组合优化理论

第3章 整数规划

主讲人：陈安龙

第3章 整数规划

§1 整数规划问题及其数学模型

§2 整数规划的**割平面法**

§3 整数规划的**分支定界法**

一、问题的提出

在 *LP* 问题的讨论中，有些最优解是小数．但对于某些具体问题常有要求**最优解是整数（ 即整数解）**．如决策变量为机器的台数、人数、车辆数 *etc.*

如果在问题中所有**决策变量有整数限制**，称为 纯整数规划 (*Pure IP*) 或 **全整数规划 (*All IP*)**；

如果在问题中仅**部分决策变量**有整数限制，称为**混合整数规划**(*Mixed IP*) ;

如果在问题中决策变量仅取 0 、1，称为 **0-1 (整数) 规划**．

§1 整数规划问题及其数学模型

Example 1（装载问题） 某厂拟用集装箱托运甲、乙两种货物，每箱的体积、重量、可获利润及托运限制如表，问两种货物各托运几箱，可获利润最大？

货物	每箱体积（m^3）	每箱重量（kg）	每箱利润（百元）
甲	5	2	20
乙	4	5	10
托运限制	24	13	

Solution: 设 x_1、x_2 分别为甲、乙两种货物托运箱数.

则：
$$\begin{aligned} \max\quad & Z = 20x_1 + 10x_2 \\ s.t.\quad & 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ & 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ & x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in I \end{aligned}$$

这是一个 *Pure* IP 问题.

Example 2 **（工厂选址问题）** 现准备从 A_1、A_2、A_3 三个地点中选择**两个开设工厂**，工厂建成后它每月的产量 $a_i\ (i=1,2,3)$、三个客户 B_1、B_2、B_3 每月的需求量 $b_j\ (j=1,2,3)$ 及 A_i 至客户 B_j 的单位运价 c_{ij} 见表.

已知三工厂每月的经营费用 d_i(与产量无关)分别为 100、90、120 .问如何选址使每月经营和运输费用最低.

B_j \ A_i	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	5	3	70
A_2	2	3	4	80
A_3	6	4	5	90
b_j	40	60	45	

Solution: 设 $y_i=\begin{cases}1 & \text{选地点 } A_i \text{ 开设工厂}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\quad i=1,2,3$；

显然 $y_1+y_2+y_3=2$

x_{ij} 为 A_i 开设工厂时，从 A_i 至 B_j 的运量

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}\le a_i \quad i=1\sim3 \qquad x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}=b_j \quad j=1\sim3$$

$$\min \quad Z = 4x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + \underline{100y_1 + 90y_2 + 120y_3}$$

三个工厂经营费用

$$s.t. \quad \left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\le 70y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\le 80y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\le 90y_3 \end{aligned}\right\}$$

每个工厂供给三个客户的总量

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 45 \end{aligned}\right\}$$

每个客户对三个工厂需求的总和

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 0 \;\; or \;\; 1 \quad i, j = 1, 2, 3$$

Example 3 （背包问题）

假设有人要出发旅行，考虑带七种物品，每件物品的重量与价值如表。现在假设他最多带 35*kg* 物品，问该带哪几件物品使总价值最大？

物品	重量 a_j	价值 c_j
1	3	12
2	4	12
3	3	9
4	3	15
5	15	90
6	13	26
7	16	112

Solution:

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{如果带第 } j \text{ 件物品}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\qquad j=1\sim7$$

$$\max\ Z=\sum_{j=1}^{7}c_jx_j$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{7}a_jx_j\le 35$$

$$x_j=0\ \ or\ \ 1,\ \ j=1\sim7$$

这是一个 0-1 规划问题.

一般整数规划中的变量 x，也可用 0-1 变量替代，如 $0\le x\le15$， $x=x_0 2^0+x_1 2^1+x_2 2^2+x_3 2^3$ 其中 x_0,x_1,x_2,x_3 为0-1 变量 .

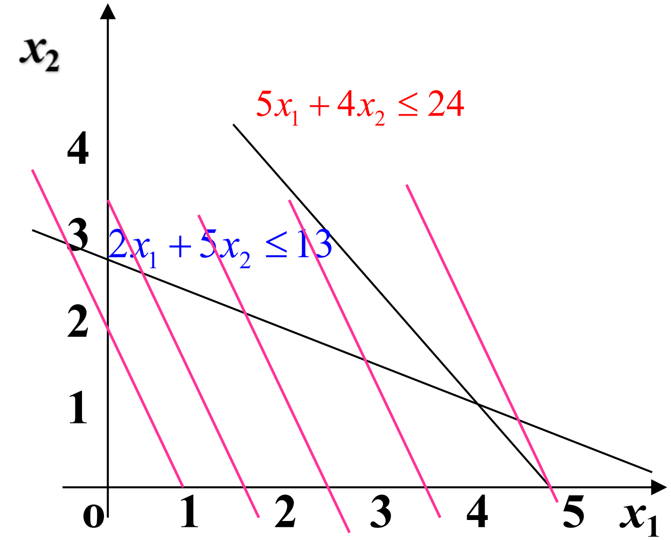
§1 整数规划问题及其数学模型

如 ***Example* 3**，去掉整数约束，得

$$\max \quad Z = 20x_1 + 10x_2$$
$$s.t. \quad 5x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 13$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

由图解法得最优解为：$x_1 = 4.8$，$x_2 = 0$

$$Z_{max} = 96$$



显然，x_1 不是整数．是否可以根据化整的原问题的解？

$x_1=5$、$x_2=0$ 不是可行解，

$x_1=4$、$x_2=0$ $Z=80$．但是 $x_1=4$、$x_2=1$ 也可行 且 $Z=90$．

所以，"**舍入化整**"的结果： 1、化整后未必可行；

2、即使是可行解，也未必是最优解；

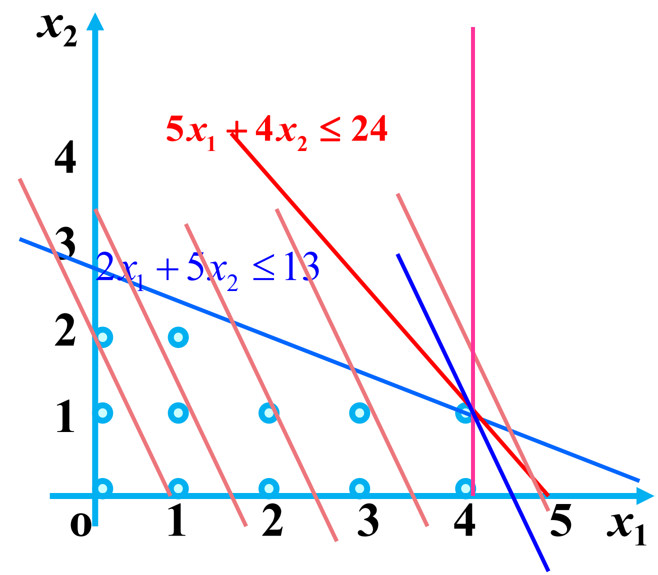
3、用这个方法即使能得到最优解，但如果有 n 个变量，则取舍方案有 2^n 种，计算量也是很大的.

§2 整数规划的解法

有人在研究在建立模型中，什么条件下 *LP* 问题的解一定是整数解？**如：运输问题**

从 例1 的讨论，可得到一些启迪

1、是否能在 *LP* 的约束区域中，**切去 n 块不含整数解的可行域使整数解作为顶点**，则 *LP* 的最优解即为整数解；如增加约束 $x_1 \le 4$，则 *LP* 问题的解即为整数解；



2、在 *LP* 的可行域中，整数点不多，（12个）

是否可以用穷举法.

§2 整数规划的解法

设 $\max\limits_{x\in A} f(x)$ (1) $\max\limits_{x\in B} f(x)$ (2)

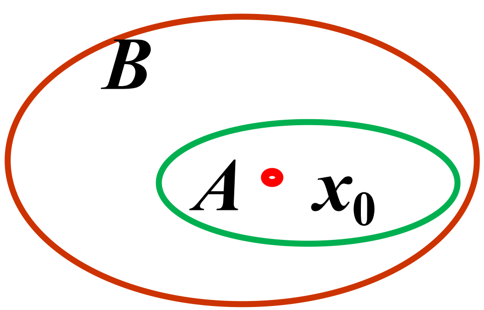
如果 $A \subseteq B$ 则称问题（2）是问题（1）的松弛问题.

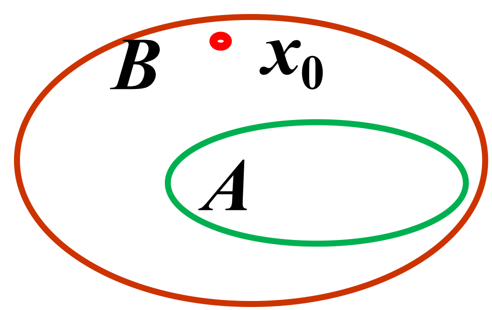
Note： 1、松弛问题未必比原问题难解；

2、如果松弛问题易解，则先解松弛问题是有益的．

1）设 x_0 是松弛问题的最优解，且 $x_0 \in A$ 则原问题已解

2）即使 $x_0 \notin A$ 给出了原问题最优值的界 $f(x_0)$．





一、割平面法

1959年由 *R.E.Gomory* 首先提出，从此使 *IP* 逐渐形成为一个独立的运筹学分支.

割平面法的实质是用解 *LP* 问题的方法求解 *IP* 问题；

割平面法的基本思想是通过对 *LP* 问题的求解，如果最优解是整数解，则就是 *IP* 的解；否则设法对 *LP* 问题增加约束(割平面)，把 *LP* 问题的可行域中去掉一部分不含整数解的，再求 *LP* 问题，反复进行 .

割平面法的关键在于如何寻找适当的切割约束条件.

用割平面法求解 *IP* 问题常常会计算量大、收敛速度慢的情况，但在理论上是重要的，被认为是 *IP* 的核心.

（一）、割平面法的计算步骤

1、用单纯形法求解(*IP*)对应的松弛问题(*LP*):

(1).若(*LP*)没有可行解，则(*IP*)也没有可行解，停止计算。

(2).若(*LP*)有最优解，并符合(*IP*)的整数条件，则(*LP*)的最优解即为(*IP*)的最优解，停止计算。

(3).若(*LP*)有最优解，但不符合(*IP*)的整数条件，转入下一步。

2、从(LP)的最优解中，任选一个不为整数的分量x_i,将最优单纯形表中该行的系数$\bar{a}_{ik}$和$\bar{b}_i$分解为整数部分和小数部分之和，并以该行为源行，按下式作割平面方程：

$$\sum_{k=m+1}^{n}\left(-f_{ik}\right)x_k \le -f_k$$

f_{ik}：$\bar{a}_{ik}$的小数部分

f_k：$\bar{b}_i$的小数部分

求切割方程的步骤归纳为:

(1) 令x_i是相应的松驰问题最优解中为分数值的一个基变量，由单纯形表的最终表得到

$$x_i + \sum_k \bar{a}_{ik} x_k = \bar{b}_i$$

其中，$i \in Q$(Q为构成基变量的号码的集合)

$k \in K$(K为构成非基变量的号码的集合)

(2) 将 $\bar{b}_i$ 与 $\bar{a}_{ik}$都分解成整数部分N(不超过 $\bar{b}_i$的最大整数)与非负真分数f之和，即

$$\bar{b}_i = N_i + f_i，\text{其中 } 0 < f_i < 1$$

$$\bar{a}_{ik} = N_{ik} + f_{ik}，\text{其中 } 0 < f_{ik} < 1$$

从而得到

$$x_i + \sum_k N_{ik} x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik} x_k$$

(3) 由变量(包括松驰变量)的非负整数条件, 从而可得

$$f_i - \sum_k f_{ik} x_k < 1 \quad \longrightarrow \quad f_i - \sum_k f_{ik} x_k \leq 0$$

上式即为所要求的切割方程

3、将所得的割平面方程作为一个新的约束条件置于最优单纯形表中（同时增加一个单位列向量），用对偶单纯形法求出新的最优解，返回1。

例：求解

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 \le 1$$
$$3x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{整数}$$

解 (一)、求解松驰问题

相应的松驰问题为:

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 \le 1$$
$$3x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

松驰问题标准化, 得:

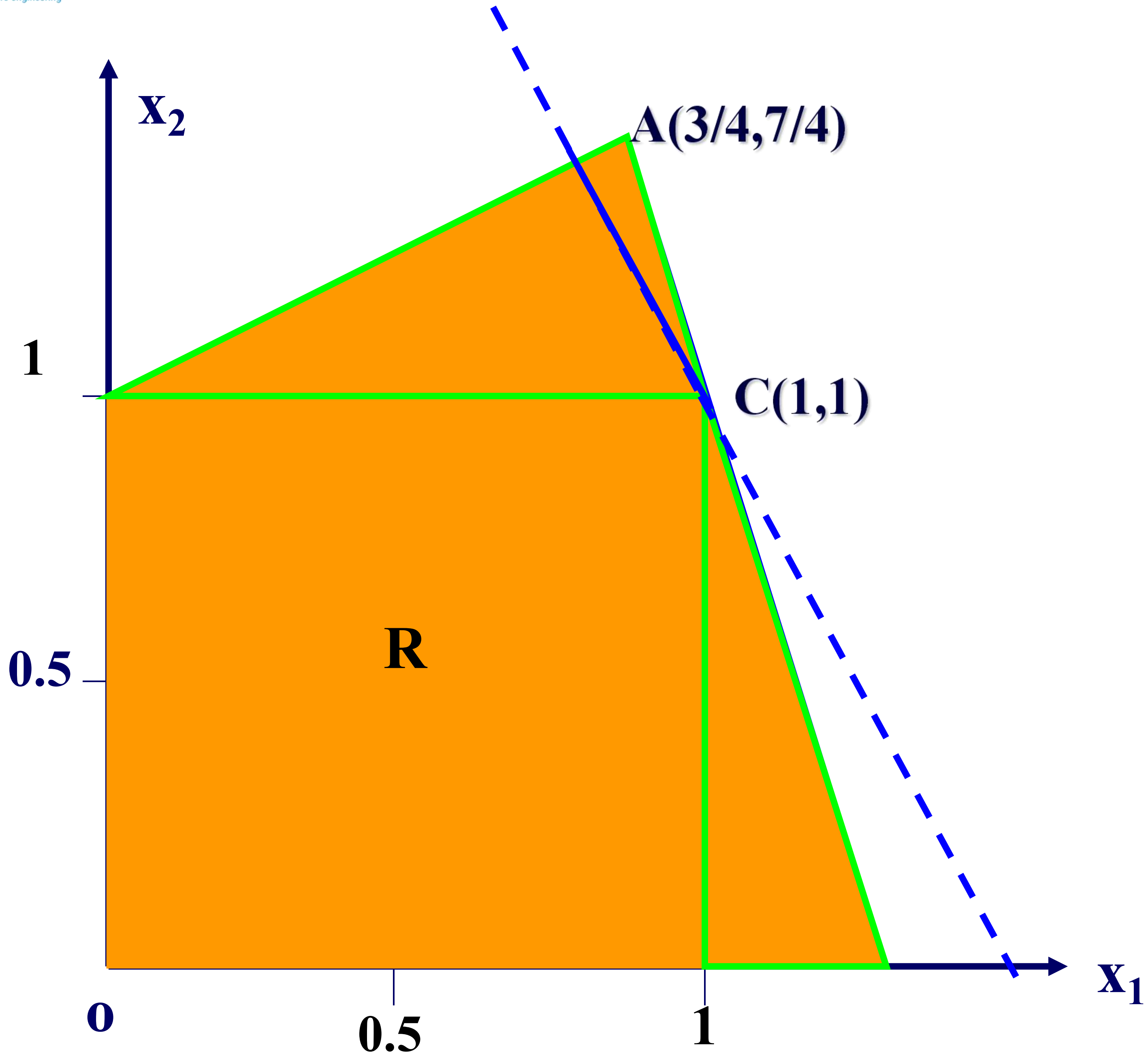
$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

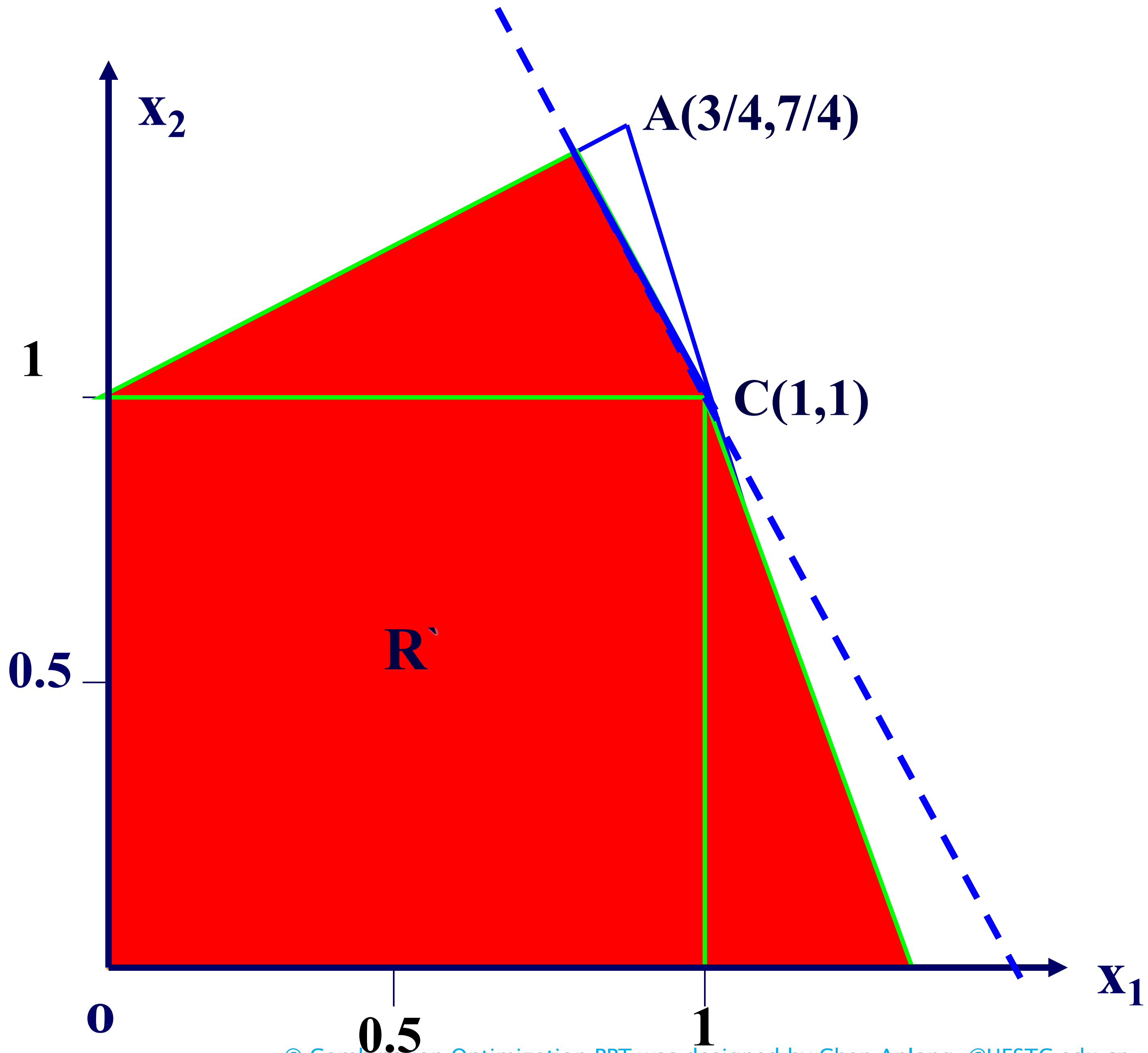
列单纯形表得: (初始单纯形表)

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4
0	x_3	1	-1	1	1	0
0	$\leftarrow x_4$	4	3	1	0	1
σ_j			1	1	0	0

(最终单纯形表)

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4
σ_j			0	0	-1/2	-1/2


x2
A(3/4,7/4)
1
C(1,1)
R
0.5
0
0.5
1
x1


x2
A(3/4,7/4)
1
C(1,1)
R`
0.5
x1
0
0.5
1

（二）确定割平面

由最终单纯表可得如下的关系式:

$$x_1 \quad -\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

将系数和常数项均分解成整数与真分数之和移项, 以上两式变为:

$$x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

由于x_1,x_2,x_3,x_4均为非负整数, 显然,上面两式的右边必小于0, 从而有整数约束条件可由下的不等式所替代.

$$\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \le 0$$

即 $$-3x_3 - x_4 \le -3$$

上式就是所要求的一个切割方程(割平面).

引入松驰变量x_5, 从而可得到一等式约束条件,将所得等式约束加入到原标准化的松驰问题之中, 得到如下新的松驰问题.

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 1 \\
3x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4 \\
-3x_3 - x_4 + x_5 &= -3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

将所得等式约束加入到原标准化的松弛问题的最优单纯形表之中，得

		c_j	1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	3/4	1	0	-1/4	1/4	0
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	0
0	x_5	-3	0	0	-3	-1	1
		σ_j	0	0	-1/2	-1/2	0

由对偶单纯形法, x_5为换出变量, x_3为换入变量, 得

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	0	0	1/3	1/12
1	x_2	1	0	1	0	0	1/4
0	x_3	1	0	0	1	-1	-1/3
σ_j			0	0	0	-1/2	-1/6

显然,上表为最优单纯形表,且x_1,x_2的值已为整数, 从而知原IP问题的最优解为(1,1), 最优值为2

例：用割平面法求下述整数规划的最优解

$$L:\quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{且} x_1, x_2 \text{取整数} \end{cases}$$

解：

替代问题

$$G_0:\quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ 2x_1 + \quad x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$G_0:\quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 14 \\ 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_4 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

初始单纯形表

$c_j \to$			3	2	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	14	2	3	1	0
0	x_4	9	2	1	0	1
c_j-z_j			3	2	0	0

$c_j \to$			3	2	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	5	0	2	1	-1
3	x_1	9/2	1	1/2	0	1/2
c_j-z_j			0	1/2	0	-3/2

最终单纯形表

$c_j \to$			3	2	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_2	5/2	0	1	1/2	-1/2
3	x_1	13/4	1	0	-1/4	3/4
c_j-z_j			0	0	-1/4	-5/4

最终单纯形表

		$c_j \to$	3	2	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_2	5/2	0	1	1/2	-1/2
3	x_1	13/4	1	0	-1/4	3/4
		c_j-z_j	0	0	-1/4	-5/4

找出非整数解变量中分数部分最大的一个基变量，并写下这一行的约束

$$x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=2\frac{1}{2}$$

将上式中所有常数分写成整数与一个正分数之和得，

$$x_2+(0+\frac{1}{2})x_3+(-1+\frac{1}{2})x_4=(2+\frac{1}{2})$$

将整数、正分数进行分离，得

$$x_2-x_4-2=\frac{1}{2}-\frac{x_3}{2}-\frac{x_4}{2}$$

因左端为整数，故右端也需取整数

又 $x_1\geq 0, x_2\geq 0$，故 $\frac{1}{2}-\frac{x_3}{2}-\frac{x_4}{2}\leq\frac{1}{2}<1$

又右端必须取整数， 故

$$\frac{1}{2}-\frac{x_3}{2}-\frac{x_4}{2}\leq 0 \quad (I)$$

加上松弛变量后得

$$\frac{1}{2}-\frac{x_3}{2}-\frac{x_4}{2}+x_5=0 \quad (II)$$

$$G_1: \quad \max z=3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1+x_2+x_4=9 \\ -\frac{x_3}{2}-\frac{x_4}{2}+x_5=-\frac{1}{2} \\ x_j\geq 0(j=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{x_3}{2}-\frac{x_4}{2}+x_5=0 \quad (II)$$

$c_j \rightarrow$			3	2	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	5/2	0	1	1/2	-1/2	0
3	x_1	13/4	1	0	-1/4	3/4	0
0	x_5	-1/2	0	0	[-1/2]	-1/2	1
c_j-z_j			0	0	-1/4	-5/4	0

2	x_2	2	0	1	0	-1	1
3	x_1	7/2	1	0	0	1	-1/2
0	x_3	1	0	0	1	1	-2
c_j-z_j			0	0	0	-1	-1/2

$$x_1+x_4-\frac{1}{2}x_5=\frac{7}{2}$$

$$x_1+x_4+(-1+\frac{1}{2})x_5=3+\frac{1}{2}$$

$$x_1+x_4-x_5-3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_5$$

得到新的约束

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_5\leq 0$$

加上松弛变量后得

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_5+x_6=0$$

			3	2	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_2	2	0	1	0	-1	1	0
3	x_1	7/2	1	0	0	1	-1/2	0
0	x_3	1	0	0	1	1	-2	0
0	x_6	-1/2	0	0	0	0	[-1/2]	1
c_j-z_j			0	0	0	-1	-1/2	0
2	x_2	1	0	1	0	-1	0	2
3	x_1	4	1	0	0	1	0	-1
0	x_3	3	0	0	1	1	0	-4
0	x_5	1	0	0	0	0	1	-2
c_j-z_j			0	0	0	-1	0	-1

$$G_2: \quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ -\dfrac{x_3}{2} - \dfrac{x_4}{2} + x_5 = -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{x_5}{2} + x_6 = -\dfrac{1}{2} \\ x_j \geq 0 (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

因此: $x_1 = 4; x_2 = 1;$

二、分支定界法

分支与定界法的基本思想是对有约束条件的最优化问题的所有可行解（其数目为有限集）空间适当地进行搜索．

具体执行时，把可行解空间不断分割为**越来越小的子集（称为分支）**，并确定每个分支内的**解值的下界或上界（称为定界）**．在每次分支后，对凡是界超出已知可行解值的子集被剪去，从而不断缩小搜索范围．这个过程一直进行到找出最优解为止，该可行解的值不大于或不小于任何子集的界．

分支定界法基本思路

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

考虑纯整数问题：

$$(IP)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1.2\cdots m) \\ x_j \geq 0,(j = 1.2\cdots n)\text{且为整数} \end{cases}$$

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

整数问题的松弛问题：

$$(LP)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1.2\cdots m) \\ x_j \geq 0,(j = 1.2\cdots n) \end{cases}$$

整数问题的最优函数值总是小于或等于其松弛问题的最优函数值。

例：用分枝定界法求解整数规划问题（用图解法计算）

$$\left.\begin{aligned}&\max Z = x_1 + 5x_2\\&\begin{cases}x_1 - x_2 \ge -2\\5x_1 + 6x_2 \le 30\\x_1 \le 4\\x_1, x_2 \ge 0\text{且全为整数}\end{cases}\end{aligned}\right\}\quad \text{记为}(IP)$$

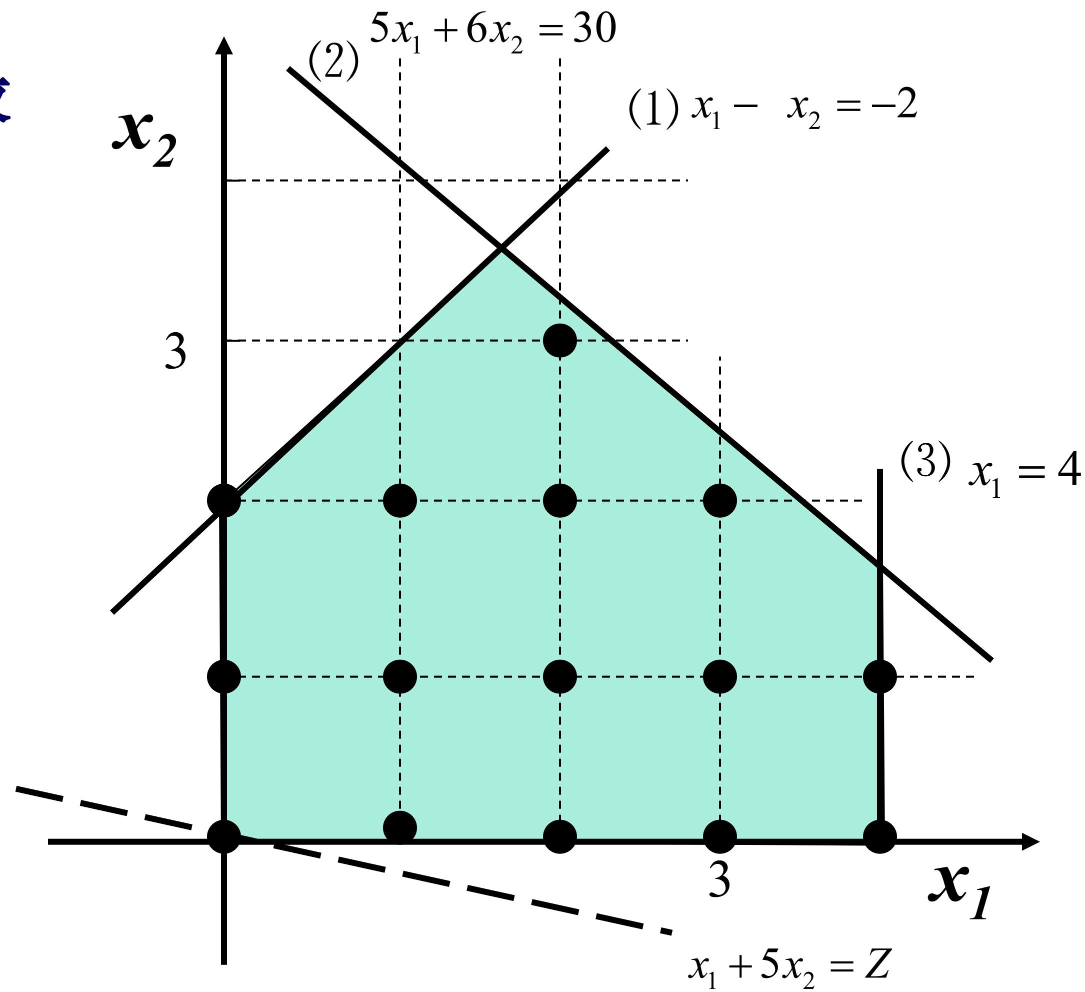
解：首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题

$$\left.\begin{aligned}&\max Z = x_1 + 5x_2\\&\begin{cases}x_1 - x_2 \ge -2\\5x_1 + 6x_2 \le 30\\x_1 \le 4\\x_1, x_2 \ge 0\end{cases}\end{aligned}\right\}\quad \text{记为}(LP)$$

用图解法求（*LP*）的最优解，如图所示。

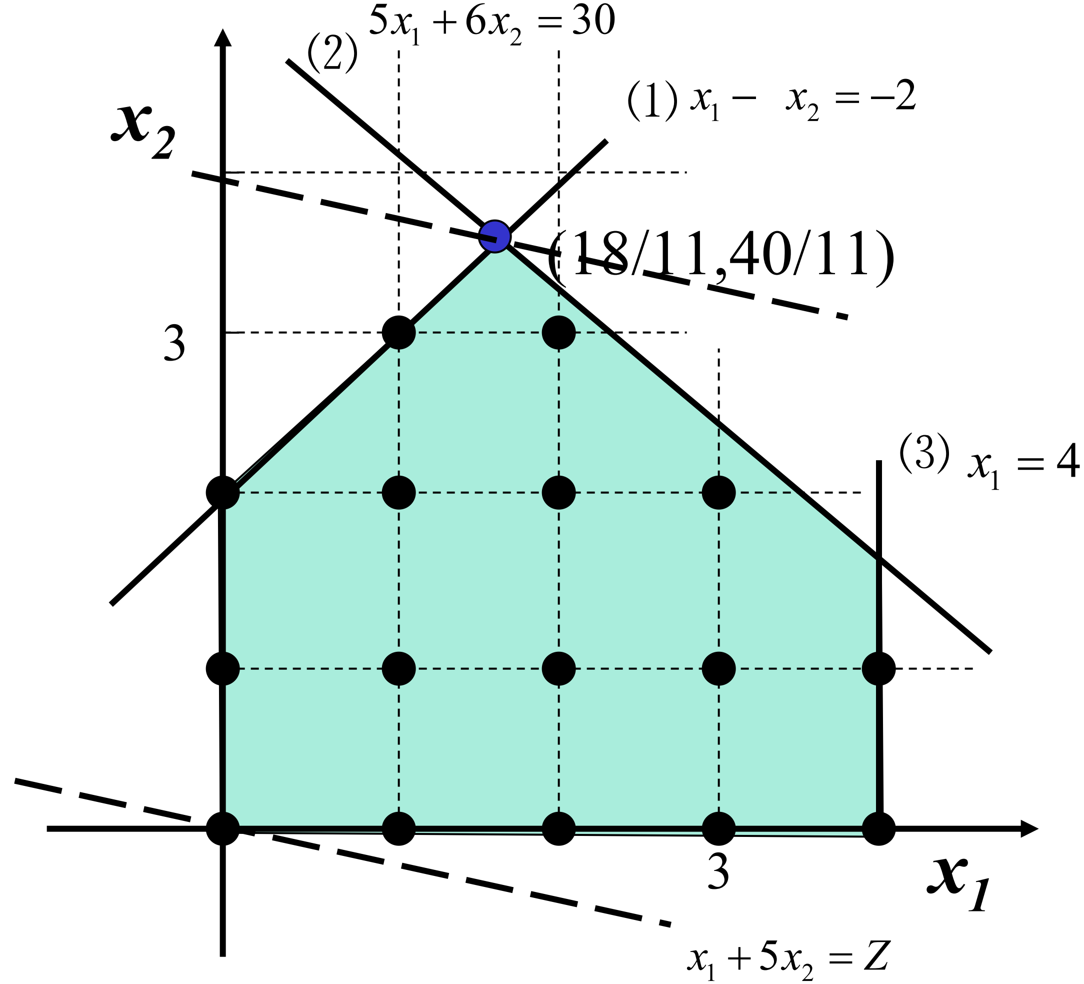
$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



LP
x_1=18/11, x_2=40/11
$Z^{(0)}$ =19.8

$x_1 = 18/11, x_2 = 40/11$

$Z^{(0)} = 218/11 \approx (19.8)$

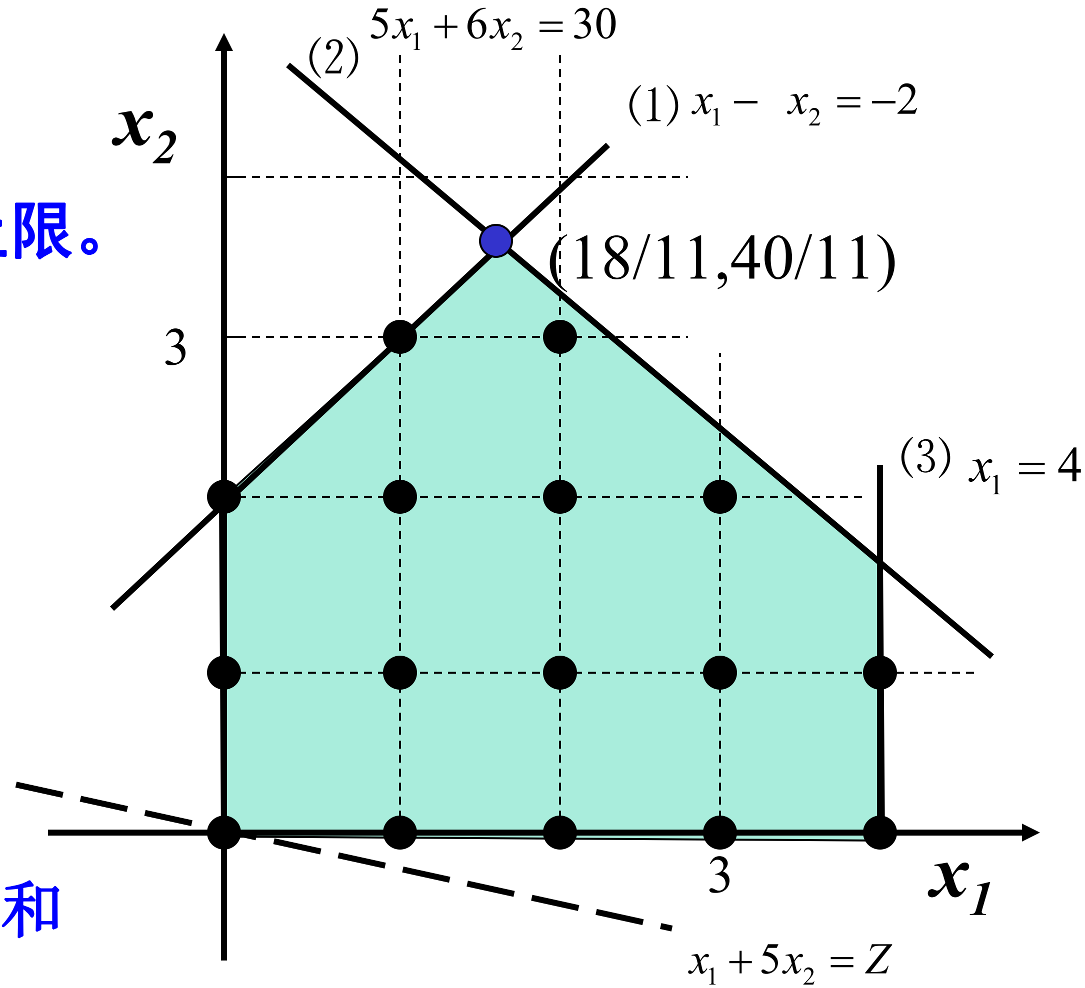
即Z 也是（IP）最大值的上限。

对于$x_1 = 18/11 \approx 1.64$，

取值$x_1 \le 1$， $x_1 \ge 2$

对于$x_2 = 40/11 \approx 3.64$，

取值$x_2 \le 3$ ， $x_2 \ge 4$



先将（*LP*）划分为（*LP1*）和（*LP2*）,取$x_1 \le 1, x_1 \ge 2$

先将（*LP*）划分为（*LP1*）和（*LP2*），取$x_1 \le 1$, $x_1 \ge 2$，有下式：

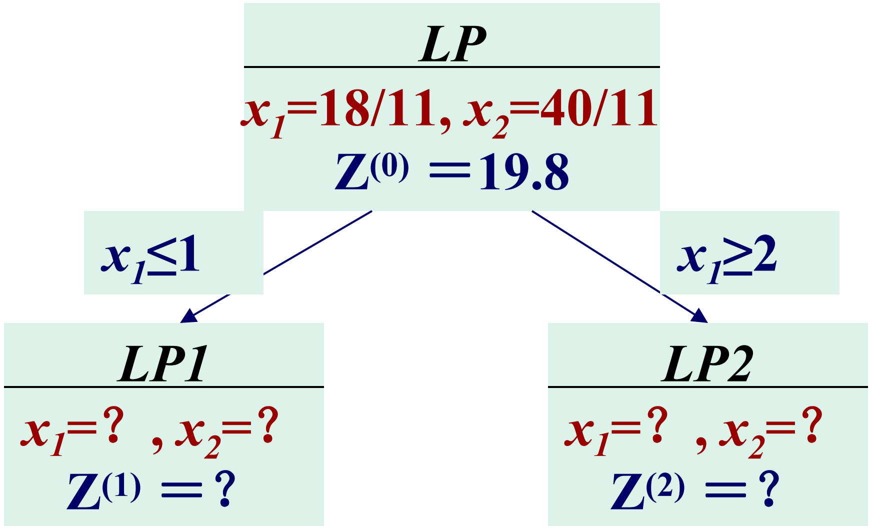
$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP1)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ \boxed{x_1 \le 1} \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP2)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ \boxed{x_1 \ge 2} \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

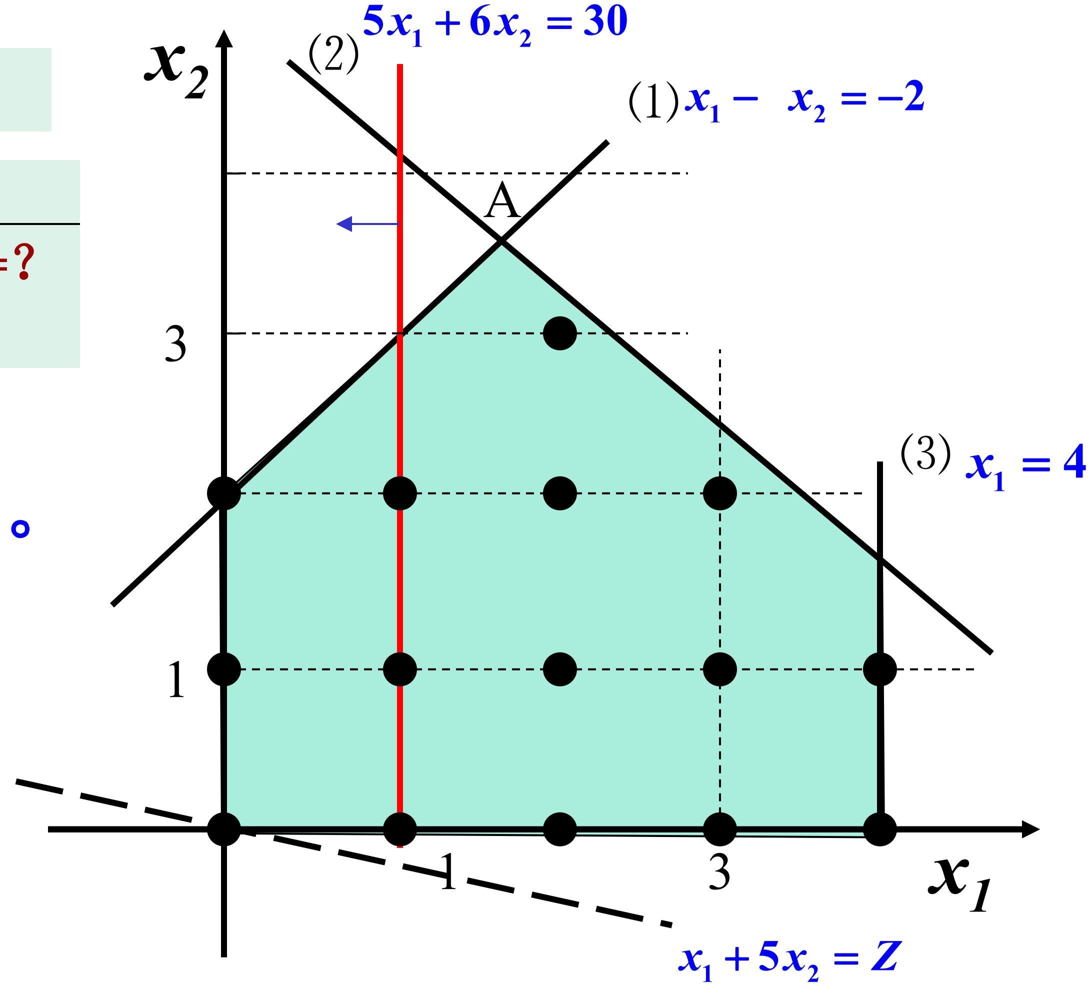
现在只要求出（*LP1*）和（*LP2*）的最优解即可。



先求（*LP1*），如图所示。

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

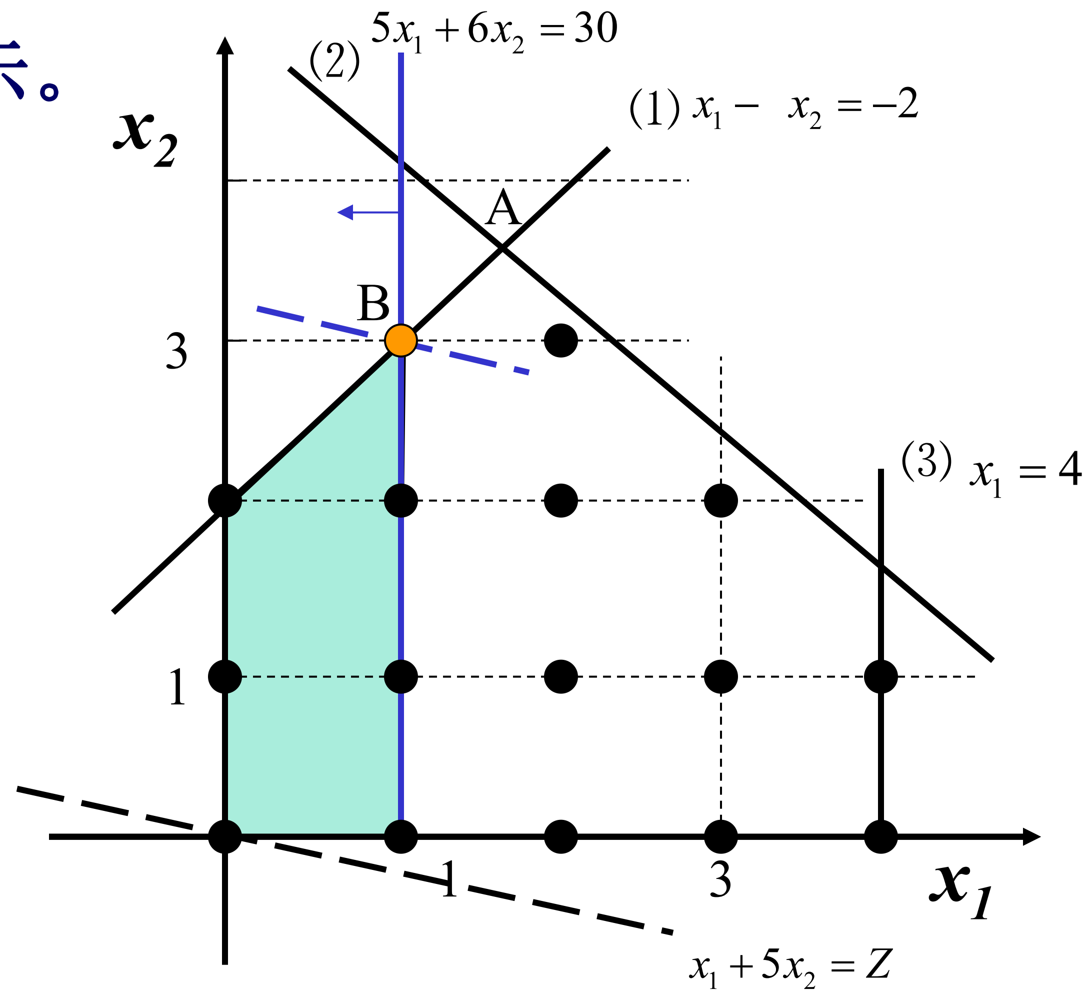
$$(IP1)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



先求（*LP1*），如图所示。

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP1)\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \ \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1 \qquad\quad \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



此时*B* 在点取得最优解。

$x_1 = 1, x_2 = 3, Z^{(1)} = 16$

LP

$x_1=18/11,\ x_2=40/11$

$Z^{(0)}=19.8$

$x_1 \le 1$ $\qquad$ $x_1 \ge 2$

LP1

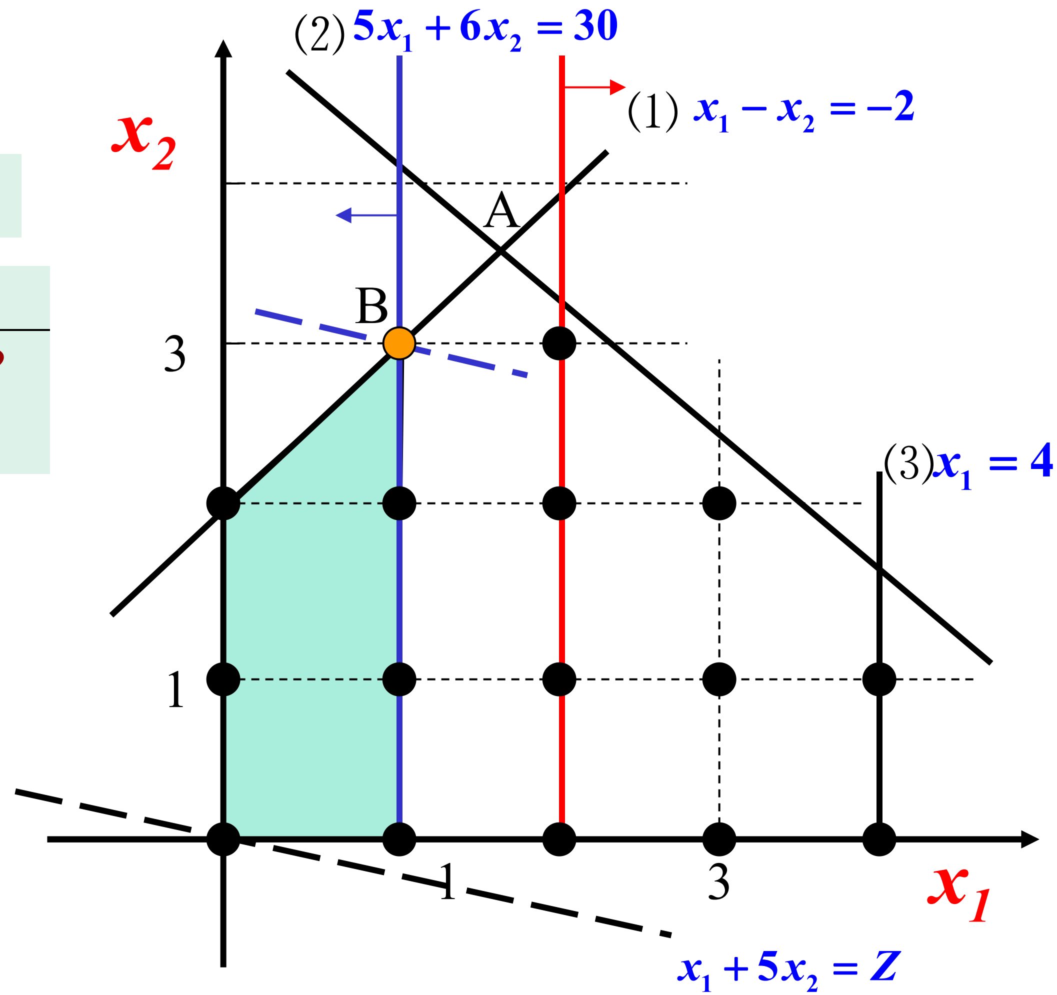
$x_1=1,\ x_2=3$

$Z^{(1)}=16$

LP2

$x_1=?\ ,\ x_2=?$

$Z^{(2)}=?$



求（*LP2*），如图所示。

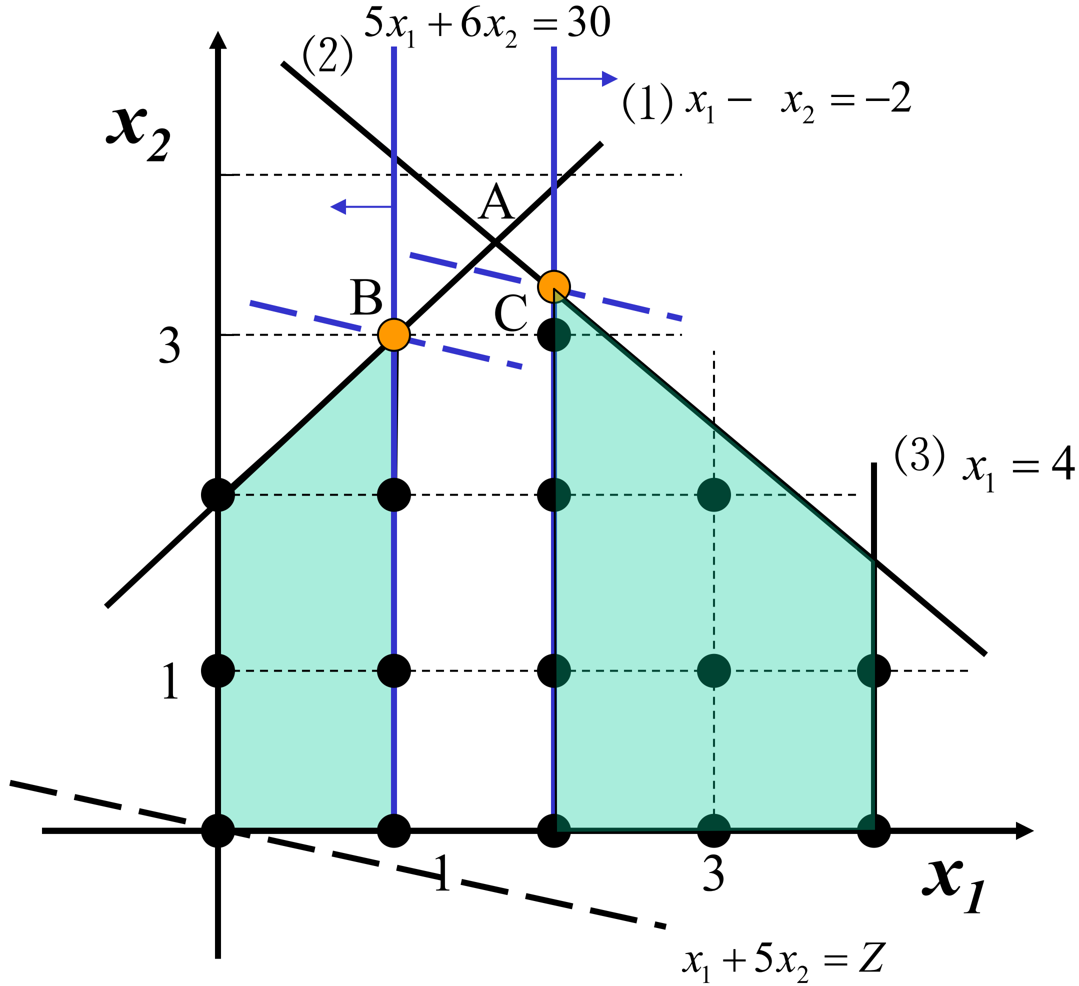
$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP2)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

求（*LP2*），如图所示。

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP2)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



在*C*点取得最优解。

即 $x_1 = 2, x_2 = 10/3,$

$Z^{(2)} = 56/3 \approx 18.7$

LP

$x_1=18/11,\ x_2=40/11$

$Z^{(0)}=19.8$

$x_1\le 1$ → **LP1**: $x_1=1,\ x_2=3$, $Z^{(1)}=16$

此枝停止计算

$x_1\ge 2$ → **LP2**: $x_1=2,\ x_2=10/3$, $Z^{(2)}=18.7$

$\because Z_2 > Z_1 = 16$ $\therefore$ 原问题可能有比 16 更大的最优解，

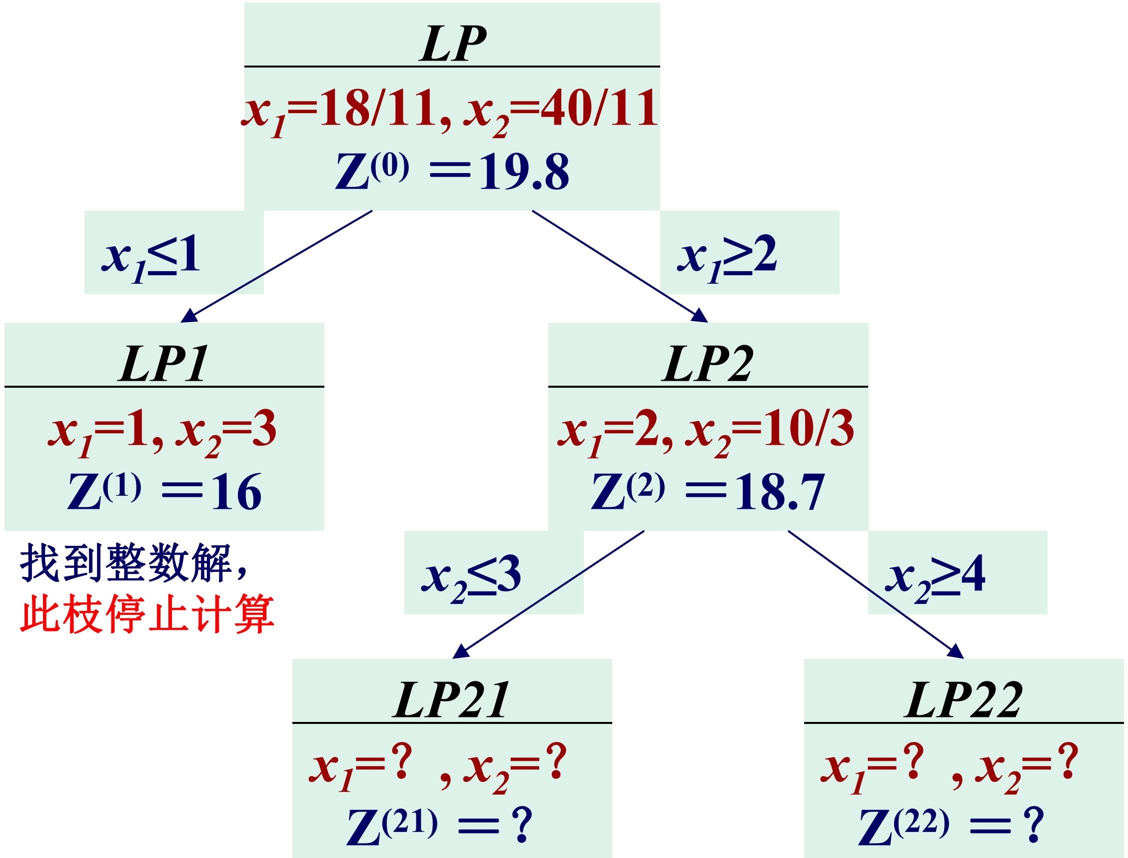
但 x_2 不是整数，故利用 $x_2\le 3$， $x_2\ge 4$ 加入条件。

对于LP2,加入条件：$x_2 \le 3$, $x_2 \ge 4$ 有下式：

$$\max Z = x_1 + 5x_2 \qquad\qquad \max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP21)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ \boxed{x_2 \le 3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases} \qquad (IP22)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ \boxed{x_2 \ge 4} \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

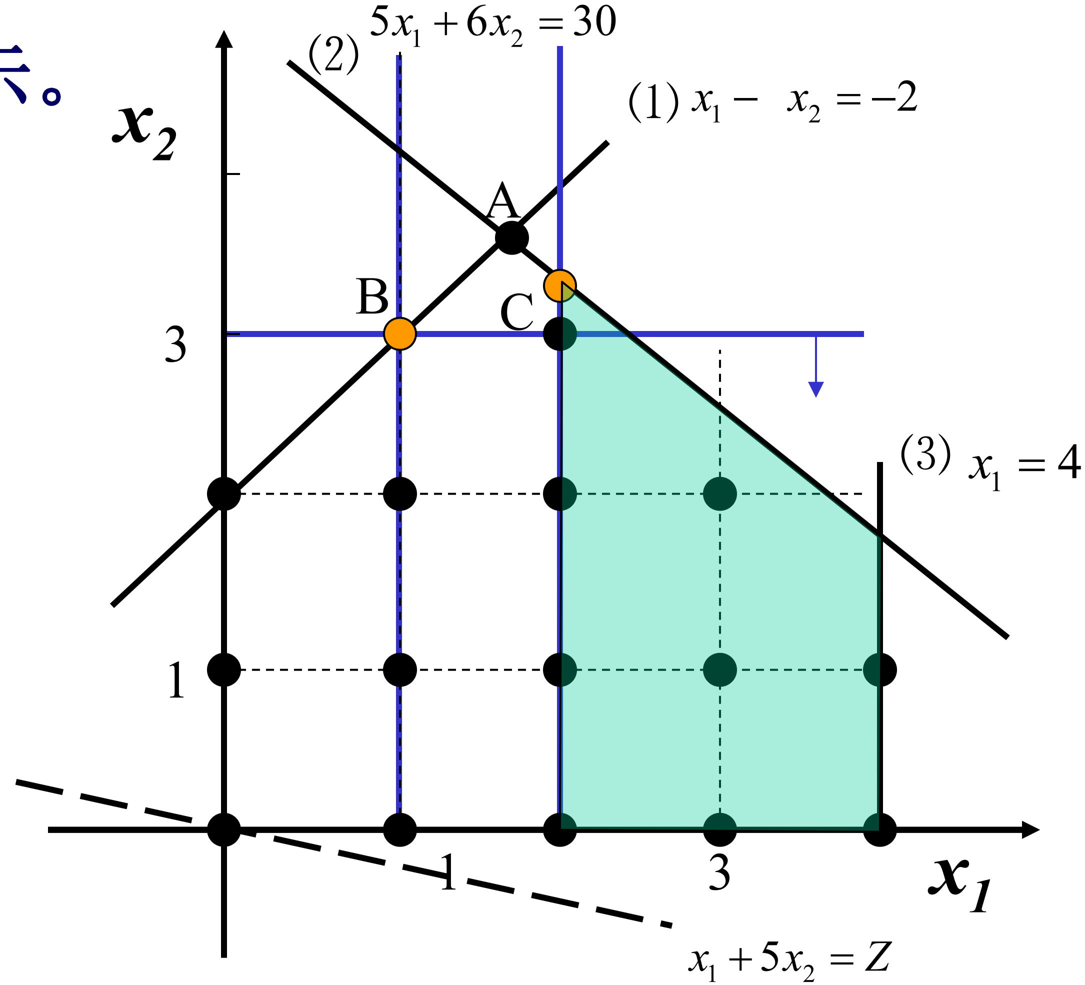
只要求出（*LP21*）和（*LP22*）的最优解即可。


LP
x_1=18/11, x_2=40/11
$Z^{(0)}$ =19.8
$x_1 \le 1$
$x_1 \ge 2$
LP1
x_1=1, x_2=3
$Z^{(1)}$ =16
找到整数解，
此枝停止计算
LP2
x_1=2, x_2=10/3
$Z^{(2)}$ =18.7
$x_2 \le 3$
$x_2 \ge 4$
LP21
x_1=? , x_2=?
$Z^{(21)}$ =?
LP22
x_1=? , x_2=?
$Z^{(22)}$ =?

先求（*LP21*），如图所示。

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

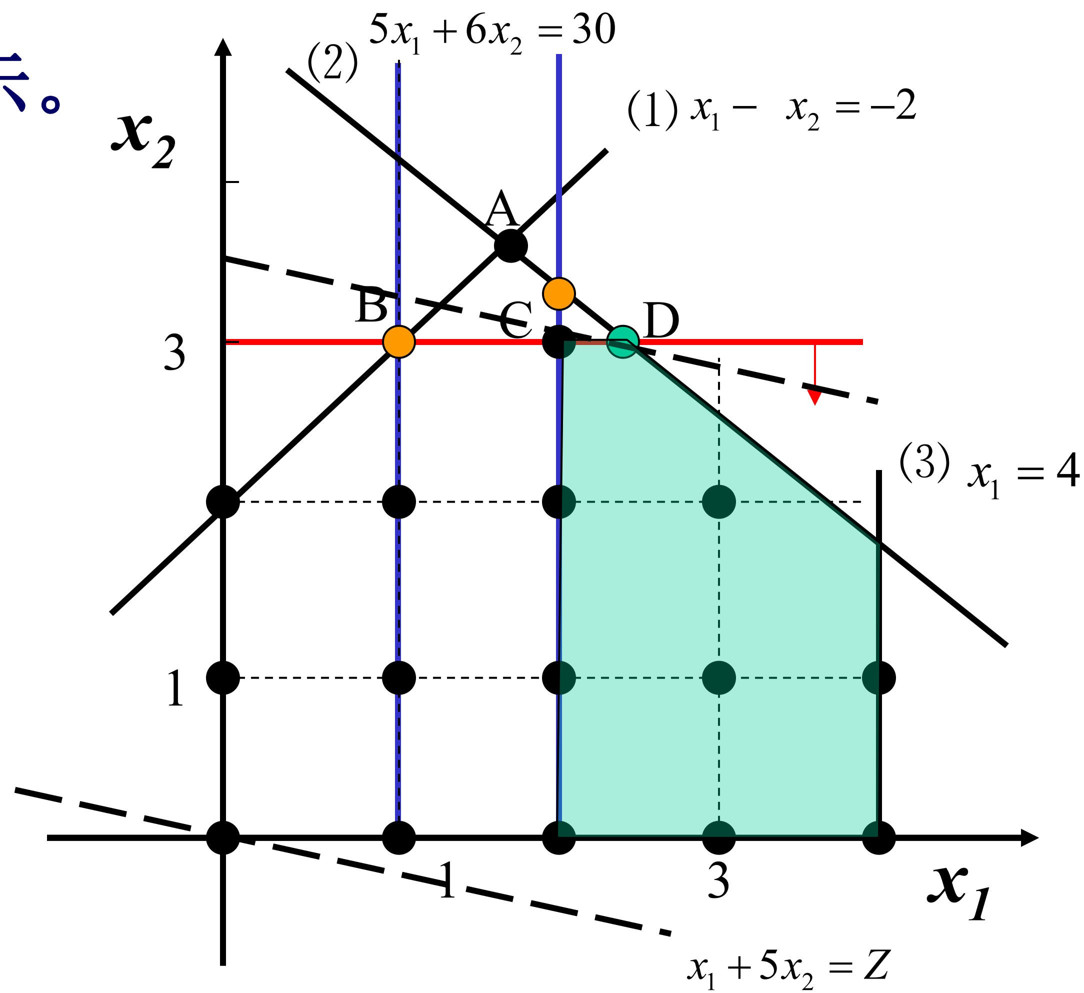
$$(IP21)\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \ \ \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1 \qquad\quad \geq 2 \\ x_2 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



先求（*LP21*），如图所示。

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP21)\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \ \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1 \qquad\quad \geq 2 \\ x_2 \qquad\quad \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



此时*D*在点取得最优解。

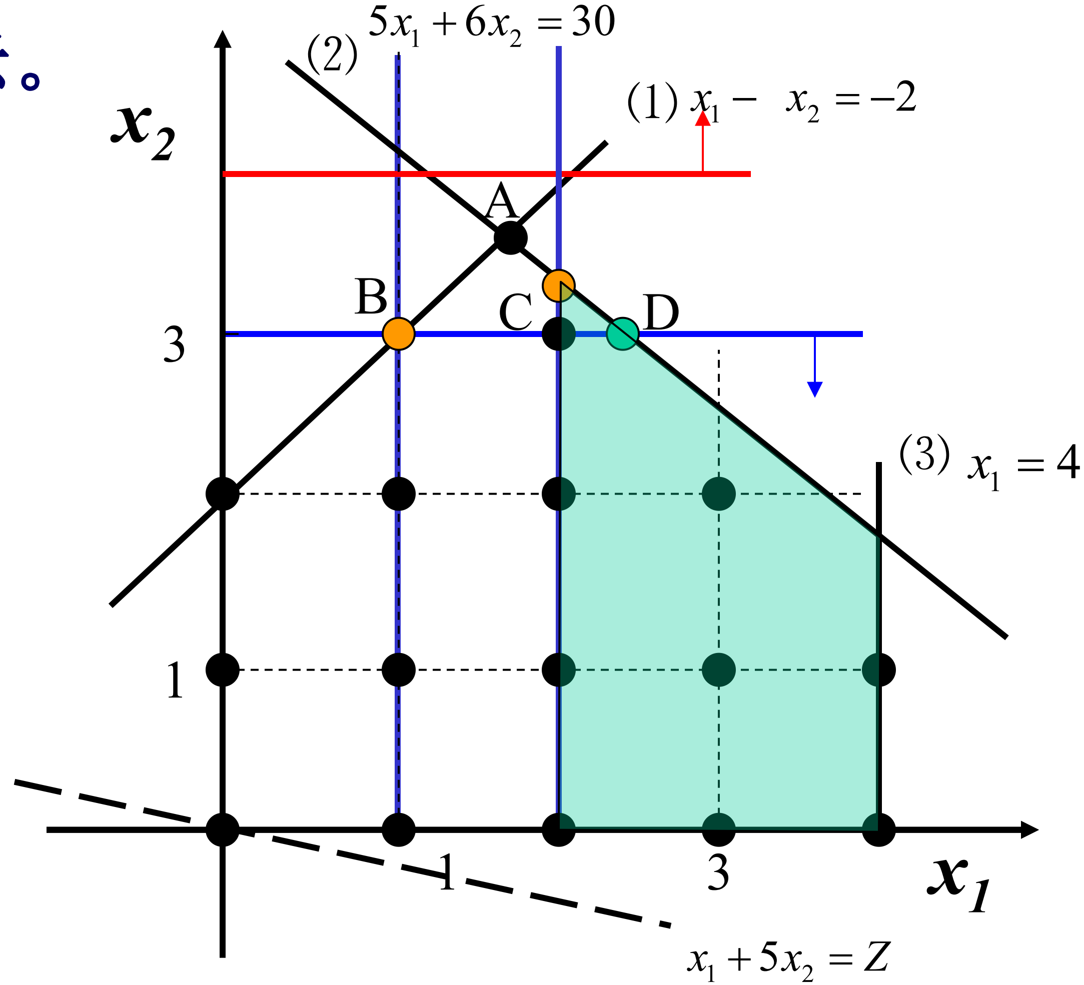
即 $x_1 = 12/5 = 2.4$, $x_2 = 3$,

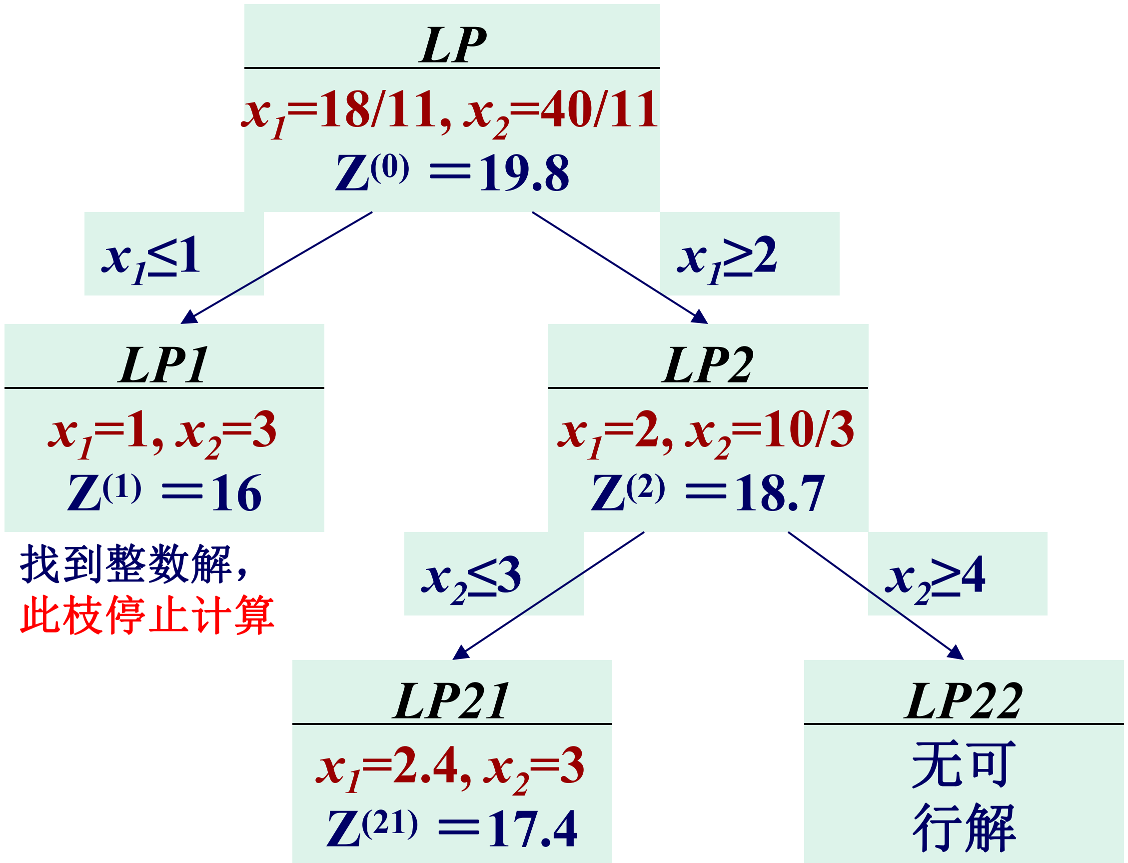
$Z^{(21)} = 87/5 = 17.4$

求（*LP22*），如图所示。无可行解，不再分枝。

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP22)\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \ \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1 \qquad\quad \geq 2 \\ x_2 \qquad\quad \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$





（*LP21*），如图所示,在*D*点取得最优解。

即 $x_1=12/5=2.4, x_2=3$， $Z^{(3)}=87/5=17.4$

$x_1=2.4$不是整数，可继续分枝。即 $x_1\le 2$， $x_1\ge 3$

在（*LP21*）的基础上继续分枝。加入条件$x_1 \le 2$， $x_1 \ge 3$有下式：

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP211)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP212)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

只要求出（*LP211*）和（*LP212*）的最优解即可。

LP

$x_1=18/11, x_2=40/11$

$Z^{(0)}=19.8$

$x_1\le 1$ → **LP1**

$x_1=1, x_2=3$

$Z^{(1)}=16$

找到整数解，
此枝停止计算

$x_1\ge 2$ → **LP2**

$x_1=2, x_2=10/3$

$Z^{(2)}=18.5$

$x_2\le 3$ → **LP21**

$x_1=2.4, x_2=3$

$Z^{(21)}=17.4$

$x_2\ge 4$ → **LP22**

无可
行解

#

$x_1\le 2$ → **LP211**

$x_1=?\ , x_2=?$

$Z^{(211)}=?$

$x_1\ge 3$ → **LP212**

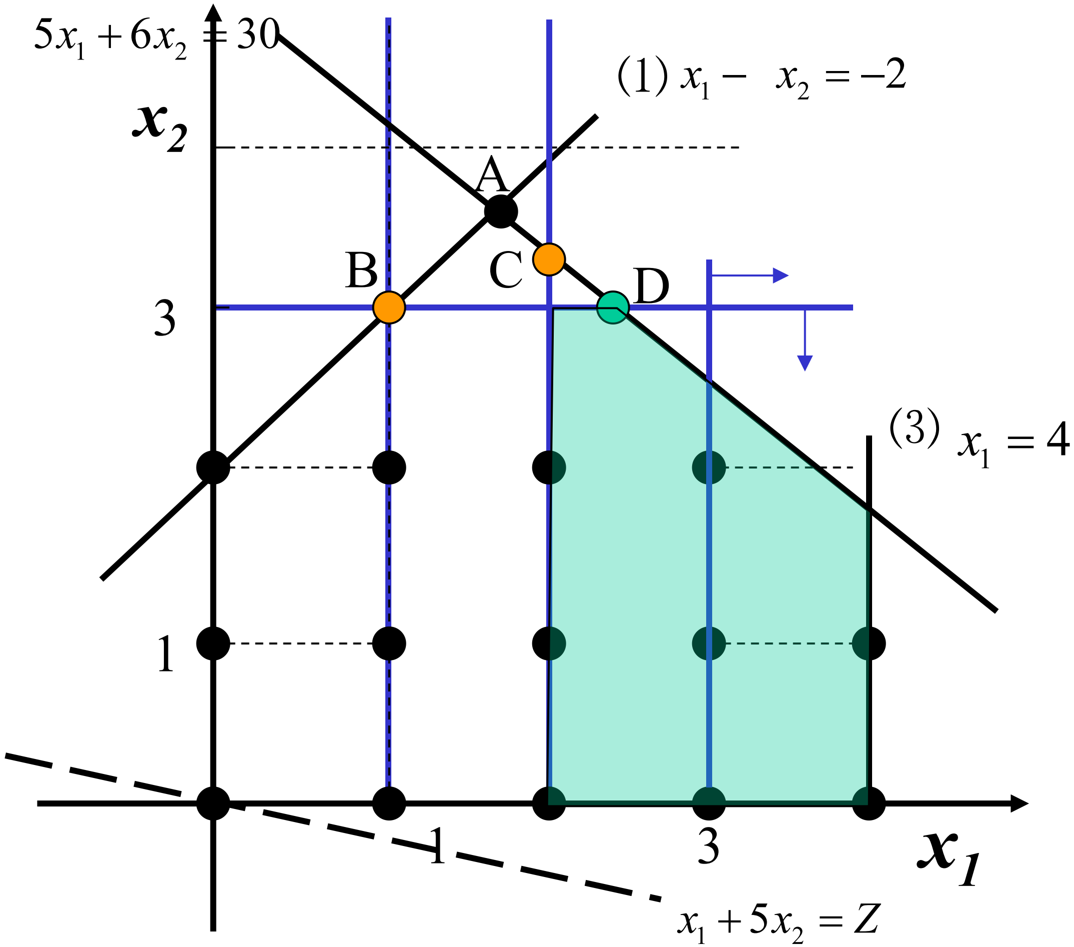
$x_1=?\ , x_2=?$

$Z^{(212)}=?$

先求（*LP211*）

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

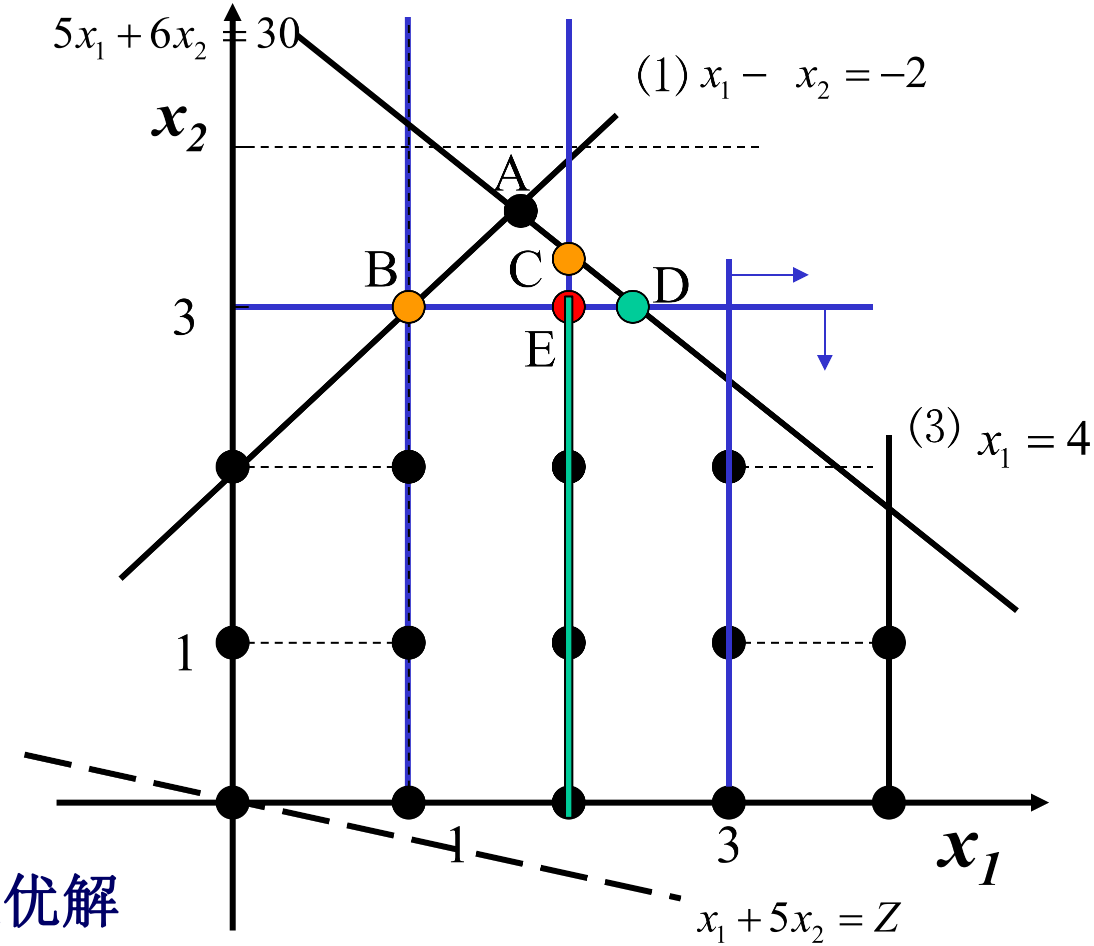
$$(IP211)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



先求（*LP211*）

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$(IP211)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$



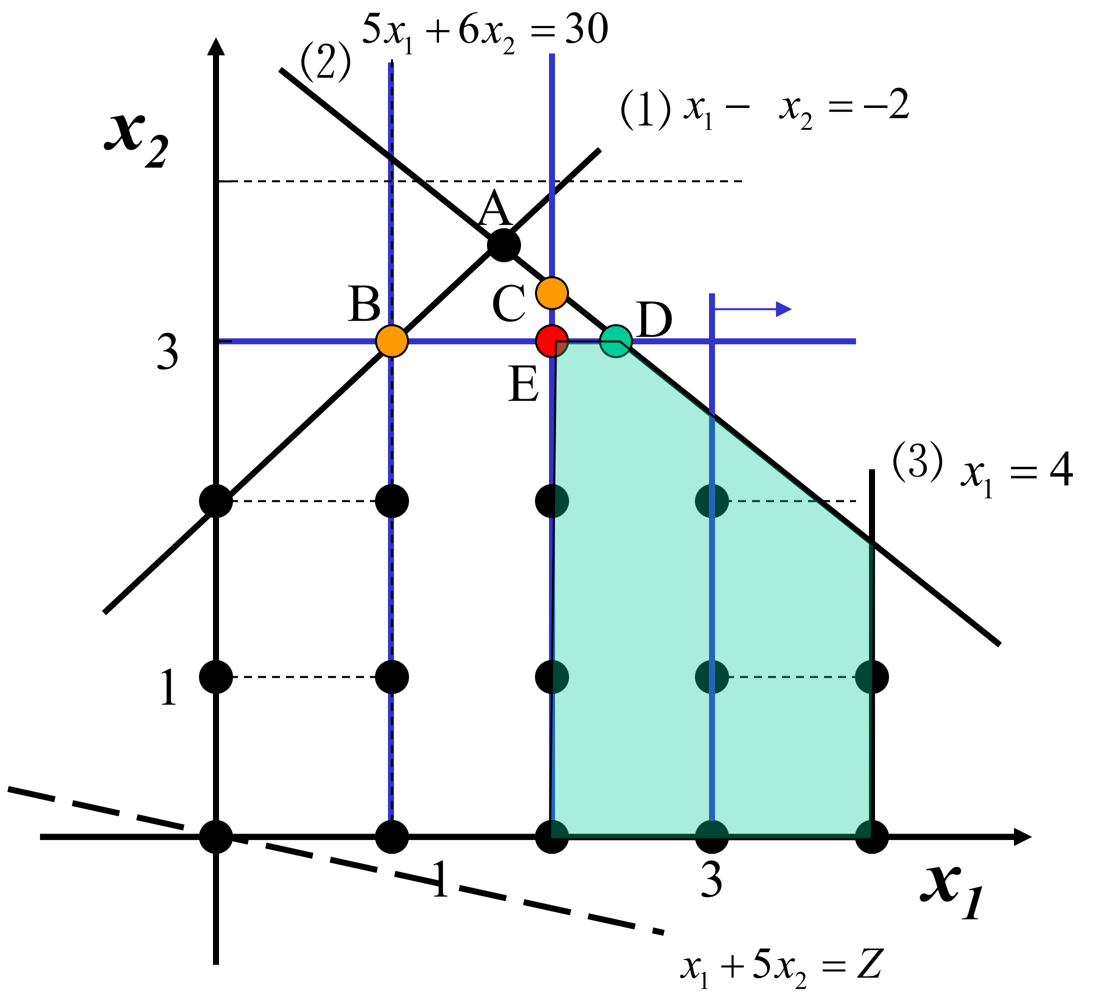
如图所示，此时*E*在点取得最优解

即 $x_1=2, x_2=3, Z^{(211)}=17$

求（*LP212*）

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

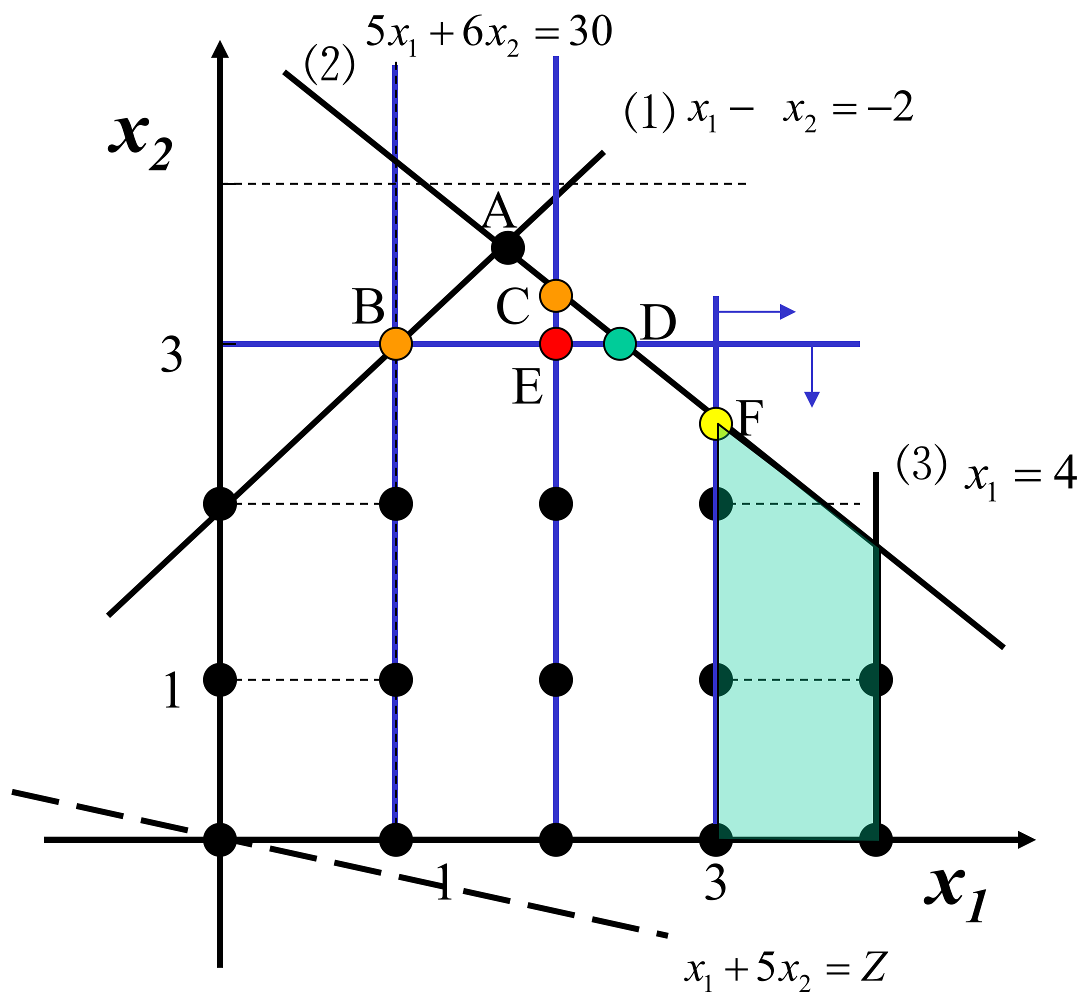
$$(IP212)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



求（*LP212*）

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

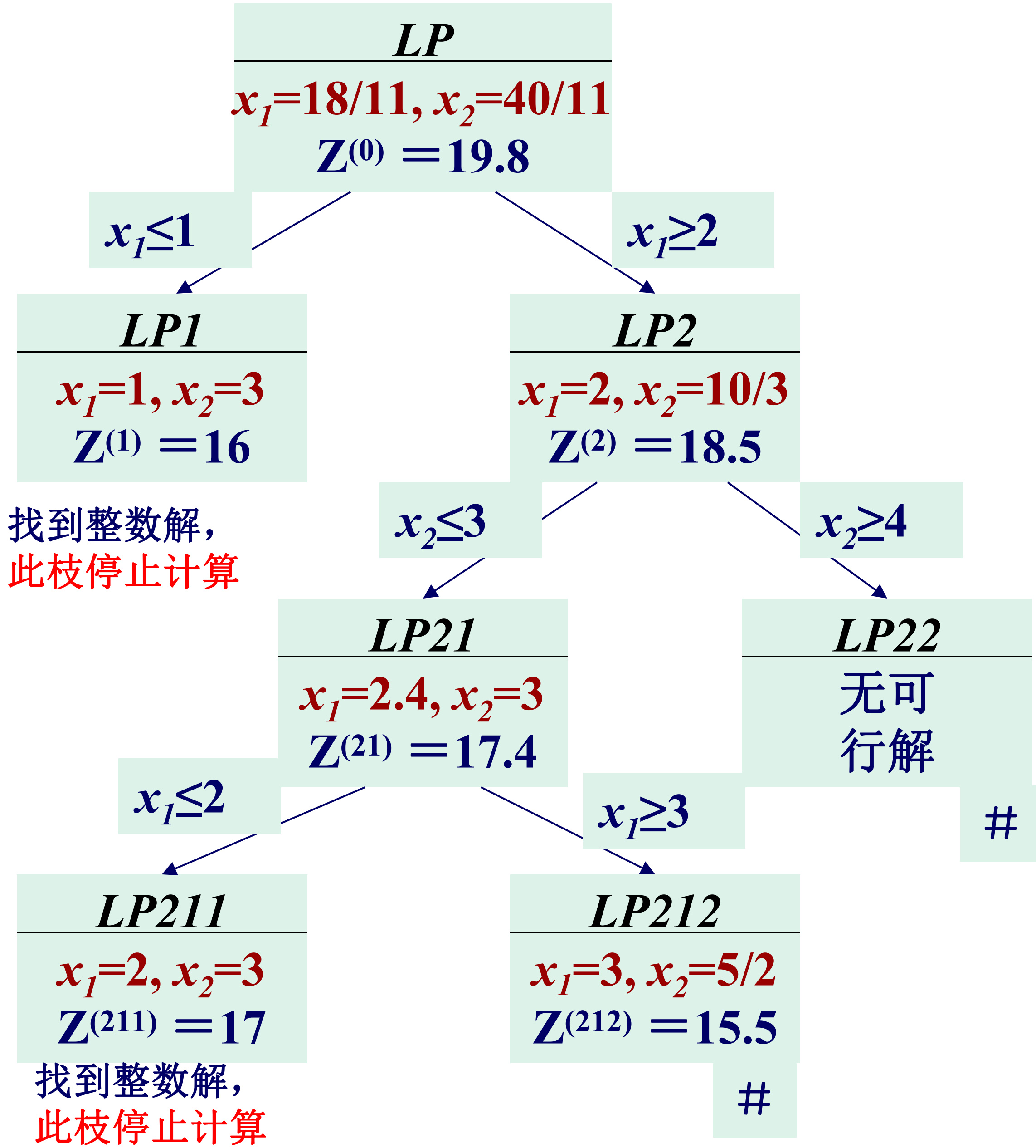
$$(IP212)\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$



如图所示。此时 F在点取得最优解。

$x_1=3, x_2=2.5,$

$Z^{(212)}=31/2=15.5$


LP
x_1=18/11, x_2=40/11
$Z^{(0)}$ =19.8
x_1≤1
x_1≥2
LP1
x_1=1, x_2=3
$Z^{(1)}$ =16
找到整数解，
此枝停止计算
LP2
x_1=2, x_2=10/3
$Z^{(2)}$ =18.5
x_2≤3
x_2≥4
LP21
x_1=2.4, x_2=3
$Z^{(21)}$ =17.4
LP22
无可
行解
#
x_1≤2
x_1≥3
LP211
x_1=2, x_2=3
$Z^{(211)}$ =17
找到整数解，
此枝停止计算
LP212
x_1=3, x_2=5/2
$Z^{(212)}$ =15.5
#

原问题（*IP*）的最优解为：

$x_1=2$,

$x_2=3$,

$Z^* = Z^{(211)} = 17$

以上的求解过程可以用一个树形图表示如右：