随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学——数学科学学院

武德安

第一章随机过程的基本概念

§1.1 随机过程的定义及分类

§1.2 随机过程的分布

§1.3 随机过程的数字特征

§1.4 随机过程的基本类型

§1.1 随机过程的定义及分类

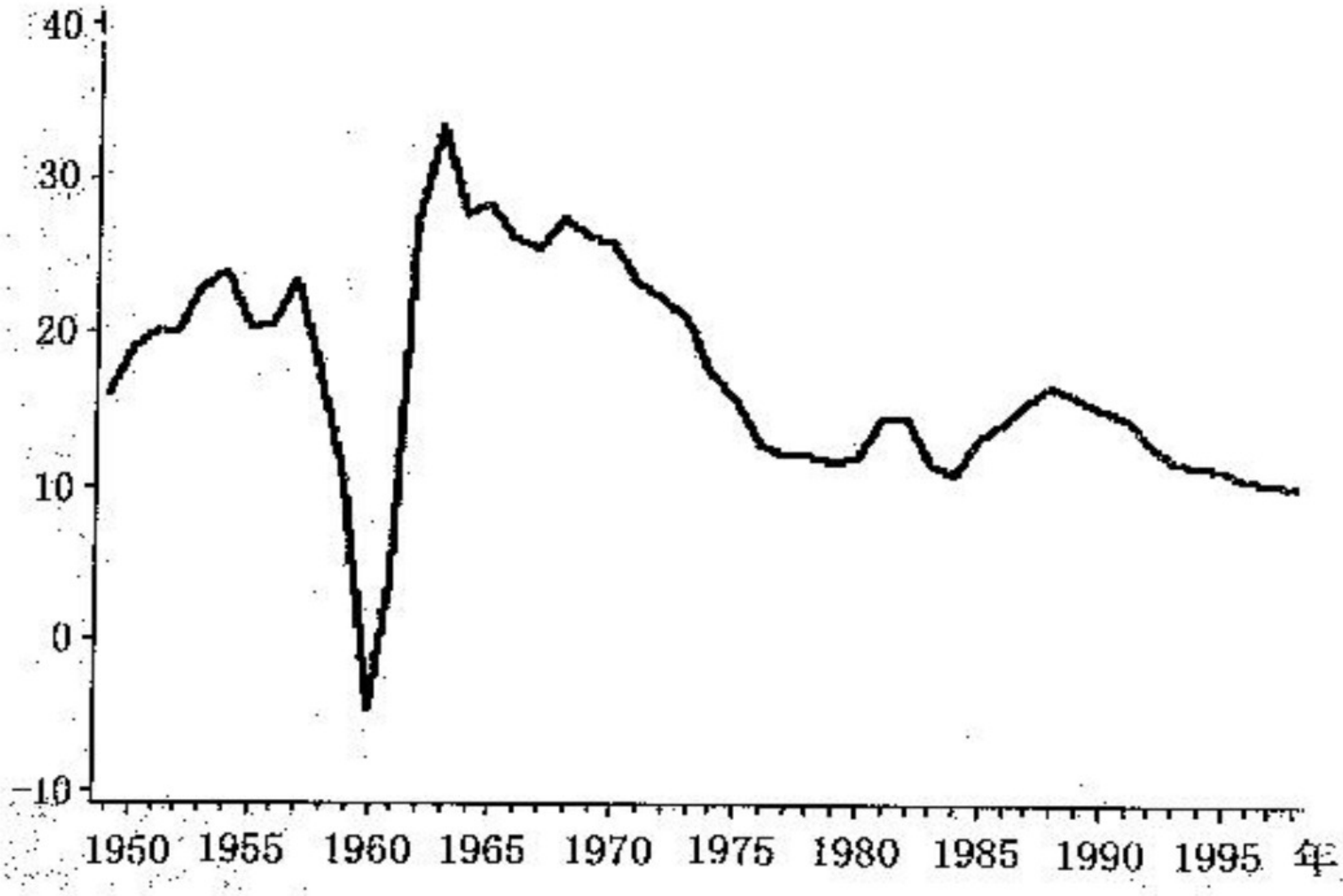
一、实际背景

在许多实际问题中，不仅需要对随机现象做特定时间点上的一次观察，且需要做多次的连续不断的观察，以观察研究对象随时间推移的演变过程.

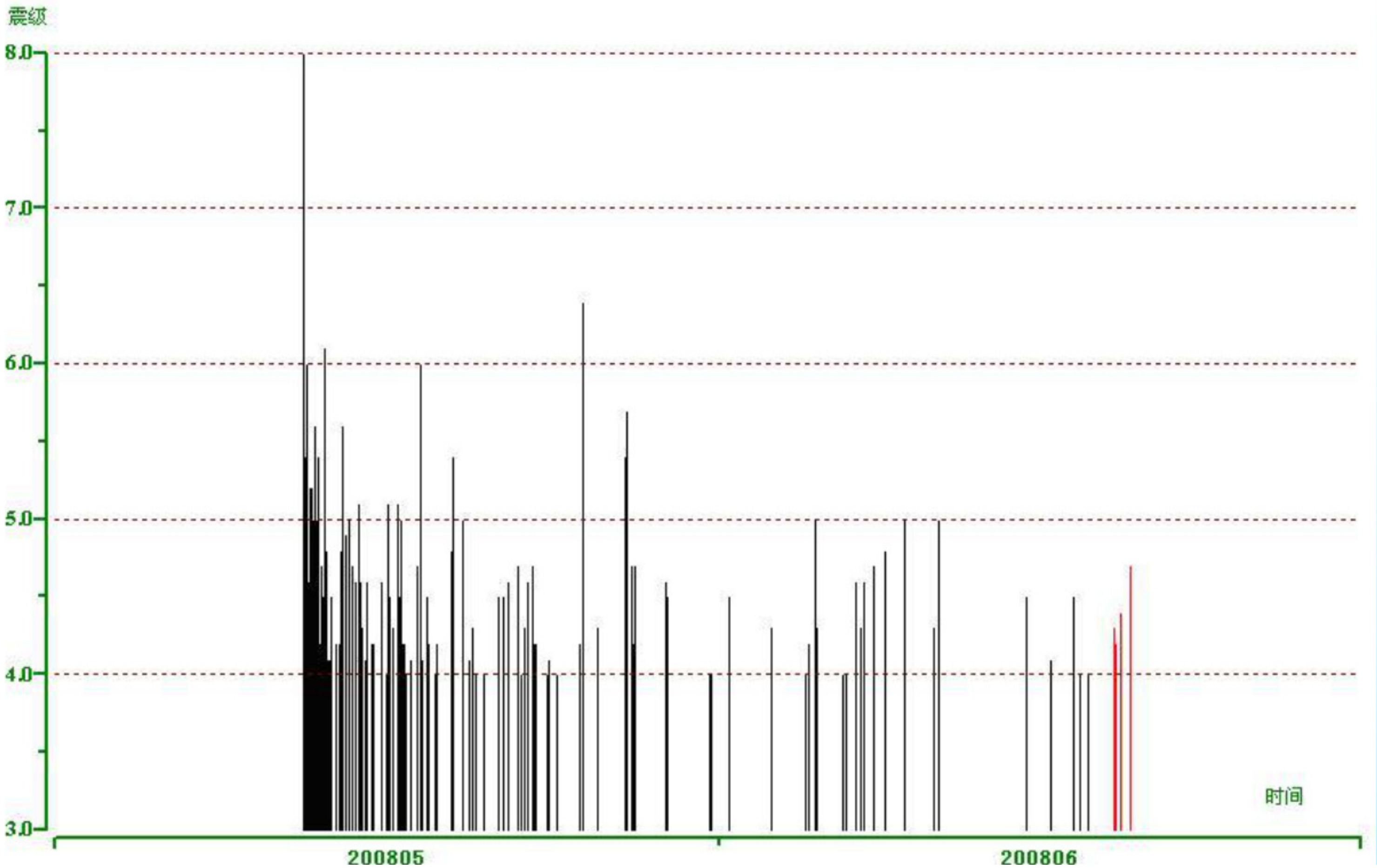
Eg. 1 对某城市的气温进行n年的连续观察，记录得$\{X(t), a \le t \le b\}$，研究该城市气温有无以年为周期的变化规律?（**随机过程的谱分析问题**）

Eg. 2 从杂乱电讯号的一段观察$\{Y(t), 0 < t < T\}$中，研究是否存在某种确定或随机信号$S(t)$?（**过程检测**）

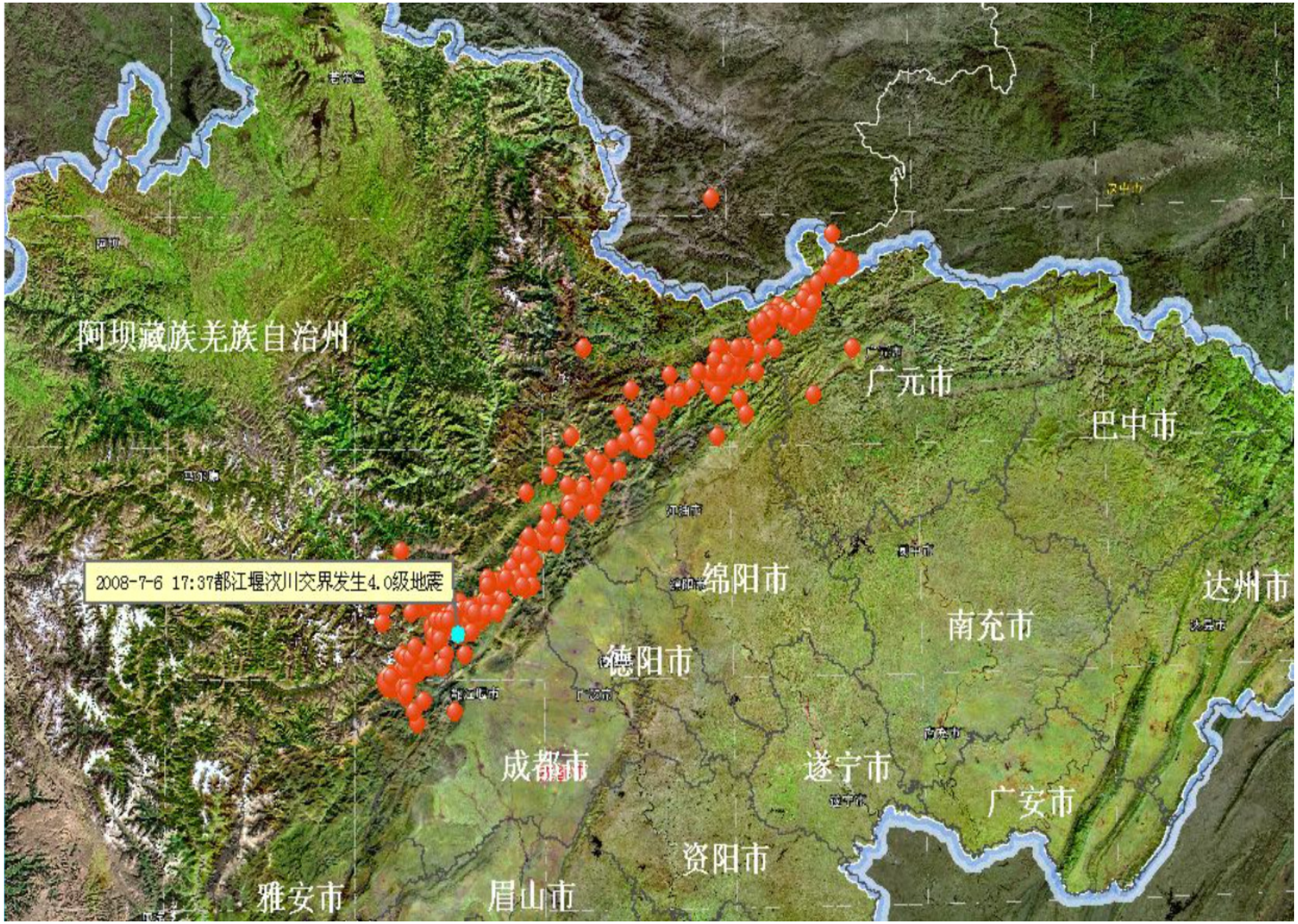
Eg. 3 监听器上收到某人的话音记录$\{Z(t), \alpha < t < \beta\}$试问他是否确实是追踪对象?（**过程识别**）



我国人口自然增长率数据图



汶川余震序列图2008.5.12(2:28) 2008.7.8(8:00)


阿坝藏族羌族自治州
广元市
巴中市
2008-7-6 17:37都江堰汶川交界发生4.0级地震
绵阳市
达州市
南充市
德阳市
成都市
遂宁市
广安市
资阳市
雅安市
眉山市

1.关注对象是一族随时间或地点变化的随机变量;

2.需要研究这一族随机变量的整体或局部统计规律性;

二、随机过程定义

定义:2.1.1:设(Ω,F,P)是概率空间,$T\subset R$,若对每个$t\in T$, $X(t,\omega)$是概率空间(Ω,F,P)上的随机变量,则称随机变量族

$$\{X(t,\omega),t\in T\}$$

为(Ω,F,P)上的一个**随机过程**.

注: 称T 是参数集(或指标集、参数空间)

1.当$T=\{1,2,...,n\}\Longrightarrow\{X(t,\omega),t\in T\}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ (随机向量)

2.当$T=\{1,2,...,n,...\}\Longrightarrow\{X(t,\omega),t\in T\}=(X_1,X_2,\cdots)$ (时间序列)

3.当$T=\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}\Longrightarrow\{X(t,\omega),t\in T\}$(平面随机场，或多维指标集随机过程)

随机过程是n维随机变量，随机变量序列的一般化，是随机变量$X(t)$，$t\in T$的集合.

用E表示随机过程$X_T=\{X_t,t\in T\}$的值域，称E为过程的**状态空间**.

Eg.4: 质点布朗运动设质点在直线上随机游动,经随机碰撞后各以$1/2$的概率向左或向右移动.

若经无穷多次碰撞,记 $\{\omega_1^{(t)}\}=\{$第t次向左$\}$,
$\{\omega_2^{(t)}\}=\{$第t次向右$\}$,

定义随机变量序列 $$X_t(\omega)=\begin{cases}-1, & \omega=\omega_1^{(t)};\\ 1, & \omega=\omega_2^{(t)}.\end{cases}\quad (t=1,2,\cdots)$$

则$\{X_t(\omega):t=1,2,\cdots\}$描述了直线上随机质点的运动.其参数集$T=\{1,2,...\}$,状态空间$E=\{-1,1\}$.

随机过程的理解

定义: 指标集和样本空间的**积集**: $T\times\Omega=\{(t,\omega):t\in T,\omega\in\Omega\}$

随机过程$\{X_t(\omega),t\in T\}$是定义在积集$T\times\Omega$上的**二元函数**:

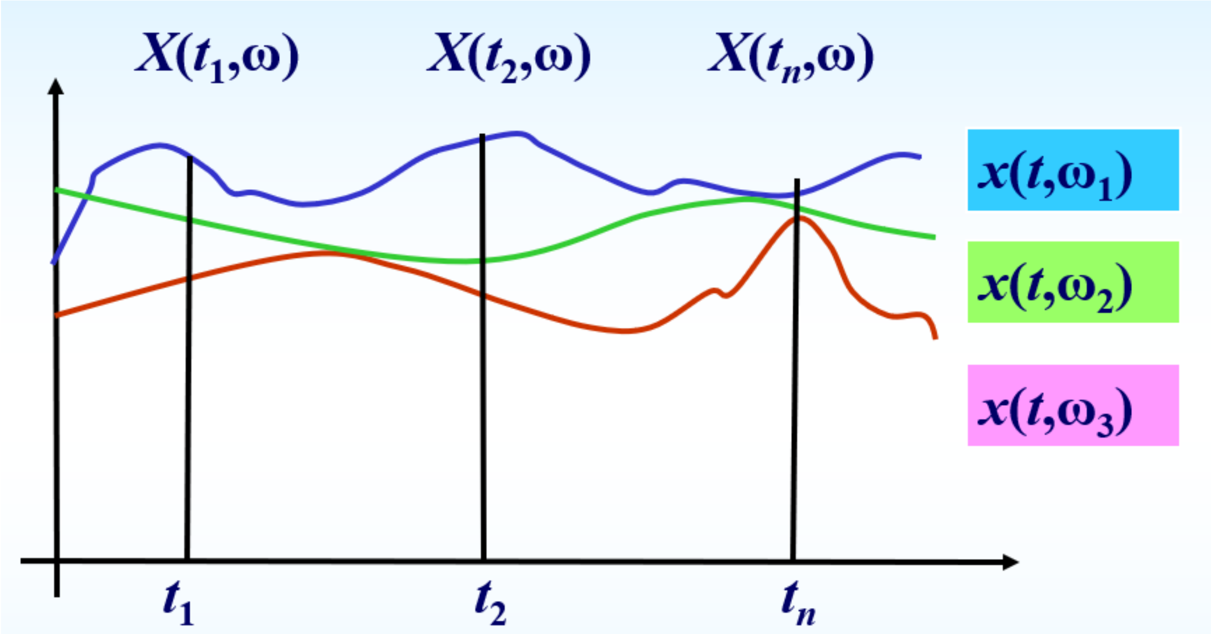
$$X_t(\omega)=X(t,\omega),\quad (t\in T,\omega\in\Omega)$$

1) 对固定的$t\in T$,

$X_t(\omega)$, $\underbrace{\omega\in\Omega}_{\text{即对于特定的试验条件}}$ 是一个定义在概率空间(Ω,F,P)上的**随机变量**;

2) 当固定$\omega_0\in\Omega$

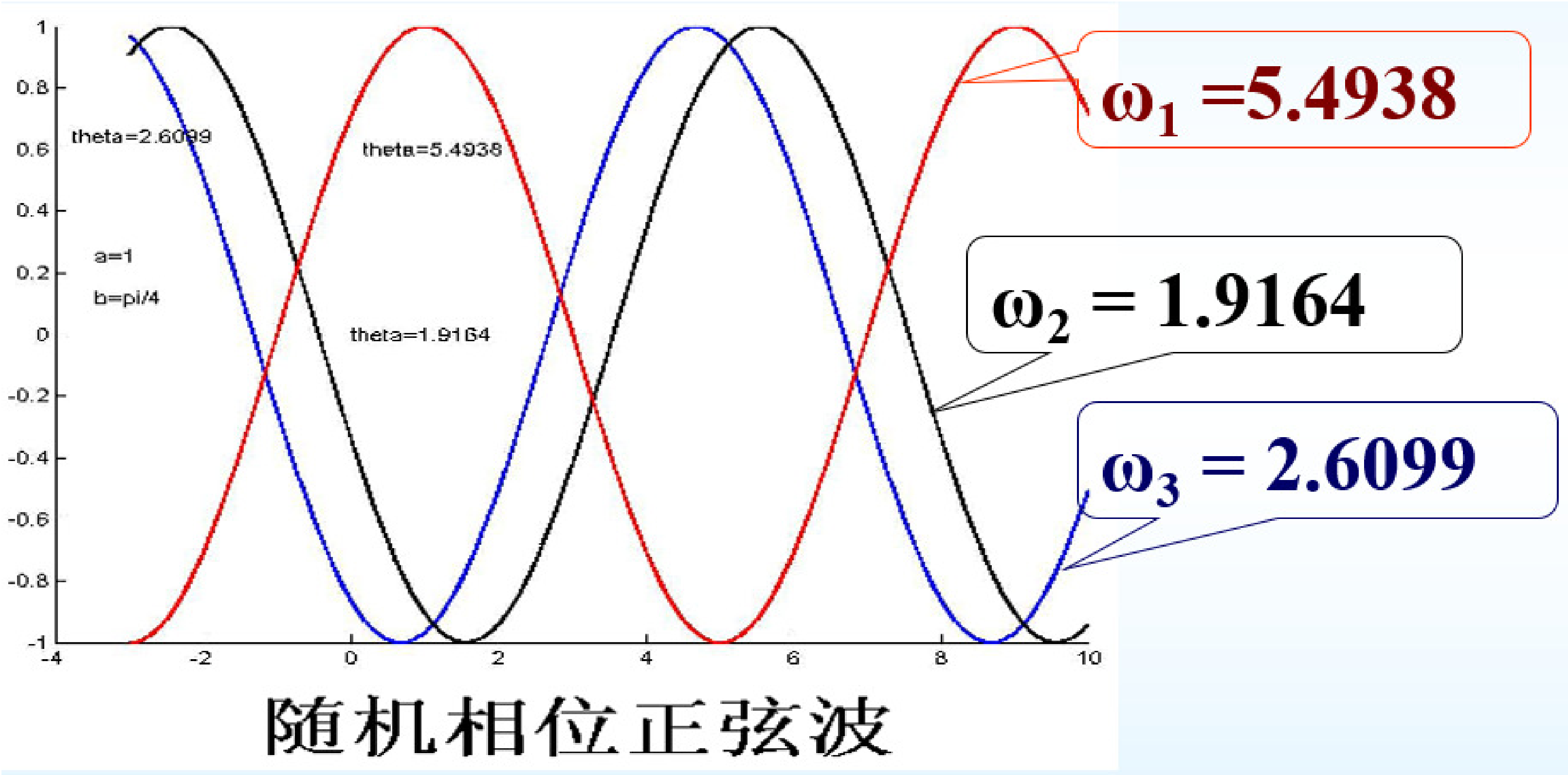
作为时间变量$t\in T$的函数, $\underbrace{x(t,\omega_0)}_{\text{也称轨道,路径,现实}}$ 是一个定义在T上的**普通函数**.



当 t 变化时,构成一族随机变量.

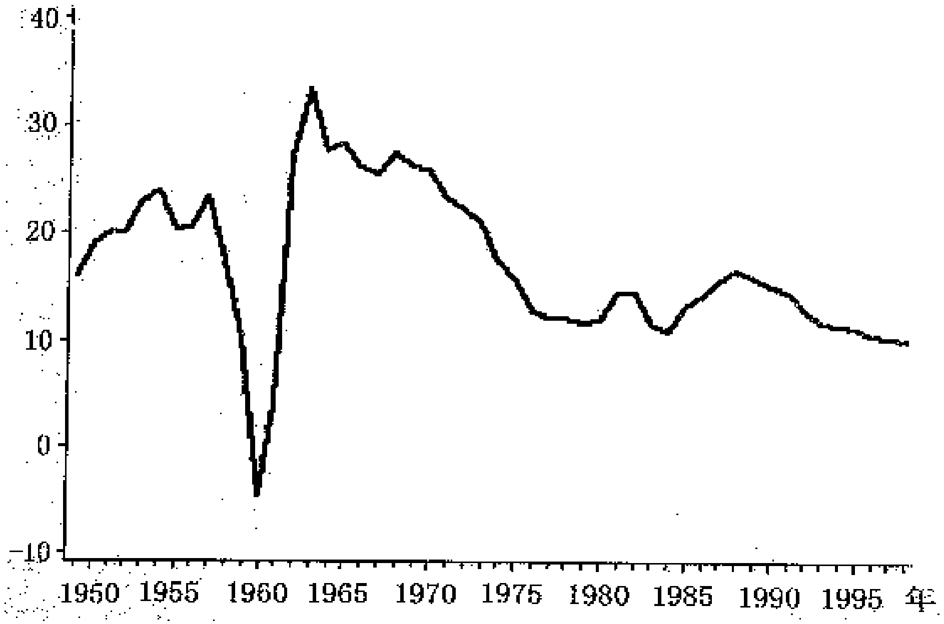
对不同的 ω 得到不同的确定性函数.

Eg.5： 随机相位正弦波 $X_t(\omega)=\alpha\cos(\beta t+\Theta),\Theta\sim U(0,2\pi)$

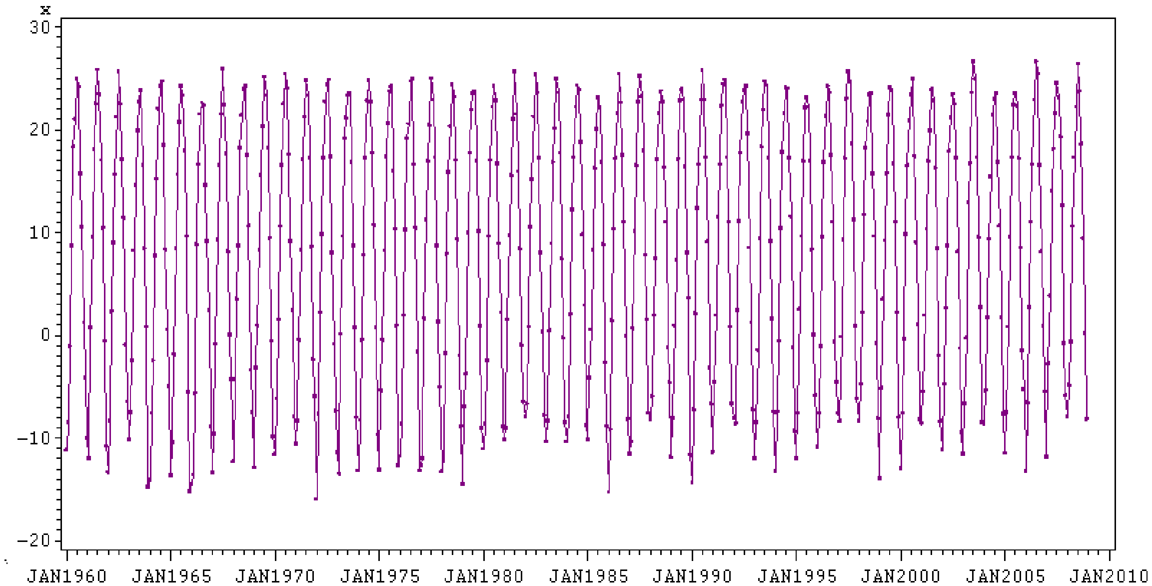


对不同的 ω 得到不同的确定性函数.

定义1.1.2:对每一固定$\omega\in\Omega$,称$x_t(\omega)$是随机过程$\{X_t(\omega),t\in T\}$相应于ω的**样本函数(sample function)**。也称轨道(trajectory),路径(path),现实(realization).



我国人口自然增长率数据图



Eg.6 抛一次硬币定义一个随机过程如下 $X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{出现正面};\\ 2t, & \text{出现反面}.\end{cases}\quad t\in R.$

设出现正反面的概率相同,写出 $X(t)$ 的所有样本函数.

解: 记 $\omega_1=\{\text{出现正面}\},\omega_2=\{\text{出现反面}\}$,

则 $X(t)$ 的所有样本函数为两条

$x(\omega_1,t)=\cos\pi t,\quad$ 和 $x(\omega_2,t)=2t.$

Eg. 7 独立重复抛一个均匀硬币,定义一个随机过程如下

$$X(n)=\begin{cases}1, & 第n次出现正面;\\ -1, & 第n次出现反面.\end{cases}$$

即有如下定义 $X(n,\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1^{(n)};\\ -1, & \omega=\omega_2^{(n)}.\end{cases} \quad (n=1,2,\cdots)$

其中 $\{\omega_1^{(n)}\}=\{第n次出现正面\}, \{\omega_2^{(n)}\}=\{第n次出现反面\}$,

1） 对所有 $n=1,2,\cdots$, 有

均为随机变量

$X(n)$	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

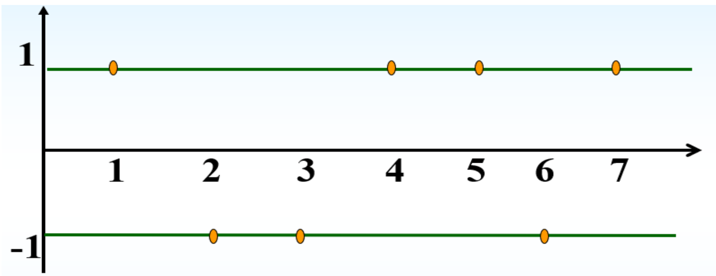
2)该过程有无穷条样本函数.

将抛第n次硬币的试验记为E_n,则对应的样本空间为$\Omega_n=\{\omega_1^{(n)},\omega_2^{(n)}\}$,
$(n=1,2,\cdots)$其中

$\{\omega_1^{(n)}\}=\{$第n次出现正面$\}$, $\{\omega_2^{(n)}\}=\{$第n次出现反面$\}$,

过程样本空间为无穷积集:

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n\times\cdots=\{(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},\cdots\omega_{i_n}^{(n)}\cdots):i_n=1,2\}$$



是对应Ω的样本点$\omega=(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},\cdots\omega_{i_n}^{(n)}\cdots)=($正,反,反,正,正,反,正,$\cdots)$的一条**样本函数**.

三 随机过程的分类

$X_T=\{X(t),t\in T\}$ 1.按状态空间E和参数集T进行分类

1） T,E均为可列集;

2） T是可列集,E不可列;

3） T不可列,E为可列集

4） T,E均不可列.

表 1.1 过 程 分 类

		参数集 T	
		离散	连续
状态空间 E	离散	（离散参数）链	（连续参数）链
	非离散	随机序列	随机过程

当T为可列集,称为离散参数随机过程,随机序列,时间序列.

当E为可列(或有限)集,称为离散状态随机过程(链).