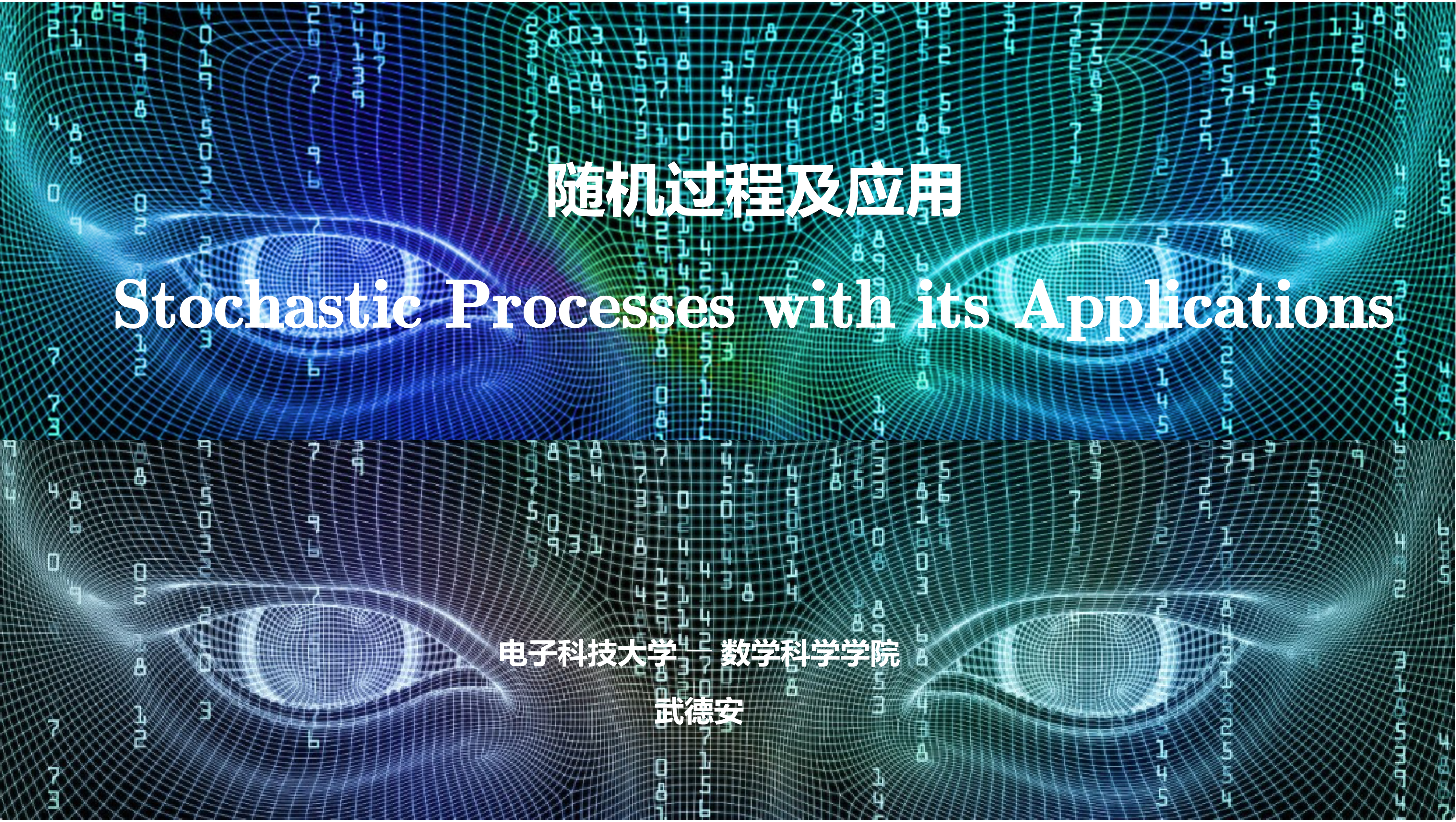


随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 — 数学科学学院

武德安

第三章 二阶矩过程的均方微积分

§3.3随机过程的均方极限与均方连续

本节将二阶矩随机变量空间中的均方极限概念引入二阶矩随机过程中，并引进均方连续的概念.

一、二阶矩过程

二阶矩过程是一类重要的随机过程，在物理、生物、通讯与控制、系统工程与管理科学等方面，有广泛的应用.

1）随机过程的概率性质由其分布函数族完全确定，但在实际问题中很难确定出分布函数族.

2）正态随机过程的一、二阶矩就能完全确定其有限维分布.

3）不少实际问题通过对二阶矩的讨论就足以了解过程的统计特征.

定义3.3.1 如过程$X_T=\{X(t),t\in T\}$,对任意$t\in T$,有$E\{|X(t)|^2\}<+\infty$

称过程是**二阶矩过程**.

二阶矩过程的均值函数和协方差函数一定存在.

注：随机变量矩性质：

高阶矩存在则低阶矩及其他同阶一定存在.

正态过程是二阶矩过程.

Eg.1 余弦波过程$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta), t\geq 0$.振幅A与角频率$\omega$取常数,

相位$\Theta\sim U(-\pi,+\pi)$.

因$E|X(t)|^2=\int_{-\pi}^{+\pi}A^2\cos^2(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\leq A^2, \forall t\geq 0$.

故$X(t)$是一个二阶矩过程. 且

$$E\{X(t)\}=\int_{-\pi}^{+\pi}A\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0,$$

$$R(s,t)=E[X(t)X(s)]=\int_{-\pi}^{+\pi}A^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega s+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\Big]$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega(t-s)=\frac{1}{2}A^2\cos\omega\tau,\quad (\tau=t-s)$$

二、二阶矩过程的均方极限

定义3.3.2 设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程,$X\in H$,如果

$$\lim_{t\to t_0} d(X(t),X)=\lim_{t\to t_0}\|X(t)-X\|=0$$

称$X(t)$均方收敛于X,记为

$$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t)=X$$

注1: 上式等价于$\lim\limits_{t\to t_0}\tilde{\mathrm{d}}(X(t),X)=\lim\limits_{t\to t_0}\|X(t)-X\|=0.$

注2: $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\ X(t)=X$成立的充分必要条件是对任意的数列$\{t_k\}$,

若$t_k\to t_0(k\to\infty)$,有$\underset{k\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ X(t_k)=X$

二、二阶矩过程的均方极限

随机过程有类似随机变量序列的均方收敛意义下的性质.

定理3.3.1(洛易夫均方收敛准则) $X(t)$在t_0处收敛的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{s,t\to t_0} E\left[X(s)\overline{X(t)}\right]$存在. 二重极限

注: 本课程中所说的相等，意为概率 1 相等。

❃ 随机过程均方极限的性质

性质0：Loève收敛准则(Loève′s criterion)

随机过程$\{X(t), t\in\mathbb{T}\}$在t_0处均方收敛的充要条件是

$$\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} \mathrm{E}[X(s)X(t)].$$

存在.(将随机过程的收敛性问题转化为自相关函数的收敛性问题.)

性质1：极限与数学期望的次序

若$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}X(t)=X$，则

$$\lim_{t\to t_0}\mathrm{E}[X(t)]=\mathrm{E}[\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}X(t)]=\mathrm{E}[X].$$

重要

性质2：随机过程极限运算

若$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}X(t)=X$，$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}Y(t)=Y$则

$$\lim_{\substack{s\to s_0\\ t\to t_0}} \mathrm{E}[X(s)Y(t)]=\mathrm{E}[\underset{\substack{s\to s_0\\ t\to t_0}}{\text{l.i.m.}}X(s)Y(t)]=\mathrm{E}[XY].$$

性质3：随机过程均方极限的线性性质

若$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}X(t)=X$，$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}Y(t)=Y$则对于任意的常数$a,b$,有

$$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}}[aX(t)+bY(t)]=aX+bY.$$

三、二阶矩过程的均方连续

定义3.3.3 称二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处**均方连续**,如果

$$\lim_{t\to t_0} X(t)=X(t_0)$$

若$X(t)$对$\forall t\in T$都均方连续,称随机过程$\{X(t),t\in T\}$是均方连续的.

定理3.3.2(均方连续准则) 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处连续的充分必要条件是$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$在(t_0,t_0)处连续.

证: 由均方收敛准则知

$$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t)=X(t_0)$$

定理3.3.1及均方连续定义

$$\Leftrightarrow \lim_{s,t\to t_0} E\left(X(s)\overline{X(t)}\right)=E\left[X(t_0)\overline{X(t_0)}\right]$$

即 $\lim\limits_{s,t\to t_0} R(s,t)=R(t_0,t_0)$.

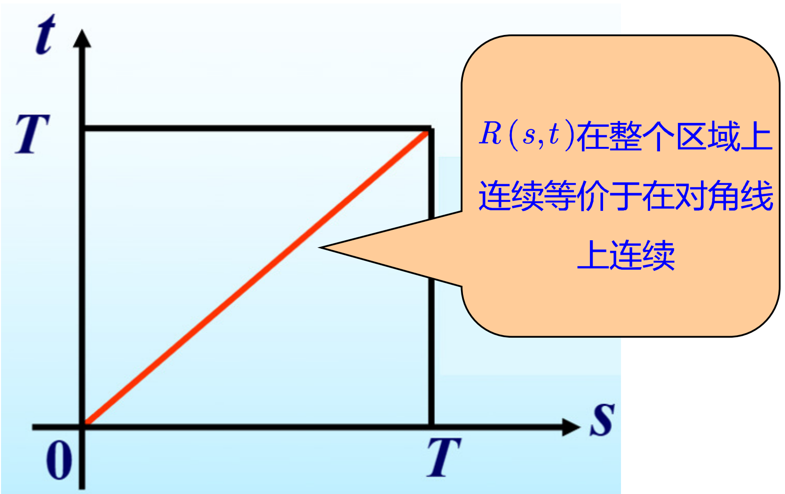
均方连续准则的重要性:

二阶矩过程的均方连续可由其相关函数的普通意义下的连续性来确定.

均方连续的重要结论:参见P第二节的证明.

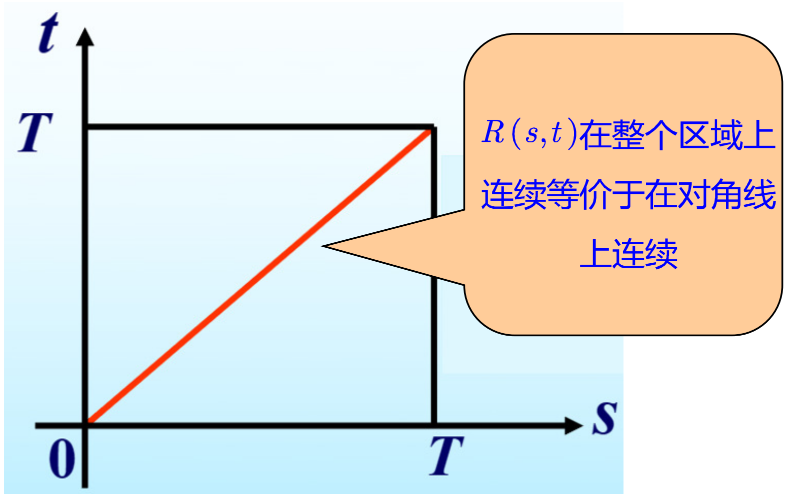
定理3.3.3 二阶矩过程的均方连续相关函数$R(s,t)$在对角线上连续.

推论1: 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$对$\forall t\in T$在点(t,t)处连续,则它在$T\times T$上连续.



$R(s,t)$在整个区域$T\times T$上连续,
等价于在对角线上连续.

推论: $R(s,t)$ 的连续性



证: $R(s,t)$对$\forall t\in T$,在(t,t)处连续

$\overset{\text{定理}3.3.2}{\Longleftrightarrow}$ $\{X(t),t\in T\}$在T上均方连续

$\Longleftrightarrow$ 对$\forall s_0,t_0\in T$,有

$$\underset{s\to s_0}{\text{l.i.m}}\,X(s)=X(s_0),\quad \underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}}\,X(t)=X(t_0)$$

$\overset{\text{定理}3.2.5\text{之}1)}{\Longleftrightarrow}$ $$\lim_{s\to s_0;\ t\to t_0}E\left(X(s)\overline{X(t)}\right)=E\left[X(s_0)\overline{X(t_0)}\right]$$

即 $\lim\limits_{s\to s_0 t\to t_0}R(s,t)=R(s_0,t_0)$由$s_0,t_0$的任意性知

$R(s,t)$在$T\times T$上连续.

✍例1：周期正弦波 $\Leftarrow$ 均方连续

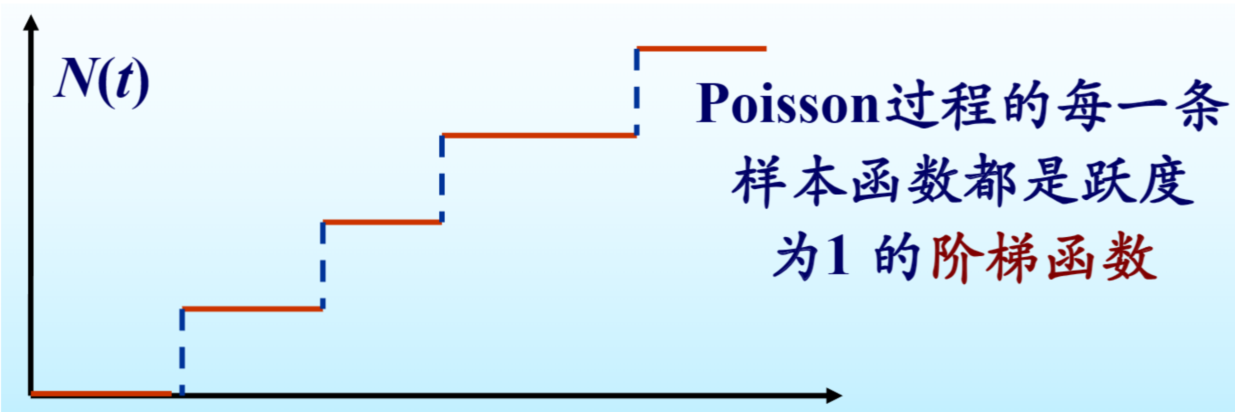
✍例2：Poisson过程 $\Leftarrow$ 均方连续

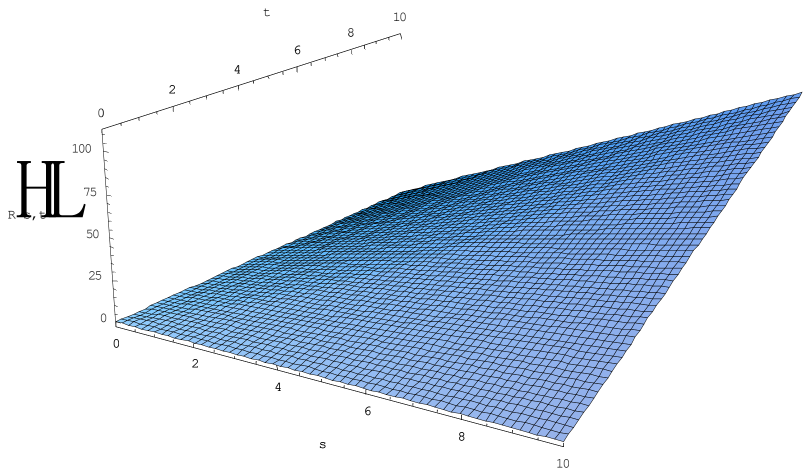
✍例3：Wiener过程 $\Leftarrow$ 均方连续

Eg.2 $\{N(t),t\geq 0\}$为参数为λ的Poisson过程,

均值函数$m_N(t)=\lambda t$, 自相关函数$R_N(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$

在(t,t)处连续,故$\{N(t),t\geq 0\}$是均方连续过程.





均方连续过程的样本函数可能不连续.

Poisson过程的$R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda st,\ \lambda=1.$

Eg. 3 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，其自相关函数

$$R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$$

对任意$t\geq 0$在(t,t)处连续,维纳过程均方连续.

设随机过程$X(t)=W^2(t), t\geq 0$,其均值函数为$E[X(t)]=\sigma^2 t$.

自相关函数为$R_X(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$对任意$t\geq 0$,

$R_X(t,t)=3\sigma^4 t^2$是连续函数，故$X(t)$是均方连续过程.

同理

过程$X(t)=tW\left(\dfrac{1}{t}\right)$，对所有$t>0$均方连续.

定理 3.3.4 若二阶矩随机过程$\{X(t), t \in T\}$均方连续,则其均值函数、方差函数也在T上连续.

由定理3.2.5可得

思考题:

1) 你认为关于随机过程的均方极限最本质的性质是哪一条?为什么?

2) 均方连续随机过程的样本函数是否一定是连续函数?