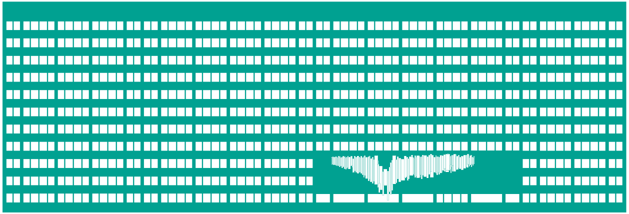
VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

VSB TECHNICAL
UNIVERSITY
OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Numerická lineární algebra 1

Řešení soustav lineárních rovnic - LU rozklad

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

11. března 2021

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM

Gaussova eliminace a LU rozklad

- Gaussova eliminace
  - jeden z nejznámějších algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic
  - převod matice soustavy na schodový tvar
  - vhodný pro "ruční" výpočty

Gaussova eliminace a LU rozklad

- Gaussova eliminace
  - jeden z nejznámějších algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic
  - převod matice soustavy na schodový tvar
  - vhodný pro "ruční" výpočty

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Gaussova eliminace a LU rozklad

- Gaussova eliminace
  - jeden z nejznámějších algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic
  - převod matice soustavy na schodový tvar
  - vhodný pro “ruční” výpočty

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminace a LU rozklad

- Gaussova eliminace
  - jeden z nejznámějších algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic
  - převod matice soustavy na schodový tvar
  - vhodný pro "ruční" výpočty

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 4r_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

Gaussova eliminace a LU rozklad

- Gaussova eliminace
  - jeden z nejznámějších algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic
  - převod matice soustavy na schodový tvar
  - vhodný pro "ruční" výpočty

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1\\
8x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 3 & 1\\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right)
\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-4r_1}}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right)
\overset{r_3-3r_2}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)
$$

Gaussova eliminace a LU rozklad

- Gaussova eliminace
  - jeden z nejznámějších algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic
  - převod matice soustavy na schodový tvar
  - vhodný pro "ruční" výpočty

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\
8x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right)
\overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-4r_1}}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{array}\right)
\overset{r_3-3r_2}{\longrightarrow}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_3 &= \tfrac{5}{2} \\
x_2 &= -3 - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{11}{2} \\
x_1 &= \left(2 + \tfrac{11}{2} - \tfrac{5}{2}\right)/2 = \tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{L}\mathsf{U}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \mathsf{LU}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \mathsf{LU}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \text{ozn. } \boldsymbol{z} = \mathsf{U}\boldsymbol{x} : & \end{aligned}$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \mathsf{LU}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \text{ozn. } \boldsymbol{z} = \mathsf{U}\boldsymbol{x}: \quad \mathsf{L}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} & \\
& \mathsf{LU}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} & \\
\text{ozn. } \boldsymbol{z} = \mathsf{U}\boldsymbol{x} : \quad & \mathsf{L}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{b} & \quad \text{(dopedn substitutce)}
\end{aligned}
$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \mathsf{LU}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \text{ozn. } \boldsymbol{z} = \mathsf{U}\boldsymbol{x} : \qquad \mathsf{L}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{b} \qquad \text{(dopedn substitutce)} \\ \mathsf{U}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{z} \end{aligned}$$

- LU rozklad
  - maticová forma Gaussovy eliminace vhodná k implementaci na počítači
  - převod matice na součin horní a dolní trojúhelníkové pomocí lineárních transformací zleva
  - známe-li LU rozklad matice A (tzn. nalezli jsme L, U takové, že $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$), můžeme efektivně řešit soustavu

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \mathsf{A}\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} & \\
 & \mathsf{LU}\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} & \\
\text{ozn.}\ \boldsymbol{z} = \mathsf{U}\boldsymbol{x}: & \mathsf{L}\boldsymbol{z} & = & \boldsymbol{b} & \quad \text{(dopedn substitutce)} \\
 & \mathsf{U}\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{z} & \quad \text{(zptn substitutce)}
\end{array}
$$

- Násobení maticí zleva manipuluje s řádky:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

- Násobení maticí zleva manipuluje s řádky:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

- Násobení maticí zleva manipuluje s řádky:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\2 & 4 & 6\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 6 & 9\\5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

- Buď A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{A}$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_1\mathsf{A}$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1\mathsf{A}$$

- Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$L_3 L_2 L_1 A$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_{n-1} \cdots \mathsf{L}_3 \mathsf{L}_2 \mathsf{L}_1 \mathsf{A}$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_{n-1} \cdots \mathsf{L}_3 \mathsf{L}_2 \mathsf{L}_1 \mathsf{A} = \mathsf{U}$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_{n-1} \cdots \mathsf{L}_3 \mathsf{L}_2 \mathsf{L}_1 \mathsf{A} = \mathsf{U} \qquad / \cdot (\mathsf{L}_{n-1} \cdots \mathsf{L}_3 \mathsf{L}_2 \mathsf{L}_1)^{-1} = \mathsf{L}_1^{-1} \mathsf{L}_2^{-1} \mathsf{L}_3^{-1} \cdots \mathsf{L}_{n-1}^{-1}$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \mathsf{U} \qquad / \cdot (\mathsf{L}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1)^{-1} = \mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-1}^{-1}$$

$$\underbrace{\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-1}^{-1}\mathsf{L}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1}_{=\mathsf{I}}\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-1}^{-1}}_{=\mathsf{L}}\mathsf{U}$$

- Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Transformujme A na horní trojúhelníkovou matici postupným nulováním prvků pod hlavní diagonálou – postupným odčítáním řádků od následujících řádků:

$$\mathsf{L}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \mathsf{U} \qquad / \cdot (\mathsf{L}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1)^{-1} = \mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-1}^{-1}$$

$$\underbrace{\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-1}^{-1}\mathsf{L}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1}_{=\mathsf{I}}\mathsf{A} = \underbrace{\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-1}^{-1}}_{=\mathsf{L}}\mathsf{U}$$

$$\mathsf{A} = \mathsf{L}\mathsf{U}$$

- Příklad. Nalezněme rozklad $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

- Příklad. Nalezněme rozklad $A = LU$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_1 A =$$

- Příklad. Nalezněme rozklad $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- Příklad. Nalezněme rozklad $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Příklad. Nalezněme rozklad $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_3\mathsf{L}_2\mathsf{L}_1\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Nalezli jsme $L_3 L_2 L_1 A = U$, chceme $A = LU$

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}L_3L_2L_1A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}}_{=L}U$$

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}L_3L_2L_1A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}}_{=L}U$$

$$A = LU$$

- Nalezli jsme $L_3 L_2 L_1 A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3 L_2 L_1 A = U \qquad / \cdot (L_3 L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} L_3 L_2 L_1 A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}}_{=L} U$$

$$A = LU$$

- Jak vypadají inverze k transformačním maticím L_i?

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}L_3L_2L_1A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}}_{=L}U$$

$$A = LU$$

- Jak vypadají inverze k transformačním maticím L_i?

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}L_3L_2L_1A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}}_{=L}U$$

$$A = LU$$

- Jak vypadají inverze k transformačním maticím L_i?

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ ? & 1 & 0 & 0\\ ? & 0 & 1 & 0\\ ? & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}L_3L_2L_1A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}}_{=L}U$$

$$A = LU$$

- Jak vypadají inverze k transformačním maticím L_i?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Nalezli jsme $L_3L_2L_1A = U$, chceme $A = LU$

$$L_3L_2L_1A = U \qquad / \cdot (L_3L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}L_3L_2L_1A = \underbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}}_{=L}U$$

$$A = LU$$

- Jak vypadají inverze k transformačním maticím L_i?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Inverze vzniknou negováním mimodiagonálních prvků.

- A co součin inverzních matic?

- A co součin inverzních matic?

$$\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

- A co součin inverzních matic?

$$\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A co součin inverzních matic?

$$\mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\mathsf{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Nalezli jsme tedy rozklad:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obecná formulace

$$\mathsf{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Buď A^{k-1} matice, ve které jsme již eliminovali $k-1$ sloupců.

Obecná formulace

$$
\mathsf{L}_k = \begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & 1 & & & \\
& & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\
& & \vdots & & \ddots & \\
& & \ell_{n,k} & & & 1
\end{pmatrix}
$$

- Buď A^{k-1} matice, ve které jsme již eliminovali $k-1$ sloupců.
- $\mathsf{L}_k\mathsf{A}^{k-1} = [\mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_1^{k-1} \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_2^{k-1} \,|\, \ldots \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_k^{k-1} \,|\, \ldots \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_n^{k-1}]$

Obecná formulace

$$\mathsf{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Buď A^{k-1} matice, ve které jsme již eliminovali $k-1$ sloupců.
- $\mathsf{L}_k\mathsf{A}^{k-1} = [\mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_1^{k-1} \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_2^{k-1} \,|\, \ldots \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_k^{k-1} \,|\, \ldots \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_n^{k-1}]$

- Eliminujeme tedy sloupec

$$\boldsymbol{a}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix}$$

Obecná formulace

$$\mathsf{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Buď A^{k-1} matice, ve které jsme již eliminovali $k-1$ sloupců.
- $\mathsf{L}_k\mathsf{A}^{k-1} = [\mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_1^{k-1} \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_2^{k-1} \,|\, \ldots \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_k^{k-1} \,|\, \ldots \,|\, \mathsf{L}_k\boldsymbol{a}_n^{k-1}]$

- Eliminujeme tedy sloupec

$$\boldsymbol{a}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k} \\ a_{k,k}^{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_k^{k}$$

- Vyjádřeme součin L_k s k. sloupcem matice A^{k-1}:

$$
\mathsf{L}_k \boldsymbol{a}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ \ell_{k+1,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ \ell_{n,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_k^k
$$

- Vyjádřeme součin L_k s k. sloupcem matice A^{k-1}:

$$\mathsf{L}_k \boldsymbol{a}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ \ell_{k+1,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ \ell_{n,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_k^k$$

Pro $j \in \{k+1, \ldots, n\}$:

$$\ell_{j,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{j,k}^{k-1} = 0$$

- Vyjádřeme součin L_k s k. sloupcem matice A^{k-1}:

$$\mathsf{L}_k \boldsymbol{a}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{k-1} \\ a_{k,k}^{k-1} \\ \ell_{k+1,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ \ell_{n,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{n,k}^{k-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_k^k$$

Pro $j \in \{k+1, \dots, n\}$:

$$\ell_{j,k} a_{k,k}^{k-1} + a_{j,k}^{k-1} = 0 \Rightarrow \ell_{j,k} = -a_{j,k}^{k-1} / a_{k,k}^{k-1}$$

- Inverzi matice L_k získáme přenásobením mimodiagonálních prvků -1:

- Inverzi matice L_k získáme přenásobením mimodiagonálních prvků -1:
- Důkaz:

$$\boldsymbol{\ell}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ell_{k+1,k} \\ \vdots \\ \ell_{n,k} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Inverzi matice L_k získáme přenásobením mimodiagonálních prvků -1:
- Důkaz:

$$\boldsymbol{\ell}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ell_{k+1,k} \\ \vdots \\ \ell_{n,k} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_k = \mathsf{I} + \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T, \qquad \mathsf{L}_k^{-1} = \mathsf{I} - \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T$$

- Inverzi matice L_k získáme přenásobením mimodiagonálních prvků -1:
- Důkaz:

$$\boldsymbol{\ell}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ell_{k+1,k} \\ \vdots \\ \ell_{n,k} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_k = \mathsf{I} + \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T, \qquad \mathsf{L}_k^{-1} = \mathsf{I} - \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T$$

$$\Rightarrow \mathsf{L}_k^{-1}\mathsf{L}_k = (\mathsf{I} - \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T)(\mathsf{I} + \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T) = \mathsf{I} + \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T - \boldsymbol{\ell}_k \underbrace{\boldsymbol{e}_k^T \boldsymbol{\ell}_k}_{=0} \boldsymbol{e}_k^T = \mathsf{I}$$

- Dále platí:

$$\mathsf{L} = \mathsf{L}_1^{-1}\mathsf{L}_2^{-1}\cdots\mathsf{L}_{n-2}^{-1}\mathsf{L}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\ell_{2,1} & 1 & & & & \\ -\ell_{3,1} & -\ell_{3,2} & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & 1 & \\ -\ell_{n,1} & -\ell_{n,2} & & & -\ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- Důkaz

$$\mathsf{L}_k^{-1}\mathsf{L}_{k+1}^{-1} = (\mathsf{I} - \boldsymbol{\ell}_k \boldsymbol{e}_k^T)(\mathsf{I} - \boldsymbol{\ell}_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}^T) = \mathsf{I} - \boldsymbol{\ell}_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}^T - \boldsymbol{\ell}_k\boldsymbol{e}_k^T + \boldsymbol{\ell}_k \underbrace{\boldsymbol{e}_k^T\boldsymbol{\ell}_{k+1}}_{=0} \boldsymbol{e}_{k+1}^T$$

Algoritmus LU rozkladu

- V praxi explicitně nesestavujeme matice L_k a nenásobíme jimi.
- Multiplikátory $\ell_{j,k}$ uložíme rovnou na příslušné pozice v matici L a násobení L_k aplikujeme implicitně.

$\mathsf{U} = \mathsf{A}, \mathsf{L} = \mathsf{I}$
for $k = 1$ **to** $m - 1$ **do**
  for $j = k + 1$ **to** m **do**
    $\mathsf{L}_{j,k} = \mathsf{U}_{j,k} / \mathsf{U}_{k,k}$
    $\mathsf{U}_{j,k:m} = \mathsf{U}_{j,k:m} - \mathsf{L}_{j,k}\mathsf{U}_{k,k:m}$
  end for
end for

LU rozklad s pivotizací

- Pokud $a_{k,k} = 0$, algoritmus LU rozkladu selže kvůli dělení nulou, např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Při analytickém výpočtu LU rozkladu je stabilita algoritmu zajištěna nenulovostí pivotu (prvku, se kterým provádíme výpočet).

LU rozklad s pivotizací

- Pokud $a_{k,k} = 0$, algoritmus LU rozkladu selže kvůli dělení nulou, např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Při analytickém výpočtu LU rozkladu je stabilita algoritmu zajištěna nenulovostí pivotu (prvku, se kterým provádíme výpočet).
- Při numerickém výpočtu můžou nastat vlivem zaokrouhlovacích chyb problémy, pokud je pivot relativně malé číslo. Např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

LU rozklad s pivotizací

- Pokud $a_{k,k} = 0$, algoritmus LU rozkladu selže kvůli dělení nulou, např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Při analytickém výpočtu LU rozkladu je stabilita algoritmu zajištěna nenulovostí pivotu (prvku, se kterým provádíme výpočet).
- Při numerickém výpočtu můžou nastat vlivem zaokrouhlovacích chyb problémy, pokud je pivot relativně malé číslo. Např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{U} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 2 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

LU rozklad s pivotizací

- Pokud $a_{k,k} = 0$, algoritmus LU rozkladu selže kvůli dělení nulou, např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Při analytickém výpočtu LU rozkladu je stabilita algoritmu zajištěna nenulovostí pivotu (prvku, se kterým provádíme výpočet).
- Při numerickém výpočtu můžou nastat vlivem zaokrouhlovacích chyb problémy, pokud je pivot relativně malé číslo. Např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{U} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 2 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

- V počítačové aritmetice bude $2 - 10^{20}$ zaokrouhleno na nejbližší číslo s pohyblivou řádovou čárkou, např. -10^{20}:

LU rozklad s pivotizací

- Pokud $a_{k,k} = 0$, algoritmus LU rozkladu selže kvůli dělení nulou, např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Při analytickém výpočtu LU rozkladu je stabilita algoritmu zajištěna nenulovostí pivotu (prvku, se kterým provádíme výpočet).
- Při numerickém výpočtu můžou nastat vlivem zaokrouhlovacích chyb problémy, pokud je pivot relativně malé číslo. Např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{U} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 2 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

- V počítačové aritmetice bude $2 - 10^{20}$ zaokrouhleno na nejbližší číslo s pohyblivou řádovou čárkou, např. -10^{20}:

$$\mathsf{L}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{U}' = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix}$$

LU rozklad s pivotizací

- Pokud $a_{k,k} = 0$, algoritmus LU rozkladu selže kvůli dělení nulou, např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Při analytickém výpočtu LU rozkladu je stabilita algoritmu zajištěna nenulovostí pivotu (prvku, se kterým provádíme výpočet).
- Při numerickém výpočtu můžou nastat vlivem zaokrouhlovacích chyb problémy, pokud je pivot relativně malé číslo. Např.

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{U} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 2 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

- V počítačové aritmetice bude $2 - 10^{20}$ zaokrouhleno na nejbližší číslo s pohyblivou řádovou čárkou, např. -10^{20}:

$$\mathsf{L}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \mathsf{U}' = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{L}'\mathsf{U}' = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{A}'$$

- Porovnejme řešení soustavy s původní a novou maticí.

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Porovnejme řešení soustavy s původní a novou maticí.

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 \approx 1, x_2 \approx 2$$

- Porovnejme řešení soustavy s původní a novou maticí.

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 \approx 1, x_2 \approx 2$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Porovnejme řešení soustavy s původní a novou maticí.

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 \approx 1, x_2 \approx 2$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 5, x_2 \approx 2$$

Pivot

- V k. kroku LU rozkladu jsou násobky k. řádku odčítány od následujících řádků.
- Zvláštní roli hraje prvek $a_{k,k}$ – k. řádek se vynásobí $a_{k,k}^{-1}$ a příslušný násobek se odečte od následujících řádků.

Pivot

- V k. kroku LU rozkladu jsou násobky k. řádku odčítány od následujících řádků.
- Zvláštní roli hraje prvek $a_{k,k}$ – k. řádek se vynásobí $a_{k,k}^{-1}$ a příslušný násobek se odečte od následujících řádků.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Pivot

- V k. kroku LU rozkladu jsou násobky k. řádku odčítány od následujících řádků.
- Zvláštní roli hraje prvek $a_{k,k}$ – k. řádek se vynásobí $a_{k,k}^{-1}$ a příslušný násobek se odečte od následujících řádků.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

- Prvek $a_{k,k}$ nazýváme pivotem.

Pivot

- V k. kroku LU rozkladu jsou násobky k. řádku odčítány od následujících řádků.
- Zvláštní roli hraje prvek $a_{k,k}$ – k. řádek se vynásobí $a_{k,k}^{-1}$ a příslušný násobek se odečte od následujících řádků.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

- Prvek $a_{k,k}$ nazýváme pivotem.
- Není ale nutné použít diagonální prvek.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & a_{i,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Pivot

- V k. kroku LU rozkladu jsou násobky k. řádku odčítány od následujících řádků.
- Zvláštní roli hraje prvek $a_{k,k}$ – k. řádek se vynásobí $a_{k,k}^{-1}$ a příslušný násobek se odečte od následujících řádků.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{k,k} & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

- Prvek $a_{k,k}$ nazýváme pivotem.
- Není ale nutné použít diagonální prvek.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & a_{i,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & a_{i,k} & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

Pivot

- Není dokonce nutné v k. kroku eliminovat k. sloupec.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & a_{i,j} & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Pivot

- Není dokonce nutné v k. kroku eliminovat k. sloupec.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & a_{i,j} & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & 0 & X & X \\ & X & 0 & X & X \\ & X & a_{i,j} & X & X \\ & X & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

Pivot

- Není dokonce nutné v k. kroku eliminovat k. sloupec.

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & a_{i,j} & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & 0 & X & X \\ & X & 0 & X & X \\ & X & a_{i,j} & X & X \\ & X & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

- Abychom zachovali trojúhelníkovou strukturu matice, musíme v k. kroku permutovat řádek (a sloupec) s pivotam $a_{i,j}$ na pozici (k, k).

Pivotizace

- Nestabilní metoda – relativně malé chyby jednotlivých kroků se postupně akumulují až dojde ke katastrofické ztrátě přesnosti.
- Stabilní metody – chyba výsledku roste s počtem kroků nejvýše lineárně.

Pivotizace

- Nestabilní metoda – relativně malé chyby jednotlivých kroků se postupně akumulují až dojde ke katastrofické ztrátě přesnosti.
- Stabilní metody – chyba výsledku roste s počtem kroků nejvýše lineárně.
- Algoritmus LU faktorizace bez pivotizace není numericky stabilní a může selhat např. při nulovém nebo příliš malém pivotu.
- Pro zlepšení numerické stability se vybírá pivot podle velikosti = pivotizace.
  - částečná – vybíráme ze sloupce $\mathsf{A}^{k-1}(k:n,k)$
  - úplná – vybíráme ze submatice $\mathsf{A}^{k-1}(k:n,k:n)$

Pivotizace

- Nestabilní metoda – relativně malé chyby jednotlivých kroků se postupně akumulují až dojde ke katastrofické ztrátě přesnosti.
- Stabilní metody – chyba výsledku roste s počtem kroků nejvýše lineárně.
- Algoritmus LU faktorizace bez pivotizace není numericky stabilní a může selhat např. při nulovém nebo příliš malém pivotu.
- Pro zlepšení numerické stability se vybírá pivot podle velikosti = pivotizace.
  - částečná – vybíráme ze sloupce $\mathsf{A}^{k-1}(k:n,k)$
  - úplná – vybíráme ze submatice $\mathsf{A}^{k-1}(k:n,k:n)$
- Opět využijeme tranformační matice:

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & a_{i,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{P}_1} \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{i,k} & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{L}_1} \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ & a_{i,k} & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

Částečná pivotizace

- Můžeme chápat jako LU rozklad bez pivotizace již přepermutované matice

$$\mathsf{PA} = \mathsf{LU}$$

- (násobení P zleva permutuje řádky)

Částečná pivotizace

- Můžeme chápat jako LU rozklad bez pivotizace již přepermutované matice

$$\mathsf{PA} = \mathsf{LU}$$

- (násobení P zleva permutuje řádky)
- V každém kroku prohodíme řádky k a p: $\mathsf{A}_k(k,:) \leftrightarrow \mathsf{A}_k(p,:)$
- Index p zvolíme tak, aby

$$|\mathsf{A}(p,k)| = \max_{i=k,\dots,n} \{|a_{i,k}|\}$$

Částečná pivotizace

- Můžeme chápat jako LU rozklad bez pivotizace již přepermutované matice

$$\mathsf{PA} = \mathsf{LU}$$

- (násobení P zleva permutuje řádky)
- V každém kroku prohodíme řádky k a p: $\mathsf{A}_k(k,:) \leftrightarrow \mathsf{A}_k(p,:)$
- Index p zvolíme tak, aby

$$|\mathsf{A}(p,k)| = \max_{i=k,\ldots,n} \{|a_{i,k}|\}$$

- Prováděné operace budeme zaznamenávat do permutační matice P

$$\mathsf{A}_k(k,:) \leftrightarrow \mathsf{A}_k(p,:) \Rightarrow \mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{A}_k$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} \quad = \quad \mathsf{A}_1$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} &= \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{A}_1 &= \mathsf{A}_2 \end{aligned}$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} &= \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{A}_1 &= \mathsf{A}_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} &= \mathsf{A}_1 \\
\mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{A}_1 &= \mathsf{A}_2 \\
&\vdots \\
\mathsf{L}_{n-1}\mathsf{P}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} &= \mathsf{U}
\end{aligned}$$

- Po nalezení pivotu provedeme eliminaci v k. sloupci.

$$\mathsf{L}_{k+1}\mathsf{P}_{k+1}\mathsf{A}_k = \mathsf{A}_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} &= \mathsf{A}_1 \\
\mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{A}_1 &= \mathsf{A}_2 \\
&\vdots \\
\mathsf{L}_{n-1}\mathsf{P}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} &= \mathsf{U}
\end{aligned}$$

- Výraz $\mathsf{L}_{n-1}\mathsf{P}_{n-1}\cdots\mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1$ příliš nepřipomíná původní součin s dolně trojúhelníkovou strukturou.
- Naštěsti jej můžeme vhodně přeuspořádat.
- Zkusme si pro $n = 4$ označit

$$\mathsf{L}_3' = \mathsf{L}_3, \quad \mathsf{L}_2' = \mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3^{-1}, \quad \mathsf{L}_1' = \mathsf{P}_3\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_2^{-1}\mathsf{P}_3^{-1}.$$

- Pak platí

$$\mathsf{L}_3'\mathsf{L}_2'\mathsf{L}_1'\mathsf{P}_3\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathsf{L}_3\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\underbrace{\mathsf{P}_3^{-1}\mathsf{P}_3}_{=\mathsf{I}}\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\underbrace{\mathsf{P}_2^{-1}\mathsf{P}_3^{-1}\mathsf{P}_3\mathsf{P}_2}_{=\mathsf{I}}\mathsf{P}_1 = \mathsf{L}_3\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1$$

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}'_k = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}'_k = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$\mathsf{P}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{L}_2} \mathsf{P}_3^{-1}$$

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}'_k = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$\mathsf{P}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{L}_2} \mathsf{P}_3^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3 \mathsf{L}_2} \underbrace{\mathsf{P}_3^{-1}}_{\mathsf{P}_3}$$

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}'_k = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$\mathsf{P}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{L}_2} \mathsf{P}_3^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2} \underbrace{\mathsf{P}_3^{-1}}_{\mathsf{P}_3} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3^{-1} = \mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3}$$

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}'_k = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$\mathsf{P}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{L}_2} \mathsf{P}_3^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2} \underbrace{\mathsf{P}_3^{-1}}_{\mathsf{P}_3} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3^{-1} = \mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3}$$

- L'_k tedy vznikne přepermutováním prvků v k. sloupci matice L_k.

- Pro permutační matici P_k platí $P_k^{-1} = P_k$
- Obecně označme $L'_k = P_{n-1} \cdots P_{k+1} L_k P_{k+1}^{-1} \cdots P_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $P_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$P_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} P_3^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_3 L_2} \underbrace{P_3^{-1}}_{P_3} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_3 L_2 P_3^{-1} = P_3 L_2 P_3}$$

- L'_k tedy vznikne přepermutováním prvků v k. sloupci matice L_k.
- Takže

$$L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_2 P_2 L_1 P_1 A = (L'_{n-1} \cdots L'_2 L'_1)(P_{n-1} \cdots P_2 P_1) A = U$$

- Součin $(L'_{n-1} \cdots L'_2 L'_1)$ je dolní trojúhelníková matice, inverze negováním subdiagonálních prvků.

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}'_k = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$\mathsf{P}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{L}_2} \mathsf{P}_3^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2} \underbrace{\mathsf{P}_3^{-1}}_{\mathsf{P}_3} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3^{-1} = \mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3}$$

- L'_k tedy vznikne přepermutováním prvků v k. sloupci matice L_k.
- Takže

$$\mathsf{L}_{n-1}\mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} = (\mathsf{L}'_{n-1} \cdots \mathsf{L}'_2\mathsf{L}'_1)(\mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1)\mathsf{A} = \mathsf{U}$$

- Součin $(\mathsf{L}'_{n-1} \cdots \mathsf{L}'_2\mathsf{L}'_1)$ je dolní trojúhelníková matice, inverze negováním subdiagonálních prvků.

$$\underbrace{(\mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1)}_{=\mathsf{P}}\mathsf{A} = \underbrace{(\mathsf{L}'_{n-1} \cdots \mathsf{L}'_2\mathsf{L}'_1)^{-1}}_{\mathsf{L}}\mathsf{U}$$

- Pro permutační matici P_k platí $\mathsf{P}_k^{-1} = \mathsf{P}_k$
- Obecně označme $\mathsf{L}_k' = \mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_{k+1} \mathsf{L}_k \mathsf{P}_{k+1}^{-1} \cdots \mathsf{P}_{n-1}^{-1}$
- Dle této definice jsou na matici L_k aplikovány pouze permutace $\mathsf{P}_j, j > k \Rightarrow$ nenulová struktura matice se nemění.
- Př. (matice P_3 permutuje třetí a pátý řádek)

$$\mathsf{P}_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{L}_2} \mathsf{P}_3^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2} \underbrace{\mathsf{P}_3^{-1}}_{\mathsf{P}_3} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3^{-1} = \mathsf{P}_3\mathsf{L}_2\mathsf{P}_3}$$

- L_k' tedy vznikne přepermutováním prvků v k. sloupci matice L_k.
- Takže

$$\mathsf{L}_{n-1}\mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{L}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_1\mathsf{P}_1\mathsf{A} = (\mathsf{L}_{n-1}' \cdots \mathsf{L}_2'\mathsf{L}_1')(\mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1)\mathsf{A} = \mathsf{U}$$

- Součin $(\mathsf{L}_{n-1}' \cdots \mathsf{L}_2'\mathsf{L}_1')$ je dolní trojúhelníková matice, inverze negováním subdiagonálních prvků.

$$\underbrace{(\mathsf{P}_{n-1} \cdots \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1)}_{=\mathsf{P}} \mathsf{A} = \underbrace{(\mathsf{L}_{n-1}' \cdots \mathsf{L}_2'\mathsf{L}_1')^{-1}}_{\mathsf{L}} \mathsf{U}$$

$$\mathsf{PA} = \mathsf{LU}$$

- Z definice L'_k vyplývá, že vždy po nalezení pivota v k. sloupci je třeba přepermutovat všechny předchozí matice $\mathsf{L}_1, \ldots, \mathsf{L}_{k-1}$ a matici A.

- Z definice L'_k vyplývá, že vždy po nalezení pivota v k. sloupci je třeba přepermutovat všechny předchozí matice $\mathsf{L}_1, \ldots, \mathsf{L}_{k-1}$ a matici A.

$\mathsf{U} = \mathsf{A}, \mathsf{L} = \mathsf{I}, \mathsf{P} = \mathsf{I}$
for $k = 1$ **to** $m - 1$ **do**
  Select $i \geq k$ to maximize $|\mathsf{U}_{i,k}|$
  $\mathsf{U}_{k,k:m} \leftrightarrow \mathsf{U}_{i,k:m}$
  $\mathsf{L}_{k,1:k-1} \leftrightarrow \mathsf{L}_{i,1:k-1}$
  $\mathsf{P}_{k,:} \leftrightarrow \mathsf{P}_{i,:}$
  for $j = k + 1$ **to** m **do**
    $\mathsf{L}_{j,k} = \mathsf{U}_{j,k}/\mathsf{U}_{k,k}$
    $\mathsf{U}_{j,k:m} = \mathsf{U}_{j,k:m} - \mathsf{L}_{j,k}\mathsf{U}_{k,k:m}$
  end for
end for

- Řešení systému

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- Nalezli jsme rozklad $\mathsf{PA} = \mathsf{LU}$, musíme vhodně upravit řešenou soustavu.

$$\mathsf{PA}\boldsymbol{x} = \mathsf{P}\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{LU}\boldsymbol{x} = \mathsf{P}\boldsymbol{b}$$

LU rozklad v Pythonu

- Implementován v knihovně SciPy:
  - `scipy.linalg.lu(a, permute_l=False, overwrite_a=False, check_finite=True)`
  - použití: `p l u = lu(A)`, kde `A` je NumPy 2D pole (matice)

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

11. března 2021

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM