

# Numerická lineární algebra 1

## QR rozklad

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

20. dubna 2023

## 1 QR rozklad

# QR rozklad

## Definice

Čtvercová matice  $Q$ , která splňuje  $Q^T Q = I$  se nazývá ortogonální matice. Ortogonální matice má ortonormální sloupce a splňuje  $Q^{-1} = Q^T$ .

- Pro sloupce  $Q$  platí

$$(q_i, q_j) = q_i^T q_j$$

# QR rozklad

## Definice

Čtvercová matice  $Q$ , která splňuje  $Q^T Q = I$  se nazývá ortogonální matice. Ortogonální matice má ortonormální sloupce a splňuje  $Q^{-1} = Q^T$ .

- Pro sloupce  $Q$  platí

$$(q_i, q_j) = q_i^T q_j$$

## Věta

Nechť  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $m \geq n$  je libovolná matice. Pak existuje ortogonální matice  $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$  a horní trojúhelníková matice  $R \in \mathbb{R}^{n,n}$  takové, že platí

$$A = QR.$$

- Uvažujme  $m = n$ . Pak  $A = QR$  lze rozepsat jako

$$(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n) = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \cdots | \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ & r_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

■ Uvažujme  $m = n$ . Pak  $A = QR$  lze rozepsat jako

$$(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n) = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \cdots | \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ & r_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = r_{1,1} \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2} \mathbf{q}_1 + r_{2,2} \mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_n = r_{1,n} \mathbf{q}_1 + r_{2,n} \mathbf{q}_2 + \cdots + r_{n,n} \mathbf{q}_n$$

■ Uvažujme  $m = n$ . Pak  $A = QR$  lze rozepsat jako

$$(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n) = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \cdots | \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ & r_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = r_{1,1} \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2} \mathbf{q}_1 + r_{2,2} \mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_n = r_{1,n} \mathbf{q}_1 + r_{2,n} \mathbf{q}_2 + \cdots + r_{n,n} \mathbf{q}_n$$

$$\langle \mathbf{a}_1 \rangle = \langle \mathbf{q}_1 \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$$



■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } b \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = b$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } b \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = b$$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } b \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = b$$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

$$Qy = b$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } b \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = b$$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

$$Qy = b$$

$$y_1 \mathbf{q}_1 + y_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + y_n \mathbf{q}_n = b$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}}$$

Hledáme koeficienty rozvoje  $\mathbf{b}$  v bázi tvořené sloupci  $A$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

$$Qy = b$$

$$y_1 \mathbf{q}_1 + y_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + y_n \mathbf{q}_n = b \quad / \cdot \mathbf{q}_k^T$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } b \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = b$$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

$$Qy = b$$

$$y_1 \mathbf{q}_1 + y_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + y_n \mathbf{q}_n = b \quad / \cdot \mathbf{q}_k^T$$

$$\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k y_k = \mathbf{q}_k^T b$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } \mathbf{b} \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = \mathbf{b}$$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

$$Qy = b$$

$$y_1 \mathbf{q}_1 + y_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + y_n \mathbf{q}_n = b \quad / \cdot \mathbf{q}_k^T$$

$$\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k y_k = \mathbf{q}_k^T b$$

$$y_k = \mathbf{q}_k^T b \rightarrow y = Q^T b$$

## ■ Př.

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n}_{\text{Hledáme koeficienty rozvoje } b \text{ v bázi tvořené sloupci } A} = b$$

■ Pokud  $A = QR$ :

$$Q \underbrace{Rx}_{=y} = b$$

$$Qy = b$$

$$y_1 \mathbf{q}_1 + y_2 \mathbf{q}_2 + \cdots + y_n \mathbf{q}_n = b \quad / \cdot \mathbf{q}_k^T$$

$$\mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k y_k = \mathbf{q}_k^T b$$

$$y_k = \mathbf{q}_k^T b \rightarrow y = Q^T b$$

$$Rx = y$$



- Existuje několik způsobů výpočtu
  - pomocí Gramova-Schmidtova procesu,
  - pomocí Givensových rotací,
  - pomocí Householderových transformací.

# QR rozklad pomocí Gramova-Schmidtova procesu

- Gramův-Schmidtův proces

- vstup: nezávislé vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$
- výstup: ortonormální vektory  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  takové, že  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$

# QR rozklad pomocí Gramova-Schmidtova procesu

- Gramův-Schmidtův proces
  - vstup: nezávislé vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$
  - výstup: ortonormální vektory  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  takové, že  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$
- První krok:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, r_{11} = \|\mathbf{v}_1\|$

# QR rozklad pomocí Gramova-Schmidtova procesu

- Gramův-Schmidtův proces
  - vstup: nezávislé vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$
  - výstup: ortonormální vektory  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  takové, že  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$
- První krok:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, r_{11} = \|\mathbf{v}_1\|$
- Předpokládejme, že známe  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$

# QR rozklad pomocí Gramova-Schmidtova procesu

## ■ Gramův-Schmidtův proces

■ vstup: nezávislé vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

■ výstup: ortonormální vektory  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  takové, že  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$

■ První krok:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, r_{11} = \|\mathbf{v}_1\|$

■ Předpokládejme, že známe  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$

■ Vektor  $\mathbf{a}_j$  můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{a}_j = r_{1,j}\mathbf{q}_1 + \dots + r_{i,j}\mathbf{q}_i + \dots + r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1} + \underbrace{r_{j,j}\mathbf{q}_j}_{\substack{\text{ozn.} \\ = \mathbf{v}_j}}$$

# QR rozklad pomocí Gramova-Schmidtova procesu

## ■ Gramův-Schmidtův proces

■ vstup: nezávislé vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$

■ výstup: ortonormální vektory  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  takové, že  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \rangle$

■ První krok:  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, r_{11} = \|\mathbf{v}_1\|$

■ Předpokládejme, že známe  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$

■ Vektor  $\mathbf{a}_j$  můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{a}_j = r_{1,j}\mathbf{q}_1 + \dots + r_{i,j}\mathbf{q}_i + \dots + r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1} + \underbrace{r_{j,j}\mathbf{q}_j}_{\substack{\text{ozn.} \\ = \mathbf{v}_j}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \dots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \dots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}$$

- $\mathbf{v}_j$  má být ortogonální ke známým vektorům  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ , takže pro  $k = 1, \dots, j-1$  musí platit:

$$0 = (\mathbf{q}_k, \mathbf{v}_j) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1})$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}$$

- $\mathbf{v}_j$  má být ortogonální ke známým vektorům  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ , takže pro  $k = 1, \dots, j-1$  musí platit:

$$0 = (\mathbf{q}_k, \mathbf{v}_j) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1})$$

- Protože  $(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_i) = 0$  pro  $k \neq i$ , platí

$$(\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{k,j}\mathbf{q}_k) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j) - r_{k,j} \underbrace{(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k)}_{=1} = 0$$



$$\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}$$

- $\mathbf{v}_j$  má být ortogonální ke známým vektorům  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ , takže pro  $k = 1, \dots, j-1$  musí platit:

$$0 = (\mathbf{q}_k, \mathbf{v}_j) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1})$$

- Protože  $(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_i) = 0$  pro  $k \neq i$ , platí

$$(\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{k,j}\mathbf{q}_k) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j) - r_{k,j} \underbrace{(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k)}_{=1} = 0 \Rightarrow r_{k,j} = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j)$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1}$$

- $\mathbf{v}_j$  má být ortogonální ke známým vektorům  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1}$ , takže pro  $k = 1, \dots, j-1$  musí platit:

$$0 = (\mathbf{q}_k, \mathbf{v}_j) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - \cdots - r_{i,j}\mathbf{q}_i - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1})$$

- Protože  $(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_i) = 0$  pro  $k \neq i$ , platí

$$(\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j - r_{k,j}\mathbf{q}_k) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j) - r_{k,j} \underbrace{(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k)}_{=1} = 0 \Rightarrow r_{k,j} = (\mathbf{q}_k, \mathbf{a}_j)$$

- Získali jsme tedy  $\mathbf{v}_j$  jako příslušnou lineární kombinaci. Snadno určíme  $\mathbf{q}_j$  a  $r_{j,j}$ :

$$\mathbf{q}_j = \frac{\mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_j\|} = \frac{\mathbf{v}_j}{r_{j,j}} \Rightarrow r_{j,j} = \|\mathbf{v}_j\|$$

```
function QR_GS( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )  
   $Q = O \in \mathbb{R}^{m \times n}, R = O \in \mathbb{R}^{n \times n}$   
  for  $j = 1 : n$  do  
     $v = A(:, j)$   
    for  $i = 1, \dots, j - 1$  do  
       $R(i, j) = Q(:, i)^T A(:, j)$   
       $v = v - R(i, j)Q(:, i)$   
    end for  
     $R(j, j) = \|v\|$   
     $Q(:, j) = v/R(j, j)$   
  end for  
end function
```

```

function QR_GS( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )
   $Q = O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R = O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
  for  $j = 1 : n$  do
     $v = A(:, j)$ 
    for  $i = 1, \dots, j - 1$  do
       $R(i, j) = Q(:, i)^T A(:, j)$ 
       $v = v - R(i, j)Q(:, i)$ 
    end for
     $R(j, j) = \|v\|$ 
     $Q(:, j) = v / R(j, j)$ 
  end for
end function

```

- Algoritmus vyžaduje  $2mn^2$  operací.
- Gramův-Schmidtův proces je numericky nestabilní, v praxi se proto spíše používají Givensovy rotace nebo Householderovy transformace

- Příklad. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Příklad. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

- Př. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezněme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} = \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \end{aligned}$$



- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} = \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2}$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

$$0 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 - r_{1,2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

$$0 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 - r_{1,2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 3 + 0 \cdot 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

$$0 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 - r_{1,2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 3 + 0 \cdot 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4+16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

$$0 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 - r_{1,2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 3 + 0 \cdot 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1 + 1} = \sqrt{6} = r_{2,2}$$

- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4+16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

$$0 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 - r_{1,2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 3 + 0 \cdot 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1 + 1} = \sqrt{6} = r_{2,2}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2 / \|\mathbf{v}_2\| = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$



- PŘ. Pomocí Gramova-Schmidtova procesu nalezneme QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hledáme  $(\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2) = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{4+16} =$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = r_{1,1}, \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 4/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{1,2}\mathbf{q}_1 + \underbrace{r_{2,2}\mathbf{q}_2}_{=\mathbf{v}_2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1$$

$$0 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 - r_{1,2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 3 + 0 \cdot 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 1 = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 \\ 0 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2^2 + 1 + 1} = \sqrt{6} = r_{2,2}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}_2 / \|\mathbf{v}_2\| = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/5 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/6 \\ 2\sqrt{5}/5 & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

# Redukovaná vs. plná QR faktorizace

## ■ Redukovaná QR faktorizace

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

# Redukovaná vs. plná QR faktorizace

## ■ Redukovaná QR faktorizace

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

## ■ Plná QR faktorizace

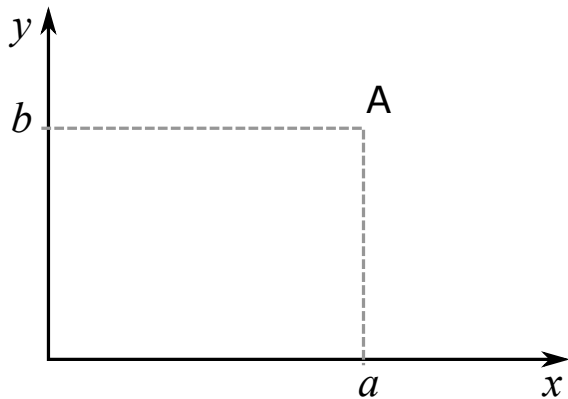
$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Givensova transformace

- Uvažujme dva souřadné systémy:  
 $xy$  a  $x'y'$

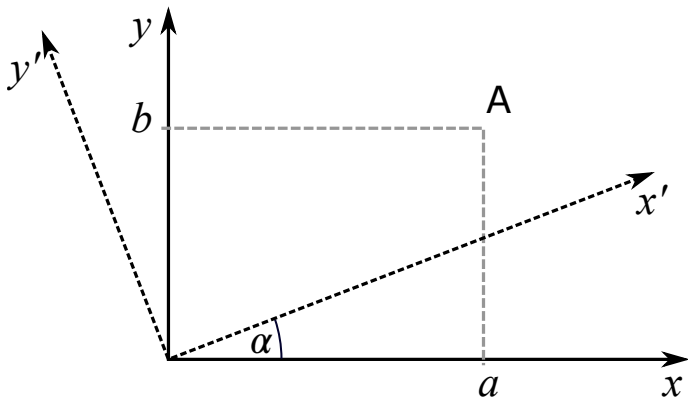


## Givensova transformace



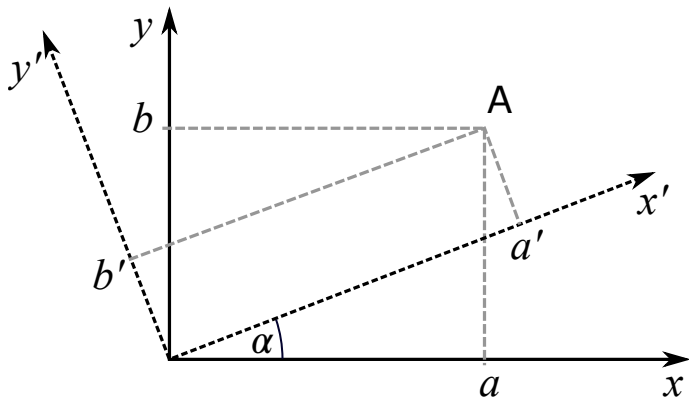
- Uvažujme dva souřadné systémy:  
 $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$

## Givensova transformace



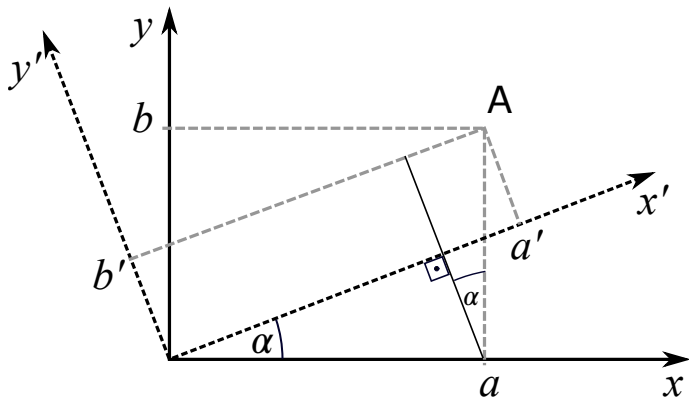
- Uvažujme dva souřadné systémy:  $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$

## Givensova transformace



- Uvažujme dva souřadné systémy:  $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$

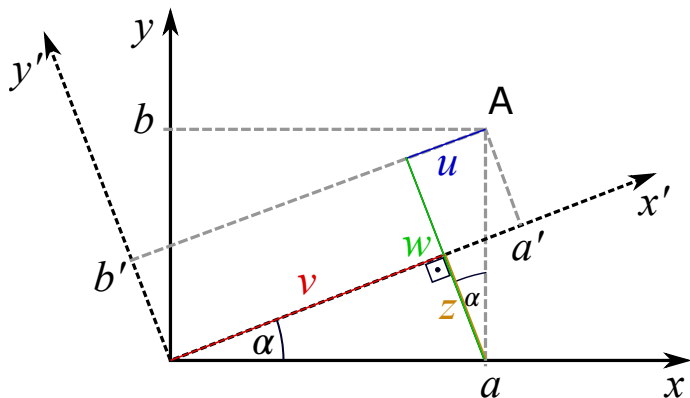
# Givensova transformace



- Uvažujme dva souřadné systémy:  
 $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$



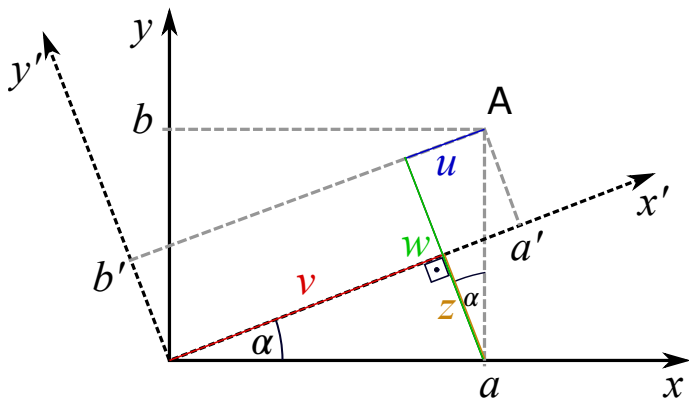
# Givensova transformace



- Uvažujme dva souřadné systémy:  $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$

$$\sin \alpha = \frac{u}{b} \Rightarrow u = b \sin \alpha$$

# Givensova transformace

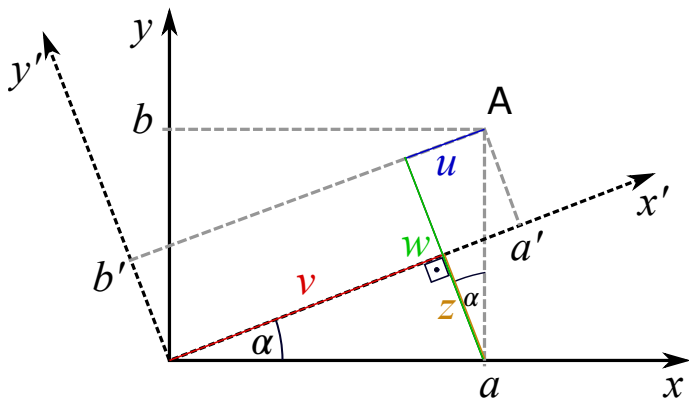


- Uvažujme dva souřadné systémy:  $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$

$$\sin \alpha = \frac{u}{b} \Rightarrow u = b \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \cos \alpha$$

# Givensova transformace



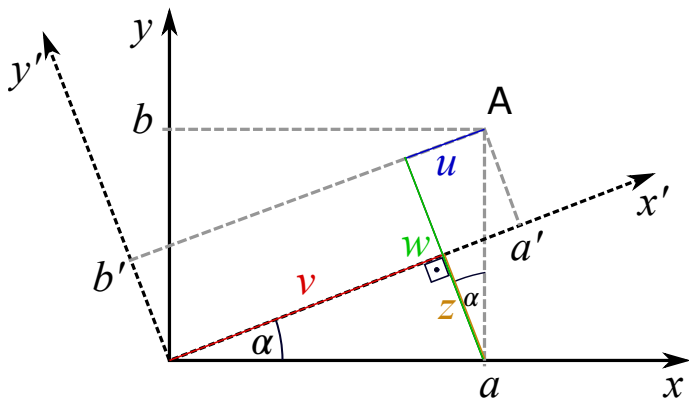
- Uvažujme dva souřadné systémy:  $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$

$$\sin \alpha = \frac{u}{b} \Rightarrow u = b \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{w}{b} \Rightarrow w = b \cos \alpha$$

# Givensova transformace



- Uvažujme dva souřadné systémy:  $xy$  a  $x'y'$
- Bod  $A$  má souřadnice  $(a, b)$  v  $xy$
- Vyjádřeme jeho souřadnice v  $x'y'$

$$\sin \alpha = \frac{u}{b} \Rightarrow u = b \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{w}{b} \Rightarrow w = b \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha\end{aligned}\quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha\end{aligned}\quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Matici  $G$  nazýváme maticí rovinné rotace, která vektor  $(a, b)$  rotuje o úhel  $-\alpha$  (rotujeme soustavu souřadnic o úhel  $\alpha \Leftrightarrow$  rotujeme vektor o úhel  $-\alpha$ )

$$\begin{aligned}a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha\end{aligned}\quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Matici  $G$  nazýváme maticí rovinné rotace, která vektor  $(a, b)$  rotuje o úhel  $-\alpha$  (rotujeme soustavu souřadnic o úhel  $\alpha \Leftrightarrow$  rotujeme vektor o úhel  $-\alpha$ )
- Matice  $G$  je ortogonální,  $G^{-1} = G^T$  rotuje vektor o úhel  $\alpha$



$$\begin{aligned}a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha\end{aligned}\quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Matici  $G$  nazýváme maticí rovinné rotace, která vektor  $(a, b)$  rotuje o úhel  $-\alpha$  (rotujeme soustavu souřadnic o úhel  $\alpha \Leftrightarrow$  rotujeme vektor o úhel  $-\alpha$ )
- Matice  $G$  je ortogonální,  $G^{-1} = G^T$  rotuje vektor o úhel  $\alpha$
- Označme  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$

$$\begin{aligned} a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Matici  $G$  nazýváme maticí rovinné rotace, která vektor  $(a, b)$  rotuje o úhel  $-\alpha$  (rotujeme soustavu souřadnic o úhel  $\alpha \Leftrightarrow$  rotujeme vektor o úhel  $-\alpha$ )
- Matice  $G$  je ortogonální,  $G^{-1} = G^T$  rotuje vektor o úhel  $\alpha$
- Označme  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$
- Matici rotace je možné využít k nulování prvků vektoru, např.

$$G^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Matici  $G$  nazýváme maticí rovinné rotace, která vektor  $(a, b)$  rotuje o úhel  $-\alpha$  (rotujeme soustavu souřadnic o úhel  $\alpha \Leftrightarrow$  rotujeme vektor o úhel  $-\alpha$ )
- Matice  $G$  je ortogonální,  $G^{-1} = G^T$  rotuje vektor o úhel  $\alpha$
- Označme  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$
- Matici rotace je možné využít k nulování prvků vektoru, např.

$$G^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ac - bs &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ as + bc &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' &= a \cos \alpha + b \sin \alpha \\ b' &= -a \sin \alpha + b \cos \alpha \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{=G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Matici  $G$  nazýváme maticí rovinné rotace, která vektor  $(a, b)$  rotuje o úhel  $-\alpha$  (rotujeme soustavu souřadnic o úhel  $\alpha \Leftrightarrow$  rotujeme vektor o úhel  $-\alpha$ )
- Matice  $G$  je ortogonální,  $G^{-1} = G^T$  rotuje vektor o úhel  $\alpha$
- Označme  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$
- Matici rotace je možné využít k nulování prvků vektoru, např.

$$G^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ac - bs &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ as + bc &= 0 \end{aligned} \Rightarrow c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad s = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Postup lze zobecnit i pro vektory délky  $n$ :

$$G_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & s & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & -s & c & \\ 0 & & \dots & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

- Postup lze zobecnit i pro vektory délky  $n$ :

$$G_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & s & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & -s & c & \\ 0 & & \dots & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

- $i, j$  - osy, ve kterých se rotuje

- Postup lze zobecnit i pro vektory délky  $n$ :

$$G_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & s & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & -s & & c & \\ 0 & & & \dots & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $i, j$  - osy, ve kterých se rotuje

$$\mathbf{y} = G_{i,j}^T \mathbf{x}$$

$$y_k = \begin{cases} cx_i - sx_j, & k = i, \\ sx_i + cx_j, & k = j, \\ x_k, & k \neq i, j, \end{cases}$$

- Postup lze zobecnit i pro vektory délky  $n$ :

$$G_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & s & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & -s & & c & \\ 0 & & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

- $i, j$  - osy, ve kterých se rotuje

$$\mathbf{y} = G_{i,j}^T \mathbf{x}$$

$$y_k = \begin{cases} cx_i - sx_j, & k = i, \\ sx_i + cx_j, & k = j, \\ x_k, & k \neq i, j, \end{cases} \quad c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}.$$



■ Givensova QR metoda:

$$G(i-1, i) = G_{i-1, i}, \quad c = \frac{x_{i-1}}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}, \quad s = \frac{-x_i}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}$$

■ Givensova QR metoda:

$$G(i-1, i) = G_{i-1, i}, \quad c = \frac{x_{i-1}}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}, \quad s = \frac{-x_i}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{G(2,3)^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{G(1,2)^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{G(2,3)^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

■ Givensova QR metoda:

$$G(i-1, i) = G_{i-1, i}, \quad c = \frac{x_{i-1}}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}, \quad s = \frac{-x_i}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{G(2,3)^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{G(1,2)^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{G(2,3)^T} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

■ Postupně tedy aplikujeme zleva jednotlivé ortogonální transformační matice  $G_k^T$ :

$$\underbrace{G_p^T G_{p-1}^T \cdots G_2^T G_1^T}_{=Q^T} A = R$$

■ Givensova QR metoda:

$$G(i-1, i) = G_{i-1, i}, \quad c = \frac{x_{i-1}}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}, \quad s = \frac{-x_i}{\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} G_{\xrightarrow{(2,3)}}^T \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} G_{\xrightarrow{(1,2)}}^T \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} G_{\xrightarrow{(2,3)}}^T \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

■ Postupně tedy aplikujeme zleva jednotlivé ortogonální transformační matice  $G_k^T$ :

$$\underbrace{G_p^T G_{p-1}^T \cdots G_2^T G_1^T}_{=Q^T} A = R$$

$$A = G_1 G_2 \cdots G_{p-1} G_p R, \quad A = QR$$

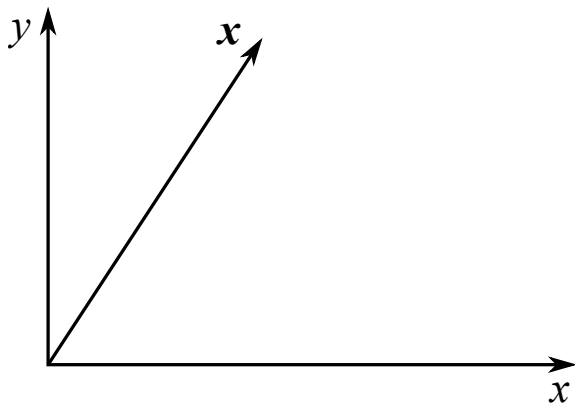
```

function QR_Givens( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )
   $Q = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $R = A$ 
  for  $j = 1 : n$  do
    for  $i = m, m - 1, \dots, j + 1$  do
       $x = R(:, j)$ 
      if  $\sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2} > 0$  then
         $c = x_{i-1} / \sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}$ 
         $s = -x_i / \sqrt{x_{i-1}^2 + x_i^2}$ 
         $G = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 
         $G([i - 1, i], [i - 1, i]) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ 
         $R = G^T R$ 
         $Q = QG$ 
      end if
    end for
  end for
end function

```

- Algoritmus vyžaduje přibližně  $3n^2m - n^3$  operací.

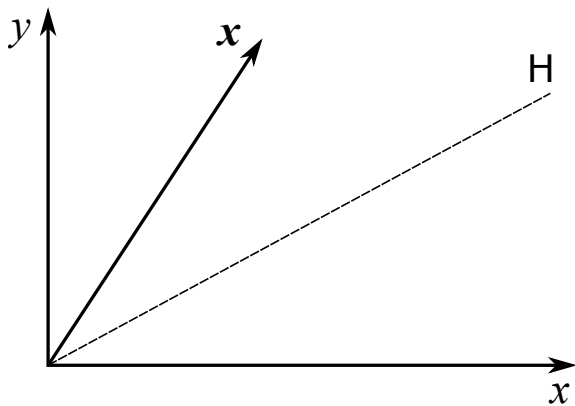
## Householderovy transformace



- K vektoru  $x$  sestrojíme jeho projekci do osy  $x$  stejné délky

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{P} Px = \begin{pmatrix} \|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \|x\|e_1$$

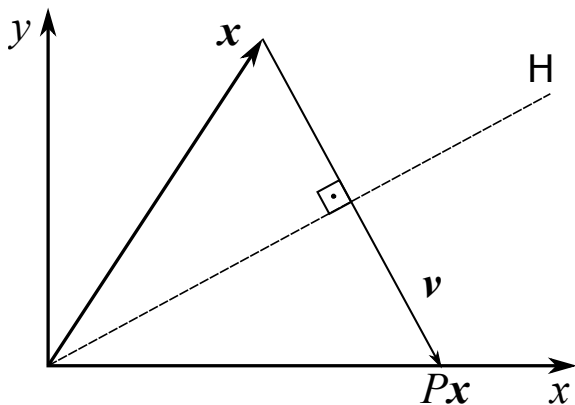
## Householderovy transformace



- K vektoru  $x$  sestrojíme jeho projekci do osy  $x$  stejné délky

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{P} Px = \begin{pmatrix} \|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \|x\|e_1$$

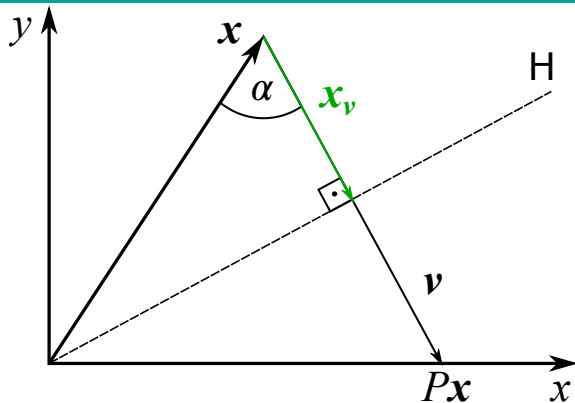
## Householderovy transformace



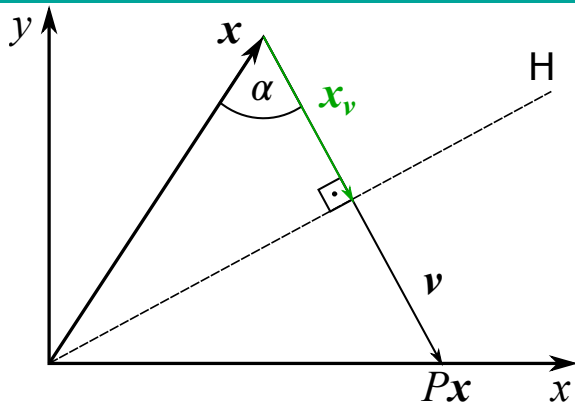
- K vektoru  $x$  sestrojíme jeho projekci do osy  $x$  stejné délky

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{P} Px = \begin{pmatrix} \|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \|x\|e_1$$

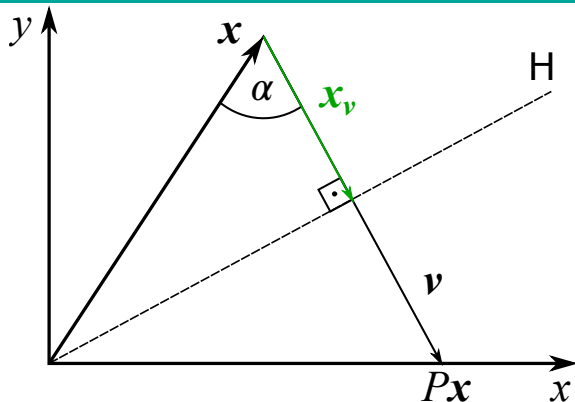




- $Px$  má mít stejnou délku jako  $x$ , tzn.  
 $\|Px\| = (Px)_1 = \|x\|$



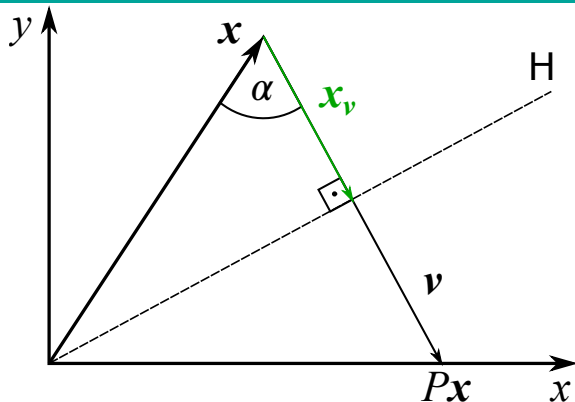
- $Px$  má mít stejnou délku jako  $x$ , tzn.  
 $\|Px\| = (Px)_1 = \|x\|$
- $Px$  je zrcadlový obraz  $x$  s osou souměrnosti  $H$ ,  
 osa prochází počátkem a je kolmá k  
 $v = Px - x = \|x\|e_1 - x$



- $Px$  má mít stejnou délku jako  $x$ , tzn.  
 $\|Px\| = (Px)_1 = \|x\|$
- $Px$  je zrcadlový obraz  $x$  s osou souměrnosti  $H$ ,  
 osa prochází počátkem a je kolmá k  
 $v = Px - x = \|x\|e_1 - x$

$$Px = x + 2x_v$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha, \text{ kde } v_n = \frac{v}{\|v\|}$$

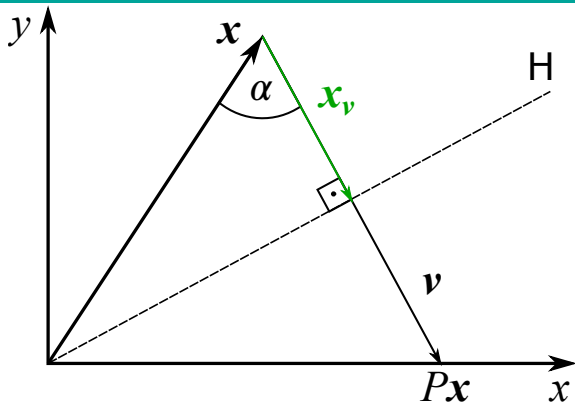


- $Px$  má mít stejnou délku jako  $x$ , tzn.  
 $\|Px\| = (Px)_1 = \|x\|$
- $Px$  je zrcadlový obraz  $x$  s osou souměrnosti  $H$ ,  
 osa prochází počátkem a je kolmá k  
 $v = Px - x = \|x\|e_1 - x$

$$Px = x + 2x_v$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha, \text{ kde } v_n = \frac{v}{\|v\|}$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha = \frac{v}{\|v\|} \|x\| \cos \alpha = \frac{v}{\|v\|^2} \underbrace{\|v\| \|x\| \cos \alpha}_{=-x^T v} = -\frac{v}{\|v\|^2} v^T x$$



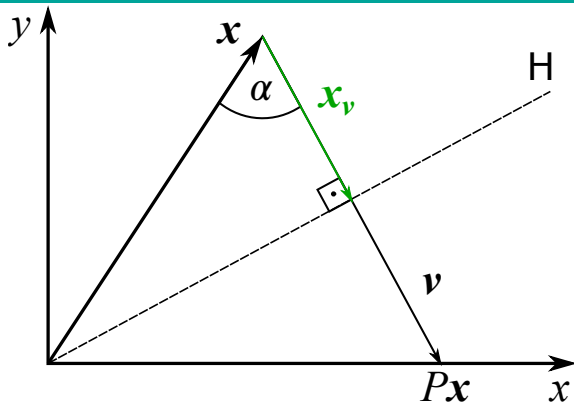
- $Px$  má mít stejnou délku jako  $x$ , tzn.  
 $\|Px\| = (Px)_1 = \|x\|$
- $Px$  je zrcadlový obraz  $x$  s osou souměrnosti  $H$ ,  
 osa prochází počátkem a je kolmá k  
 $v = Px - x = \|x\|e_1 - x$

$$Px = x + 2x_v$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha, \text{ kde } v_n = \frac{v}{\|v\|}$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha = \frac{v}{\|v\|} \|x\| \cos \alpha = \frac{v}{\|v\|^2} \underbrace{\|v\| \|x\| \cos \alpha}_{=-x^T v} = -\frac{v}{\|v\|^2} v^T x$$

$$\Rightarrow P = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$



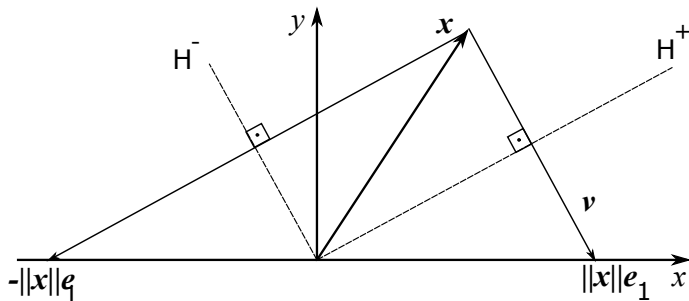
- $Px$  má mít stejnou délku jako  $x$ , tzn.  
 $\|Px\| = (Px)_1 = \|x\|$
- $Px$  je zrcadlový obraz  $x$  s osou souměrnosti  $H$ ,  
 osa prochází počátkem a je kolmá k  
 $v = Px - x = \|x\|e_1 - x$

$$Px = x + 2x_v$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha, \text{ kde } v_n = \frac{v}{\|v\|}$$

$$x_v = v_n \|x\| \cos \alpha = \frac{v}{\|v\|} \|x\| \cos \alpha = \frac{v}{\|v\|^2} \underbrace{\|v\| \|x\| \cos \alpha}_{=-x^T v} = -\frac{v}{\|v\|^2} v^T x$$

$$\Rightarrow P = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \quad \text{matice zrcadlení (Householderova matice)}$$



- Projekce do osy  $x$  není definována jednoznačně ( $\pm \|x\|e_1$ ).
- Pro lepší numerickou stabilitu se volí projekce volí jako  $Px = -\text{sign}(x_1)e_1$

- P je symetrická ortogonální matice:

$$P^T = \left( I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \right)^T = I - 2 \frac{(v^T)^T v^T}{v^T v} = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$



- P je symetrická ortogonální matice:

$$P^T = \left( I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \right)^T = I - 2 \frac{(v^T)^T v^T}{v^T v} = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$

$$PP^T = PP = \left( I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \right) \left( I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \right) = I - 4 \frac{vv^T}{v^T v} + 4 \frac{vv^T vv^T}{(v^T v)^2} = I - 4 \frac{vv^T}{v^T v} + 4 \frac{vv^T}{v^T v} = I$$

## ■ Householderova QR dekompozice

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ Householderova QR dekompozice

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{P_n P_{n-1} \cdots P_1}_{=Q^T} A = R \quad \Rightarrow \quad A = QR, Q = P_1 \cdots P_{n-1} P_n$$

```

function QR_Householder( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )
   $Q = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $R = A$ 
  for  $j = 1 : n$  do
     $x = R(j : m, j)$ 
     $v = -\text{sign}(x_1) \|x\| \text{eye}(m - j + 1, 1) - x$ 
     $v = v / \|v\|$ 
     $P = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 
     $P(j : m, j : m) = P(j : m, j : m) - 2vv^T$ 
     $R = PR$ 
     $Q = QP$ 
  end for
end function

```

- Algoritmus vyžaduje přibližně  $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$  operací.

## ■ Aplikace QR rozkladu

- výpočet ortonormální báze z množiny vektorů
- řešení soustav lineárních rovnic
- řešení problému nejmenších čtverců (přeurčených soustav)
- hledání vlastních čísel (spektrální rozklad)
- výpočet pseudoinverze (Moore-Penroseovy):

$$AA^+A = A,$$

$$A^+AA^+ = A^+,$$

$$(AA^+)^T = AA^+$$

$$, (A^+A)^T = A^+A$$

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

20. dubna 2023