随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学　数学科学学院

武德安

第二章几种重要随机过程

§3.3泊松过程(一)

一、计数过程与泊松过程

在天文,地理,物理,生物,通信,医学,计算机网络,密码学等许多领域,都有关于随机事件流的计数问题,

如:盖格记数器上的粒子流;

电话交换机上的呼唤流;

计算机网络上的（图象，声音）流;

编码（密码）中的误码流;

交通中事故流;

细胞中染色体的交换次数,

..均构成以时间顺序出现的事件流$A_1, A_2, \cdots$

Expected rate: 1.0 per second

Last wait: 1.421797 seconds

Actual rate per second: 0.95

Total arrived: 5

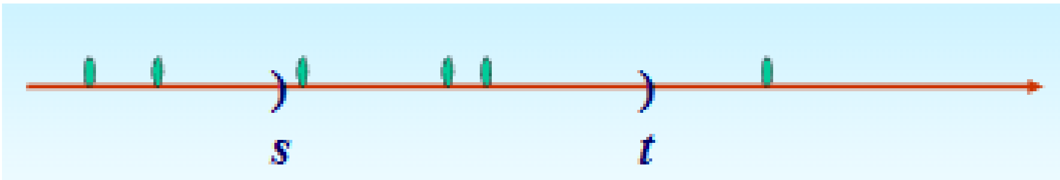
定义3.3.1 随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$称为**计数过程(Counting Process)**,如果$N(t)$表示在$(0,t)$内事件A出现的总次数.计数过程应满足:

(1) $N(t)\geq 0$;

(2) $N(t)$取非负整数值;

(3) 如果$s<t$,则$N(s)\leq N(t)$;

(4) 对于$s<t$,$N(t)-N(s)$表示时间间隔(s,t)内事件出现的次数.



Poisson过程是一类很重要的计数过程.

Poisson过程数学模型:

电话呼叫过程设$N(t)$为$[0,t)$时间内到达的呼叫次数,其状态空间为$E=\{0,1,2,\ldots\}$

此过程有如下特点:

1）零初值性: $N(0)=0$;

2）独立增量性: 任意两个不相重叠的时间间隔内到达的呼叫次数相互独立;

3）齐次性: 在(s,t)时间内到达的呼叫次数仅与时间间隔长度$t-s$有关，而与起始时间s无关;

4)普通性: 在充分小的时间间隔内到达的呼叫次数最多仅有一次,即对充分小的Δt,有

$$\begin{cases} P\{N(\Delta t)=0\}=p_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t), \\ P\{N(\Delta t)=1\}=p_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\text{其中}\lambda>0. \\ P\{N(\Delta t)\geq 2\}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}p_k(\Delta t)=o(\Delta t), \end{cases}$$

定义3.3.2: 设计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足:

$$\begin{cases} (1)\ N(0)=0; \\ (2)\ \text{是平稳独立增量过程}; \\ (3)\ P\{N(h)=1\}=\lambda h+0(h),\lambda>0; \\ (4)\ P\{N(h)\geq 2\}=0(h). \end{cases}$$

称$\{N(t),t\geq 0)$是参数(或速率,强度)为λ的**齐次泊松过程**.

Eg.1： 在数字通信中误码率λ是重要指标，设$\{N(t),\geq 0\}$为时间段$[0,t)$内发生的误码次数,$\{N(t),t\geq 0\}$是计数过程,而且满足

(1) 初始时刻不出现误码是必然的,故$N(0)=0$;

(2) 在互不相交的区间$[0,t_1),[t_1,t_2),\cdots,[t_{n-1},t_n)$, $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$出现的误码数互不影响,故$N(t)$独立增量过程.

在系统稳定运行的条件下,在相同长度区间内出现k个误码概率应相同,故可认为$N(t)$是增量平稳过程. $\{N(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程;

(3) 认为Δt时间内出现一个误码的可能性与区间长度成正比是合理的,即有

$P\{N(\Delta t)=1\}=\lambda\Delta t+0(\Delta t),\lambda>0$;

(4) 假定对足够小的Δt时间内,出现两个以上误码的概率是关于Δt的高阶无穷小也是合理的,

有$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=0(\Delta t)$.

综上所述,可用Poisson过程数学模型描述通信系统中误码计数问题.

可认为$\{N(t),\geq 0\}$λ是强度为 λ 的泊松计数过程.

定理3.3.1:齐次泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$在时间间隔(t_0,t_0+t)内事件出现n次的概率为$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},(n=0,1,2,\cdots)$

证: 记$P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{[N(t)-N(0)]=n\}=P\{N(t_0+t)-N(t_0)=n\}$

$1°$ 由条件$(2)\sim(4)$,得: 平稳增量

$$P_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}=P\{N(t)=0,N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$=P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$$ 独立增量

$$=P_0(t)[1-\lambda h+0(h)]$$

$$\Longrightarrow \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}$$

令$h\to 0$,得$\begin{cases}\dfrac{dP_0(t)}{dt}=-P_0(t)\lambda \\ P_0(0)=1, \quad (\text{条件}(1)N(0)=0)\end{cases}$ 解得$p_0(t)=e^{-\lambda t}, \quad t\geq 0.$

2° 当$n\geq 1$,根据全概率公式有$p_n(t+h)=p_n(t)p_0(h)+p_{n-1}(t)p_1(h)$

$$P_n(t+h)=(1-\lambda h)p_n(t)+\lambda h p_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}$$

令$h\to 0$,得 $$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以$e^{\lambda t}$后移项整理得$\dfrac{d[e^{\lambda t}P_n(t)]}{dt}=\lambda e^{\lambda t}p_{n-1}(t)$

定理证明反之亦然,

得泊松过程的等价定义:

当$n=1$,则$\begin{cases}\dfrac{d[e^{\lambda t}P_1(t)]}{dt}=\lambda e^{\lambda t}P_0(t)=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda \\ P_1(0)=0\end{cases}$ 解得$p_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$

假设$P_{n-1}(t)=\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$ 成立代入(2)式有$\dfrac{d[e^{\lambda t}P_n(t)]}{dt}=\lambda e^{\lambda t}p_{n-1}(t)=\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

$e^{\lambda t}P_n(t)=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}+C$ 利用初始条件$P_n(0)=0$,可证得$P_n(t)=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$对一切$n\geq 0$均成立.

定义3.3.2′ 设计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足下述条件:

(1)$N(0)=0$;

(2)$N(t)$是独立增量过程

(3)对一切$0\leq s<t$,$N(t)-N(s)\sim P(\lambda(t-s))$,即

$$P\{[N(t)-N(s)]=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},(k=0,1,2,\cdots$$

注: 有$P\{N(t)=k\}=P\{[N(t)-N(0)]=k\}=\dfrac{[\lambda t]^k}{k!}e^{-\lambda t}$

问题: 若$N(t)$的一维分布是泊松$(k=0,1,2,\cdots)$分布,能否推出第(3)条成立?

Eg.2：设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程,事件A在$(0,\tau)$时间区间内出现n次,

试求:$P\{N(s)=k\,|\,N(\tau)=n\},0<k<n,0<s<\tau$

解:

$$\text{原式}=\frac{P\{N(s)=k,N(\tau)=n\}}{P\{N(\tau)=n\}}=P\{N(s)=k,N(\tau)-N(s)=n-k\}\cdot\frac{n!\,e^{\lambda\tau}}{(\lambda\tau)^n}$$

$$=e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda(\tau-s)}\frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!}n!\,e^{\lambda\tau}(\lambda\tau)^{-n}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}$$

$$=C_n^k\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

二、齐次泊松过程的有关结论

1. 数字特征

因对$\forall t>0, N(t)\sim P(\lambda t)$.

均值函数 $m(t)=E\{N(t)\}=\lambda t$

方差函数 $D(t)=\lambda t$

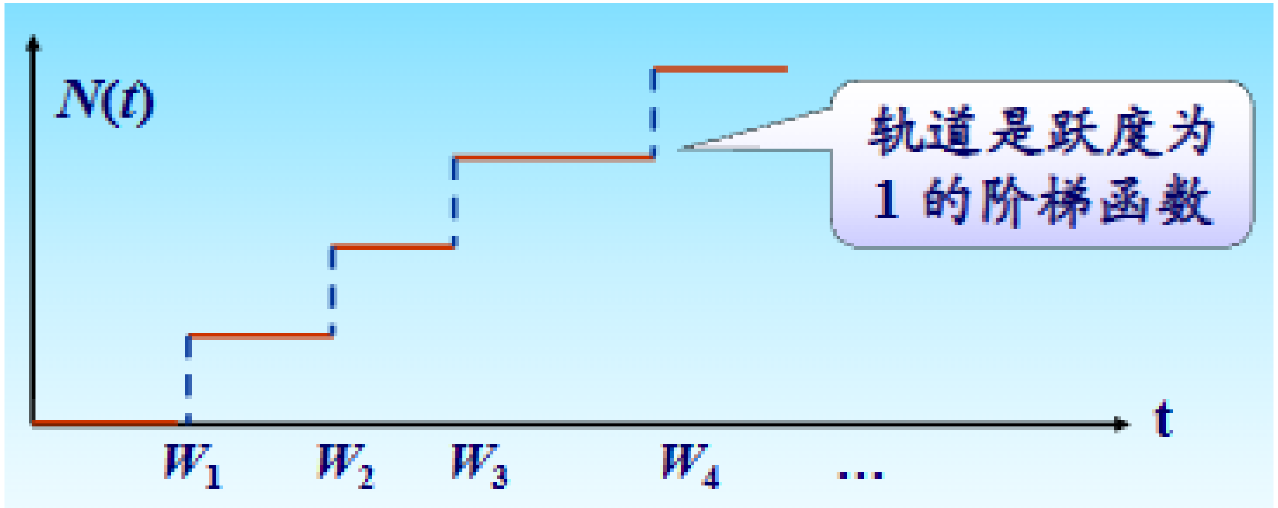
有 $\lambda=E\{N(t)\}/t \Longrightarrow$ λ是单位时间内事件出现的平均次数.

称λ为事件的到达率

协方差函数 $\mathrm{C}(s,t)=\lambda\min(s,t)$

相关函数 $R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$

2. 时间间隔与等待时间的分布



用T_n表示事件A第$n-1$次出现与第n次出现的时间间隔。

W_n为事件A第n次出现的等待时间(到达时间).有$W_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$和$T_n=W_n-W_{n-1}$

定理2.3.2 设$\{T_n, n \geq 1\}$是参数为λ的泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$的时间间隔序列，

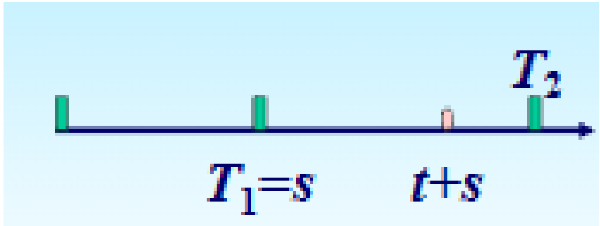
则$\{T_w, n \geq 1\}$相互独立同服从指数分布，且$E\{T\} = 1/\lambda$.

证： (1) 因$\{T_1 > t\} = \{(0,t)$内事件A不出现$\}$

$$\Longrightarrow P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

$$F_{T_1}(t) = 1 - P\{T > t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

即T_1服从均值为$1/\lambda$的指数分布.



(2) 由泊松过程的平稳独立增量性，有

$$P\{T_2 > t \mid T_1 = s\} = P\{\text{在}(s, t+s)\text{内事件}A\text{不出现} \mid T_1 = s\}$$

$$= P\{N(t+s) - N(s) = 0\} = P\{N(t) - N(0) = 0\}$$

$$= P\{N(t) = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

与s无关

故T_2与T_1相互独立，且T_2也服从均值为$1/\lambda$的指数分布.

（3）对于一般$n>1$和$t>0$以及$r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}>0$,有

$$F_n(t)=P\{T_n\le t\}=P\{N(t+r_1+\ldots+r_{n-1})-N(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})=0\}$$
$$=P\{N(t)-N(0)=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

即 $F_n(t)=P\{T_n\le t\}=1-e^{-\lambda t},\quad t\ge 0$

定理3.3.3 参数为λ的泊松过程$\{N(t),R\geq 0\}$，事件A第n次出现的等待时间服从Γ分布，其概率密度为:

$$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0\end{cases}$$

注: 在排队论中称W_n服从n阶爱尔朗分布.

证: 因W_n是事件A第n次出现的等待时间,故$\{W_n\leq t\}=\{N(t)\geq n\}=\{(0,t)$内$A$至少出现$n$次$\}$

$$F_{w_n}(t)=P\{W_n\leq t\}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},t\geq 0$$

$$f_{w_n}(t)=F'_{W_n}(t)=\left[\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=n}^{\infty}\lambda\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right]e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\quad t\geq 0.$$

3. 到达时间的条件分布

引理3.3.1： 设总体X有概率密度$f(x)$，$X_{(1)},X_{(2)},\ldots X_{(n)}$是$X$的简单随机样本生成的**顺序统计量(order statistics)**，其概率密度为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n!f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n);\text{当} x_1<x_2<\cdots<x_n.$$

定理3.3.4： 设$\{N(t),t\geq 0\}$是Poisson过程，已知在$(0,t]$时间内A出现n次，这n次到达时间$W_1,W_2,\ldots,W_n$的联合条件分布密度为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n\,|\,N(t)=n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<\cdots<t_n<t;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

注1： $W_1,W_2,\ldots,W_n$与n个相互独立同服从$[0,t]$上均匀分布随机变量$U_1,U_2,\ldots,U_n$ 的顺序统计量$U_{(1)},U_{(2)},\ldots,U_{(n)}$有相同分布，而且$W_1<W_2<\cdots<W_n$

$W_1,W_2,\ldots,W_n$可视为由相互独立在$(0,t)$上均匀分布随机变量$U_1,U_2,\ldots,U_n$所得的顺序统计量.

注2： $\sum_{k=1}^{n}U_{(k)}=\sum_{k=1}^{n}U_k$

Eg. 4：设到达电影院的观众组成强度为λ的Possion流，如果电影从t时刻开演，计算$(0,t]$内到达电影院的观众等待时间总和的数学期望.

解： 设W_k是第k名观众到达时刻，在$(0,t)$内到达的观众数为$N(t)$，则总等待时间为$\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)$

根据全数学期望公式$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\right]=E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\mid N(t)\right]\right\}$

对$\forall n\geq 1$，$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\mid N(t)=n\right]=nt-E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}W_k\mid N(t)=n\right]\}$

由定理3.4.3知$W_1,W_2,\ldots,W_n$与$[0,t]$上均匀分布相互独立随机变量的顺序统计量$U_{(1)},U_{(2)},\ldots,U_{(n)}$有相同的分布函数.

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k \mid N(t)=n\right]=\iint_{-\infty<t_1<t_1<\cdots<t_n<+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right) f(t_1,t_2,\cdots t_n \mid N(t)-n)\,dt_1 dt_2\cdots dt_n$$

$\boxed{\text{随机变量函数的条件期望公式}}$

$$=E\left(\sum_{k=1}^{n} U_{(k)}\right)=E\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E\left(U_k\right)=\frac{nt}{2}$$

$$\Longrightarrow E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k) \mid N(t)=n\right]=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

$$\Longrightarrow E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k) \mid N(t)\right]=\frac{t}{2} N(t)$$

$$\Longrightarrow E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\right]=E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k) \mid N(t)\right]\right\}$$

$$=E\left[\frac{t}{2} N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$