电子科技大学

课 程 作 业

课程名称：组合优化理论

学生姓名：何澜欣

学　　号：202322090626

指导教师：陈安龙

名单序号：152

信息与软件工程学院

2023 年秋《组合优化理论》作业

202322090626 何澜欣

1. $\max z=\sum_{i=1}^{7} x_i c_i$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{7} w_i x_i \le W\\ \sum_{i=1}^{7} v_i x_i \le V\\ x_1+x_3\le 1\\ x_2+x_4\ge 1\\ x_5=x_6\\ x_i=\begin{cases}1, 安装\\ 0\ 不安装\end{cases} \quad i=1,2,\cdots 7\end{cases}$$

2. 设 x_{ij} 表示商品 i 能装入船舱 j x_{ij} 件，$i=1,2,3$ 分别表示商品 A, B, C；$j=1,2,3$ 分别表示前舱，中舱，后舱.

$\max z=1200(x_{11}+x_{12}+x_{13})+800(x_{21}+x_{22}+x_{23})+700(x_{31}+x_{32}+x_{33})$

$$s.t.\begin{cases}10x_{11}+5x_{21}+7x_{31}\le 4000,\ 10x_{12}+5x_{22}+7x_{32}\le 5400,\ 10x_{13}+5x_{23}+7x_{33}\le 1500\\ 8x_{11}+6x_{21}+5x_{31}\le 2000,\ 8x_{12}+6x_{22}+5x_{32}\le 3000,\ 8x_{13}+6x_{23}+5x_{33}\le 1500\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 600,\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 1000,\ x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 800\\ |8x_{11}+6x_{21}+5x_{31}-8x_{12}-6x_{22}-5x_{32}|\le 0.1x\\ |8x_{13}+6x_{23}+5x_{33}-8x_{12}-6x_{22}-5x_{32}|\le 0.1x\\ |8x_{11}+6x_{21}+5x_{31}-8x_{13}-6x_{23}-5x_{33}|\le 0.05x\\ x_{ij}\ge 0 且均为整数, i=1,2,3; j=1,2,3\end{cases}$$

3. 设x_{ij}表示作业J_i在处理机P_j上开始加工的时间，

每一作业在处理机上加工顺序：

J_1：$x_{11}+9\le x_{13}$，$x_{13}+4\le x_{14}$

J_2：$x_{21}+6\le x_{22}$，$x_{22}+8\le x_{24}$

J_3：$x_{32}+6\le x_{33}$

引入0-1变量y_1, y_2, y_3, y_4，对处理机有：

$x_{11}+9\le x_{21}+My_1$，$x_{21}+6\le x_{11}+M(1-y_1)$

$x_{22}+8\le x_{32}+My_2$，$x_{32}+6\le x_{22}+M(1-y_2)$

$x_{13}+4\le x_{33}+My_3$，$x_{33}+7\le x_{13}+M(1-y_3)$

$x_{14}+5\le x_{24}+My_4$，$x_{24}+7\le x_{14}+M(1-y_4)$

~~第~~三个作业的完工时间：

$C_{max}=\max\{x_{14}+5, x_{24}+7, x_{33}+7\}$

线性约束：$x_{14}+5\le C$，$x_{24}+7\le C$，$x_{33}+7\le C$

目标函数：$\min f=C$.

4、对偶问题:

$\max W=2y_1+3y_2 \xrightarrow{\text{标准化}} \max W=2y_1+3y_2+0y_3+0y_4+0y_5+0y_6+0y_7$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_2\le 3 \\ y_1+y_2\le 4 \\ y_1-y_2\le 2 \\ -5y_1+y_2\le 4 \\ 3y_1+2y_2\le 9 \\ y_1,y_2\ge 0 \end{cases} \qquad \text{s.t.}\begin{cases} y_2+y_3=3 \\ y_1+y_2+y_4=4 \\ y_1-y_2+y_5=2 \\ -5y_1+y_2+y_6=4 \\ 3y_1+2y_2+y_7=9 \\ y_1,\cdots y_7\ge 0 \end{cases}$$

$c_j\to$			2	3	0	0	0	0	0
C_B	Y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
0	y_3	3	0	$\boxed{1}$	1	0	0	0	0
0	y_4	4	1	1	0	1	0	0	0
0	y_5	2	1	-1	0	0	1	0	0
0	y_6	5	-5	1	0	0	0	1	0
0	y_7	9	3	2	0	0	0	0	1
c_j-z_j			2	3	0	0	0	0	0

$\theta=\min\{\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{5}{1},\frac{9}{2}\}=3.$

正交变换→

$c_j\to$			2	3	0	0	0	0	0
C_B	Y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
3	y_2	3	0	1	1	0	0	0	0
0	y_4	1	$\boxed{1}$	0	-1	1	0	0	0
0	y_5	5	1	0	1	0	1	0	0
0	y_6	2	-5	0	-1	0	0	1	0
0	y_7	3	3	0	-2	0	0	0	1
c_j-z_j			2	0	-3	0	0	0	0

$\theta=\min\{\frac{1}{1},\frac{5}{1},\frac{3}{3}\}=1$

正交变换→

$c_j\to$			2	3	0	0	0	0	0
C_B	Y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
3	y_2	3	0	1	1	0	0	0	0
2	y_1	1	1	0	-1	1	0	0	0
0	y_5	4	0	0	2	-1	1	0	0
0	y_6	7	0	0	-6	5	0	1	0
0	y_7	0	0	0	1	-3	0	0	1
c_j-z_j			0	0	-1	-2	0	0	0

此时$\delta_j=c_j-z_j$都≤ 0，停止计算。

对偶问题最优解为:

$(1,3,0,0,4,7,0)$

$W=2\times1+3\times3=11$

原问题与对偶问题最优解相同,

故 $z=W=11$

5. 松弛问题标准化：

$\max z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$s.t.\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=1\\3x_1+x_2+x_4=4\\x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{cases}$$

			1	1	0	0
0	x_3	1	-1	1	1	0
0	x_4	3	$\boxed{3}$	1	0	1
$\delta_j=c_j-z_j$			1	1	0	0

$\theta=\min\{\frac{3}{3}\}$

→

			1	1	0	0
0	x_3	$\frac{7}{3}$	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	1	$\frac{1}{3}$
1	x_1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
δ_j			0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

$\theta=\min\{\frac{7}{4},\frac{4}{1}\}=\frac{7}{4}$

→

			1	1	0	0
1	x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
δ_j			0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

此时δ_j都≤ 0，停止计算，可得如下关系式：

$$\begin{cases}x_2+\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{7}{4}\\x_1-\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}\end{cases}$$

将系数和常数项分解并移项，变为：

$$\begin{cases}x_2-1=\frac{3}{4}-(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4)\\x_1-x_3=\frac{3}{4}-(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4)\end{cases}$$

由于x_1,x_2,x_3,x_4均为非负整数，

故 $\frac{3}{4}-(\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4)\leq 0$，即 $-3x_3-x_4\leq -3$（割平面）

新的松弛问题：

$\max z = x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5$

$$s.t.\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=1\\3x_1+x_2+x_4=4\\-3x_3-x_4+x_5=-3\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0\end{cases}$$

加入最终单纯形表：

			1	1	0	0	0
1	x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
0	x_5	-3	0	0	-3	-1	1
δ_j			0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

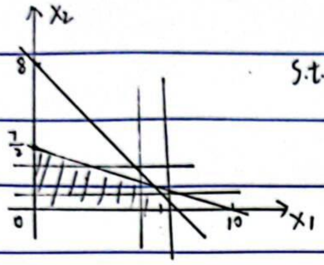
换出x_5，换入x_3：

			1	1	0	0	0
1	x_2	1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$
1	x_1	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$
0	x_3	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
δ_j			0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$

δ_j都≤ 0，上表为最优单纯形表，且x_1,x_2为整数，故最优解为$(1,1)$，最优值为2.

求實求真 大氣大爲

6. 首先去掉整数约束：$\max\ z = 40x_1 + 90x_2$



$$\left.\begin{aligned} \text{s.t.} \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \text{记为} LP$$

分枝定界法：

- **LP**: $x_1 = 630/131,\ x_2 = 238/131$, $z(0) = 355.9$
  - $x_1 \leq 4$ → **LP1**: $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{21}{10}$, $z(1) = 349$
    - $x_2 \leq 2$ → **LP11**: $x_1 = 4,\ x_2 = 2$, $z(11) = 340$
    - $x_2 \geq 3$ → **LP12**: $x_1 = \frac{10}{7},\ x_2 = 3$, $z(12) = 327$
  - $x_1 \geq 5$ → **LP2**: $x_1 = 5,\ x_2 = \frac{11}{7}$, $z(2) = 341.4$
    - $x_2 \leq 1$ → **LP21**: $x_1 = 5,\ x_2 = 1$, $z(21) = 290$
    - $x_2 \geq 2$ → **LP22**: 无解

$\Rightarrow$ 故最优解为 $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ z^* = z(11) = 340$

7. 将原问题转化为: $\max z = x_1^2 x_2 x_3^3$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=12 \text{，将问题分为4个阶段，} k=1,2,3,4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \end{cases}$$

状态变量和状态转移方程: $s_4=x_4$; $s_4+x_3=s_3$; $s_3+x_2=s_2$; $s_2+x_1=s_1=12$

$x_4=s_4$, $0 \leq x_3 \leq s_3$; $0 \leq x_2 \leq s_2$; $0 \leq x_1 \leq s_1=12$

指标函数: $V_{1,3}=\prod_{k=1}^{3} v_k(s_k,x_k) = x_1^2 x_2 x_3^3$

基本方程: $\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \leq x_k \leq s_k} \{v_k(s_k,x_k) \times f_{k+1}(s_{k+1})\}, k=1,2,3,4 \\ f_5(s_5)=1. \end{cases}$

$k=4$时，有$f_4(s_4)$，此阶段与$V_{1,3}$无关;

$k=3$时，有$f_3(s_3)=\max\limits_{x_3=s_3}(x_3^3)=s_3^3$，$x_3^*=s_3$;

$k=2$时，有$f_2(s_2)=\max\limits_{0\leq x_2\leq s_2}[x_2 f_3(s_3)]=\max\limits_{0\leq x_2\leq s_2}[x_2(s_2-x_2)^3]$，$x_2^*=\frac{1}{4}s_2$，$f_2(s_2)=\frac{27}{256}s_2^4$，

$k=1$时，有$f_1(s_1)=\max\limits_{0\leq x_1\leq s_1}[x_1^2 f_2(s_2)]=\max\limits_{0\leq x_1\leq s_1}[x_1^2\cdot\frac{27}{256}(12-x_1)^4]$，$x_1^*=\frac{1}{3}s_1=4$，$f_1(s_1)=\frac{1}{432}\times 12^6$

$=6912$

故 $x_1^*=4$，$x_2^*=\frac{s_2}{4}=2$，$x_3^*=s_3=6$，$\max z=f_1(s_1)=6912$

8. 先化为标准形：$\max z = 6x_1+2x_2+12x_3+0x_4+0x_5$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3+x_4=24 \\ 2x_1+6x_2+3x_3+x_5=30 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形表：

		$c_j \to$	6	2	12	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	24	4	1	$\boxed{3}$	1	0
0	x_5	30	2	6	3	0	1
	$\delta_j=c_j-z_j$		6	2	12	0	0

$\theta=\min\{\frac{24}{3},\frac{30}{3}\}=\frac{24}{3}$

$\xrightarrow{\text{正交变换}}$

		$c_j \to$	6	2	12	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
12	x_3	8	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
0	x_5	6	-2	5	0	-1	1
	δ_j		-10	-2	0	-4	0

δ_j 都 ≤ 0，停止计算，

故解为 $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,8)$，最优值为 $12\times 8=96$.

9. 对偶问题：$\min z = 10y_1+10y_2$

$$s.t.\begin{cases} y_1+2y_2 \geq 4 \\ 2y_1+3y_2 \geq 7 \\ y_1+3y_2 \geq 2 \\ y_1,y_2 \geq 0 \end{cases}$$

有一个可行解为 $y_1=\frac{1}{2}$；$y_2=2$.

由弱对偶定理：$CX \leq Yb$

此时 $Yb=10\times\frac{1}{2}+10\times 2=25$；

故原问题可行解 $CX \leq 25$，最优值不超过25.

10. 化为标准形: $\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_5=4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{乘}-1]{\text{两边}} \begin{cases} -x_1-2x_2-x_3+x_4=-3 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_5=-4 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形表:

		$c_j \to$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	$\boxed{-2}$	1	-3	0	1
$\delta_j = c_j - z_j$			-2	-3	-4	0	0

$\theta = \min\left\{\frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-3}\right\} = 1$, 换出 x_5, 换入 x_1

		$c_j \to$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	$\boxed{-\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
-2	x_1	2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
δ_j			0	-4	-1	0	-1

$\theta = \min\{-4/(-\frac{5}{2}), -\frac{1}{2}/(-1)\} = \frac{8}{5}$, 换出 x_4, 换入 x_2

		$c_j \to$	-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
-2	x_1	$\frac{11}{5}$	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
δ_j			0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$

b 都 >0, 结束计算

最优解 $X^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 0\right)^T$

最优值 $\min w = -\max z$

$= -\left[\frac{11}{5}\times(-2) + \frac{2}{5}\times(-3)\right] = \frac{28}{5}$

11、标准形：$\max z = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$

$$s.t.\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4+x_5=20 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_6=20 \\ x_1,\cdots x_6 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题：$\min w = 20y_1+20y_2$

$$s.t.\begin{cases} y_1+2y_2 \geq 1 \\ 2y_1+y_2 \geq 2 \\ 2y_1+3y_2 \geq 3 \\ 3y_1+2y_2 \geq 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题的标准形：$\min w = 20y_1+20y_2$

$$s.t.\begin{cases} y_1+2y_2-y_3=1 \\ 2y_1+y_2-y_4=2 \\ 2y_1+3y_2-y_5=3 \\ 3y_1+2y_2-y_6=4 \\ y_1, y_2 \cdots y_6 \geq 0 \end{cases}$$

由互补松弛原则：必有 $x_5=x_6=0$

将 y_1, y_2 代入标准形解出

$Y=(1.2, 0.2, 0.4, 0.6, 0, 0)$

故 $x_1=x_2=0$，x_3 & $x_4 \neq 0$，

代入标准形：$\begin{cases} 2x_3+3x_4=20 \\ 3x_3+2x_4=20 \end{cases}$ 解出 $x_3=x_4=4$，

故原问题最优解为 $(0,0,4,4)^T$ ~~3×4+4×4=28~~.

$\max z^* = 3\times4+4\times4=28$.

12. 化为标准形：$\max z=x_1+4x_2+3x_3$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3+x_4=4\\ x_1+2x_2+2x_3+x_5=6\\ x_1,x_2,\cdots x_5\geq 0\end{cases}$$

单纯形表：

		$c_j\to$	1	4	3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	4	2	$\boxed{2}$	1	1	0
0	x_5	6	1	2	2	0	1
		$\delta_j=c_j-z_j$	1	4	3	0	0

$\theta=\min\{\frac{4}{2},\frac{6}{2}\}=2$

⇒ 换出 x_4，换入 x_2：

		$c_j\to$	1	4	3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
4	x_2	2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	x_5	2	-1	0	1	-1	1
		δ_j	-3	0	1	-2	0

这时的解为 $(0,2,0,0,2)^T$，

但 x_3 对应的 δ_3 不小于 0，故不为最优解.

13. 写出对偶问题：$\max z=4y_1+3y_2$

$$s.t.\begin{cases}y_1+y_2\leq 1 & ①\\ -y_2\leq -1 & ②\\ -y_1+2y_2\leq 1 & ③\\ y_1,y_2\geq 0\end{cases}$$

由②：$y_2\geq 1$

①+③：$3y_2\leq 2$，$y_2\leq\frac{2}{3}$，矛盾

故对偶问题无可行解，

原问题无最优解。

14. 模拟第五个人戊 ⇒

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & D & E \\
\hline
甲 & 25 & 29 & 31 & 42 & 37 \\
乙 & 39 & 38 & 26 & 20 & 33 \\
丙 & 34 & 27 & 28 & 40 & 32 \\
丁 & 24 & 42 & 36 & 23 & 45 \\
戊 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 4 & 6 & 17 & 12 \\
19 & 18 & 6 & 0 & 13 \\
7 & 0 & 1 & 13 & 5 \\
1 & 19 & 13 & 0 & 22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\text{425}
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 4 & 5 & 17 & 11 \\
19 & 18 & 5 & 0 & 12 \\
7 & 0 & 0 & 13 & 4 \\
1 & 19 & 12 & 0 & 21 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow{425}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 17 & 7 \\
19 & 14 & 1 & 0 & 8 \\
11 & 0 & 0 & 18 & 4 \\
1 & 15 & 8 & 0 & 17 \\
5 & 1 & 0 & 5 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow{425}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 18 & 7 \\
18 & 13 & 0 & 0 & 8 \\
11 & 0 & 0 & 19 & 4 \\
0 & 14 & 7 & 0 & 17 \\
5 & 1 & 0 & 6 & 0
\end{pmatrix}
$$

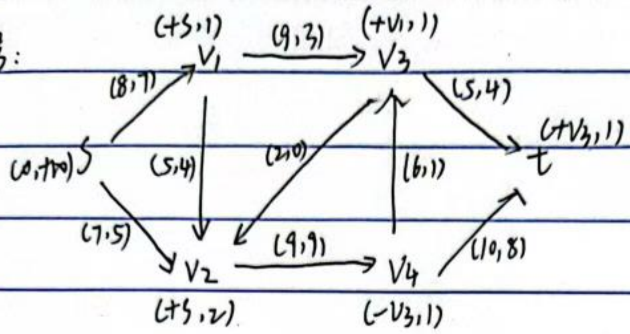
此时满足最少直线=5,但E是戊做的,不符题意,再变换一次

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
\cancel{0} & (0) & 1 & 18 & 3 \\
18 & 13 & 0 & (0) & 5 \\
11 & \cancel{0} & \cancel{0} & 19 & (0) \\
(0) & 14 & 7 & \cancel{0} & 13 \\
9 & 5 & 4 & 10 & \cancel{0}
\end{pmatrix}
$$

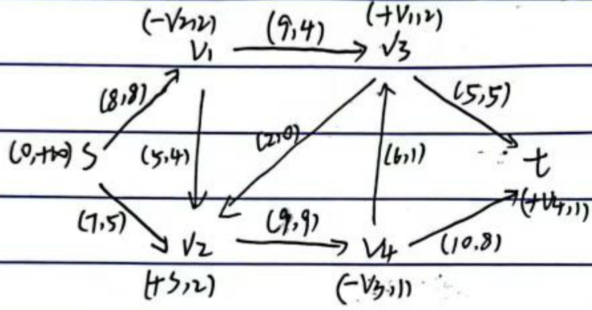
故分配方案为甲→B,乙→D,丙→E,丁→A

此时耗时 29+20+32+24=105

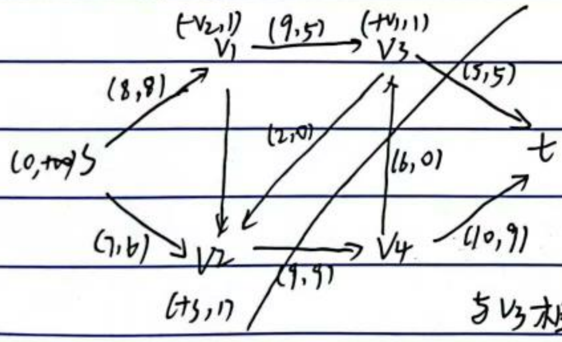
15. 标号:



此时增广链为 $s \to v_1 \to v_3 \to t$,调整流量并再次标号:



此时增广链为 $s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to v_4 \to t$,调整流量并再次标号:



与 v_3 相邻接的点 v_4, t 都不满足标号条件,

此时最小截为 $\{(v_3, t), (v_2, v_4)\}$,最大流为 $9+5=14$.