随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 — 数学科学学院

武德安

第一章随机过程的基本概念

§1.1随机过程的定义及分类

§1.2随机过程的分布

§1.3随机过程的数字特征

§1.4随机过程的基本类型

§1.4随机过程的基本类型

一、随机过程的基本类型

定义1.4.1：对已给（复或实）随机过程$\{X_t, t\in T\}$,若对任意的$t\in T$,

均有$E[|X_t|^2]<+\infty$,则称$\{X_t, t\in T\}$是**二阶矩随机过程**,简称二阶过程。

定理1.4.1：设$\{X_t, t\in T$是二阶矩随机过程,且$m_X(t)=0$,则其协方差函数$R(s,t)$满足性质:

(1) 非负定性(正态过程白化(去相关性))对给定$n\geq 1$及$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,任意的普通函数$\theta(t)$,

$$t\in T\text{有}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}\geq 0$$

(2) 埃密特性,即$R(t,s)=\overline{R(s,t)}$.证明参见P23.

Proof: (1)非负定性对给定$n \geq 1$及$t_1,t_2,\cdots,t_n \in T$,任意的普通函数$\theta(t),t \in T$有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[X(t_k)\overline{X(t_j)}\right]\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)} = E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\theta(t_k)\right]\left[\overline{\sum_{j=1}^{n} X(t_j)\theta(t_j)}\right]\right\}$$

$$= E\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\theta(t_k)\right|^2\right\} \geq 0 \text{ 参见P129.}$$

注: 正态过程白化(去相关性)) — 独立正态过程(简单、直观)(协方差矩阵满足二次型非负.)

(2)埃密特性,即$R(t,s)=\overline{R(s,t)}$.证明参见P23.

$$R(t,s) = E\left(\overline{X_t\overline{X_s}}\right) = \overline{E\left(\overline{X_t}X_s\right)} = \overline{E\left(X_s\overline{X_t}\right)};$$ 特别地:若为实平稳过程,则为偶函数.

$$= \overline{R(s,t)}$$

$$R(s-t) = R(t-s)$$

二、独立过程

定义2.4.2： 对任意的正整数n及任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,随机变量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$相互独立，称随机过程$\{X(t),t\in T\}$为独立过程.

注： 独立随机过程的有限维分布由一维分布确定

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_k(t_k;x_k)$$

Ex. 1 (高斯白噪声) 设实值时间序列$\{X_n, n\in N\}$的均值函数与方差函数分别为

$$E(X_n)=0, \quad D(X_n)=\sigma^2, \text{自相关函数为} R(m,n)=\begin{cases}0, m\neq n;\\ \sigma^2, m=n.\end{cases} \text{(两两不相关序列)}$$

称为**离散白噪声(序列)**.

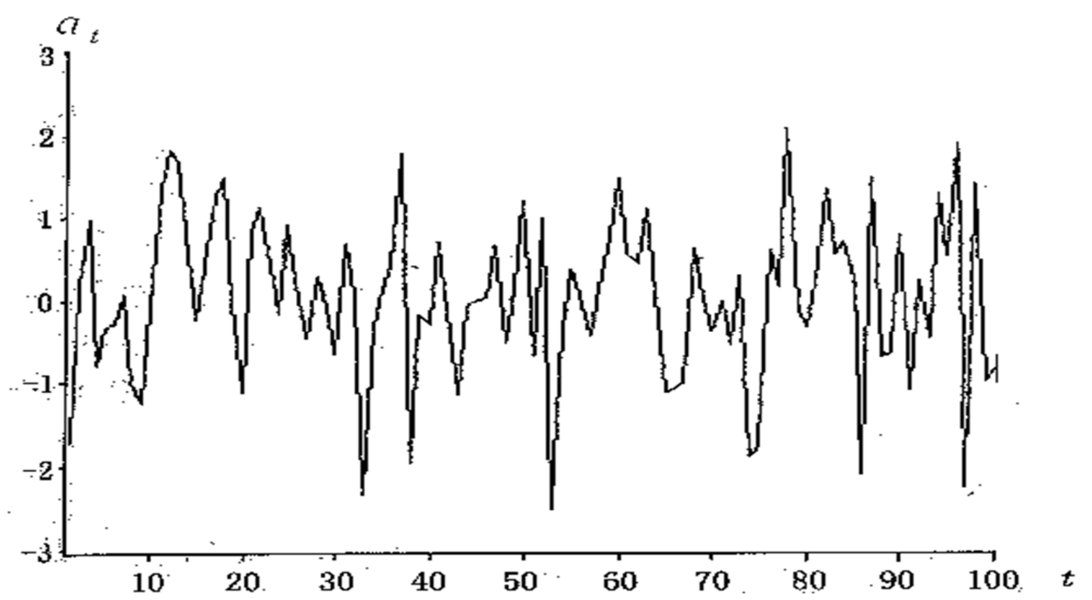
又若$X(n)$都服从正态分布，称$\{X(n), n\in N\}$是**高斯白噪声序列**.

对于n维正态随机变量有相互独立$\Leftrightarrow$不相关故高斯白噪声序列是独立时间序列.

若过程$\{X(t), t\in R\}$是正态过程, 且$E(X_t)=0, \quad R(s,t)=\sigma^2\delta(s-t)=\begin{cases}0, & s\neq t\\ \infty, & s=t\end{cases}$

称其为**高斯白噪声过程**, 它是独立过程.

高斯白噪声是典型的随机干扰数学模型,普遍存在于电流的波动，通信设备各部分的波动,电子发射的波动等各种波动现象中.



正态白噪声的一条现实路径

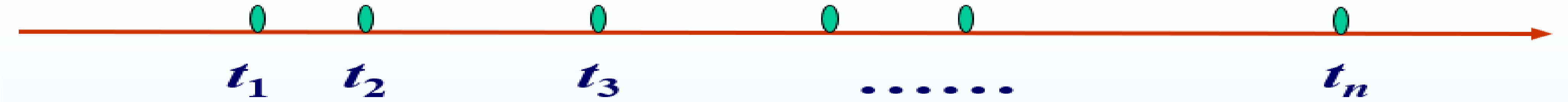
如金融、电子工程中常用的线性模型—自回归模型(AR(p))

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

理想模型要求残差序列ε_t是(高斯)白噪声.

三. 独立增量过程

定义1.4.3 设随机过程$\{X_t, t\in T\}$,对任意的正整数$n\geq 2$及T中$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,过程的增量$X_{t_1}-X_{t_0}, X_{t_2}-X_{t_1}, X_{t_3}-X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$相互独立,称其为**独立增量过程**(或可加过程).



注: 不失一般性,设$X(0)=0$或$P\{X(0)=0\}=1$. 有$X(t_1), X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立.

在不相重叠的时间区间上,过程的状态变化是相互独立的或互不影响的.

在计算机网络系统中,不同时段传输的数据个数可视为相互独立的.

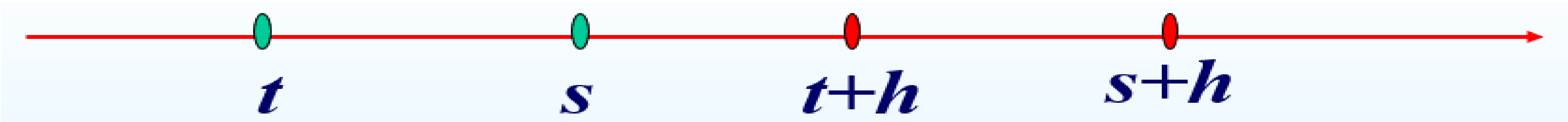
3.平稳增量过程

定义1.4.4 设随机过程$\{X_t, t\in T\}$对任意$t<s\in T$及实数h,随机变量

$$X_t - X_s \text{与} X_{t+h} - X_{s+h}$$

具有相同的概率分布,称是一个**具有平稳增量的过程**,简称**平稳增量过程**.

称过程的增量是**时齐的,或齐次的(平稳性)**.



平稳增量过程的增量的分布仅与区间长度$s-t$的大小有关,与起始点无关.

注: 增量$X(t+\tau)-X(t)$的分布仅与τ有关,与起始点t无关, 称$\{X(t), t\geq 0\}$的**增量具有平稳性(齐性)**.

Eg. 2 若$\{X(n), n\in N^+\}$是独立时间序列，令$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k)$，　$X(0)=0$

则$\{Y(n), n\in N^+\}$是独立增量过程.

又若$X(n), n=1,2,\ldots$相互独立同分布,则$\{Y(n),\ n\in N^+\}$是平稳独立增量过程.

证: 若$n_1<n_2<\ldots<n_m$

$$
\begin{aligned}
Y(n_2)-Y(n_1) &= \sum_{k=0}^{n_2}X(k)-\sum_{k=0}^{n_1}X(k)=X(n_1+1)+\cdots+X(n_2)\\
Y(n_3)-Y(n_2) &= X(n_2+1)+\cdots+X(n_3)\\
Y(n_m)-Y(n_{m-1}) &= X(n_{m-1}+1)+\cdots+X(n_m)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$\{X(n), n\in N^+\}$相互独立$\Rightarrow$各增量相互独立.

性质1.4.2 $\{X(t), t \geq 0\}$是平稳独立增量过程，$X(0)=0$，则

1) **均值函数** $m(t)=mt$（m为常数）;

2) **方差函数** $D(t)=\sigma^2 t$（σ为常数）;

3) **协方差函数** $C(s,t)=\sigma^2 \min(s,t)$.

分析: 因均值函数和方差函数满足

$$\left.\begin{aligned} m(s+t) &= m(s)+m(t), \\ D(s+t) &= D(s)+D(t) \end{aligned}\right\} \text{见教材} P27$$

命题: 若$y(s+t)=y(s)+y(t)$,则对任意实数t,有$y(t)=ty(1)$.

可证得1)和2).

证3): $C(s,t)=E\{[X(t)-m(t)][X(s)-m(s)]\}=E[X(t)X(s)]-m(s)m(t)$

$$=\underbrace{E\{[X(t)-X(s)+X(s)]X(s)\}}_{X(t)-X(s)\text{与}X(s)\text{相互独立}}-m(s)m(t)$$

$$=E\{[X(t)-X(s)]E[X(s)]\}+E[X^2(s)]-m^2st$$

$$=m(t-s)ms+\sigma^2 s+m^2s^2-m^2st; \quad (t>s)$$

一般, $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$.

性质2.4.3 独立增量过程的有限维分布由一维分布和增量分布确定.

分析: 对于独立增量过程$\{X(t), t\geq 0\}$,任取的$t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$,

$$Y_1 = X(t_1), Y_2 = X(t_2) - X(t_1), \dots, Y_n = X(t_n) - X(t_{m-1})$$

相互独立性,利用特征函数法可证明结论.(证明见$P27$)

注1: 对于独立增量过程$\{X(t), t\in T=[a,b]\}$,又若$P\{X(a)=0\}=1$

根据$X(t)$的增量分布即可确定有限维分布.

分析: 因对任意$t\in T, X(t) = X(t) - X(a)$,由增量分布确定了一维分布.

注2: 对于平稳独立增量过程$\{X(t), t\in [a,b]\}$,又若$P\{X(a)=0\}=1$

根据$X(t)$的一维分布即可确定有限维分布.

分析: 因增量$X(t_2) - X(t_1)$与$X(t_2 - t_1 + a) = X(t_2 - t_1 + a) - X(a)$同分布.

四、不相关增量过程与正交增量过程

定义2.4.5 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$,若对$t\in T,E[|X(t)|^2]$存在，若对

$t_1<t_2<t_3<t_4\in T$,满足

$$E\left\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\right\}=E[X(t_2)-X(t_1)]E[X(t_4)-X(t_3)]$$

称过程为**不相关增量过程**.

若 $E\{[X(t_2)-X(t_1)][X(t_4)-X(t_3)]\}=0$

称过程为**正交增量过程**.

思考题:

1. 白噪声过程是否一定是独立过程?

2. 独立过程是否是独立增量过程?反之?