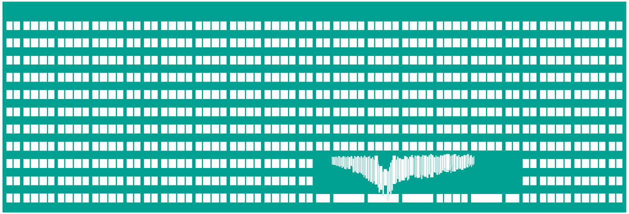
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Numerická lineární algebra 1

Informace o předmětu, opakování LA

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

2. března 2023

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Kontakt

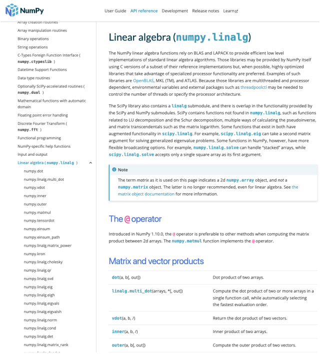
- Kontakt
  - Michal Merta
  - `michal.merta@vsb.cz`
  - `https://homel.vsb.cz/~mer126/`
  - `https://github.com/MichalMerta/nla1`
  - budova CPIT, kancelář RA304
- Výuka
  - Čtvrtek 16:00 (přednáška), 17:15 (cvičení)
  - EB413
- Konzultace osobně nebo přes MS Teams po předchozí domluvě e-mailem
- Zápočty jsou automaticky uznané, o zrušení nutno požádat během prvních 14 dnů semestru

Předběžný průběh semestru

- Informace o předmětu, opakování pojmů z lineární algebry
- Metoda sítí v 1D, soustavy lineárních rovnic, dopředná a zpětná substituce
- LU rozklad bez a s pivotizací
- LDMT, LDLT, Choleského rozklad, výpočetní náročnost
- Lineární iterační řešiče
- Gradientní iterační řešiče
- QR rozklad
- Aplikace QR rozkladu, metoda nejmenších čtverců, spektrální rozklad
- Mocninná metoda, singulární rozklad

Výukové materiály

- Přednášky, poznámky, cvičení, DÚ: `https://github.com/MichalMerta/nla1`
- Kozubek, T. et al. *Lineární algebra s Matlabem*. VŠB-TU Ostrava 2012.
  - `http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra_s_matlabem.pdf`
- Golub, G., van Loan, C. F. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press 1996.
- Trefethen, L. N., Bau, D. *Numerical Linear Algebra*. SIAM 1997.
- Online dokumentace k Pythonu a NumPy
  - `https://docs.python.org/3/`
  - `https://numpy.org/doc/stable/reference/index.html`
  - `https://stackoverflow.com/questions/tagged/python`



Podmínky absolvování

- Test (0 – 10 bodů)
- Projekt (0 – 20 bodů)
  - Miniprojekty (DÚ) – 5×2 body
    - Zaslat na e-mail vždy nejpozději do čtvrtka 16:00 následujícího týdne
  - Projekt (0 – 10 bodů)
    - Obsáhlejší projekt, téma bude upřesněno v druhé polovině semestru
- Zkouška (0 – 70 bodů)
- Pro udělení zápočtu je třeba získat alespoň 15 bodů
- Celkem minimálně 51 bodů

Násobení matice-vektor

Definice

Buď $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sloupcový vektor, buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matice. Pak definujeme součin matice-vektor $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ jako sloupcový vektor s prvky $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

- Zobrazení $\boldsymbol{x} \to \mathsf{A}\boldsymbol{x}, \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární

  $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

  1. $\mathsf{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \mathsf{A}\boldsymbol{y}$,
  2. $\mathsf{A}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \mathsf{A}\boldsymbol{x}$.

Násobení matice-vektor

Definice

Buď $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sloupcový vektor, buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matice. Pak definujeme součin matice-vektor $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ jako sloupcový vektor s prvky $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

- Zobrazení $\boldsymbol{x} \to \mathsf{A}\boldsymbol{x}, \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $\mathsf{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \mathsf{A}\boldsymbol{y}$,
  2. $\mathsf{A}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \mathsf{A}\boldsymbol{x}$.

Násobení matice-vektor

- Buď $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m$ j-tý sloupec matice A. Pak násobení matice-vektor lze zapsat jako $\boldsymbol{b} = \mathrm{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j$.
  - A$\boldsymbol{x}$ lze interpretovat jako lineární kombinaci sloupců matice A s koeficienty danými prvky vektoru $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{a}_2 | \dots | \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{a}_n .$$

Násobení matice-matice

Definice

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}, \mathsf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak pro součin matice-matice $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ platí $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} c_{k,j}$.

- Sloupce $\boldsymbol{b}_j$ výsledné matice můžeme interpretovat jako lineární kombinaci sloupců A s koeficienty danými vektorem $\boldsymbol{c}_j$, tzn. $\boldsymbol{b}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{c}_j = \sum_{k=1}^{m} c_{k,j} \boldsymbol{a}_k$.

$$\left(\boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{b}_2 | \dots | \boldsymbol{b}_n\right) = \left(\boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{a}_2 | \dots | \boldsymbol{a}_m\right) \left(\boldsymbol{c}_1 | \boldsymbol{c}_2 | \dots | \boldsymbol{c}_n\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{c}_1 | \mathsf{A}\boldsymbol{c}_2 | \dots | \mathsf{A}\boldsymbol{c}_n\right)$$

Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice A $(H(\mathsf{A}), \mathrm{range}(\mathsf{A}))$ je množina vektorů, které lze vyjádřit jako $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ pro nějaké $\boldsymbol{x}$.
  - $H(\mathsf{A})$ je prostor tvořený lineárním obalem sloupců A (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(\mathrm{null}(\mathsf{A}), \mathrm{ker}(A))$ je množina vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^m$
  - $\boldsymbol{x} \in \mathrm{null}(\mathsf{A})$: $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots \boldsymbol{a}_n x_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny $\rightarrow$ hodnost matice $h(\mathsf{A})$
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech $m \times n$ má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost: $h(\mathsf{A}) = \min(m, n)$

Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice A (H(A), range(A)) je množina vektorů, které lze vyjádřit jako A$\boldsymbol{x}$ pro nějaké $\boldsymbol{x}$.
  - H(A) je prostor tvořený lineárním obalem sloupců A (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice A $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ (null(A), ker(A)) je množina vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: A$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^m$
  - $\boldsymbol{x} \in \mathrm{null}(\mathrm{A})\colon \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots \boldsymbol{a}_n x_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny $\rightarrow$ hodnost matice h(A)
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech $m \times n$ má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost: $h(\mathrm{A}) = \min(m, n)$

Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice A ($H(\mathsf{A}), \mathrm{range}(\mathsf{A})$) je množina vektorů, které lze vyjádřit jako $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ pro nějaké $\boldsymbol{x}$.
  - $H(\mathsf{A})$ je prostor tvořený lineárním obalem sloupců A (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathrm{null}(\mathsf{A}), \ker(A)$) je množina vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^m$
  - $\boldsymbol{x} \in \mathrm{null}(\mathsf{A}) : \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots \boldsymbol{a}_n x_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny $\rightarrow$ hodnost matice $h(\mathsf{A})$
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech $m \times n$ má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost: $h(\mathsf{A}) = \min(m, n)$

Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice A $(H(\mathsf{A}), \mathrm{range}(\mathsf{A}))$ je množina vektorů, které lze vyjádřit jako $\mathsf{A}\boldsymbol{x}$ pro nějaké $\boldsymbol{x}$.
  - $H(\mathsf{A})$ je prostor tvořený lineárním obalem sloupců A (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(\mathrm{null}(\mathsf{A}), \ker(A))$ je množina vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^m$
  - $\boldsymbol{x} \in \mathrm{null}(\mathsf{A}) : \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots \boldsymbol{a}_n x_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny $\rightarrow$ hodnost matice $h(\mathsf{A})$
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech $m \times n$ má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost: $h(\mathsf{A}) = \min(m, n)$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j} \boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = \left(\boldsymbol{e}_1 | \boldsymbol{e}_2 | \dots | \boldsymbol{e}_m\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1 | \mathsf{A}\boldsymbol{z}_2 | \dots | \mathsf{A}\boldsymbol{z}_m\right) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = \left(\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\ldots|\boldsymbol{e}_m\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\ldots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m\right) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = \left(\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\dots|\boldsymbol{e}_m\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\dots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m\right) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j} \boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = \left(\boldsymbol{e}_1 | \boldsymbol{e}_2 | \dots | \boldsymbol{e}_m\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1 | \mathsf{A}\boldsymbol{z}_2 | \dots | \mathsf{A}\boldsymbol{z}_m\right) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = (\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\dots|\boldsymbol{e}_m) = (\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\dots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = (\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\dots|\boldsymbol{e}_m) = (\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\dots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = (\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\ldots|\boldsymbol{e}_m) = (\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\ldots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = \left(\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\ldots|\boldsymbol{e}_m\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\ldots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m\right) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodností.
- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární $\Rightarrow$ sloupce A tvoří bázi $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ každý vektor z $\mathbb{R}^m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců A $\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{e}_j$ standardní báze prostoru $\mathbb{R}^m$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{i,j}\boldsymbol{a}_i \qquad \boldsymbol{e}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{z}_j$$

můžeme tedy zapsat

$$\mathsf{I} = \left(\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\dots|\boldsymbol{e}_m\right) = \left(\mathsf{A}\boldsymbol{z}_1|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_2|\dots|\mathsf{A}\boldsymbol{z}_m\right) = \mathsf{AZ}$$

- Z je inverzní matice k A, značíme A^{-1}
- Ke každé regulární čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}: $\mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$

Inverzní matice

- Co tedy znamená řešení $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tzn. $\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$?

$$(\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\ldots|\boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$$

- Prvky $x_1, x_2, \ldots$ vektoru $\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ jsou koeficienty rozvoje $\boldsymbol{b}$ v bázi dané sloupci A
- Násobení A^{-1} je operace změny báze ($\boldsymbol{b}$ v bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m\} \rightarrow \boldsymbol{b}$ v bázi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$)

Ortogonální vektory a matice

- Skalární součin vektorů

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} \overset{\text{ozn}}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \overset{\text{ozn}}{=} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

- Eukleidovská norma vektoru

$$\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

- Dále platí

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos \alpha,$$

kde α je úhel mezi vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S : \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S : \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S : \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S \colon \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S \colon \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_i = 0.$$

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y: \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}: \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S: \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S \colon \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S \colon \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_i = 0.$$

- Dvojice vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ je ortogonální, platí-li $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množiny vektorů X, Y jsou ortogonální, platí-li $\forall \boldsymbol{x} \in X \forall \boldsymbol{y} \in Y \colon \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina nenulových vektorů S se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$.
- Množina vektorů S je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $\forall \boldsymbol{x} \in S \colon \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Věta

Vektory v ortogonální množině $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ o n prvcích jsou lineárně nezávislé.

Důkaz. Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje $\boldsymbol{v}_k$ takové, že

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

Protože $\boldsymbol{v}_k \neq \boldsymbol{o}$, platí $\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 > 0$. Avšak

$$\boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} c_i \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_i = 0.$$

□

Definice

Čtvercovou matici Q nazveme ortogonální, pokud $Q^{-1} = Q^T$, tzn. $Q^T Q = I$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \hline \boldsymbol{q}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{q}_m^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{q}_1 | \boldsymbol{q}_2 | \dots | \boldsymbol{q}_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Platí

$$\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Sloupce tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^m$.

Definice

Čtvercovou matici Q nazveme ortogonální, pokud $\mathsf{Q}^{-1} = \mathsf{Q}^T$, tzn. $\mathsf{Q}^T\mathsf{Q} = \mathsf{I}$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \hline \boldsymbol{q}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{q}_m^T \end{pmatrix} \left(\boldsymbol{q}_1 | \boldsymbol{q}_2 | \dots | \boldsymbol{q}_m \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Platí

$$\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} .$$

Sloupce tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^m$.

Řešme tentokrát soustavu s ortogonální maticí Q:

$$\mathrm{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}\boldsymbol{x} = \mathrm{Q}^T\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Q}^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m^T\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Poznámka

Násobení ortogonální matic nemění skalární součin ani normu:

$$(\mathrm{Q}\boldsymbol{x})^T(\mathrm{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}, \qquad \|\mathrm{Q}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

Řešme tentokrát soustavu s ortogonální maticí Q:

$$\mathrm{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}\boldsymbol{x} = \mathrm{Q}^T\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Q}^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m^T\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Poznámka

Násobení ortogonální matic nemění skalární součin ani normu:

$$(\mathrm{Q}\boldsymbol{x})^T(\mathrm{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\mathrm{Q}^T\mathrm{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}, \qquad \|\mathrm{Q}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

Normy

Definice

Norma je zobrazení $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňující $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$
2. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
3. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = \alpha \|\boldsymbol{x}\|$

- Vektorové normy (p-normy)
  - $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
  - Eukleidovská:

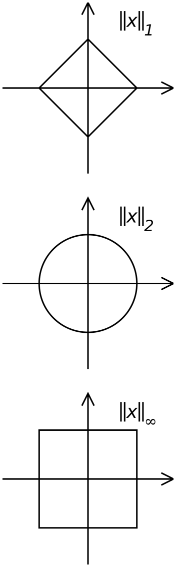
$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^n\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$$

  - Taxikářská (Manhattan norm):

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

  - Maximová:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$



Maticová norma indukovaná vektorovými normami

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, buď $\|\cdot\|_{(n)}$ norma příslušná definičnímu oboru A a $\|\cdot\|_{(m)}$ norma příslušná oboru hodnot A. Indukovanou maticovou normou $\|\mathsf{A}\|_{(m,n)}$ je nejmenší číslo C, pro které platí

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)} \leq C\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}.$$

Jinak řečeno, $\|\mathsf{A}\|_{(m,n)}$ je největší faktor, o který A „natáhne“ vektor $\boldsymbol{x}$

$$\frac{\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} \leq C, \qquad \text{pro } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}.$$

Tzn.

$$\|\mathsf{A}\|_{(m,n)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}} \frac{\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}$$

Maticová norma indukovaná vektorovými normami

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathsf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, buď $\|\cdot\|_{(n)}$ norma příslušná definičnímu oboru A a $\|\cdot\|_{(m)}$ norma příslušná oboru hodnot A. Indukovanou maticovou normou $\|\mathsf{A}\|_{(m,n)}$ je nejmenší číslo C, pro které platí

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)} \leq C\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}.$$

Jinak řečeno, $\|\mathsf{A}\|_{(m,n)}$ je největší faktor, o který A „natáhne“ vektor $\boldsymbol{x}$

$$\frac{\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} \leq C, \qquad \text{pro}\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}.$$

Tzn.

$$\|\mathsf{A}\|_{(m,n)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}} \frac{\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}$$

Maticová norma indukovaná vektorovými normami

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, buď $\|\cdot\|_{(n)}$ norma příslušná definičnímu oboru A a $\|\cdot\|_{(m)}$ norma příslušná oboru hodnot A. Indukovanou maticovou normou $\|\mathsf{A}\|_{(m,n)}$ je nejmenší číslo C, pro které platí

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)} \leq C\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}.$$

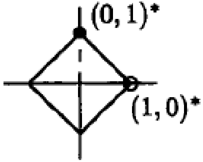
Jinak řečeno, $\|\mathsf{A}\|_{(m,n)}$ je největší faktor, o který A „natáhne“ vektor $\boldsymbol{x}$

$$\frac{\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} \leq C, \qquad \text{pro}\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}.$$

Tzn.

$$\|\mathsf{A}\|_{(m,n)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}} \frac{\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}$$

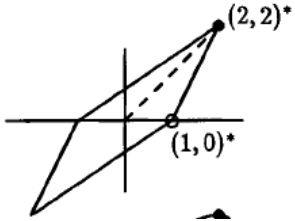
Příklad. Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Určeme $\|A\|_1$.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

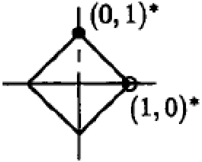
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$



$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq o} \|Ax\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

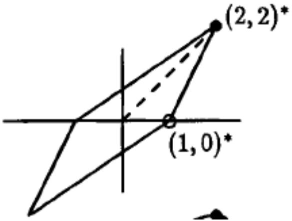
Příklad. Buď $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Určeme $\|\mathsf{A}\|_1$.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

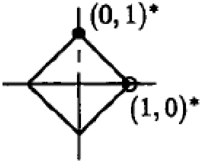
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$



$$\|\mathsf{A}\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

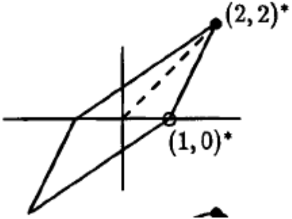
Příklad. Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Určeme $\|A\|_1$.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

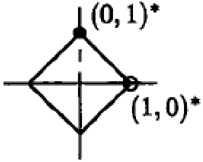
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$



$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq o} \|Ax\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

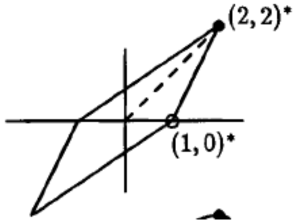
Příklad. Buď $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Určeme $\|\mathsf{A}\|_1$.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

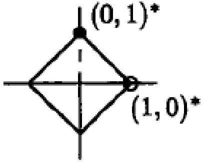
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$



$$\|\mathsf{A}\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

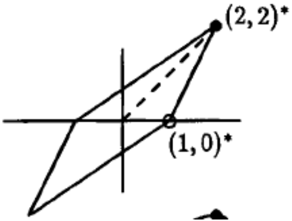
Příklad. Buď $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Určeme $\|\mathsf{A}\|_1$.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$



$$\|\mathsf{A}\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:
$$\|\mathrm{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$
  - Takže $\|\mathrm{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí
$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \le \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \le \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathrm{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathrm{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:
$$\|\mathrm{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$
  - Takže $\|\mathrm{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí
$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:
$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$
  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí
$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B\colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \le \sum_{j=1}^n |x_j|\|\boldsymbol{a}_j\| \le \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B\colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \le \sum_{j=1}^n |x_j|\|\boldsymbol{a}_j\| \le \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B\colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B\colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B \colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců
  - Připomeňme $\|A\|_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1$
  - Kam se zobrazí jednotková koule $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$?

$$\boldsymbol{x} \in B\colon \|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \|\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\boldsymbol{a}_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$$

  - Existuje $\boldsymbol{x} \in B$, pro které nastane $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$? Ano, stačí zvolit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$, kde j maximalizuje $\boldsymbol{a}_j$:

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\|_1 = \|\boldsymbol{a}_j\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|_1$$

  - Takže $\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j\|$
- Obdobně platí

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \|\boldsymbol{a}_j^T\|_1,$$

kde $\boldsymbol{a}_j^T$ je j-tý řádek matice A.

- Frobeniova norma - maticová norma, která není indukována vektorovou normou

$$\|\mathsf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchyho-Scwarzova nerovnost

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon |\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2$$

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

2. března 2023

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY