随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 — 数学科学学院

武德安

第二章几种重要随机过程

§2.1 正态过程(高斯过程)

§2.2 维纳过程

§2.3 泊松过程

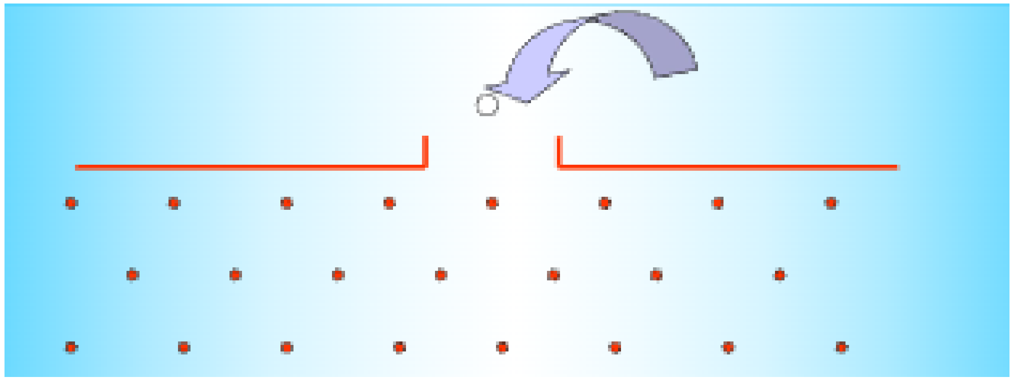
§2.4 泊松过程的推广

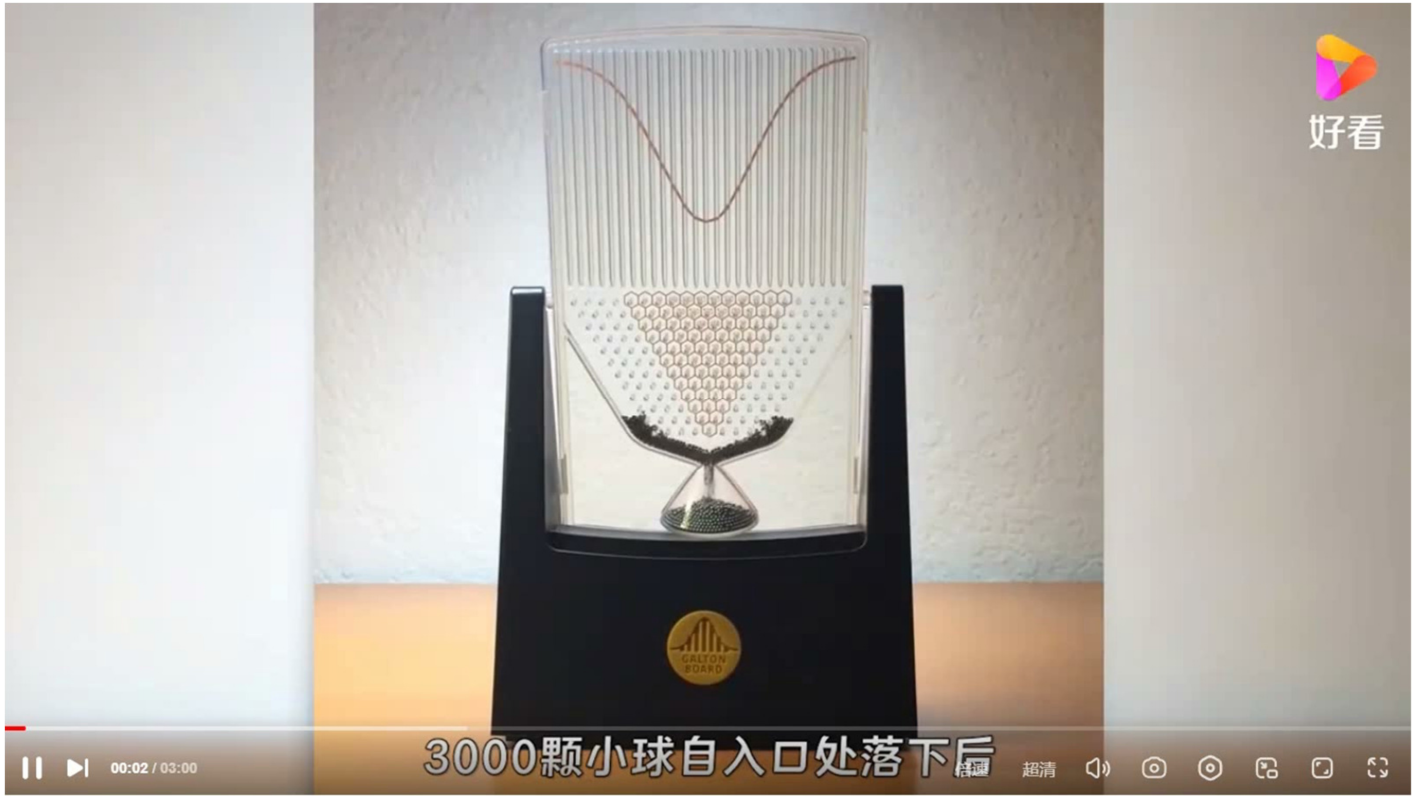
§2.2维纳过程

一、维纳过程的数学模型

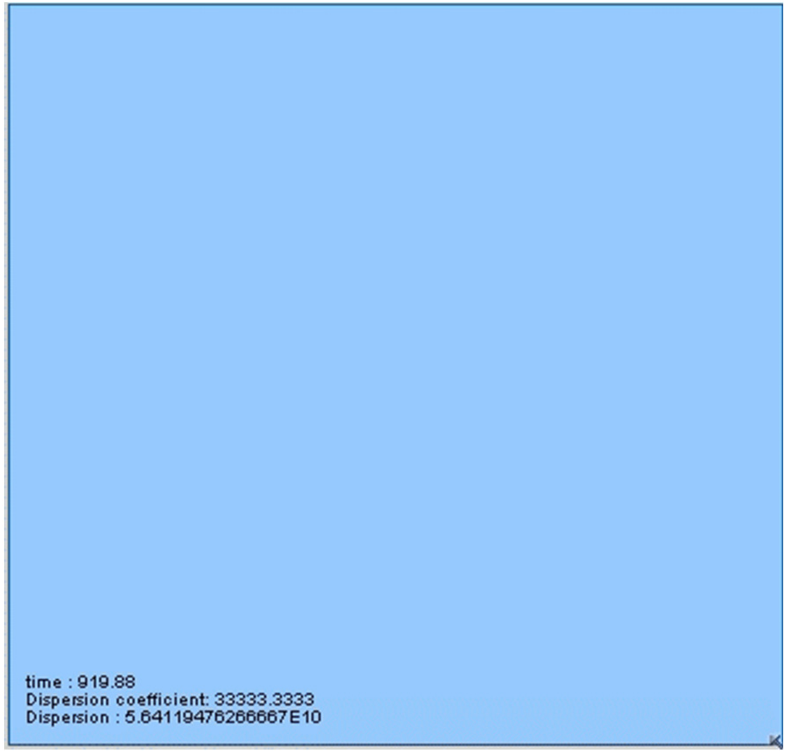
维纳过程是英国植物学家罗伯特·布朗在观察漂浮在液面的花粉运动—布朗运动规律时建立的随机游动数学模型.

Eg.1(高尔顿钉板模拟试验)将一个小球投入无限大高尔顿钉板内,小球各以$\frac{1}{2}$的概率向左或向右移动一格.



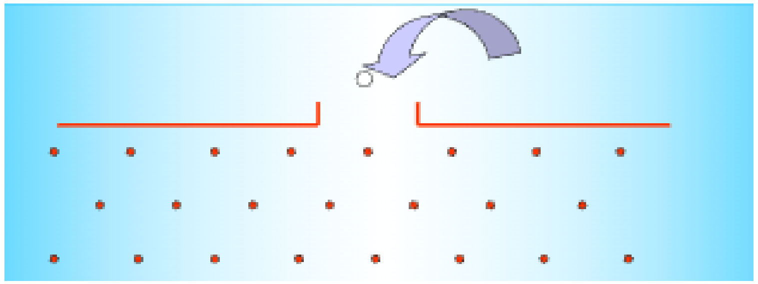

好看
GALTON BOARD
3000颗小球自入口处落下后
00:02 / 03:00
超清


Brownian motion
Number of collisions:
Elapsed time:


time : 919.88
Dispersion coefficient: 33333.3333
Dispersion : 5.64119476266667E10

Eg.1(高尔顿钉板模拟试验)将一个小球投入无限大高尔顿钉板内,小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.

$$X(k)=\begin{cases} 1, & \text{在第 } k \text{ 层向右位移一格;} \\ -1, & \text{在第 } k \text{ 层向左位移一格.} \end{cases}$$



$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

$\{X(k), k\in N^+\}$是一个独立随机过程，令

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n} X(k)$$

小球在第 n 次碰撞后所处位置

$\{Y(n), n\in N^+\}$是一个平稳独立增量过程.

均值函数为$E[Y(n)]=E\left(\sum_{k=1}^{n} X(k)\right)=0$，**方差函数**为$D[Y(n)]=\sum_{k=1}^{n} D(X(k))=n$,

由**独立同分布中心极限定理**知

$$\text{as}\, n \to \infty\, P\left\{\frac{Y(n)}{\sqrt{n}} \le y\right\} = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X(k)}{\sqrt{n}} \le y\right\} \to \Phi(y)$$

即$Y^*(n) = \dfrac{Y(n)}{\sqrt{n}}, n = 1, 2, \cdots$依分布收敛于标准正态分布随机变量.

参见教材P41花粉微粒的一维运动

泛函中心极限定理(functional central limit Theorem)

设随机变量序列$\{X_t, t = 1, 2, \ldots\}$是相互独立同分布的，且满足:

$1) E(X_t) = 0; \quad 2) D(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2 < \infty;$

设r为闭区间$[0,1]$上的任一正实数，则统计量$R_T(r) = \sum_{t=0}^{[Tr]} X_t \;\; as\ T \to \infty, R_T(r)$弱收敛于$W(r)$.

其中$W(r), r \in [0,1]$满足:

$$\begin{cases} (1) W(0)=0; \\ (2) E\{W(r)\}=0; \\ (3) W(r) \sim N(0, \sigma^2 r), (\sigma>0). \\ (4) \text{具有平稳独立增量}; \end{cases}$$

$\boxed{D[W(r)]\text{随时间的推移而增大}}$

二、维纳过程的定义

定义3.2.1:若随机过程$\{W(t), t \geq 0\}$满足上条件(1)(4)称$\{W(t), t \geq 0\}$是参数为σ^2的**维纳过程**（或**布朗运动**）。

维纳过程应用广泛: 电路理论、通信和控制、生物、经济管理等.

维纳过程的研究成果应用于计量经济学,使其方法论产生了一次飞跃,成功地应用于非平稳的经济过程,如激烈变化的金融商品价格的研究。

三、维纳过程的分布

1. 一维分布: $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$;

2. 增量分布: $W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 |t-s|)$;

设$t > s$,因$W(0)=0$,且$W(t)$是平稳独立增量过程,故

$W(t)-W(s)=W(t-s+s)-W(s)$与$W(t-s)-W(0)=W(t-s)$

有相同分布$N(0,\sigma^2(t-s))$.

3. 维纳过程是正态过程.证设维纳过程

$\{W(t), t \geq 0\}$的参数是σ^2,任取n及$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,$X_k \triangleq W(t_k) - W(t_{k-1})$,

则$X_k \sim N(0, \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$,$t_0 = 0, k = 1, 2, \cdots, n$相互独立,且有

$$W(t_k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \Longrightarrow \begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

正态随机向量的线性变换服从正态分布

四、维纳过程的数字特征

1. $E[W(t)]=0; D[W(t)]=\sigma^2 t$ 　维纳过程是平稳独立增量过程

2. $C(s,t)=R(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

Eg.2 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程,求下列过程的均值函数和相关函数.

1) $X(t)=W^2(t), t\geq 0;$

2) $X(t)=tW\left(\frac{1}{t}\right), \quad t>0.$

解1) $m_X(t)=E[X(t)]=E[W^2(t)]=D[W(t)]+\{E[W(t)]\}^2=\sigma^2 t$

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E[X(s)X(t)]=E[W^2(s)W^2(t)]\\&=E\{W^2(s)[W(t)-W(s)+W(s)]^2\}\quad (s<t)\\&=E\{W^2(s)[W(t)-W(s)]^2\}+E[W^4(s)]+2E\{W^3(s)[W(t)-W(s)]\}\\&=E[W^2(s)]E\{[W(t)-W(s)]^2\}+E[W^4(s)]\\&=\sigma^2 s\sigma^2(t-s)+3\sigma^4 s^2=\sigma^4(st+2s^2)\end{aligned}$$

$R_X(s,t)=\sigma^4(st+2s^2)$,故$R_X(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$,其中因

$W(t)\sim N(0,\sigma^2 t), W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$

另因若$X\sim N(0,\sigma^2)$,有$E(X^n)=\begin{cases}0, & n=1,3,5,\cdots \\ \sigma^n(n-1)(n-3)\cdots 1, & n=2,4,6\cdots\end{cases}$

2) $m_X(t)=E[X(t)]=tE\left[W\left(\frac{1}{t}\right)\right]=0,\quad t>0.$

$$R_X(s,t)=E\left[sW\left(\frac{1}{s}\right)tW\left(\frac{1}{t}\right)\right]=stE\left[W\left(\frac{1}{s}\right)W\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

$$=st\sigma^2\min\left(\frac{1}{s},\frac{1}{t}\right)=\sigma^2\min(s,t).$$