(j,i)\mathsf{D}(i,i)$
  **end for**
  $\boldsymbol{v}(j) = \mathsf{A}(j,j) - \mathsf{L}(j,1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1)$
  $\mathsf{D}(j,j) = \boldsymbol{v}(j)$
  $\mathsf{L}(j+1:n,j) = \frac{\mathsf{A}(j+1:n,j) - \mathsf{L}(j+1:n,1:j-1)\boldsymbol{v}(1:j-1)}{\boldsymbol{v}(j)}$
 **end for**
**end function**

# Choleského rozklad

## Definice

Matici A, pro kterou platí $a_{ij} = a_{ji}$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \neq 0 : \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \boldsymbol{x} > 0$$

nazýváme symetrickou pozitivně definitní.

# Choleského rozklad

## Definice

Matici A, pro kterou platí $a_{ij} = a_{ji}$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \neq 0 : \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \boldsymbol{x} > 0$$

nazýváme symetrickou pozitivně definitní.

- Tyto matice často vznikají diskretizací fyzikálních systémů. Zopakujme si některé vlastnosti:
  1. Každá pozitivně definitní matice má kladné prvky na diagonále ($a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A} \boldsymbol{e}_i > 0$, nerovnost vyplývá z definice pozitivní definitnosti)

# Choleského rozklad

## Definice

Matici A, pro kterou platí $a_{ij} = a_{ji}$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \neq 0 : \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \boldsymbol{x} > 0$$

nazýváme symetrickou pozitivně definitní.

- Tyto matice často vznikají diskretizací fyzikálních systémů. Zopakujme si některé vlastnosti:
  1. Každá pozitivně definitní matice má kladné prvky na diagonále ($a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A} \boldsymbol{e}_i > 0$, nerovnost vyplývá z definice pozitivní definitnosti)
  2. Matice je pozitivně definitní, je-li symetrická a má-li všechna vlastní čísla kladná.

# Choleského rozklad

## Definice

Matici A, pro kterou platí $a_{ij} = a_{ji}$ a

$$\forall \boldsymbol{x} \neq 0 : \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \boldsymbol{x} > 0$$

nazýváme symetrickou pozitivně definitní.

- Tyto matice často vznikají diskretizací fyzikálních systémů. Zopakujme si některé vlastnosti:
  1. Každá pozitivně definitní matice má kladné prvky na diagonále ($a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A} \boldsymbol{e}_i > 0$, nerovnost vyplývá z definice pozitivní definitnosti)
  2. Matice je pozitivně definitní, je-li symetrická a má-li všechna vlastní čísla kladná.
  3. Každá pozitivně definitní matice může být rozložena na

     $$\mathsf{A} = \mathsf{R}^T \mathsf{R},$$

     kde R je horní trojúhelníková matice s kladnými prvky na diagonále.

- Některé další vlastnosti:
  - Je-li $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symetrická pozitivně definitní a $X \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$, matice s plnou hodností, pak také $X^T AX$ je symetrická pozitivně definitní.

- Některé další vlastnosti:
  - Je-li $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symetrická pozitivně definitní a $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$, matice s plnou hodností, pak také $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$ je symetrická pozitivně definitní.

$$(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})^T = \mathsf{X}^T\mathsf{A}^T\mathsf{X} = \mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X},$$

- Některé další vlastnosti:
  - Je-li $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symetrická pozitivně definitní a $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$, matice s plnou hodností, pak také $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$ je symetrická pozitivně definitní.

$$(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})^T = \mathsf{X}^T\mathsf{A}^T\mathsf{X} = \mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}, \quad \boldsymbol{x}^T(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})\boldsymbol{x} = (\underbrace{\mathsf{X}\boldsymbol{x}}_{\neq \boldsymbol{o}})^T\mathsf{A}(\mathsf{X}\boldsymbol{x}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

- Některé další vlastnosti:
  - Je-li $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symetrická pozitivně definitní a $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$, matice s plnou hodností, pak také $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$ je symetrická pozitivně definitní.

$$(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})^T = \mathsf{X}^T\mathsf{A}^T\mathsf{X} = \mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}, \quad \boldsymbol{x}^T(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})\boldsymbol{x} = (\underbrace{\mathsf{X}\boldsymbol{x}}_{\neq \boldsymbol{o}})^T\mathsf{A}(\mathsf{X}\boldsymbol{x}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

  - Zvolíme-li $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tak, aby měla prvek 1 v každém sloupci a jinde 0, můžeme každou hlavní submatici matice A zapsat jako $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$

- Některé další vlastnosti:
  - Je-li $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symetrická pozitivně definitní a $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$, matice s plnou hodností, pak také $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$ je symetrická pozitivně definitní.

$$(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})^T = \mathsf{X}^T\mathsf{A}^T\mathsf{X} = \mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}, \quad \boldsymbol{x}^T(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})\boldsymbol{x} = (\underbrace{\mathsf{X}\boldsymbol{x}}_{\neq \boldsymbol{o}})^T\mathsf{A}(\mathsf{X}\boldsymbol{x}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

  - Zvolíme-li $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tak, aby měla prvek 1 v každém sloupci a jinde 0, můžeme každou hlavní submatici matice A zapsat jako $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$ $\Rightarrow$ každá hlavní submatice pozitivně definitní matice je pozitivně definitní.

- Některé další vlastnosti:
  - Je-li $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symetrická pozitivně definitní a $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$, matice s plnou hodností, pak také $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}$ je symetrická pozitivně definitní.

$$(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})^T = \mathsf{X}^T\mathsf{A}^T\mathsf{X} = \mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X}, \quad \boldsymbol{x}^T(\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X})\boldsymbol{x} = (\underbrace{\mathsf{X}\boldsymbol{x}}_{\neq \boldsymbol{o}})^T\mathsf{A}(\mathsf{X}\boldsymbol{x}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

  - Zvolíme-li $\mathsf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tak, aby měla prvek 1 v každém sloupci a jinde 0, můžeme každou hlavní submatici matice A zapsat jako $\mathsf{X}^T\mathsf{A}\mathsf{X} \Rightarrow$ každá hlavní submatice pozitivně definitní matice je pozitivně definitní.

$$\text{Př.} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathsf{X}^T} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathsf{X}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Dekompozici z bodu 3 nazýváme Choleského rozklad. Pokusme se odvodit jeho základní tvar.

- Dekompozici z bodu 3 nazýváme Choleského rozklad. Pokusme se odvodit jeho základní tvar.
- Buď A symetrická pozitivně definitní matice s 1 na pozici (1,1).

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix},$$

- Dekompozici z bodu 3 nazýváme Choleského rozklad. Pokusme se odvodit jeho základní tvar.
- Buď A symetrická pozitivně definitní matice s 1 na pozici (1,1).

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix},$$

- Podívejme se, jak dopadne první krok LU rozkladu

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix},$$

- Dekompozici z bodu 3 nazýváme Choleského rozklad. Pokusme se odvodit jeho základní tvar.
- Buď A symetrická pozitivně definitní matice s 1 na pozici (1,1).

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix},$$

- Podívejme se, jak dopadne první krok LU rozkladu

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}$$

- Dekompozici z bodu 3 nazýváme Choleského rozklad. Pokusme se odvodit jeho základní tvar.
- Buď A symetrická pozitivně definitní matice s 1 na pozici (1,1).

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix},$$

- Podívejme se, jak dopadne první krok LU rozkladu

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}$$

- Vynulujme nyní prvky v prvním řádku pomocí násobení transpozicí transformační matice zprava:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}$$

- Dekompozici z bodu 3 nazýváme Choleského rozklad. Pokusme se odvodit jeho základní tvar.
- Buď A symetrická pozitivně definitní matice s 1 na pozici (1,1).

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix},$$

- Podívejme se, jak dopadne první krok LU rozkladu

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}$$

- Vynulujme nyní prvky v prvním řádku pomocí násobení transpozicí transformační matice zprava:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{w}^T \\ 0 & \mathsf{I} \end{pmatrix}$$

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Tento základní krok je rekurzivně opakován. Pokud má submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný prvek na pozici (1,1), můžeme $\mathsf{A}_1$ rozložit na $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_2^T \mathsf{A}_2 \mathsf{R}_2$. Takto postupujeme, dokud se původní matice neredukuje na jednotkovou matici.

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Tento základní krok je rekurzivně opakován. Pokud má submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný prvek na pozici (1,1), můžeme $\mathsf{A}_1$ rozložit na $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_2^T \mathsf{A}_2 \mathsf{R}_2$. Takto postupujeme, dokud se původní matice neredukuje na jednotkovou matici.

$$\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{R}_1^T \mathsf{R}_2^T \cdots \mathsf{R}_m^T}_{=\mathsf{R}^T} \mathsf{I} \underbrace{\mathsf{R}_m \cdots \mathsf{R}_2 \mathsf{R}_1}_{=\mathsf{R}}$$

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Tento základní krok je rekurzivně opakován. Pokud má submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný prvek na pozici (1,1), můžeme $\mathsf{A}_1$ rozložit na $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_2^T \mathsf{A}_2 \mathsf{R}_2$. Takto postupujeme, dokud se původní matice neredukuje na jednotkovou matici.

$$\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{R}_1^T \mathsf{R}_2^T \cdots \mathsf{R}_m^T}_{=\mathsf{R}^T} \mathsf{I} \underbrace{\mathsf{R}_m \cdots \mathsf{R}_2 \mathsf{R}_1}_{=\mathsf{R}} = \mathsf{R}^T \mathsf{R}$$

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Tento základní krok je rekurzivně opakován. Pokud má submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný prvek na pozici (1,1), můžeme $\mathsf{A}_1$ rozložit na $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_2^T \mathsf{A}_2 \mathsf{R}_2$. Takto postupujeme, dokud se původní matice neredukuje na jednotkovou matici.

$$\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{R}_1^T \mathsf{R}_2^T \cdots \mathsf{R}_m^T}_{=\mathsf{R}^T} \mathsf{I} \underbrace{\mathsf{R}_m \cdots \mathsf{R}_2 \mathsf{R}_1}_{=\mathsf{R}} = \mathsf{R}^T \mathsf{R}$$

- Jak víme, že je prvek na pozici (1,1) submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný?

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Tento základní krok je rekurzivně opakován. Pokud má submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný prvek na pozici (1,1), můžeme $\mathsf{A}_1$ rozložit na $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_2^T \mathsf{A}_2 \mathsf{R}_2$. Takto postupujeme, dokud se původní matice neredukuje na jednotkovou matici.

$$\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{R}_1^T \mathsf{R}_2^T \cdots \mathsf{R}_m^T}_{=\mathsf{R}^T} \mathsf{I} \underbrace{\mathsf{R}_m \cdots \mathsf{R}_2 \mathsf{R}_1}_{=\mathsf{R}} = \mathsf{R}^T \mathsf{R}$$

- Jak víme, že je prvek na pozici (1,1) submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný?
- Tato matice je hlavní submaticí $\mathsf{A}_1$

- Zobecněme pro libovolné $a_{1,1} > 0$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w} & \mathsf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \boldsymbol{o} \\ \frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{a_{1,1}}} & \mathsf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \boldsymbol{o} & \mathsf{I} \end{pmatrix} = \mathsf{R}_1^T \mathsf{A}_1 \mathsf{R}_1$$

- Tento základní krok je rekurzivně opakován. Pokud má submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný prvek na pozici (1,1), můžeme $\mathsf{A}_1$ rozložit na $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_2^T \mathsf{A}_2 \mathsf{R}_2$. Takto postupujeme, dokud se původní matice neredukuje na jednotkovou matici.

$$\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{R}_1^T \mathsf{R}_2^T \cdots \mathsf{R}_m^T}_{=\mathsf{R}^T} \mathsf{I} \underbrace{\mathsf{R}_m \cdots \mathsf{R}_2 \mathsf{R}_1}_{=\mathsf{R}} = \mathsf{R}^T \mathsf{R}$$

- Jak víme, že je prvek na pozici (1,1) submatice $\mathsf{K} - \frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T}{\sqrt{a_{1,1}}}$ kladný?
- Tato matice je hlavní submaticí $\mathsf{A}_1 = \mathsf{R}_1^{-T} \mathsf{A} \mathsf{R}_1^{-1}$. Viz vlastnosti pozitivně definitní matice.

**function** cholesky(A)
    $m = \text{size}(\mathsf{A})$
    $\mathsf{R} = \text{zeros}(m)$
    **for** $k = 1, \ldots, m$ **do**
        $\boldsymbol{w} = \mathsf{A}(k+1:m, k)$
        $\mathsf{A}(k+1:m, k+1:m) = \mathsf{A}(k+1:m, k+1:m) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T/\mathsf{A}(k,k)$
        $\mathsf{R}(k,k) = \sqrt{\mathsf{A}(k,k)}$
        $\mathsf{R}(k, k+1:m) = \boldsymbol{w}^T/\sqrt{\mathsf{A}(k,k)}$
    **end for**
**end function**

- Při eliminaci nám stačí pracovat pouze s polovinou matice.

**function** cholesky2(A)
    $m = \mathrm{size}(\mathsf{A})$
    $\mathsf{R} = \mathsf{A}$
    **for** $k = 1, \ldots, m$ **do**
        **for** $j = k+1, \ldots, m$ **do**
            $\mathsf{R}(j, j:m) = \mathsf{R}(j, j:m) - \mathsf{R}(k, j:m)\mathsf{R}(k, j)/\mathsf{R}(k, k)$
        **end for**
        $\mathsf{R}(k, k:m) = \frac{\mathsf{R}(k,k:m)}{\sqrt{(\mathsf{R}(k,k))}}$
    **end for**
**end function**

# Landauova notace (Big O notation)

## Definice

Buď $f(n)$ a $g(n)$ funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^+$. Řekneme, že $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, pokud existuje kladné reálné číslo $M$ a přirozené číslo $n_0$ takové, že platí

$$f(n) \leq Mg(n), \quad \forall n \geq n_0$$

# Landauova notace (Big O notation)

**Definice**

Buď $f(n)$ a $g(n)$ funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^+$. Řekneme, že $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, pokud existuje kladné reálné číslo $M$ a přirozené číslo $n_0$ takové, že platí

$$f(n) \leq M g(n), \quad \forall n \geq n_0$$

- Jinak řečeno, $f(n)/g(n)$ je omezené pro dostatečně velká $n$.

# Výpočetní náročnost LU rozkladu

- Zopakujme si algoritmus LU rozkladu

**function** LU($A$)
    $m = \text{size}(\mathsf{A})$
    $\mathsf{U} = \mathsf{A}$
    **for** $k = 1, \ldots, m-1$ **do**
        **for** $j = k+1, \ldots, m$ **do**
            $\mathsf{L}(j,k) = \mathsf{U}(j,k)/\mathsf{U}(k,k)$
            $\mathsf{U}(j,k:m) = \mathsf{U}(j,k:m) - \mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k,k:m)$
        **end for**
    **end for**
**end function**

- Výpočtu dominuje vnitřní smyčka, konkrétně řádek

$$\mathsf{U}(j, k:m) = \mathsf{U}(j, k:m) - \mathsf{L}(j, k)\mathsf{U}(k, k:m)$$

- Výpočtu dominuje vnitřní smyčka, konkrétně řádek

$$\mathsf{U}(j,k:m) = \mathsf{U}(j,k:m) - \mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k,k:m)$$

- Vektor $\mathsf{U}(k,k:m)$ má v $k$-tém kroku délku $l = m - k + 1$.

- Výpočtu dominuje vnitřní smyčka, konkrétně řádek

$$\mathsf{U}(j, k:m) = \mathsf{U}(j, k:m) - \mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k, k:m)$$

- Vektor $\mathsf{U}(k, k:m)$ má v $k$-tém kroku délku $l = m - k + 1$.
- Na řádku tento vektor přenásobíme skalárem ($l$ násobení) a odečteme od vektoru $\mathsf{U}(j, k:m)$ ($l$ rozdílů). Celkem tedy na tomto řádku provedeme $2l$ operací.

- Výpočtu dominuje vnitřní smyčka, konkrétně řádek

$$\mathsf{U}(j,k:m) = \mathsf{U}(j,k:m) - \mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k,k:m)$$

- Vektor $\mathsf{U}(k,k:m)$ má v $k$-tém kroku délku $l = m - k + 1$.
- Na řádku tento vektor přenásobíme skalárem ($l$ násobení) a odečteme od vektoru $\mathsf{U}(j,k:m)$ ($l$ rozdílů). Celkem tedy na tomto řádku provedeme $2l$ operací.
- Zajímá nás, kolikrát se výpočet na tomto řádku provede v průběhu celého běhu algoritmu a s jak dlouhými vektory při tom pracuje.

- Rozepišme si postupně počet volání $\mathsf{U}(j,k:m) = \mathsf{U}(j,k:m) - \mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k,k:m)$ a délku $l$ pro jednotlivé kroky $k$:

$$k = 1 : \text{počet: } m-1, \quad l = m$$
$$k = 2 : \text{počet: } m-2, \quad l = m-1$$
$$\vdots$$
$$k = m-1 : \text{počet: } 1, \quad l = m-(m-1)+1 = 2.$$

- Rozepišme si postupně počet volání $\mathsf{U}(j,k:m)=\mathsf{U}(j,k:m)-\mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k,k:m)$ a délku $l$ pro jednotlivé kroky $k$:

$$k=1:\text{počet: } m-1, \quad l=m$$

$$k=2:\text{počet: } m-2, \quad l=m-1$$

$$\vdots$$

$$k=m-1:\text{počet: } 1, \quad l=m-(m-1)+1=2.$$

- Celkový počet operací $q$ je tedy dán výrazem

$$q=2((m-1)m+(m-2)(m-1)+\ldots+2\cdot 3+1\cdot 2),$$

- Rozepišme si postupně počet volání $\mathsf{U}(j,k:m) = \mathsf{U}(j,k:m) - \mathsf{L}(j,k)\mathsf{U}(k,k:m)$ a délku $l$ pro jednotlivé kroky $k$:

$$k = 1 : \text{počet: } m-1, \quad l = m$$
$$k = 2 : \text{počet: } m-2, \quad l = m-1$$
$$\vdots$$
$$k = m-1 : \text{počet: } 1, \quad l = m-(m-1)+1 = 2.$$

- Celkový počet operací $q$ je tedy dán výrazem

$$q = 2((m-1)m + (m-2)(m-1) + \ldots + 2\cdot 3 + 1\cdot 2),$$
$$= \sum_{i=1}^{m} 2(m-i)(m-i+1) = 2\sum_{j=0}^{m-1} j(j+1) = 2\sum_{j=0}^{m-1}(j^2+j) = 2(\sum_{j=0}^{m-1} j^2 + \sum_{j=0}^{m-1} j)$$

$$q = 2\left(\sum_{j=0}^{m-1} j^2 + \sum_{j=0}^{m-1} j\right)$$

- K vyčíslení sum využijme $\sum_{j=0}^{m} j^2 = \frac{1}{6}(2m+1)(m+1)m$ a $\sum_{j=0}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$.

$$q = 2(\sum_{j=0}^{m-1} j^2 + \sum_{j=0}^{m-1} j)$$

- K vyčíslení sum využijme $\sum_{j=0}^{m} j^2 = \frac{1}{6}(2m+1)(m+1)m$ a $\sum_{j=0}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$.

$$q = 2(\frac{1}{6}(2m+1)(m+1)m - m^2 + \frac{m(m+1)}{2} - m) = 2(\frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{3}m)$$

$$q = 2(\sum_{j=0}^{m-1} j^2 + \sum_{j=0}^{m-1} j)$$

- K vyčíslení sum využijme $\sum_{j=0}^{m} j^2 = \frac{1}{6}(2m+1)(m+1)m$ a $\sum_{j=0}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$.

$$q = 2(\frac{1}{6}(2m+1)(m+1)m - m^2 + \frac{m(m+1)}{2} - m) = 2(\frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{3}m)$$

- Výpočtu dominuje třetí mocnina, přibližně tedy potřebujeme $\approx \frac{2}{3}m^3$ operací ($\mathcal{O}(m^3)$).

## LU rozklad s částečnou pivotizací

- V každém kroku LU rozkladu s pivotizací hledáme největší pivot ve sloupci délky $m-k-1$.
- Celkový počet porovnání tedy je

$$m+(m-1)+(m-2)+\ldots+2=\frac{(m+2)(m-1)}{2}=\frac{1}{2}(m^2+m-2)$$

# LU rozklad s částečnou pivotizací

- V každém kroku LU rozkladu s pivotizací hledáme největší pivot ve sloupci délky $m-k-1$.
- Celkový počet porovnání tedy je

$$m+(m-1)+(m-2)+\ldots+2=\frac{(m+2)(m-1)}{2}=\frac{1}{2}(m^2+m-2)$$

- Výpočtu dominuje druhá mocnina, můžeme tedy říct, že celkový počet porovnání je $\approx \frac{1}{2}m^2$. Řádově je tedy náročnost částečné pivotizace $\mathcal{O}(m^2)$.
- Vzhledem k tomu, že náročnost samotného LU rozkladu je kubická, nepřináší částečná pivotizace významný overhead.

# LU rozklad s částečnou pivotizací

- V každém kroku LU rozkladu s pivotizací hledáme největší pivot ve sloupci délky $m-k-1$.
- Celkový počet porovnání tedy je

$$m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 2 = \frac{(m+2)(m-1)}{2} = \frac{1}{2}(m^2 + m - 2)$$

- Výpočtu dominuje druhá mocnina, můžeme tedy říct, že celkový počet porovnání je $\approx \frac{1}{2}m^2$. Řádově je tedy náročnost částečné pivotizace $\mathcal{O}(m^2)$.
- Vzhledem k tomu, že náročnost samotného LU rozkladu je kubická, nepřináší částečná pivotizace významný overhead.
- Podobně bychom mohli odvodit, že náročnost úplné pivotizace je $\mathcal{O}(m^3)$, což významně přispěje k původní náročnosti metody. Z toho důvodu se úplná pivotizace často nepoužívá.

# Další algoritmy

- LDMT – $\frac{2}{3}m^3$
- LDLT – $\frac{1}{3}m^3$
- Choleského rozklad – $\frac{1}{3}m^3$
- dopředná/zpětná substituce – $\frac{1}{2}m^2$
- výpočet inverzní matice – $m^3$
- řešení pomocí inverzní matice (násobení inverzní maticí) – $m^2$

# Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

23. března 2023

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM