随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 — 数学科学学院

武德安

第二章随机过程的基本概念

§0.5特征函数

一、特征函数的定义及例

设X,Y是实随机变量,复随机变量$Z=X+jY$,的数学期望定义为

$$E(Z)=E(X)+jE(Y),\quad j=\sqrt{-1}$$

特别

$$E(e^{jtX})=\underbrace{E(\cos tX)+jE(\sin tX)}_{X\text{是实随机变量}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx dF(x)+j\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx dF(x)$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)}_{\text{求随机变量}X\text{的函数的数学期望}}$$

注 1) $\forall t\in R$, $\cos tx$和$\sin tx$均为有界函数.故$E(e^{jtx})$总存在.

2) $E(e^{jtx})$是实变量t的复数值函数.

定义0.5.1 设X是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,称

$$\varphi(t)=E(e^{j\varepsilon x})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\alpha x}dF(x),\quad t\in R$$

关于X的分布函数的
Fourier－Stieltjes变换

为X的**特征函数**.

当X是连续型随机变量

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx;$$

当X是离散型随机变量

$$\varphi(t)=\sum_{k}e^{jx_k}p_k.$$

Eg.1 单点分布 $P\{X=c\}=1, \varphi(t)=E(e^{jtc})=e^{jtc}, t\in R.$

Eg.2 两点分布 $\varphi(t)=e^{jt\cdot 0}(1-p)+e^{jt\cdot 1}p=1-p+pe^{jt}=q+pe^{jt}, t\in R.$

Eg.3 二项分布 $\varphi(t)=(q+pe^{jt})^{n}, t\in R$

Eg.4 泊松分布 $\varphi(t)=e^{\lambda(e^{jt}-1)}, t\in R$

Eg.5：指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad(\lambda>0)$

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}\lambda e^{jtx}e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cos tx dx+j\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\sin tx dx$$

$$=\lambda\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}+j\lambda\frac{t}{\lambda^2+t^2}=\left(1-\frac{jt}{\lambda}\right)^{-1},t\in R$$

Eg.6：均匀分布: $U[-a,a]$, $\varphi(t)=\dfrac{\sin at}{at},t\in R$

Eg.7：正态分布 $N(\mu,\sigma^2)\varphi(t)=e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2},t\in R$

特别正态分布$N(0,1)$, 则$\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2},t\in R$

证明:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in R$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\sigma x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{x-\mu}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt(\mu+\sigma u)}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-jt\sigma)^2}{2}}du=e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2},t\in R$$

二、特征函数性质

性质0.5.1：随机变量X的特征函数满足:

1) $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1$;

2) $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$.

证1): $|\varphi(t)|^2 = |E(\cos tX) + jE(\sin tX)|^2 = [E(\cos tX)]^2 + [E(\sin tX)]^2$

$$\underbrace{\le E[(\cos tX)^2] + E[(\sin tX)^2]}_{\text{司蒂阶积分或矩的性质}} = E[(\cos tX)^2 + (\sin tX)^2] = 1 = \varphi(0)$$

2): $\overline{\varphi(t)} = \overline{E(e^{jtX})} = \overline{E(\cos tX) + jE(\sin tX)}$

$$= E(\cos tX) - jE(\sin tX) = E[\cos(-tX)] + jE[\sin(-tX)]$$

$$= E[e^{j(-t)X}] = \varphi(-t)$$

性质0.5.2：随机变量X的特征函数为$\varphi_X(t)$，则$Y=aX+b$的特征函数是

$$\varphi_Y(t)=e^{jbt}\varphi_X(at);\quad a,b\text{是常数}.$$

证：$\varphi_Y(t)=E[e^{j(aX+b)t}]=E[e^{jbt}e^{j(at)X}]=e^{jbt}\varphi_X(at)$

Eg.8：设$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，求其特征函数.

解：设$X\sim N(0,1)$，有$Y=\sigma X+\mu$，

且 $\varphi_X(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2},\quad t\in R.$

$$\varphi_Y(t)=e^{j\mu t}\varphi_X(\sigma t)=e^{j\mu t}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2},\quad t\in R.$$

性质1.5.3：随机变量X的特征函数$\varphi(t)$在R上一致连续. $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使$|h|<\delta$(一般, $\delta=\delta(\varepsilon,t)$)时,对$t$一致地有$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\varepsilon$

性质1.5.4:特征函数是非负定的函数,即对任意正整数n,任意复数 $z_1,z_2,\ldots,z_n$,及$t_r\in R, r=1,2,\cdots,n$,有$\sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}\varphi(t_r-t_s)z_r\overline{z_s}\geq 0.$

证:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\phi(t_r-t_s)z_r\overline{z}_s=\sum_{r,s=1}^{n}z_r\overline{z}_s\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(t_r-t_s)x}dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{r,s=1}^{n}z_r\overline{z}_s e^{jt_rx}e^{-jt_sx}\right]dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{r=1}^{n}z_r e^{jt_rx}\right|^2 dF(x)\geq 0.$$

注: 以上性质中$\varphi(0)=1$,一致连续性,非负定性是本质性的.

定理0.5.1(波赫纳—辛钦): 函数$\varphi(t)$为特征函数的充分必要条件是在R上一致连续，非负定且$\varphi(0)=1$.

三、特征函数与矩的关系

定理1.5.2:若随机变量X的n阶矩存在,则X的特征函数$\varphi(t)$的k阶导数$\varphi^k(t)$存在,且$E(X^k)=j^{(-k)}\varphi^k(0)$, $(k\le n)$**注**:逆不真.

证: 仅证连续型情形.设X的概率密度为$f(x)$,有

$$\frac{d^k[e^{jtx}f(x)]}{dt^k}=j^k x^k e^{j\varepsilon x}f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{jxx}x^k f(x)|dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x^k f(x)|dx=E[|X|^k]<\infty$$

对$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jxx}f(x)dx$两边求导,得

$$\varphi^{(k)}(t)=j^k\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jxx}x^k f(x)dx=j^k E(X^k e^{jcx})$$

令$t=0$,得$\varphi^{(k)}(0)=j^k E(X^k)$故 $E(X^k)=j^{-k}\varphi^{(k)}(0)$

Eg. 9:随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

求$E(X)$和$D(X)$.

解: $\varphi(t)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\cos tx dx \quad (\because f(x)=f(-x))$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(t+1)x+\cos(t-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t+1}\sin\left[(t+1)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{1}{t-1}\left[\sin(t-1)\frac{\pi}{2}\right]\right\},\quad t\in R.$$

因$\varphi'(0)=0,\varphi''(0)=2-\frac{1}{4}\pi^2$.故$E(X)=j^{-1}\varphi'(0)=0$

$$D(X)=E(X^2)=j^{-2}\varphi''(0)=-\left(2-\frac{1}{4}\pi^2\right)=\frac{1}{4}\pi^2-2.$$

三、反演公式及唯一性

定理：由随机变量X的分布函数可惟一确定其特征函数:$F(x)\Rightarrow\varphi(t)$

问题：能否由X的特征函数唯一确定其分布函数?

$$\varphi(t)\overset{?}{\Longrightarrow}F(x)\ \text{从而}\ \varphi(t)\overset{?}{\Longleftrightarrow}F(x)$$

定理1.5.3(反演公式):设随机变量X的分布函数和特征函数分别为$F(x)$和φ则对$F(x)$的任意连续点$x_1,x_2,(x_1<x_2)$,有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt.$$

推论1(唯一性定理)：分布函数$F_1(x)$和$F_2(x)$恒等的充要条件是它们的特征函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$恒等.

推论2：若随机变量X的特征函数$\varphi(t)$在R上绝对可积，则X为连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,dt \qquad \boxed{\text{反演公式}}$$

注：对于连续型随机变量X,概率密度与特征函数互为Fourier变换(仅差一个负号).

推论3： 随机变量X是离散型的,其分布律为$p_k=P\{X=k\}, \quad k=0,\pm 1,\pm 2\dots$

其特征函数为 $\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}, \quad t\in R.$ 且

$$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk}\varphi(t)\,dt$$

反演公式

证： 设$s\in N$有

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{-itk}\varphi(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty} p_k e^{ist}e^{-itk}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} p_k\,dt+\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} p_k \mathrm{e}^{it(s-k)}\,dt=2\pi p_k+0$$

其中，当 $s\neq k$ $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{it(k-s)}\,dt=0 \quad \Rightarrow \quad p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk}\varphi(t)\,dt.$

Eg.9:随机变量X在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上服从均匀分布,$Y=\cos X$,利用特征函数求$Y$的概率密度.

解:X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ Y

$$\varphi_Y(t)=E(e^{itY})=E(e^{it\cos X})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{it\cos x}\frac{1}{\pi}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{it\cos x}\frac{1}{\pi}dx$$

$$u=\cos x,\quad du=-\sin x dx=-\sqrt{1-u^2}\,dx$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理,知随机变量Y

的概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1; \\ 0. & \text{其它}.\end{cases}$

Eg. 10:已知随机变量X的特征函数为$\varphi(t)=\cos^2 t, t\in R$试求$X$的概率分布.

解: $\varphi(t)=\cos^2 t=\left(\dfrac{e^{jl}+e^{-jt}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}e^{2jt}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}e^{-2jt}$

$=e^{2jt}P\{X=2\}+e^{0jt}P\{X=0\}+e^{-2jt}P\{X=-2\}$

根据特征函数与分布函数——对应的惟一性定理,知随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
p	$1/4$	$1/2$	$1/4$

五、多维随机变量的特征函数

定义1.5.2： 二维随机变量(X,Y)的特征函数定义为

$$\varphi(t_1,t_2)=E\left[\mathrm{e}^{j(t_1X+t_2Y)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x+t_2y)}dF(x,y)$$

连续型 $\varphi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x+t_2y)}f(x,y)\,dxdy$

离散型 $\varphi(t_1,t_2)=E\left[\mathrm{e}^{j(t_1X+t_2Y)}\right]=\sum_{r}\sum_{s}e^{j(t_1x_r+t_2y_1)}p_{r,s}$

定义1.5.3：n维随机向量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数为$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，

则它的特征函数为

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n) = E\left[e^{j(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n)} dF(x_1, \cdots, x_n)$$

性质1.5.5：

1）随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立的充要条件是

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k)$$ 与独立和$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$的特征函数性质有什么差别?

2）二维随机变量(X, Y)的特征函数为$\varphi(t_1, t_2)$，则$Z = aX + bY + c$

的特征函数为

$$\varphi_Z(t) = e^{itc}\varphi(at, bt), \quad t \in R.$$

特别有 $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi(t, t)$

证: $\varphi_Z(t)=E[e^{jt(aX+bY+c)}]=e^{jtc}E[\mathrm{e}^{jt(aX+bY)}]$

$$=e^{jtc}[e^{jatX+jbtY}]=e^{jtc}\varphi(at,bt).$$

Eg.13: 设(X_1,X_2)服从二维正态分布,且$E(X_k)=k,k=1,2,$

记.$K_{ij}=\mathrm{Cov}(X_k,X_j)=k+j,\quad k,j,=1,2.$求$Y=X_1+X_2$ 的特征函数.

解: $\varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)\ =\ e^{i(\mu_1t_1+\mu_2t_2)-\frac{1}{2}[\sigma_1^2t_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2t_1t_2+\sigma_2^2t_2^2]}$

$$=e^{i(t_1+2t_2)-\frac{1}{2}(2t_1^2+2\times3t_1t_2+4t_2^2)}$$

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{X_1,X_2}(t,t)=e^{i3t-6t^2}=\mathrm{e}^{i3t}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times12t^2},t\in R.$$

故 $Y=X_1+X_2\sim N(3,12).$