随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学　数学科学学院

武德安

附录预备知识

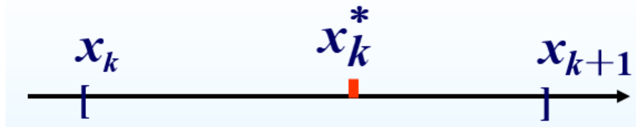
§1 Riemann-Stieltjes（R − S）积分简介

§2 随机变量的数字特征

§3 特征函数

§4 Riemann-Stieltjes (R − S)积分简介

一、R-S(黎曼-斯蒂阶)积分简介



定义1.1： 设$f(x),g(x)$为定义在$[a,b]$上的实值函数，做一剖分:

$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,并任取点 $x_k^*\in[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$.

做和式 $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x_k^*)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$

若存在实数I,使对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 只要

$$\lambda=\max_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)<\delta,$$

对任意分点及任意 x_k^* 的取法均有 $|\sigma-I|<\varepsilon$

$$\text{记为}\ (R)\int_a^b f(x)\,dg(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k^*)[g(x_{\mathrm{k}+1})-g(x_{\mathrm{k}})]=I$$

称I为$f(x)$关于$g(x)$在$[a,b]$上的$R-S$(Riemann $-$ Stieltjes)积分,

简记为$I=\int_a^b f(x)\,dg(x)$.

若$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x)=\lim\limits_{a\to-\infty,b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dg(x)$存在,称为**广义R $-$ S积分.**

注: 黎曼积分$\int_a^b f(x)\,dx$是R $-$ S积分的特例.

R积分物理意义: 功、能、物体的重心和转动惯量及更一般的矩。

R $-$ S积分物理意义: 连续分布的质量和集中分布的质量统一用一个积分公式进行计算。

R－S积分性质:

1) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm \int_a^b f_2(x) dg(x)$

2) $\int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x)$

3) 设α,β是任意常数，则$\int_a^b \alpha f(x) d[\beta g(x)] = \alpha\beta\int_a^b f(x) d[g(x)]$.

以上三个等式成立的意义是:当等号右边存在时,左边也存在并相等.

4) 若$a<c<b$，若$\int_a^b f(x)dg(x)$存在，则下式右端两个积分存在，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)$$

5) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$

注: 以上$1\sim5$条性质可全部推广到广义$\mathrm{R}-\mathrm{S}$积分.如

$$5')\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)=-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}f(x)+\lim_{a\to-\infty,\ b\to+\infty}[f(x)g(x)]_a^b$$

将有限区间上的一元$R-S$积分推广到无限区间.

定义1.2:设函数$f(x)$和$g(x)$均在任意闭区间$[a,b]$上有定义,且

$\int_a^b f(x)dg(x)$存在.若极限$\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dg(x)$存在,称

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dg(x)$为$f(x)$关于$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的**广义R－S积分**.

除有类似于上述1)～5)的性质之外,还有类似于广义黎曼积分的性质,参见讲义P228.

施瓦茨不等式: 设$g(x)$为单增函数,$f_1(x),f_2(x)$均为平方可积函数, 即有$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i^2(x)dg(x)<\infty,\quad (i=1,2)$.

则$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dg(x)$存在, 且$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dg(x)\right)^2\le\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(x)dg(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f_2^2(x)dg(x)$

广义R－S积分的重要定理:

定理1.1(广义R－S积分存在定理):若$f(x)$在R上连续且有界,$g(x)$在R上单调有界,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x)$$

存在,并且

1) 若$g'(x)$在R上存在,在任意有限区间$[a,b]$上黎曼可积,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$$

2) 若存在实数列$C_k,k=0,\pm 1,\cdots$,使$\ldots<C_{-1}<C_0<C_1<\ldots$且$g(x)$在$[C_k,C_{k+1})$上取常数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(C_k)\,[g(C_k+0)-g(C_k-0)].$$

问题1：若$F(x)$是离散型随机变量的分布函数,$f(x)$关于$F(x)$的广义$\mathrm{R}-\mathrm{S}$积分形式?

设X是离散型随机变量,其分布律为$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,3\ldots$.其分布函数是有界、单调不降的阶梯函数，有$\cdots<x_{k-1}<x_k<x_{k+1}<\cdots$

$$F(x+0)-F(x-0)=\begin{cases}0, & x\neq x_k\\ p_k, & x=x_k\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)[F(x_k+0)-F(x_k-0)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)p_k$$

特别当$f(x)=x$时,有$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k p_k$为离散型随机变量$X$的数学期望.

问题2：若$F(x)$是连续型随机变量的分布函数，函数$f(x)$关于$F(x)$的广义$R-S$积分形式?

因连续型随机变量的分布函数绝对连续,有

$$\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)\geq 0,$$

若$\mathrm{R}-\mathrm{S}$积分存在则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,F'(x)\,dx$$

二、二元R－S积分简介

假定二元函数$F(x,y)$满足下述条件:

1）对于平面上任意矩形$a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2$，有

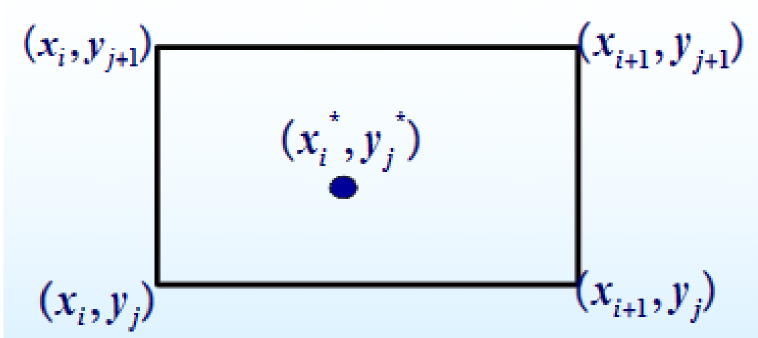
$$\Delta F(a_1,b_1;a_2,b_2)=F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)+F(a_1,b_1) \ \ge\ 0$$

2）$\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty} F(x,y)=1$,且对任意$x$与$y$,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=0.$$

定义1.4.2：设$f(x,y)$为定义在整个平面上的实值函数，在矩形$a\le x\le b, c\le y\le d$ 上任意做剖分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$; $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$. 并任取点$x_i^*\in[x_i,x_{i+1}]$,

$i=0,1,2,\cdots,n-1$, $y_j^*\in[y_j,y_{j+1}]$, $j=0,1,2,m-1$



做和式$\sigma=\sum\limits_{j=0}^{m-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(x_i^*,y_j^*)\cdot\Delta F(x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1})$，若存在实数$I$，使对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要

$$\lambda=\max_{0\le i\le n-1,0\le j\le m-1}\{(x_{i+1}-x_i),(y_{j+1}-y_j)\}<\delta$$

时，对任意分点及(x_i^*,y_j^*)的任意取法，不等式$|\sigma-I|<\varepsilon$均成立.

$$\text{则记}\iint_{a\le x\le b,c\le y\le d}f(x,y)\,dF(x,y)=\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i^*,y_j^*)\cdot\Delta F(x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1})=I$$

称积分为$f(x,y)$关于$F(x,y)$在矩形$\{(x,y):a\le x\le b,c\le y\le d\}$上的**R－S积分.**

若$\lim_{a,c\to -\infty, b.d\to +\infty}\iint_{a\le x\le b,\ c\le y\le d} f(x,y)\,dF(x,y)$存在,称$f(x,y)$关于$F(x,y)$在整个**平面上的R－S积分**存在。记为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dF(x,y)$$