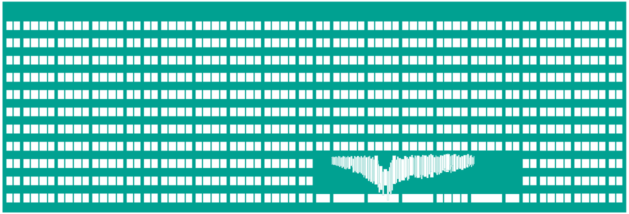
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Numerická lineární algebra 1

Řešení soustav lineárních rovnic - iterační metody (Jacobiho, Gaussova-Seidelova, Richardsonova metoda)

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

30. března 2023

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM

Motivace

- Přímé metody (LU, LDLT, Choleského faktorizace, atd.) vyžadují $\mathcal{O}(m^3)$ operací $\Rightarrow$ omezená velikost soustavy, kterou jsme schopni řešit.

Motivace

- Přímé metody (LU, LDLT, Choleského faktorizace, atd.) vyžadují $\mathcal{O}(m^3)$ operací $\Rightarrow$ omezená velikost soustavy, kterou jsme schopni řešit.
- V případě husté matice A $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ se přibližná velikost soustavy řešitelné přímými metodami historicky vyvíjela takto:
  - 1950: $n = 20$ (Wilkinson)

Motivace

- Přímé metody (LU, LDLT, Choleského faktorizace, atd.) vyžadují $\mathcal{O}(m^3)$ operací $\Rightarrow$ omezená velikost soustavy, kterou jsme schopni řešit.
- V případě husté matice A $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ se přibližná velikost soustavy řešitelné přímými metodami historicky vyvíjela takto:
  - 1950: $n = 20$ (Wilkinson)
  - 1965: $n = 200$ (Forsythe a Moler)

Motivace

- Přímé metody (LU, LDLT, Choleského faktorizace, atd.) vyžadují $\mathcal{O}(m^3)$ operací $\Rightarrow$ omezená velikost soustavy, kterou jsme schopni řešit.
- V případě husté matice A $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ se přibližná velikost soustavy řešitelné přímými metodami historicky vyvíjela takto:
  - 1950: $n = 20$ (Wilkinson)
  - 1965: $n = 200$ (Forsythe a Moler)
  - 1980: $n = 2000$ (LINPACK)

Motivace

- Přímé metody (LU, LDLT, Choleského faktorizace, atd.) vyžadují $\mathcal{O}(m^3)$ operací $\Rightarrow$ omezená velikost soustavy, kterou jsme schopni řešit.
- V případě husté matice A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ se přibližná velikost soustavy řešitelné přímými metodami historicky vyvíjela takto:
  - 1950: $n = 20$ (Wilkinson)
  - 1965: $n = 200$ (Forsythe a Moler)
  - 1980: $n = 2000$ (LINPACK)
  - 1995: $n = 20000$ (LAPACK)

Motivace

- Přímé metody (LU, LDLT, Choleského faktorizace, atd.) vyžadují $\mathcal{O}(m^3)$ operací $\Rightarrow$ omezená velikost soustavy, kterou jsme schopni řešit.
- V případě husté matice A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ se přibližná velikost soustavy řešitelné přímými metodami historicky vyvíjela takto:
  - 1950: $n = 20$ (Wilkinson)
  - 1965: $n = 200$ (Forsythe a Moler)
  - 1980: $n = 2000$ (LINPACK)
  - 1995: $n = 20000$ (LAPACK)
  - 2010: $n = 200000$ (HDSS)

- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

$$
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & 0 & 0 & 0 \\
\times & 0 & \times & 0 & 0 \\
\times & 0 & 0 & \times & 0 \\
\times & 0 & 0 & 0 & \times
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
0 & \times & \times & \times & \times \\
0 & \times & \times & \times & \times \\
0 & \times & \times & \times & \times \\
0 & \times & \times & \times & \times
\end{bmatrix}
$$

  - Tento problém lze částečně řešit vhodnou pivotizací matice před rozkladem.

- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

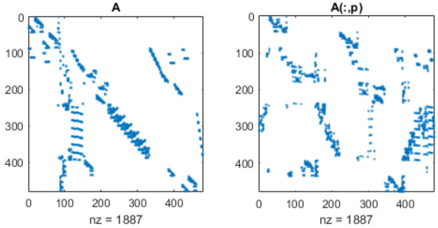
$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

  - Tento problém lze částečně řešit vhodnou pivotizací matice před rozkladem.
  - Používají se tzv. *approximated minimum degree (AMD)* algoritmy (`colamd`, `symamd`).

- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

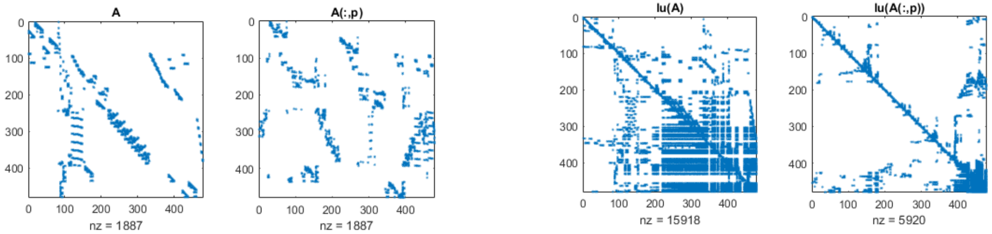
  - Tento problém lze částečně řešit vhodnou pivotizací matice před rozkladem.
  - Používají se tzv. *approximated minimum degree (AMD)* algoritmy (`colamd`, `symamd`).



- V případě systémů s řídkou maticí jsme schopni řešit přímými řešiči soustavy s větší dimenzí (desítky, stovky miliónů neznámých). Může ale dojít k zaplnění matice.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

  - Tento problém lze částečně řešit vhodnou pivotizací matice před rozkladem.
  - Používají se tzv. *approximated minimum degree (AMD)* algoritmy (`colamd`, `symamd`).



- Další nevýhody přímých řešičů
  - Známe-li přibližné řešení, nedokážeme tuto znalost využít ke snížení celkového počtu operací a zkrácení doby výpočtu.
  - Postačuje-li nám pouze přibližné řešení, nemůžeme výpočet pomocí přímého řešiče ukončit předčasně.

- Další nevýhody přímých řešičů
  - Známe-li přibližné řešení, nedokážeme tuto znalost využít ke snížení celkového počtu operací a zkrácení doby výpočtu.
  - Postačuje-li nám pouze přibližné řešení, nemůžeme výpočet pomocí přímého řešiče ukončit předčasně.
- Alternativou jsou *iterační řešiče*
  - Generují posloupnost přibližných řešení $\{\boldsymbol{x}^k\}$.
  - Pracují téměř výhradně s násobením matice-vektor $(\mathcal{O}(n^2))$ $\Rightarrow$ nedochází k zaplnění matice.
  - Důležitou vlastností je rychlost konvergence $\{x^k\}$ k řešení.
  - Nevýhoda – pro některé matice může iterační metoda konvergovat k řešení pomalu, nebo vůbec.
- Budeme se zabývat *lineárními* a *gradientními* iteračními metodami.

Lineární iterační metody

- Buď $\boldsymbol{x}^0$ dané. Hledáme posloupnost přibližných řešení rovnice $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b},$$

kde $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Lineární iterační metody

- Buď $\boldsymbol{x}^0$ dané. Hledáme posloupnost přibližných řešení rovnice $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b},$$

kde $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definice

Řekneme, že iterační metoda je *konvergentní*, pokud $\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ pro $k \to \infty$ (tedy $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}$). Toto platí právě tehdy, když $\|\mathsf{M}\| < 1$.

Lineární iterační metody

- Buď $\boldsymbol{x}^0$ dané. Hledáme posloupnost přibližných řešení rovnice $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b},$$

kde $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definice

Řekneme, že iterační metoda je *konvergentní*, pokud $\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ pro $k \to \infty$ (tedy $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}$). Toto platí právě tehdy, když $\|\mathsf{M}\| < 1$.

Definice

Řekneme, že iterační metoda je *konzistentní* se soustavou $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, řeší-li soustavu $\mathsf{M}\tilde{\boldsymbol{x}} + \mathsf{N}\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{x}}$ právě jeden vektor $\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Toto platí právě tehdy, když $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$.

- Při odvozování následujících metod budeme vycházet z rozkladu matice A na součet diagonální, dolní a horní trojúhelníkové matice

$$\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$$

- Při odvozování následujících metod budeme vycházet z rozkladu matice A na součet diagonální, dolní a horní trojúhelníkové matice

$$\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$$

- Např. matici

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

rozložíme na

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathsf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $A = D + L + U$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} + (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} + (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} + (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x}^{k+1} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} + (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x}^{k+1} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x}^{k+1} &= \underbrace{-\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U})}_{=\mathsf{M}}\boldsymbol{x}^{k} + \underbrace{\mathsf{D}^{-1}}_{=\mathsf{N}}\boldsymbol{b} = \mathsf{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k})
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} + (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x}^{k+1} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x}^{k+1} &= \underbrace{-\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U})}_{=\mathsf{M}}\boldsymbol{x}^{k} + \underbrace{\mathsf{D}^{-1}}_{=\mathsf{N}}\boldsymbol{b} = \mathsf{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k}) \\
i = 1, \ldots, n\colon\ (\boldsymbol{x}^{k+1})_i &= \tfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}^{k})_j\right) = \tfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}^{k})_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}^{k})_j\right)
\end{aligned}
$$

Jacobiho metoda

- Vyjdeme z rozkladu $\mathsf{A} = \mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
(\mathsf{D} + \mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} + (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \\
\mathsf{D}\boldsymbol{x}^{k+1} &= -(\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x}^{k+1} &= \underbrace{-\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U})}_{=\mathsf{M}}\boldsymbol{x}^{k} + \underbrace{\mathsf{D}^{-1}}_{=\mathsf{N}}\boldsymbol{b} = \mathsf{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - (\mathsf{L} + \mathsf{U})\boldsymbol{x}^{k}) \\
i = 1, \dots, n\colon\ (\boldsymbol{x}^{k+1})_i &= \tfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \textstyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}^{k})_j\right) = \tfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \textstyle\sum_{j<i}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}^{k})_j - \textstyle\sum_{j>i}^{n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}^{k})_j\right)
\end{aligned}
$$

- Metoda je konzistentní – vyplývá už z konstrukce, ale můžeme ověřit, že $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$:

$$\mathsf{M} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}), \quad \mathsf{N} = \mathsf{D}^{-1}$$

$$\mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} \quad =$$

- Metoda je konzistentní – vyplývá už z konstrukce, ale můžeme ověřit, že $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$:

$$\mathsf{M} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}), \quad \mathsf{N} = \mathsf{D}^{-1}$$

$$\mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} \quad = \quad \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A}$$

- Metoda je konzistentní – vyplývá už z konstrukce, ale můžeme ověřit, že $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$:

$$\mathsf{M} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}), \quad \mathsf{N} = \mathsf{D}^{-1}$$

$$\mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} \quad = \quad \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U})$$

- Metoda je konzistentní – vyplývá už z konstrukce, ale můžeme ověřit, že $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$:

$$\mathsf{M} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}), \quad \mathsf{N} = \mathsf{D}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} &= \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}) - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D} \end{aligned}$$

- Metoda je konzistentní – vyplývá už z konstrukce, ale můžeme ověřit, že $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$:

$$\mathsf{M} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}), \quad \mathsf{N} = \mathsf{D}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} &= \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}) - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{U}) \end{aligned}$$

- Metoda je konzistentní – vyplývá už z konstrukce, ale můžeme ověřit, že $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$:

$$\mathsf{M} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{U}), \quad \mathsf{N} = \mathsf{D}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} &= \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}+\mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - \mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{U}) - \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D} = -\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{U}) = \mathsf{M} \end{aligned}$$

Definice

Matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazveme ostře diagonálně dominantní, platí-li

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|, \quad \text{pro všechna } i = 1, \ldots, n.$$

Definice

Matici A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazveme ostře diagonálně dominantní, platí-li

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|, \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, n.$$

Věta

Buď A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ ostře diagonálně dominantní matice. Pak posloupnost $\{\boldsymbol{x}^k\}$ generovaná Jacobiho metodou konverguje k řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy A$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro libovolně zvolený počáteční odhad $\boldsymbol{x}^0$.

Důkaz.

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^k\right)$$

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} x_j^k\right)\\
x_i &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} x_j\right)
\end{aligned}
$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n a_{i,j}x_j^k\right)\\ x_i &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n a_{i,j}x_j\right)\\ \underbrace{x_i^{k+1} - x_i}_{=e_i^{k+1}} &= -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n a_{i,j}(\underbrace{x_j^k - x_j}_{e_j^k})\right) \end{aligned}$$

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^k\right)\\
x_i &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j\right)\\
\underbrace{x_i^{k+1} - x_i}_{=e_i^{k+1}} &= -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}\underbrace{(x_j^k - x_j)}_{e_j^k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
|e_i^{k+1}| \leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||e_j^k|
$$

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^k\right)\\
x_i &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j\right)\\
\underbrace{x_i^{k+1} - x_i}_{=e_i^{k+1}} &= -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}\underbrace{(x_j^k - x_j)}_{e_j^k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
|e_i^{k+1}| \quad \leq \quad \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||e_j^k| \leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \max_{j=1,\dots,n} |e_j^k|
$$

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^k\right)\\
x_i &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j\right)\\
\underbrace{x_i^{k+1} - x_i}_{=e_i^{k+1}} &= -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}(\underbrace{x_j^k - x_j}_{e_j^k})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|e_i^{k+1}| &\leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||e_j^k| \leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \max_{j=1,\dots,n} |e_j^k| =\\
&= \max_{j=1,\dots,n} |e_j^k| \underbrace{\frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}|}_{<1}
\end{aligned}
$$

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^k\right)\\
x_i &= \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j\right)\\
\underbrace{x_i^{k+1} - x_i}_{=e_i^{k+1}} &= -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}(\underbrace{x_j^k - x_j}_{e_j^k})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|e_i^{k+1}| &\leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||e_j^k| \leq \frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \max_{j=1,\dots,n} |e_j^k| =\\
&= \max_{j=1,\dots,n} |e_j^k| \underbrace{\frac{1}{|a_{i,i}|}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}|}_{<1} < \max_{j=1,\dots,n} |e_j^k|
\end{aligned}
$$

$\square$

Gaussova-Seidelova metoda

- Zopakujme předpis pro i. prvek vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$ v případě Jacobiho metody:

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

Gaussova-Seidelova metoda

- Zopakujme předpis pro i. prvek vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$ v případě Jacobiho metody:

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

- Prvky vektoru $\boldsymbol{x}^k$ v sumě $\sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j$ můžeme nahradit již známými prvky vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^{k+1})_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

Gaussova-Seidelova metoda

- Zopakujme předpis pro i. prvek vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$ v případě Jacobiho metody:

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

- Prvky vektoru $\boldsymbol{x}^k$ v sumě $\sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j$ můžeme nahradit již známými prvky vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^{k+1})_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

- Maticový zápis můžeme opět snadno odvodit, rozdělíme-li $\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}$ a ponecháme-li u vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$ součet $(\mathsf{L} + \mathsf{D})$

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D})\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{U}\boldsymbol{x}^k,$$

Gaussova-Seidelova metoda

- Zopakujme předpis pro i. prvek vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$ v případě Jacobiho metody:

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

- Prvky vektoru $\boldsymbol{x}^k$ v sumě $\sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j$ můžeme nahradit již známými prvky vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$

$$(\boldsymbol{x}^{k+1})_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^{k+1})_j - \sum_{j>i}^{n} a_{i,j} (\boldsymbol{x}^k)_j \right)$$

- Maticový zápis můžeme opět snadno odvodit, rozdělíme-li $\mathsf{A} = \mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}$ a ponecháme-li u vektoru $\boldsymbol{x}^{k+1}$ součet $(\mathsf{L} + \mathsf{D})$

$$(\mathsf{L} + \mathsf{D}) \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{U} \boldsymbol{x}^k,$$

  tedy

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{-(\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1} \mathsf{U}}_{=\mathsf{M}} \boldsymbol{x}^k + \underbrace{(\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}}_{=\mathsf{N}} \boldsymbol{b}.$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}$$

$$\mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} \quad =$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{NA}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}$$

$$\mathsf{I} - \mathsf{NA} \;=\; \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{A}$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}$$

$$\mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} \;=\; \mathsf{I} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U})$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{NA}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{I} - \mathsf{NA} &= \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}+\mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}) - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}\end{aligned}$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{I} - \mathsf{N}\mathsf{A} &= \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}+\mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}) - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U} = -(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U} \end{aligned}$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{NA}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{I} - \mathsf{NA} &= \mathsf{I} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{D} + \mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L} + \mathsf{D}) - (\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{U} = -(\mathsf{L} + \mathsf{D})^{-1}\mathsf{U} = \mathsf{M} \end{aligned}$$

- Ověřme opět konzistenci (pomocí podmínky $\mathsf{M} = \mathsf{I} - \mathsf{NA}$):

$$\mathsf{M} = -(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}, \quad \mathsf{N} = (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{I} - \mathsf{NA} &= \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}+\mathsf{U}) \\ &= \mathsf{I} - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}(\mathsf{L}+\mathsf{D}) - (\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U} = -(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U} = \mathsf{M} \end{aligned}$$

- Metoda je konvergentní, právě tehdy když $\|(\mathsf{L}+\mathsf{D})^{-1}\mathsf{U}\| < 1$, což opět platí pro diagonálně dominantní matice.

Richardsonova metoda

- Iterace Richardsonovy metody je dána předpisem

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega \boldsymbol{r}^k,$$

kde $\omega \in \mathbb{R}_+$ a $\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{b} - \mathrm{A}\boldsymbol{x}^k$ je reziduum, které určuje, jak dobře je splněna původní rovnice.

Richardsonova metoda

- Iterace Richardsonovy metody je dána předpisem
$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega \boldsymbol{r}^k,$$
kde $\omega \in \mathbb{R}_+$ a $\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k$ je reziduum, které určuje, jak dobře je splněna původní rovnice.
- Metodu tedy můžeme zapsat také ve tvaru
$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega(\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k) = (\underbrace{\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}}_{=\mathsf{M}})\boldsymbol{x}^k + \underbrace{\omega}_{=\omega\mathsf{I}=\mathsf{N}} \S\boldsymbol{b}$$

Richardsonova metoda

- Iterace Richardsonovy metody je dána předpisem

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega \boldsymbol{r}^k,$$

kde $\omega \in \mathbb{R}_+$ a $\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k$ je reziduum, které určuje, jak dobře je splněna původní rovnice.

- Metodu tedy můžeme zapsat také ve tvaru

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega(\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k) = (\underbrace{\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}}_{=\mathsf{M}})\boldsymbol{x}^k + \underbrace{\omega}_{=\omega\mathsf{I}=\mathsf{N}} \S\boldsymbol{b}$$

- Metoda je konzistentní pro všechna ω:

$$\boldsymbol{x} + \omega(\underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}}_{=\boldsymbol{o}}) = \boldsymbol{x}$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

  a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.
- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i \quad = \quad \boldsymbol{r}^{k+1} =$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i \quad = \quad \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} =$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

  a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i \quad = \quad \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k)$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k) = \\
&= \boldsymbol{r}^k - \mathsf{A}\omega\boldsymbol{r}^k =
\end{aligned}$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k) = \\ &= \boldsymbol{r}^k - \mathsf{A}\omega\boldsymbol{r}^k = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \underbrace{\boldsymbol{r}^k}_{=\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i}\end{aligned}$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

  a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.
- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k) = \\
&= \boldsymbol{r}^k - \mathsf{A}\omega\boldsymbol{r}^k = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \underbrace{\boldsymbol{r}^k}_{=\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i} = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

  a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k) = \\
&= \boldsymbol{r}^k - \mathsf{A}\omega \boldsymbol{r}^k = (\mathsf{I} - \omega \mathsf{A}) \underbrace{\boldsymbol{r}^k}_{=\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i} = (\mathsf{I} - \omega \mathsf{A}) \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \omega \underbrace{\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i}_{=\lambda_i \boldsymbol{v}_i}
\end{aligned}$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

  a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k) = \\
&= \boldsymbol{r}^k - \mathsf{A}\omega\boldsymbol{r}^k = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \underbrace{\boldsymbol{r}^k}_{=\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i} = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \omega \underbrace{\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i}_{=\lambda_i \boldsymbol{v}_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \omega \lambda_i \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}$$

- Vztah mezi reziduem a chybou $\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}$ lze odvodit přenásobením definice chyby maticí A

$$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^k = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{r}^k.$$

- Studujme konvergenci metody pro symetrickou pozitivně definitní matici A. V takovém případě vlastní čísla λ_i a vlastní vektory $\boldsymbol{v}_i$ (tedy skaláry a vektory, pro které platí $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \|\boldsymbol{v}\| = 1$) splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

  a z vlastních vektorů lze utvořit ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.
- Reziduum v kroku k si můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{r}^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \underline{\alpha_i^{k+1}} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \underbrace{\boldsymbol{b} - \mathsf{A}(\boldsymbol{x}^k}_{=\boldsymbol{r}^k} + \omega \boldsymbol{r}^k) = \\
&= \boldsymbol{r}^k - \mathsf{A}\omega\boldsymbol{r}^k = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \underbrace{\boldsymbol{r}^k}_{=\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i} = (\mathsf{I} - \omega\mathsf{A}) \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \omega \underbrace{\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i}_{=\lambda_i \boldsymbol{v}_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \omega \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \\
&= \sum_{i=1}^n \underline{(1 - \omega\lambda_i)\alpha_i^k} \boldsymbol{v}_i.
\end{aligned}$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n\colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n \colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n \colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n\colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 \quad = \quad \textstyle\sum_i [(1 - \omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \dots, n\colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 \quad = \quad \textstyle\sum_i [(1 - \omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \leq \sum_i [\max_j |1 - \omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n \colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 &= \textstyle\sum_i [(1 - \omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \leq \sum_i [\max_j |1 - \omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2 = \\ &= (\max_j |1 - \omega\lambda_j|)^2 \textstyle\sum_i |(\alpha_i^k|)^2 \end{aligned}$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n \colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 &= \textstyle\sum_i [(1 - \omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \leq \sum_i [\max_j |1 - \omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2 = \\ &= (\max_j |1 - \omega\lambda_j|)^2 \textstyle\sum_i |(\alpha_i^k|)^2 = \rho^2 \|\boldsymbol{r}^k\|^2 \end{aligned}$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n$: $|1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 &= \textstyle\sum_i [(1 - \omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \le \sum_i [\max_j |1 - \omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2 = \\ &= (\max_j |1 - \omega\lambda_j|)^2 \textstyle\sum_i |(\alpha_i^k|)^2 = \rho^2 \|\boldsymbol{r}^k\|^2 \end{aligned}$$

- Tedy $\|\boldsymbol{r}^{k+1}\| \le \rho \|\boldsymbol{r}^k\|$, kde $\rho = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |1 - \omega\lambda_i|$ nazýváme *konvergenčním faktorem*.

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \ldots, n\colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 &= \textstyle\sum_i [(1-\omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \leq \sum_i [\max_j |1-\omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2 = \\ &= (\max_j |1-\omega\lambda_j|)^2 \textstyle\sum_i |(\alpha_i^k|)^2 = \rho^2 \|\boldsymbol{r}^k\|^2 \end{aligned}$$

- Tedy $\|\boldsymbol{r}^{k+1}\| \leq \rho\|\boldsymbol{r}^k\|$, kde $\rho = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |1-\omega\lambda_i|$ nazýváme *konvergenčním faktorem*. Odtud

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho \underbrace{\|\boldsymbol{r}^{k-1}\|}_{\leq \rho\|\boldsymbol{r}^{k-2}\|}$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \dots, n \colon |1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 &= \textstyle\sum_i [(1-\omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \leq \sum_i [\max_j |1-\omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2 = \\ &= (\max_j |1-\omega\lambda_j|)^2 \textstyle\sum_i |(\alpha_i^k|)^2 = \rho^2 \|\boldsymbol{r}^k\|^2 \end{aligned}$$

- Tedy $\|\boldsymbol{r}^{k+1}\| \leq \rho \|\boldsymbol{r}^k\|$, kde $\rho = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |1-\omega\lambda_i|$ nazýváme *konvergenčním faktorem*. Odtud

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho \underbrace{\|\boldsymbol{r}^{k-1}\|}_{\leq \rho \|\boldsymbol{r}^{k-2}\|} \leq \rho^2 \|\boldsymbol{r}^{k-2}\|$$

- Richardsonova metoda tedy konverguje právě tehdy, když $\forall i = 1, \dots, n$: $|1 - \omega\lambda_i| < 1$.
- Můžeme určit, jak rychle metoda konverguje pro dané ω:

$$\boldsymbol{u} = \sum_1^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \|\boldsymbol{u}\|^2 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{v}_j^T \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j \alpha_i \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{v}_i = \sum_i \alpha_i^2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\boldsymbol{r}^{k+1}\|^2 &= \textstyle\sum_i [(1-\omega\lambda_i)\alpha_i^k]^2 \leq \sum_i [\max_j |1-\omega\lambda_j| \alpha_i^k]^2 = \\ &= (\max_j |1-\omega\lambda_j|)^2 \textstyle\sum_i |(\alpha_i^k|)^2 = \rho^2 \|\boldsymbol{r}^k\|^2 \end{aligned}$$

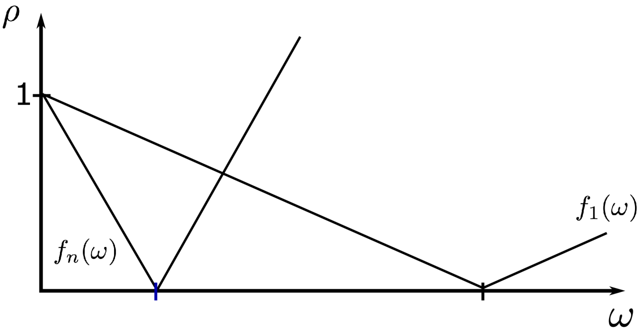
- Tedy $\|\boldsymbol{r}^{k+1}\| \leq \rho \|\boldsymbol{r}^k\|$, kde $\rho = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |1 - \omega\lambda_i|$ nazýváme *konvergenčním faktorem*. Odtud

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho \underbrace{\|\boldsymbol{r}^{k-1}\|}_{\leq \rho \|\boldsymbol{r}^{k-2}\|} \leq \rho^2 \|\boldsymbol{r}^{k-2}\| \leq \dots \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?

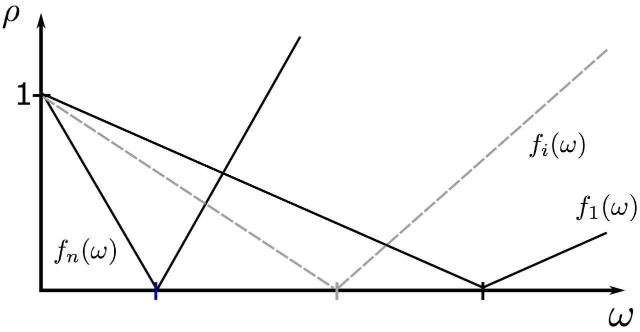
- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?

$$f_i(\omega) = |1 - \omega\lambda_i|$$

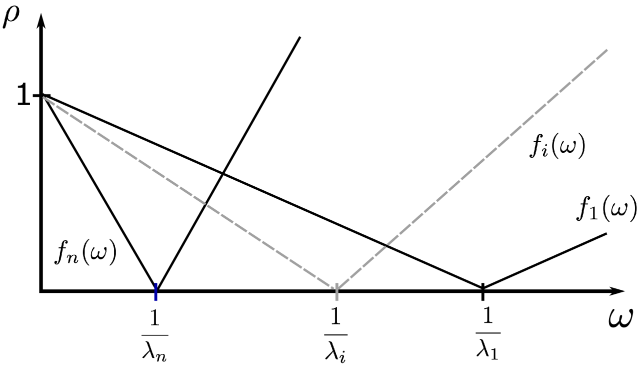


- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?

$$f_i(\omega) = |1 - \omega\lambda_i|$$



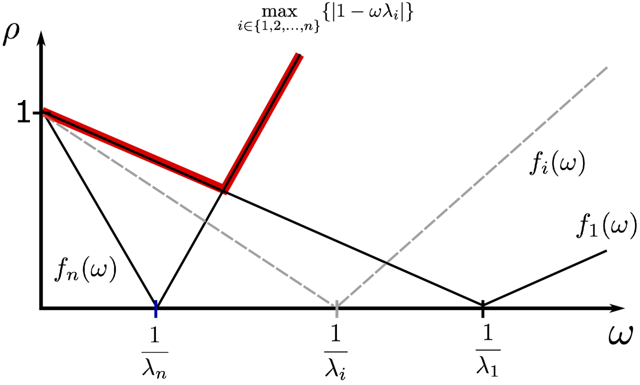
- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?



$$f_i(\omega) = |1 - \omega\lambda_i|$$

$$1 - \omega\lambda_i = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda_i}$$

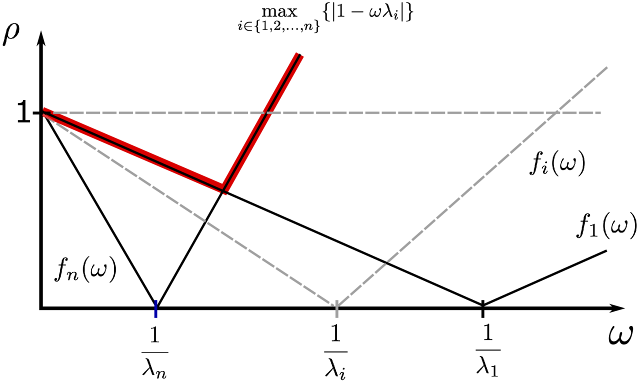
- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?



$$f_i(\omega) = |1 - \omega\lambda_i|$$

$$1 - \omega\lambda_i = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda_i}$$

- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?



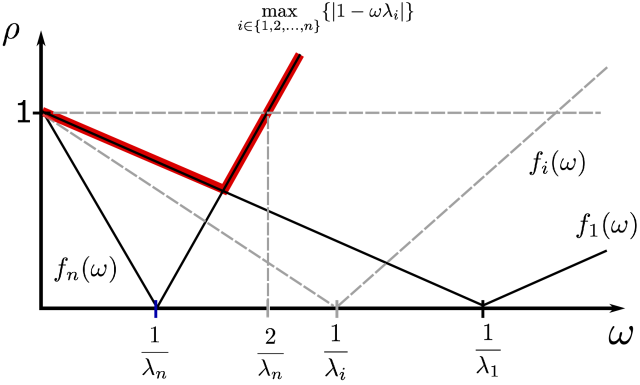
$$f_i(\omega) = |1-\omega\lambda_i|$$

$$1-\omega\lambda_i = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda_i}$$

Aby metoda konvergovala, musí být $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |1-\omega\lambda_i| < 1$.

$$-1+\omega\lambda_n = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2}{\lambda_n}$$

- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?



$$f_i(\omega) = |1-\omega\lambda_i|$$

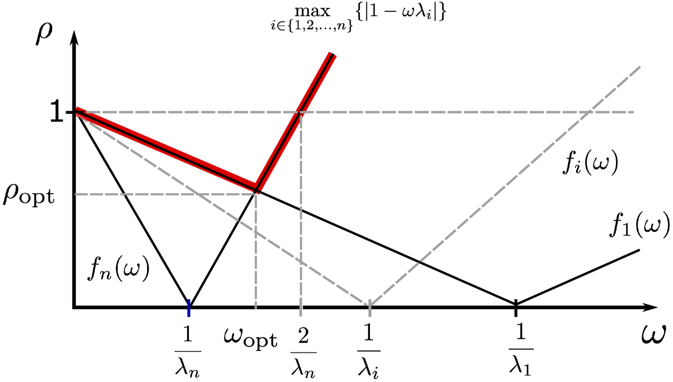
$$1-\omega\lambda_i = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda_i}$$

Aby metoda konvergovala, musí být $\max_{i\in\{1,\dots,n\}} |1-\omega\lambda_i| < 1$.

$$-1+\omega\lambda_n = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2}{\lambda_n}$$

Metoda konverguje pro $\omega \in (0, 2/\lambda_n)$.

- Jak zvolit ω, aby konvergenční faktor byl co nejlepší (nejmenší)?



$$f_i(\omega) = |1-\omega\lambda_i|$$

$$1-\omega\lambda_i = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda_i}$$

Aby metoda konvergovala, musí být $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |1-\omega\lambda_i| < 1$.

$$-1+\omega\lambda_n = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2}{\lambda_n}$$

Metoda konverguje pro $\omega \in (0, 2/\lambda_n)$. Optimální konvergence je dosaženo v ω_{opt}:

$$1-\omega_{\text{opt}}\lambda_1 = -(1-\omega_{\text{opt}}\lambda_n)$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$$

Zjistili jsme tedy, že nejlepší konvergence dosáhneme, zvolíme-li $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$. Konvergenční faktor bude v tomto případě

$$\rho_{\text{opt}} = 1 - \omega_{\text{opt}}\lambda_1 = 1 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_n - 2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} =$$

$$= \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda 1}} = \frac{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} - 1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} + 1} = \frac{\kappa(\mathsf{A}) - 1}{\kappa(\mathsf{A}) + 1},$$

kde $\kappa(\mathsf{A}) = \lambda_n/\lambda_1$ je číslo podmíněnosti matice A.

Ukončovací podmínky

Buď $\boldsymbol{x}^0$ počáteční odhad řešení,

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b}.$$

- Kdy iterování ukončit?

Ukončovací podmínky

Buď $\boldsymbol{x}^0$ počáteční odhad řešení,

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b}.$$

- Kdy iterování ukončit?
  1. Po dosažení určitého počtu iterací – neřekne nám většinou nic o tom, jak blízko jsme řešení. Používá se spíše jako dodatečná podmínka pro případ, že by metoda nekonvergovala.

Ukončovací podmínky

Buď $\boldsymbol{x}^0$ počáteční odhad řešení,

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b}.$$

- Kdy iterování ukončit?
  1. Po dosažení určitého počtu iterací – neřekne nám většinou nic o tom, jak blízko jsme řešení. Používá se spíše jako dodatečná podmínka pro případ, že by metoda nekonvergovala.
  2. Když se s novým odhadem řešení příliš nevzdálíme od předchozího odhadu (tzn. $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| < \varepsilon$). Takto formulovaná podmínka nebere v potaz velikost prvků vektorů, proto je lepší zvolit ji relativně např. vzhledem k normě vektoru pravé strany: $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| < \|\boldsymbol{b}\|\varepsilon$, tedy $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\|/\|\boldsymbol{b}\| < \varepsilon$.

Ukončovací podmínky

Buď $\boldsymbol{x}^0$ počáteční odhad řešení,

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \mathsf{M}\boldsymbol{x}^k + \mathsf{N}\boldsymbol{b}.$$

- Kdy iterování ukončit?
  1. Po dosažení určitého počtu iterací – neřekne nám většinou nic o tom, jak blízko jsme řešení. Používá se spíše jako dodatečná podmínka pro případ, že by metoda nekonvergovala.
  2. Když se s novým odhadem řešení příliš nevzdálíme od předchozího odhadu (tzn. $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| < \varepsilon$). Takto formulovaná podmínka nebere v potaz velikost prvků vektorů, proto je lepší zvolit ji relativně např. vzhledem k normě vektoru pravé strany: $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| < \|\boldsymbol{b}\|\varepsilon$, tedy $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\|/\|\boldsymbol{b}\| < \varepsilon$.
  3. Nejčastěji se používá normy vektoru rezidua $\boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1}$, tedy $\|\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1}\| < \varepsilon$. Vhodnější je opět použít relativní změnu rezidua oproti vektoru pravé strany ($\|\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1}\|/\|\boldsymbol{b}\| < \varepsilon$) nebo počátečnímu reziduu ($\|\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^{k+1}\|/\|\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^0\| < \varepsilon$).

- Algoritmus Richardsonovy metody pak vypadá např. takto:

function Richardson(A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^0$, ω, ε)

$\quad \boldsymbol{r}^0 = b - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^0$

$\quad k = 0$

$\quad$ **while** $\|\boldsymbol{r}^k\|/\|\boldsymbol{r}^0\| > \varepsilon \;\&\; k < 100$ **do**

$\qquad \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega \boldsymbol{r}^k$

$\qquad \boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^k$

$\qquad k = k + 1$

$\quad$ **end while**

end function

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon\|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \rho^k$$

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \rho^k \leq \varepsilon$$

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \rho^k \leq \varepsilon$$

$$\log \rho^k \leq \log \varepsilon$$

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \rho^k \leq \varepsilon$$

$$\log \rho^k \leq \log \varepsilon$$

$$k \log \rho \leq \log \varepsilon$$

- V případě Richardsonovy metody můžeme předem odhadnout potřebný počet iterací pro dosažení relativní přesnosti $\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{r}^0\|$:

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \varepsilon$$

$$\|\boldsymbol{r}^k\| \leq \rho^k \|\boldsymbol{r}^0\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{r}^k\|}{\|\boldsymbol{r}^0\|} \leq \rho^k \leq \varepsilon$$

$$\log \rho^k \leq \log \varepsilon$$

$$k \log \rho \leq \log \varepsilon$$

$$k \geq \frac{\log \varepsilon}{\log \rho}$$

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

30. března 2023

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM