

# Numerická lineární algebra 1

## Informace o předmětu, opakování LA

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

2. března 2023

1 Základní informace

2 Opakování pojmů lineární algebry

# Kontakt

## ■ Kontakt

- Michal Merta
- `michal.merta@vsb.cz`
- `https://home1.vsb.cz/~mer126/`
- `https://github.com/MichalMerta/nla1`
- budova CPIT, kancelář RA304

## ■ Výuka

- Čtvrtek 16:00 (přednáška), 17:15 (cvičení)
- EB413


- Konzultace osobně nebo přes MS Teams po předchozí domluvě e-mailem
- Zápočty jsou automaticky uznané, o zrušení nutno požádat během prvních 14 dnů semestru

# Předběžný průběh semestru

- Informace o předmětu, opakování pojmů z lineární algebry
- Metoda sítí v 1D, soustavy lineárních rovnic, dopředná a zpětná substituce
- LU rozklad bez a s pivotizací
- LDMT, LDLT, Choleského rozklad, výpočetní náročnost
- Lineární iterační řešiče
- Gradientní iterační řešiče
- QR rozklad
- Aplikace QR rozkladu, metoda nejmenších čtverců, spektrální rozklad
- Mocninná metoda, singulární rozklad

# Výukové materiály

- Přednášky, poznámky, cvičení, DÚ:  
<https://github.com/MichalMerta/nla1>
- Kozubek, T. et al. *Lineární algebra s Matlabem*. VŠB-TU Ostrava 2012.
  - [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni\\_algebra\\_s\\_matlabem.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra_s_matlabem.pdf)
- Golub, G., van Loan, C. F. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press 1996.
- Trefethen, L. N., Bau, D. *Numerical Linear Algebra*. SIAM 1997.
- Online dokumentace k Pythonu a NumPy
  - <https://docs.python.org/3/>
  - <https://numpy.org/doc/stable/reference/index.html>
  - <https://stackoverflow.com/questions/tagged/python>



Array manipulation routines  
Array operations  
Sorting operations  
C/Fortran Foreign Function Interface (FFI)  
NumPy C-API  
Datetime Support Functions  
Data type routines  
Optional SciPy-accelerated routines (NumPy 1.10.0+)  
Mathematical functions with automatic domain  
Floating point error handling  
Cython/NumPy C-API (NumPy 1.10.0+)  
Functional programming  
NumPy-specific help functions  
Input and output  
Linear algebra (NumPy 1.10.0+)

User Guide API reference Development Release notes Learning

## Linear algebra (NumPy 1.10.0+)

The NumPy linear algebra functions rely on BLAS and LAPACK to provide efficient low-level implementations of standard linear algebra algorithms. These libraries may be provided by NumPy itself using C versions of a subset of their reference implementations but, when possible, highly optimized libraries that take advantage of specialized processor functionality are preferred. Examples of such libraries are OpenBLAS, MKL, and Intel MKL. Because these libraries are multithreaded and processor dependent, environmental variables and external packages such as `threadpoolctl` may be needed to control the number of threads or specify the processor architecture.

The SciPy library also contains a `linalg` submodule, and there is overlap in the functionality provided by the SciPy and NumPy submodules. SciPy contains functions not found in NumPy 1.10.0+, such as functions related to LU decomposition and the Schur decomposition, multiple ways of calculating the pseudoinverse, and matrix transposition, such as the matrix algorithm. Some functions that exist in both have augmented functionality in SciPy 1.10.0+. For example, `scipy.linalg.solve` can take a second `mask` to augment for solving generalized eigenvalue problems. Some functions in NumPy, however, have more flexible broadcasting options. For example, `numpy.linalg.solve` can handle "stacked" arrays, while `scipy.linalg.solve` accepts only a single square array as its first argument.

Note

The term `matrix` as it is used on this page indicates a 2d `numpy.ndarray` object, and not a `numpy.matrix` object. The latter is no longer recommended, even for linear algebra. See the `matrix` object documentation for more information.

## The @ operator

Introduced in NumPy 1.10.0, the `@` operator is preferable to other methods when computing the matrix product between 2d arrays. The `numpy.matmul` function implements the `@` operator.

## Matrix and vector products

<code>dot(a, b)</code>	Dot product of two arrays.
<code>dot(a, b, out)</code>	Compute the dot product of two or more arrays in a single function call, with automatic selection of the fastest evaluation order.
<code>vdot(a, b)</code>	Return the dot product of two vectors.
<code>inner(a, b)</code>	Inner product of two arrays.
<code>outer(a, b)</code>	Compute the outer product of two vectors.

# Podmínky absolvování

- Test (0 – 10 bodů)
- Projekt (0 – 20 bodů)
  - Miniprojekty (DÚ) –  $5 \times 2$  body
    - Zaslat na e-mail vždy nejpozději do čtvrtka 16:00 následujícího týdne
  - Projekt (0 – 10 bodů)
    - Obsáhlejší projekt, téma bude upřesněno v druhé polovině semestru
- Zkouška (0 – 70 bodů)
- Pro udělení zápočtu je třeba získat alespoň 15 bodů
- Celkem minimálně 51 bodů

# Násobení matice-vektor

## Definice

Bud'  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sloupcový vektor, bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matice. Pak definujeme součin matice-vektor  $\mathbf{b} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  jako sloupcový vektor s prvky  $b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$ .

- Zobrazení  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}, A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je lineární  
 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ ,
- 2  $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ .



# Násobení matice-vektor

## Definice

Bud'  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sloupcový vektor, bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matice. Pak definujeme součin matice-vektor  $\mathbf{b} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  jako sloupcový vektor s prvky  $b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$ .

- Zobrazení  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}, A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je lineární  
 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

- 1  $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ ,
- 2  $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ .

# Násobení matice-vektor

- Buď  $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$   $j$ -tý sloupec matice  $A$ . Pak násobení matice-vektor lze zapsat jako  $\mathbf{b} = A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j$ .
  - $A\mathbf{x}$  lze interpretovat jako lineární kombinaci sloupců matice  $A$  s koeficienty danými prvky vektoru  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n.$$

# Násobení matice-matice

## Definice

Bud'  $A \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Pak pro součin matice-matice  $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$  platí

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} c_{k,j}.$$

- Sloupce  $\mathbf{b}_j$  výsledné matice můžeme interpretovat jako lineární kombinaci sloupců  $A$  s koeficienty danými vektorem  $\mathbf{c}_j$ , tzn.  $\mathbf{b}_j = A\mathbf{c}_j = \sum_{k=1}^m c_{k,j} \mathbf{a}_k$ .

$$(\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 | \dots | \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_m) (\mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 | \dots | \mathbf{c}_n) = (A\mathbf{c}_1 | A\mathbf{c}_2 | \dots | A\mathbf{c}_n)$$

# Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice  $A$  ( $H(A)$ ,  $\text{range}(A)$ ) je množina vektorů, které lze vyjádřit jako  $Ax$  pro nějaké  $x$ .
  - $H(A)$  je prostor tvořený lineárním obalem sloupců  $A$  (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $\text{null}(A)$ ,  $\text{ker}(A)$ ) je množina vektorů  $x \in \mathbb{R}^n : Ax = o \in \mathbb{R}^m$ 
  - $x \in \text{null}(A) : o = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny  $\rightarrow$  hodnost matice  $h(A)$ 
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech  $m \times n$  má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost:  $h(A) = \min(m, n)$

# Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice  $A$  ( $H(A)$ ,  $\text{range}(A)$ ) je množina vektorů, které lze vyjádřit jako  $Ax$  pro nějaké  $x$ .
  - $H(A)$  je prostor tvořený lineárním obalem sloupců  $A$  (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $\text{null}(A)$ ,  $\text{ker}(A)$ ) je množina vektorů  $x \in \mathbb{R}^n : Ax = o \in \mathbb{R}^m$ 
  - $x \in \text{null}(A) : o = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny  $\rightarrow$  hodnost matice  $h(A)$ 
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech  $m \times n$  má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost:  $h(A) = \min(m, n)$

# Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice  $A$  ( $H(A)$ ,  $\text{range}(A)$ ) je množina vektorů, které lze vyjádřit jako  $Ax$  pro nějaké  $x$ .
  - $H(A)$  je prostor tvořený lineárním obalem sloupců  $A$  (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $\text{null}(A)$ ,  $\text{ker}(A)$ ) je množina vektorů  $x \in \mathbb{R}^n : Ax = o \in \mathbb{R}^m$ 
  - $x \in \text{null}(A) : o = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny  $\rightarrow$  hodnost matice  $h(A)$ 
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech  $m \times n$  má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost:  
 $h(A) = \min(m, n)$

# Obor hodnot, kernel, hodnost

- Obor hodnot matice  $A$  ( $H(A)$ ,  $\text{range}(A)$ ) je množina vektorů, které lze vyjádřit jako  $Ax$  pro nějaké  $x$ .
  - $H(A)$  je prostor tvořený lineárním obalem sloupců  $A$  (sloupcový prostor).
- Kernel (jádro) matice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $\text{null}(A)$ ,  $\ker(A)$ ) je množina vektorů  $x \in \mathbb{R}^n : Ax = o \in \mathbb{R}^m$ 
  - $x \in \text{null}(A) : o = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$
- Sloupcová hodnost - dimenze sloupcového prostoru
- Řádková hodnost - dimenze řádkového prostoru
- Sloupcová a řádková rovnost jsou si rovny  $\rightarrow$  hodnost matice  $h(A)$ 
  - anglicky rank
- Matice o rozměrech  $m \times n$  má plnou hodnost, má-li maximální možnou hodnost:  $h(A) = \min(m, n)$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor  $z \in \mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$



# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor  $z \in \mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor  $z \in \mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor z  $\mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor  $z \in \mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor  $z \in \mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor z  $\mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor  $z \in \mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

# Inverzní matice

- Regulární matice je čtvercová matice s plnou hodnotí.
- Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  regulární  $\Rightarrow$  sloupce  $A$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^m \Rightarrow$  každý vektor z  $\mathbb{R}^m$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců  $A \Rightarrow$  vektory  $e_j$  standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^m$  lze zapsat jako

$$e_j = \sum_{i=1}^m z_{i,j} a_i \quad e_j = Az_j$$

můžeme tedy zapsat

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_m) = (Az_1 | Az_2 | \dots | Az_m) = AZ$$

- $Z$  je inverzní matice k  $A$ , značíme  $A^{-1}$
- Ke každé regulární čtvercové matici  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ :  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$



## Inverzní matice

- Co tedy znamená řešení  $Ax = b$ , tzn.  $x = A^{-1}b$ ?

$$(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

- Prvky  $x_1, x_2, \dots$  vektoru  $A^{-1}b$  jsou koeficienty rozvoje  $b$  v bázi dané sloupci  $A$
- Násobení  $A^{-1}$  je operace změny báze ( $b$  v bázi  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\} \rightarrow b$  v bázi  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ )

# Ortogonální vektory a matice

## ■ Skalární součin vektorů

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m: \mathbf{x}^T \mathbf{y} \stackrel{\text{ozn}}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{ozn}}{=} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

## ■ Eukleidovská norma vektoru

$$\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## ■ Dále platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$



- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$



- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$



- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

### Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$

□

- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$

□



- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$



- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$



- Dvojice vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  je ortogonální, platí-li  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množiny vektorů  $X, Y$  jsou ortogonální, platí-li  $\forall \mathbf{x} \in X \forall \mathbf{y} \in Y: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina nenulových vektorů  $S$  se označuje jako ortogonální, pokud jsou každé dva její prvky ortogonální, tzn.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}: \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ .
- Množina vektorů  $S$  je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc  $\forall \mathbf{x} \in S: \|\mathbf{x}\| = 1$ .

## Věta

Vektory v ortogonální množině  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  o  $n$  prvcích jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz.** Předpokládejme, že vektory nejsou lineárně nezávislé. Pak existuje  $\mathbf{v}_k$  takové, že

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_i$$

Protože  $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ , platí  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \|\mathbf{v}_k\|^2 > 0$ . Avšak

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n c_i \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_i = 0.$$

□

## Definice

Čtvercovou matici  $Q$  nazveme ortogonální, pokud  $Q^{-1} = Q^T$ , tzn.  $Q^T Q = I$ .

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{q}_1^T} \\ \overline{\mathbf{q}_2^T} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{q}_m^T} \end{pmatrix} (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \dots | \mathbf{q}_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Platí

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Sloupce tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{R}^m$ .

## Definice

Čtvercovou matici  $Q$  nazveme ortogonální, pokud  $Q^{-1} = Q^T$ , tzn.  $Q^T Q = I$ .

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{q}_1^T} \\ \overline{\mathbf{q}_2^T} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{q}_m^T} \end{pmatrix} (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \dots | \mathbf{q}_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Platí

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Sloupce tvoří ortonormální bázi  $\mathbb{R}^m$ .

Řešme tentokrát soustavu s ortogonální maticí  $Q$ :

$$Qx = b$$

$$Q^T Qx = Q^T b$$

$$\Downarrow$$

$$x = Q^T b = \begin{pmatrix} q_1^T b \\ q_2^T b \\ \vdots \\ q_m^T b \end{pmatrix}$$

### Poznámka

Násobení ortogonální matic nemění skalární součin ani normu:

$$(Qx)^T (Qy) = x^T Q^T Qy = x^T y, \quad \|Qx\| = \|x\|.$$

Řešme tentokrát soustavu s ortogonální maticí  $Q$ :

$$Qx = b$$

$$Q^T Qx = Q^T b$$

$$\Downarrow$$

$$x = Q^T b = \begin{pmatrix} q_1^T b \\ q_2^T b \\ \vdots \\ q_m^T b \end{pmatrix}$$

### Poznámka

Násobení ortogonální matic nemění skalární součin ani normu:

$$(Qx)^T (Qy) = x^T Q^T Qy = x^T y, \quad \|Qx\| = \|x\|.$$

# Normy

## Definice

Norma je zobrazení  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \forall \alpha \in \mathbb{R}$  :

- 1  $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o}$
- 2  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
- 3  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$



## ■ Vektorové normy ( $p$ -normy)

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

■ Eukleidovská:

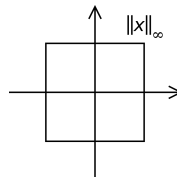
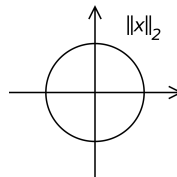
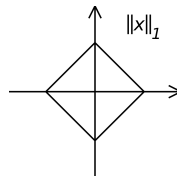
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

■ Taxikářská (Manhattan norm):

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

■ Maximová:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$



## Maticová norma indukovaná vektorovými normami

Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , bud'  $\|\cdot\|_{(n)}$  norma příslušná definičnímu oboru  $A$  a  $\|\cdot\|_{(m)}$  norma příslušná oboru hodnot  $A$ . Indukovanou maticovou normou  $\|A\|_{(m,n)}$  je nejmenší číslo  $C$ , pro které platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \|A\mathbf{x}\|_{(m)} \leq C\|\mathbf{x}\|_{(n)}.$$

Jinak řečeno,  $\|A\|_{(m,n)}$  je největší faktor, o který  $A$  „natáhne“ vektor  $\mathbf{x}$

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}} \leq C, \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{o}.$$

Tzn.

$$\|A\|_{(m,n)} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|_{(m)}$$

## Maticová norma indukovaná vektorovými normami

Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , bud'  $\|\cdot\|_{(n)}$  norma příslušná definičnímu oboru  $A$  a  $\|\cdot\|_{(m)}$  norma příslušná oboru hodnot  $A$ . Indukovanou maticovou normou  $\|A\|_{(m,n)}$  je nejmenší číslo  $C$ , pro které platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \|A\mathbf{x}\|_{(m)} \leq C\|\mathbf{x}\|_{(n)}.$$

Jinak řečeno,  $\|A\|_{(m,n)}$  je největší faktor, o který  $A$  „natáhne“ vektor  $\mathbf{x}$

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}} \leq C, \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{o}.$$

Tzn.

$$\|A\|_{(m,n)} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|_{(m)}$$

## Maticová norma indukovaná vektorovými normami

Bud'  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , bud'  $\|\cdot\|_{(n)}$  norma příslušná definičnímu oboru  $A$  a  $\|\cdot\|_{(m)}$  norma příslušná oboru hodnot  $A$ . Indukovanou maticovou normou  $\|A\|_{(m,n)}$  je nejmenší číslo  $C$ , pro které platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \|A\mathbf{x}\|_{(m)} \leq C\|\mathbf{x}\|_{(n)}.$$

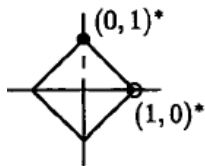
Jinak řečeno,  $\|A\|_{(m,n)}$  je největší faktor, o který  $A$  „natáhne“ vektor  $\mathbf{x}$

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}} \leq C, \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{o}.$$

Tzn.

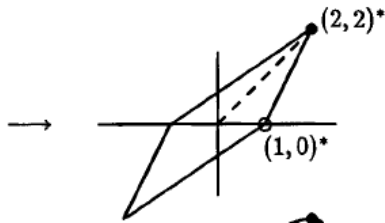
$$\|A\|_{(m,n)} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|_{(m)}$$

**Příklad.** Bud'  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Určeme  $\|A\|_1$ .



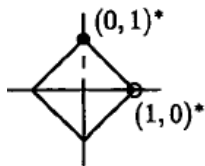
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



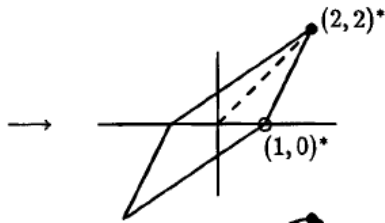
$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \|Ax\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

**Příklad.** Bud'  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Určeme  $\|A\|_1$ .



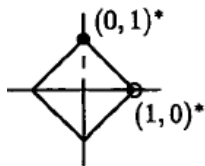
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



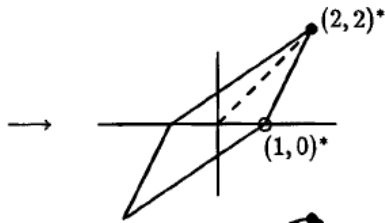
$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \|Ax\|_1 = \|(2,2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

**Příklad.** Bud'  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Určeme  $\|A\|_1$ .



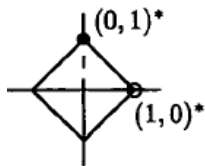
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



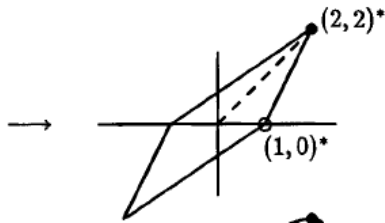
$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \|Ax\|_1 = \|(2, 2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

**Příklad.** Bud'  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Určeme  $\|A\|_1$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

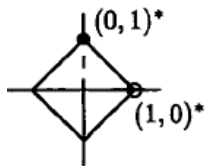
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \|Ax\|_1 = \|(2, 2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

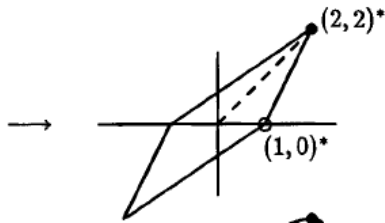


**Příklad.** Bud'  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Určeme  $\|A\|_1$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \|Ax\|_1 = \|(2, 2)\|_1 = |2| + |2| = 4$$

## ■ 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$
- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

■ 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

■ Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$

■ Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

■ Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

■ Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

■ Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .



■ 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

■ Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

■ Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

■ Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

■ Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

■ Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- 1-norma matice je maximum 1-norem jejich sloupců

- Připomeňme  $\|A\|_1 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|A\mathbf{x}\|_1$

- Kam se zobrazí jednotková koule  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| = 1\}$ ?

$$\mathbf{x} \in B: \|A\mathbf{x}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\mathbf{a}_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Existuje  $\mathbf{x} \in B$ , pro které nastane  $\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$ ? Ano, stačí zvolit  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ , kde  $j$  maximalizuje  $\mathbf{a}_j$ :

$$\|A\mathbf{e}_j\|_1 = \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$$

- Takže  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j\|_1$

- Obdobně platí

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|\mathbf{a}_j^T\|_1,$$

kde  $\mathbf{a}_j^T$  je  $j$ -tý řádek matice  $A$ .

- Frobeniova norma - maticová norma, která není indukována vektorovou normou

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Cauchyho-Scwarzova nerovnost

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: |\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$



Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

2. března 2023