随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学　数学科学学院

武德安

第五章马尔可夫过程

马尔可夫过程广泛应用于计算机、通讯、自动控制、随机服务、可靠性、生物学、经济、管理、教育、气象、物理、化学等众多领域。也就是说，这些领域中的许多现象可以用马尔可夫过程来近似描述，从而进行分析。

世界上最大的矩阵计算(Google's PageRank as the stationary distribution of a random walk through the Web.)

A.A.Markov小传: 安德烈●马尔可夫，1856年6月14日生于梁赞，1922年7月20日卒于圣彼得堡。1874年入圣彼得堡大学，受P.L.切比雪夫思想影响很深。1878年毕业，并以《用连分数求微分方程的积分》一文获金质奖章。两年后，取得硕士学位，并任圣彼得堡大学副教授。1884年取得物理-数学博士学位，1886 年任该校教授。1896年被选为圣彼得堡科学院院士。1905年被授予功勋教授称号。马尔可夫是彼得堡数学学派的代表人物。以数论和概率论方面的工作著称。他的主要著作有《概率演算》等。在数论方面，他研究了连分数和二次不定式理论，解决了许多难题。在概率论中，他发展了矩法，扩大了大数律和中心极限定理的应用范图。马尔可夫最重要的工作是在1906—1912年间，提出并研究了一种能用数学分析方法研究自然过程的一般图式——马尔可夫链。同时开创了对一种无后效性的随机过程——马尔可夫过程的研究。

第五章马尔科夫过程

马尔科夫过程是由前苏联数学家A.A.Markov首先提出和研究的一类随机过程,已成为内容丰富,理论较完善,应用十分广泛的一门数学分支,应用涉及计算机、自动控制、通信、生物学、经济、气象、物理、化学等等.

一、马尔科夫性及定义

在已知系统现在所处状态下,系统将来的演变与过去无关,称为**无后效性**.

1. 例如生物基因遗传从这一代到下一代的转移仅依赖当代而与以往各代无关;
2. 某公司的经营状况具有无后效性;
3. 评估一个计算机系统的性能时,若系统将来的状态,仅依赖于目前所处的状态,而与过去的状态无关;
4. 股票的交易行情也具有无后效性.

与平稳过程的本质差别:

平稳过程具有平稳性：它的统计特性不随时间的推移而改变,它的变化情况与过去的情况有不可忽视的联系.

定义5.1.1 随机过程$\{X(t),t\in T\}$,如果对于任意取定参数$t_1<t_2<\ldots<t_n$,有

$$P\{X(t_n)\le x_n\mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$
$$=P\{X(t_n)\le x_n\mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}\quad(1)$$

称$\{X(t),t\in T\}$为**马氏过程**.由条件分布函数定义，(1)式等价于

$$F(x_n;t_n\mid x_1,\cdots,x_{n-1};t_1,\cdots,t_{n-1})=F(x_n;t_n\mid x_{n-1};t_{n-1})$$

(1)式等价于

$$f(x_n;t_n\mid x_1,\cdots,x_{n-1};t_1,\cdots,t_{n-1})=f(x_n;t_n\mid x_{n-1};t_{n-1})$$

$$P\{X_n=x_n;t_n\mid x_1,\cdots,x_{n-1};t_1,\cdots,t_{n-1}\}=P\{X_n=x;t_n\mid x_{n-1};t_{n-1}\}$$

二、满足马氏性的过程

定理5.1.1 独立过程$\{X(t),t\in T\}$是马氏过程;

证: 1)对于$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$,因$X(t_1)\ldots X(t_n)$相互独立,

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\ldots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n,X(t_1)=x_1\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n\}P\{X(t_1)=x\}\cdots P\{X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x\}\cdots P\{X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

$$=P\{X(t_n)\le x_n\}=P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

定理5.1.2 独立增量过程$\{Y(t),t\in T\},T=[a,b],a>-\infty$,

且初始分布$P\{Y(a)=0\}=1$,则$\{Y(t),t\in T\}$是马氏过程.

证: 对于任意的$t_1<t_2<\ldots<t_n$,需证

$$P\{Y(t_n)\le y_n \mid Y(t_1)=y_1,Y(t_2)=y_2,\cdots Y(t_{n-1})=y_{n-1}\}$$

$$=P\{Y(t_n)\le y_n \mid Y(t_{n-1})=y_{n-1}\}$$

因增量$Y(t)-Y(t_n),Y(t_1)-Y(a)=Y(t_1),Y(t_2)-Y(t_1),\ldots,Y(t_n)-Y(t_{n-1})$相互独立,

$$P\{Y(t_n)\le y_n \mid Y(t_1)=y_1,Y(t_2)=y_2,\cdots Y(t_{n-1})=y_{n-1}\}$$

$$=P\left\{Y(t_n)-Y(t_{n-1})\le y_n-y_{n-1} \mid Y(t_1)-Y(a)=y_1,\ Y(t_2)-Y(t_1)=y_2-y_1,\cdots Y(t_{n-1})-Y(t_{n-2})=y_{n-1}-y_{n-2}\right\}$$

$$=P\{Y(t_n)-Y(t_{n-1})\le y_n-y_{n-1}\}=P\{Y(t_n)-Y(t_{n-1})\le y_n-y_{n-1} \mid Y(t_{n-1})=y_{n-1}\}$$

$$=P\{Y(t_n)\le y_n \mid Y(t_{n-1})=y_{n-1}\}$$

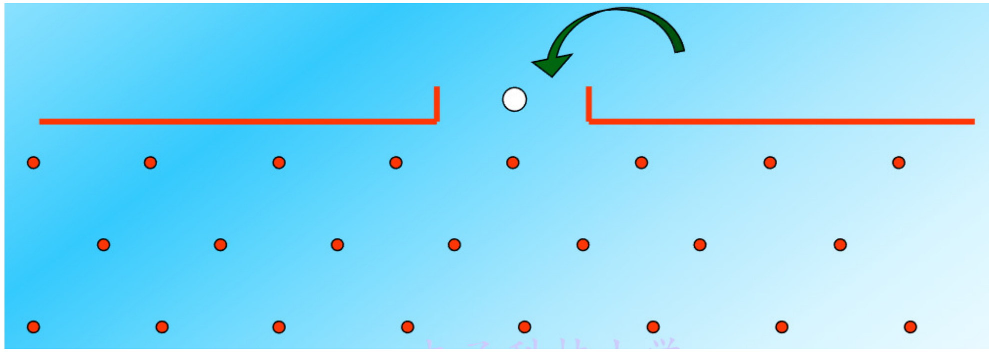
$\boxed{\text{因}Y(t_n)-Y(t_{n-1})\text{ 与 }Y(t_{n-1})=Y(t_{n-1})-Y(a)\text{相互独立}}$

即将来状态与过去状态无关,故独立增量过程$\{Y(t),t\in T\}$是马氏过程.

Eg. 1 因泊松过程是平稳独立增量过程且$N(0)=0$,故泊松过程是马尔科夫过程;

Eg. 2 设随机过程$\{X(n), n\geq 1\}$,$X(n)$是第n次投掷一颗骰子出现的点数,则是独 立过程,从而是马氏过程.

Eg.3 随机游动(高尔顿钓板试验)将一个小球投入无限大高尔顿钉板内，小球各以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



$$X(k)=\begin{cases} 1, & \text{在第 } k \text{ 层向右位移一格} \\ -1, & \text{在第 } k \text{ 层向左位移一格.} \end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

$\{X(k), k\in N^+\}$是一个独立随机过程,令

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),$$

随机游动n步所处的状态

$\{Y(n), n\in N^+\}$是一个平稳独立增量过程. $\{Y(n), n\in N^+\}$是**马氏过程**。

维纳过程也是独立平稳增量过程,且$W(0)=0$,故维纳过程是马尔科夫过程.

三、马氏过程的有限维分布族

定义5.1.2 对任意$s,t\in T$,记

$$P(s,t;x,y)=P\{X(t)\le y\mid X(s)=x\},$$

称为马氏过程$\{X(t),t\in T\}$的**转移分布函数**.

(1) 若马氏过程$\{X(t),t\in T\}$的状态空间是连续的,则其有限维概率密度可表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f(x_1;t_1)f(x_2;t_2\mid x_1;t_1)\cdots f(x_{n-1};t_{n-1}\mid x_{n-2};t_{n-2})$$
$$\cdots\times f(x_n;t_n\mid x_{n-1};t_{n-1})$$

是条件概率密度与t_1时刻的初始概率密度的乘积.称$f(x_n;t_n\mid x_{n-1};t_{n-1})$为**转移概率密度**.

(2) 若马氏过程$\{X(t),t\in T\}$的状态空间是离散的,则其有限维联合分布律为

$$P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n\}=P\{X(t_1)=x_1\}P\{X(t_2)=x_2\mid X(t_1)=x_1\}\cdots$$
$$\times P\{X(t_n)=x_n\mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

称$P\{X(t_n)=x_n\mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$为**转移概率**.

注: 马氏过程的研究重点是讨论条件分布和初始分布.

定义：转移概率函数

给定马氏过程$\{X(t), t \in \mathbb{T}\}$，条件概率

$$p(s,t;x,y) := \mathrm{P}\{X(t) < y | X(s) = x\}$$

称为马氏过程的**转移概率函数**.

按状态空间E与参数集T来分类

		参数集 T	
		离散	连续
状态空间 E	离散	离散参数马氏链	连续参数马氏链
	连续	离散参数马氏过程	连续参数马氏过程

马氏过程的例子

✍例1：一维随机游动.$\Leftarrow$ 马氏过程

✍例2：独立过程.$\Leftarrow$ 马氏过程. 特例Bernoulli随机序列.

✍例3：独立增量过程. $\Leftarrow$ 马氏过程

✍例4：Wiener过程. $\Leftarrow$ 马氏过程

✍例5：Poisson过程. $\Leftarrow$ 马氏过程

例： 设$\{Y(t),t\geq 0\}$是独立增量过程,且$Y(0)=0$,证明$\{Y(t),t\geq 0\}$是一个马尔可夫过程

证明思路： 由独立增量过程的定义知，当$t_j<t_n,j=1,2,\cdots,n-1$时,

增量$Y(t_j)-Y(0)$与$Y(t_n)-Y(t_{n-1})$相互独立。

即有$Y(t_{n-1})-Y(0)$与$Y(t_n)-Y(t_{n-1})$相互独立.$Y(t_{n-1})$与$Y(t_n)-Y(t_{n-1})$相互独立.

以上表明$Y(t)$具有无后效性即$\{Y(t),t\geq 0\}$是一个马尔可夫过程。

说明： 泊松过程是时间连续，状态散的马氏过程；

维纳过程是时间连续，状态连续的马氏过程.

思考题:

1) 如何理解马氏过程的马氏性?如何验证过程的马氏性?

2) 马氏过程的分布和数字特征有什么特点?