

组合优化理论

第2章 对偶单纯形法

主讲教师：陈安龙

本讲主要内容

- (1) 原问题与对偶问题的相关概念
- (2) 原问题与对偶问题的关系
- (3) 对偶问题的最优解
- (4) 对偶单纯形法求最优解

一、问题的提出

对偶性是线性规划问题的最重要的内容之一。每一个线性规划（LP）必然有与之相伴而生的另一个线性规划问题，即任何一个求 $\max Z$ 的LP都有一个求 $\min Z$ 的LP。其中的一个问题叫“原问题”，记为“P”，另一个称为“对偶问题”，记为“D”。

例1、资源的合理利用问题

已知资料如表所示，问应如何

安排生产计划使得既能充分利用现有资源又使总利润最大？

单件消耗资源 \ 产品	甲	乙	资源限制
A	5	2	170（钢材）
B	2	3	100（煤炭）
C	1	5	150（设备）
单件利润	10	18	

数学模型：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{原问题})$$

下面从另一个角度来讨论这个问题：

假定：该厂的决策者不是考虑自己生产甲、乙两种产品，而是将厂里的现有资源用于接受外来加工任务，只收取加工费。
试问该决策者应制定怎样的收费标准（合理的）？

分析问题：

- 1、每种资源收回的费用不能低于自己生产时的可获利润；
- 2、定价又不能太高，要使对方能够接受。

$$y_1, y_2, y_3 \quad \text{三}$$

有下式（从工厂角度）：

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10$$

$$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

目标函数（针对外部用户），用下式可以表达：

$$W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

对外加工用户， W 越小越好，所以

$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$ 为最好。

该问题的数学模型为：

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{对偶问题})$$

模型对比:

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{原问题})$$

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{对偶问题})$$

对偶问题的形式

定义 设原线性规划问题为

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ \text{s.t} & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \end{array}$$

则称下列线性规划问题

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\ \text{s.t} & \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases} \end{array}$$

为其对偶问题，其中 $y_i (i=1,2,\dots,m)$ 称为对偶变量。

上述对偶问题称为对称型对偶问题。

原问题简记为(P)，对偶问题简记为(D)

对偶问题的矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

$$Y = [y_1, y_2, \cdots, y_m]$$

原始问题 (P)

$$\text{Max } Z = CX$$

$$\text{s.t. } AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

对偶问题 (D)

$$\text{Min } W = Yb$$

$$\text{s.t. } YA \geq C$$

$$Y \geq 0$$

原始问题与对偶问题的对应关系

Min W		Max Z				
		$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$...	$x_n \geq 0$	
		x_1	x_2	...	x_n	
$y_1 \geq 0$	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$
$y_2 \geq 0$	y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$y_m \geq 0$	y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$...	$\geq c_m$	

例1：求线性规划问题的对偶规划

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

解：由原问题的结构可知为对称型对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & w = 7y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

例2：求线性规划问题的对偶规划

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 - 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

解：由原问题的结构可知不是对称型对偶问题，可先化为对称型，再求其对偶规划。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 - 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -4x_1 - x_2 \leq -9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & W = 7y_1 - 9y_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 - y_2 \geq -6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

继续上页

得到对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & W = 7y_1 - 9y_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 - y_2 \geq -6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$y'_2 = -y_2$$



$$\begin{array}{ll} \text{Min} & W = 7y_1 + 9y'_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3y_1 + 4y'_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y'_2 \geq -6 \\ y_1 \geq 0, y'_2 \leq 0 \end{cases} \end{array}$$



原问题:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 - 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

例3：求线性规划问题的对偶规划

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

解：由原问题的结构可知不是对称型对偶问题，
可先化为对称型，再求其对偶规划。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

上式已为对称型对偶问题，故可写出它的对偶规划

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = 7y'_1 - 7y''_1 + 9y_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3y'_1 - 3y''_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y'_1 + 2y''_1 + y_2 \geq 6 \\ y'_1, y''_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

令 $y_1 = y'_1 - y''_1$ 则上式化为

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = 7y_1 + 9y_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1 \text{ 无限制}, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t} & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

对偶关系对应表

原始问题（对偶问题）		对偶问题（原始问题）	
目标函数 \max		目标函数 \min	
系数矩阵 A		系数矩阵 A^T	
目标函数系数为 C		常数列向量为 C^T	
常数列向量为 b		目标函数系数为 b^T	
约束条件	m 个	m 个	对偶变量
	\leq 型(第 i 个)	$y_i \geq 0$	
	$=$ 型(第 i 个)	无限制	
	\geq 型(第 i 个)	$y_i \leq 0$	
决策变量	n 个	n 个	约束条件
	$x_j \geq 0$	\leq 型(第 j 个)	
	$x_j \leq 0$	\geq 型(第 j 个)	
	无限制	$=$ 型(第 j 个)	



非规范形式下的原问题与对偶问题

(1) 变量取值范围不符合非负要求的情况

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \leq b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \geq c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \geq c_2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \leq b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \geq c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \leq c_2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \leq b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ 无约束} \end{cases}$$

$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \geq c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 = c_2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2) 约束方程不是 “ \leq ” 的情况

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \leq b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \leq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \geq c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \geq c_2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \leq b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \geq b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \geq c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \geq c_2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \leq b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 = b_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

$$s.t. \begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \geq c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \geq c_2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{ 无约束} \end{cases}$$

写出下列问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

对偶变量

y_1

y_2

y_3

$$\begin{aligned} \min w &= 2y_1 + y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \leq 4 \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

变量

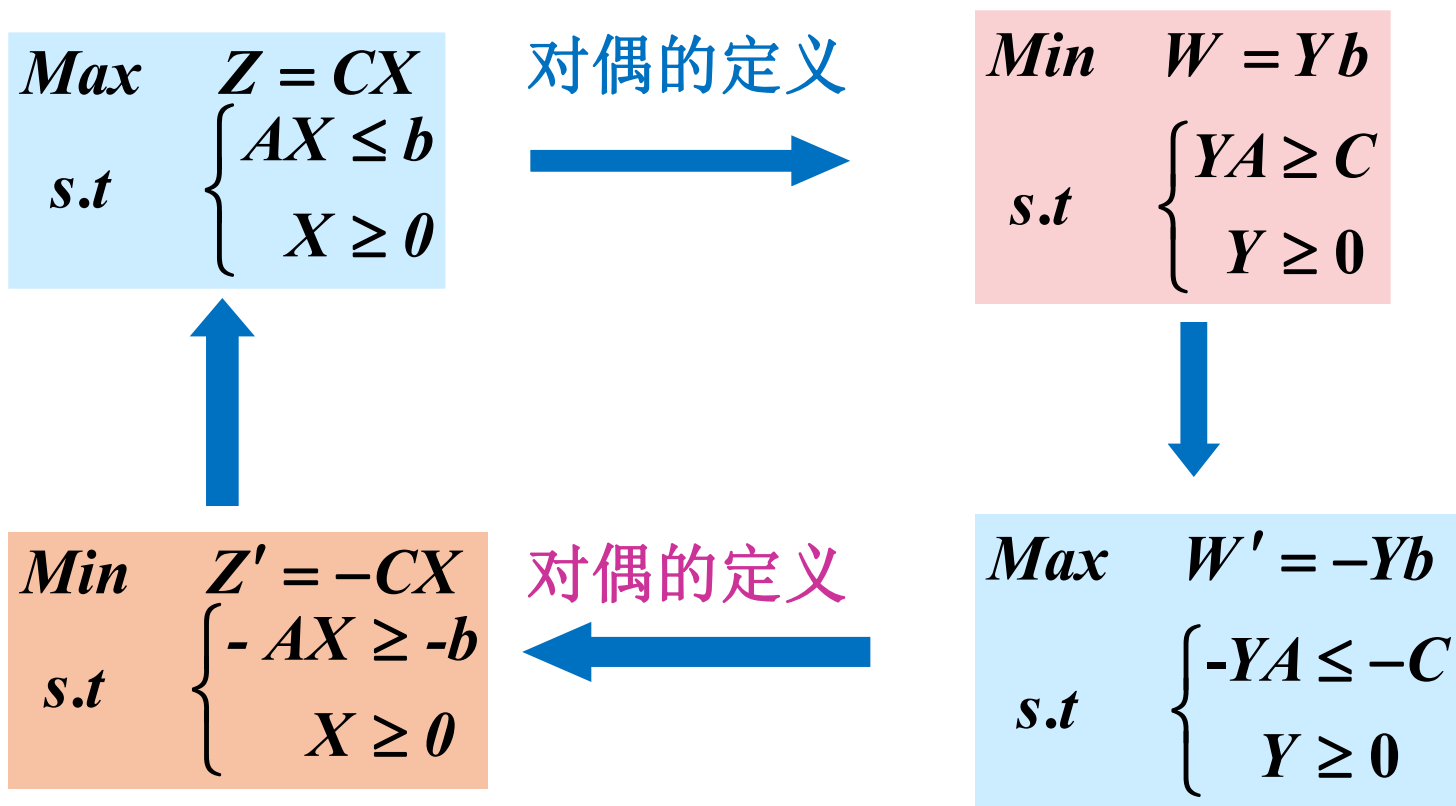
$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 0$

x_3 无约束

对偶问题的基本性质

定理1 对偶问题(D)的对偶就是原问题(P)。



假设线性规划的原问题和对偶问题分别为

$$\max S = CX$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

(P)

和

$$\min W = Yb$$

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

(D)

定理2 (弱对偶定理)

若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D)的任意可行解, 则有 $CX \leq Yb$ 成立。

证明:

$$\begin{cases} AX \leq b \\ YA \geq C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} YAX \leq Yb \\ YAX \geq CX \end{cases} \Rightarrow CX \leq Yb$$

推论1 若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D) 的一对可行解, 则问题(P)及问题(D)的都有最优解。

证明: 当 X 和 Y 为原问题和对偶问题的一个可行解

有

$$AX \leq b$$

$$YA \geq C$$

$$YAX \leq Yb$$

$$YAX \geq CX$$

原问题目标函数值

$$CX \leq YAX \leq Yb$$

对偶问题目标函数值

结论:

(1) **最大值原问题**的任意可行解的目标函数值是其**对偶问题最优值的下界**.

(2) **最小值对偶问题**的任意可行解的目标函数值对应的目标函数值是其**原问题最优值的上界**.

推论2: 若原问题(P)有可行解, 但无有限最优解, 则对偶问题(D)无可行解。

证明: 使用反证法: 假设原问题(P)有可行解, 对偶问题(D)也存在可行解

由推论1知, 原问题(P)和对偶问题(D)都有最优解, 则与原问题无最优解矛盾。

定理3: 若 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的可行解, 且有 $CX^*=Y^*b$, 则 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的**最优解**.

证明: 设 X 是原始问题的任一可行解

由推论1可得

$$\begin{array}{l} \text{又已知} \\ \left. \begin{array}{l} CX \leq Y^*b \\ CX^* = Y^*b \end{array} \right\} \Rightarrow CX \leq CX^* \end{array}$$

由 X 的任意性可知, X^* 是原始问题的最优解.

同理可证 Y^* 是对偶问题的最优解.

说明: 原问题和对偶问题的最优值相等, $CX^*=Y^*b$.

定理 4: (强对偶定理) 如果原问题P有最优解, 那么对偶问题D也有最优解, 且**目标函数值相等**。

证明: 假设有原问题P和对偶问题D:

$$(P) \quad \text{Max} \quad Z = CX$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \quad \text{Min} \quad W = Yb$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

设 X^* 是原始问题的最优解, 它对应的最优基为 B , 则相应的基变量为: $X_B^* = B^{-1}b$,

最优值为 $\text{Max } S = CX^* = C_B B^{-1}b$ **检验数为:** $C - C_B B^{-1}A \leq 0$

令 $Y^* = C_B B^{-1}$ 则 $Y^* A \geq C$ 即 Y^* 是对偶问题的一个**可行解**,

而 $Y^* b = C_B B^{-1}b = CX^*$ 由定理3知, Y^* 是对偶问题的最优解.

原问题与对偶问题的关系，有且仅有下列三种：

- 1. 两个都有最优解，且目标函数最优值相等；**
- 2. 两个都无可行解；**
- 3. 一个问题无界，则另一问题无可行解。**

例：已知线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

试用对偶理论证明该问题无最优解。

解：写出对偶问题，

$$\begin{aligned} \min w &= 2y_1 + y_2 \\ \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若原问题有最优解，
则对偶问题也有最优解，
但是观察可知，对偶问题无可行解，更不会有最优解，
故原问题无最优解。

定理5: 若原始问题的最优解存在, 则用单纯形法求解时, 其**对偶问题的最优解**可同时在最优单纯形表上得到, 且**顺次等于松弛变量或剩余变量对应的检验数的相反数**.

证明: 设原问题和对偶问题分别为

$$\max S = CX$$

$$\min W = Yb$$

$$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

引入剩余变量和松弛变量, 将约束条件标准化, 得到

$$\max S = CX$$

$$\min W = Yb$$

$$\begin{cases} AX + X_s = b \\ X, X_s \geq 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} YA - Y_s = C \\ Y, Y_s \geq 0 \end{cases}$$

设 B 是原问题的最优基，且

$$A = (B \ N), X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}, \quad C = (C_B \ C_N),$$

则有

$$S = C_B X_B + C_N X_N$$

→ 目标函数

及

$$BX_B + NX_N + X_s = b$$

→ 约束方程

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N - B^{-1}X_s$$

$$\Rightarrow S = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N - C_B B^{-1}X_s$$

则原问题的最优值为: $\max S = C_B B^{-1}b$

再来看对偶问题：

$$\begin{aligned} \min W &= Yb \\ \begin{cases} YA - Y_S = C \\ Y, Y_S \geq O \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} YB - Y_{S_1} = C_B & \Rightarrow Y = Y_{S_1} B^{-1} + C_B B^{-1} \\ YN - Y_{S_2} = C_N & \Rightarrow Y_{S_2} = C_B B^{-1} N - C_N \\ Y, Y_{S_1}, Y_{S_2} \geq O \end{cases} \end{aligned}$$

$$\min W = Yb = (Y_{S_1} B^{-1} + C_B B^{-1})b = Y_{S_1} B^{-1} b + C_B B^{-1} b$$


由强对偶定理知：

$$\min W = \max S = Y_{S_1} B^{-1} b + C_B B^{-1} b = C_B B^{-1} b$$


$$\Rightarrow Y_{S_1} = 0 \Rightarrow Y = C_B B^{-1}$$

$$S = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N - C_B B^{-1} X_s$$


		X_B	X_N	X_s
S	$C_B B^{-1} b$	O	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$



$-Y_{S_1}$



$-Y_{S_2}$



$-Y$

其中, Y_{S_1} 是的剩余变量, 对应原问题中基变量 X_B ,

Y_{S_2} 是的剩余变量, 对应原问题中非基变量 X_N .

原问题单纯形表的检验数行

		X_B	X_N	X_s
S	$C_B B^{-1}b$	O	$C_N - C_B B^{-1}N$	$-C_B B^{-1}$

$$-Y_{S_1}$$

$$-Y_{S_2}$$

$$-Y^*$$

构成对偶问题的基可行解

$$Y = (Y^*, Y_{S_1}, Y_{S_2})$$

- 1、若所有分量都大于零，则该解是对偶问题的一个基本可行解；
- 2、若是最优单纯形表，则该解是对偶问题的最优解。

定理6（互补松弛定理） 若 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的可行解，且 X_s 和 Y_s 分别为它们的松弛变量和剩余弛变量，则 $Y^* X_s = 0$ 和 $Y_s X^* = 0$ 当且仅当 X^* 和 Y^* 分别为它们的最优解。

证明：必要性

$$AX^* \leq b \Rightarrow AX^* + X_s = b \Rightarrow Y^* AX^* + Y^* X_s = Y^* b$$

$$Y^* A \geq C \Rightarrow Y^* A - Y_s = C \Rightarrow Y^* AX^* - Y_s X^* = CX^*$$

两式相减得：

$$Y^* X_s + Y_s X^* = CX^* - Y^* b$$

若 $Y^* X_s = Y_s X^* = 0$ ，则有 $CX^* = Y^* b$

由定理可知， X^* 、 Y^* 分别是原问题和对偶问题的最优解。

下证充分性.

若 X^* 、 Y^* 分别是原问题和对偶问题的最优解,

则

$$CX^* = Y^*b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{由必要性证明可知: } Y^*X_s + Y_sX^* = CX^* - Y^*b \\ CX^* = Y^*b \end{array} \right\} \Rightarrow Y^*X_s + Y_sX^* = 0$$

又 $X^*、Y^*、X_s、Y_s \geq 0$

故 $Y^*X_s = 0, Y_sX^* = 0.$

原始问题和对偶问题变量、松弛变量的维数

$$\text{Max } Z=CX$$

$$\text{s.t. } AX+X_S=b$$

$$X, X_S \geq 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \overbrace{\hspace{2cm}}^n & \overbrace{\hspace{1cm}}^m & \\ \hline & \text{cyan box with } X & \text{green box with } X_S & \\ \hline \underbrace{\hspace{1cm}}_m & \text{cyan box with } A & \text{green box with } I & = \text{yellow box with } b \end{array}$$

$$\text{Min } W=Yb$$

$$\text{s.t. } YA-Y_S=C$$

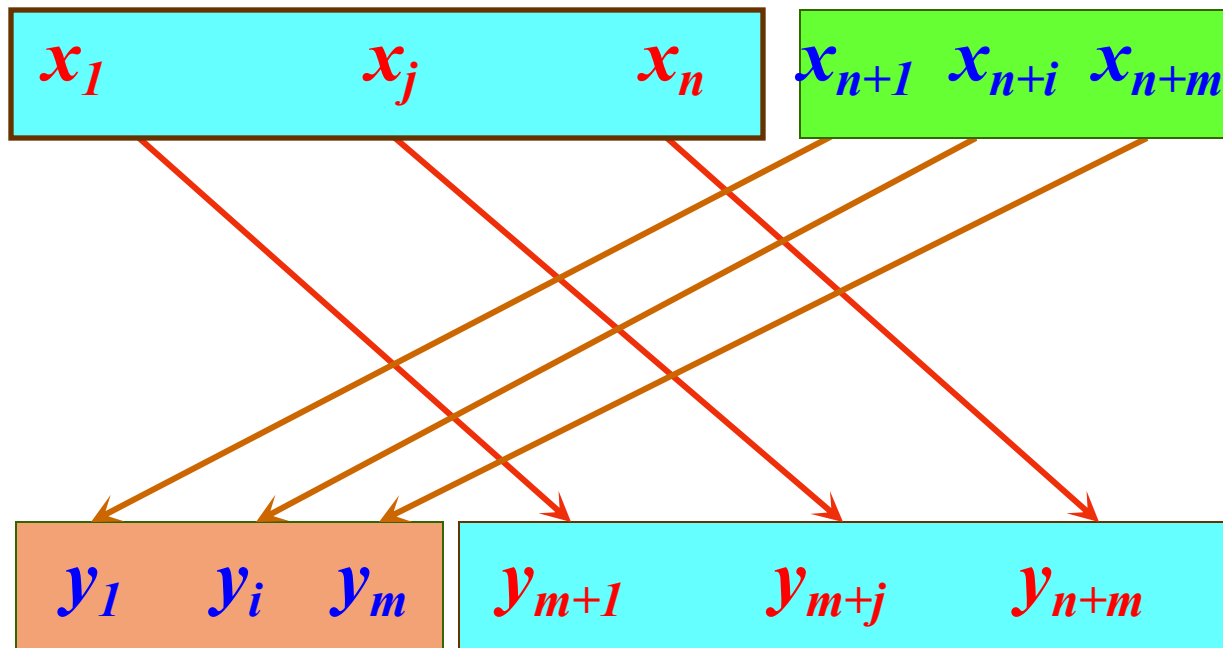
$$W, W_S \geq 0$$

$$XY_S=0$$

$$X_S Y=0$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{green box with } Y & \text{cyan box with } Y_S & \\ \hline \underbrace{\hspace{1cm}}_n & \text{green box with } A^T & \text{cyan box with } -I & = \text{yellow box with } C \\ \hline & \underbrace{\hspace{1cm}}_m & \underbrace{\hspace{2cm}}_n & \end{array}$$

原始问题的变量 原始问题的松弛变量



对偶问题的变量 对偶问题的松弛变量

$$x_j y_{m+j} = 0 \quad y_i x_{n+i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个一定等于0

例、已知原问题的最优解为
 $\mathbf{X}^* = (0, 0, 4)^T$, $Z=12$ 。
试求对偶问题的最优解。

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

解：

$$\begin{aligned} \min W &= 2y_1 + y_2 + 4y_3 \\ \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1 & (1) \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \leq 4 & (2) \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 & (3) \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

将原问题转化如下标准形式, $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ 为松弛变量

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{无约束}, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

因为 $X^* = (0, 0, 4)^T$ 是原问题最优解, 则: $x_1=0, x_2=0, x_3=4$

代入上述约束方程组得: $x_4=22, x_5=25, x_6=0$

$$X = (\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{X^*}, \overbrace{x_4, x_5, x_6}^{X_s})$$

$$Y = (\overbrace{y_1, y_2, y_3}^{Y^*}, \overbrace{y_4, y_5, y_6}^{Y_s})$$

所以, 根据互补松弛条件, 必有 $y_1^* = y_2^* = 0$, 代入对偶问题 (3) 式, $y_3^* = 3$ 。因此, 对偶问题的最优解为 $Y^* = (0, 0, 3)$, $W=12$ 。

对偶单纯形法

对偶单纯形法是应用**对偶原理**求解原始线性规划的一种方法——在原始问题的单纯形表格上进行**对偶处理**。

注意：不是解对偶问题的单纯形法！

对偶单纯形法的基本思想

1、对“单纯形法”求解过程认识的提升

从更高的层次理解单纯形法

初始可行基（对应一个初始基本可行解）

→迭代→另一个可行基（对应另一个基本可行解），
直至所有检验数 ≤ 0 为止。

所有检验数 ≤ 0 意味着

$$C_N - C_B B^{-1} N \leq 0 \Rightarrow YA \geq C, \quad ,$$

说明原始问题的最优基也是对偶问题的可行基。

换言之，当原始问题的基B既是原始可行基又是对偶可行基时，**B成为最优基**。

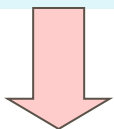
定理7 B是线性规划的最优基的充要条件是：B是可行基，同时也是对偶可行基。

LP原问题:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \mathbf{C}\mathbf{X} \\ \text{s.t. } \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

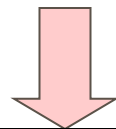
若 \mathbf{B} 是 \mathbf{A} 中的一个基

可行基



\mathbf{B} 对应的解是基可行解, 则 \mathbf{B} 是可行基

对偶可行基



若单纯形乘子 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ 是对偶问题的可行解, 则 \mathbf{B} 是对偶可行基

$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$ 是对偶问题的可行解

等价

检验数 $\sigma_N \leq 0$

$$\mathbf{Y}\mathbf{A} \geq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq 0 \rightarrow \sigma_N \leq 0$$

证明:

$$\mathbf{C} - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_B \dot{:} \mathbf{C}_N) - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B} \dot{:} \mathbf{N}) \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_B \dot{:} \mathbf{C}_N) - (\mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \dot{:} \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \dot{:} \mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_B - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_N - \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \leq \mathbf{0}$$



$$\sigma_N \leq 0$$



对偶单纯形法的基本思路:

原问题基可行解

最优解判断

$$b^* = B^{-1}b \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_j = c_j - z_j \leq 0$$

对偶问题
最优解判断

对偶问题的可行解

对偶单纯形法
基本思路

计算步骤:

求解如右的 LP 问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Step1 建立初始单纯形表, 计算检验数行。

所有决策变量

$c_j \rightarrow$			c_1	...	c_m	...	c_j	...	c_n
C_B	基	$B^{-1}b$	x_1	...	x_m	...	x_j	...	x_n
c_1	x_1	b^*_1	1	...	0	...	a_{1j}	...	a_{1n}
c_2	x_2	b^*_2	0	...	0	...	a_{2j}	...	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
c_m	x_m	b^*_m	0	...	1	...	a_{mj}	...	a_{mn}
$\sigma_j = c_j - z_j$			0	...	0	...	$c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$...	$c_n - \sum_{i=1}^m c_i a_{in}$

基
向量
数字

非基
向量
数字

检验数

σ_j 小于等于零

Step 2 若 $b^* = B^{-1}b \geq 0$ ，则停止计算，当前的解 $x = B^{-1}b$ 即为原问题的最优解，否则转入下一步；

Step 3 确定换出基变量： 令 $b_l^* = \min \{b_i^* \mid 1 \leq i \leq m\}$

则取 x_l 为换出基变量；

$$\delta_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$$

Step 4 若 $a_{lj}^* \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 则停止计算，原问题无可行解，否则转入下一步；

Step 5 确定换入基变量：若 $\theta = \min \left\{ \frac{\sigma_j}{a_{lj}^*} \mid a_{lj}^* < 0, 1 \leq j \leq n \right\} = \frac{\sigma_k}{a_{lk}^*}$

则取 x_k 为换入基变量

Step 6 以 a_{lk}^* 为主元，将主元素变成1，主元列变成单位向量，得到新的单纯形表。

循环以上步骤，直至求出最优解。

3、举例——用对偶单纯形法求解LP:

$$\text{Min } W = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

化为标准型 →

$$\text{Max } Z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

将两个等式约束两边分别乘以-1，得

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t. } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

以此形式进行列表求解，
满足对偶单纯形法的基本
条件，具体如下：

$C_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0
$C_B \quad X_B \quad b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0 x_4 -3	-1	-2	-1	1	0
0 x_5 -4	-2	1	-3	0	1
$C_j - Z_j$	-2	-3	-4	0	0

换出变量 x_5 $\theta = \min \left\{ \frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3} \right\} = 1$ 换入变量 x_1

$C_j \rightarrow$	-2	-3	-4	0	0	
$C_B \quad X_B \quad b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 x_4 -3	-1	-2	-1	1	0	
0 x_5 -4	[-2]	1	-3	0	1	
$C_j - Z_j$	-2	-3	-4	0	0	
0 x_4 -1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2	
-2 x_1 2	1	-1/2	3/2	0	-1/2	
$C_j - Z_j$	0	-4	-1	0	-1	
-3 x_2 2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5	
-2 x_1 11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5	
$C_j - Z_j$	0	0	-9/5	-8/5	-1/5	

C_B	X_B	c_j x_j	-2	-3	-4	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
$c_j - z_j$		0	0	0	-3/5	-8/5	-1/5
<p>最优解： $X^*=(11/5, 2/5, 0, 0, 0)^T$,</p> <p>最优值： $\min W = -\max Z^* = -[11/5 \times (-2) + 2/5 \times (-3)] = 28/5$</p>							

例: $Max z = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 20 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, \text{对一切 } j \end{cases}$$

C_j			-6	-3	-2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-20	-1	-1	-1	1	0	0
0	x_5	-6	-1/2	-1/2	-1/4	0	1	0
0	x_6	-10	-2	-1	-1	0	0	1
Z_j			0	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$			-6	-3	-2	0	0	0

找到一个满足最优检验的初始基本解

检验当前解不可行，选择 b 最小一行的变量作为换出变量；
换入变量 $\min\{c_j - z_j / a_{ij}\}$

检验当前解不可行，选择**b最小一行**的变量作为换出变量；
换入变量 $\min\{c_j - z_j / a_{ij}\}$

C_j			-6	-3	-2	0	0	0
C_B	X_B	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-2	X_3	20	1	1	1	-1	0	0
0	X_5	-1	-1/4	-1/4	0	-1/4	1	0
0	X_6	10	1	0	0	-1	0	1
Z_j			-2	-2	-2	2	0	0
$C_j - Z_j$			-4	-1	0	-2	0	0

C_j			-6	-3	-2	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	x_3	16	0	0	1	-2	4	0
-3	x_2	4	1	1	0	1	-4	0
0	x_6	10	-1	0	0	-1	0	1
Z_j			-3	-3	-2	1	4	0
$C_j - Z_j$			-3	0	0	-1	-4	0

最优解： $X^*=(0,4, 16, 0, 0,10)^T$,

最优值： $\max Z^* = -[4 \times (-3)+16 \times (-2)]= 44$