组合优化理论

主讲教师：陈安龙

第9章 最大流问题

- 最大流问题的应用背景
- 对应用问题抽象建模
- 容量网络流的基本概念
- 最大流问题的数学描述
- 最大流的数学特性
- Ford -Fulkerson算法

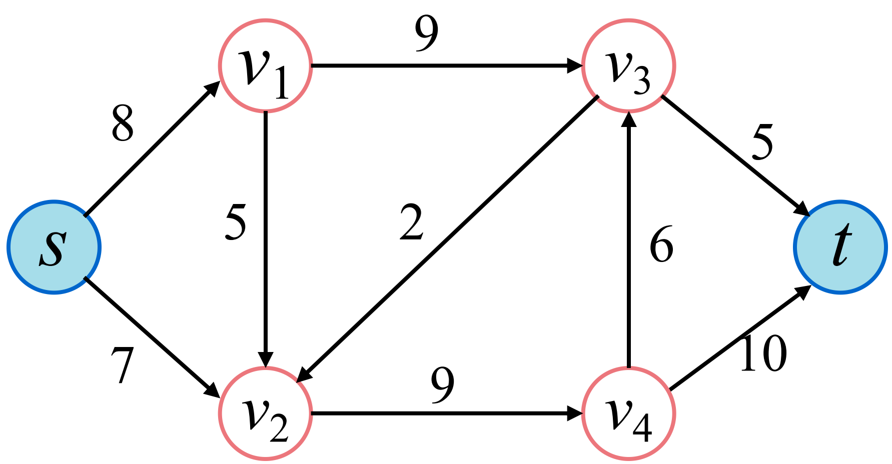
应用背景

◆ 在一个输油管网中，有生产石油的油井、储存石油的油库、转运石油的中间泵站，同时，还有各种口径不同的输油管。当输油管网建好后，单位时间内最多可把多少石油从油井输送到油库？具体采用什么样的实施方案？

分析：就输油管网络问题，可用顶点表示油井、油库和中间泵站，用有向边表示输油管，用有向边上的权表示单位时间沿相应的输油管可以输送石油的最大数量（容量）。

问题的抽象

◆如果我们把图看做输油管道网，s 为起点， t为终点， v_1 ,v_2 ,v_3 ,v_4 为中转站，边上的数表示该管道的最 大输油能力，问应该如何安排各管道输油量，才能 使从 s 到t 的总输油量最大？



网络流的基本概念

抽象为带权有向图 $D=(V,A,C)$

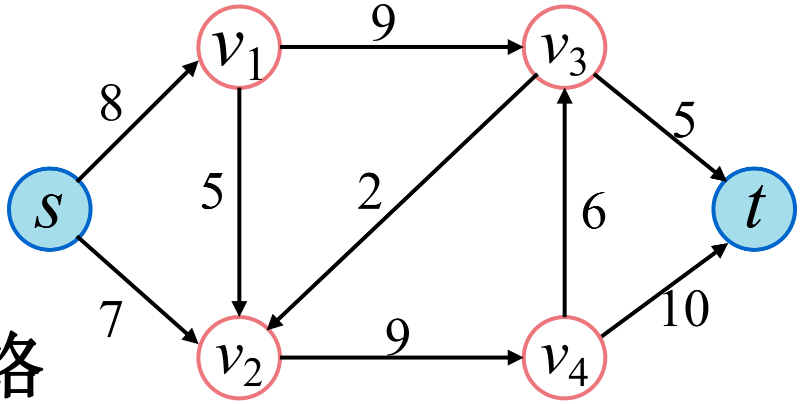
容量：D的每条弧(v_i, v_j)有非负数$C_{i,j}$

发点（源）：一个入度为 0 的起点 s

收点（汇）：一个出度为 0 的点t

中间点：其余点

称网络 $D=(V,A,C)$ 为容量网络



可行流

对D 中任一弧(v_i, v_j)都给定一个实际流量f_{ij}

流的集合$f = \{f_{ij}\}$

运输问题中，每个运输方案就是一个流

满足下面条件的流：

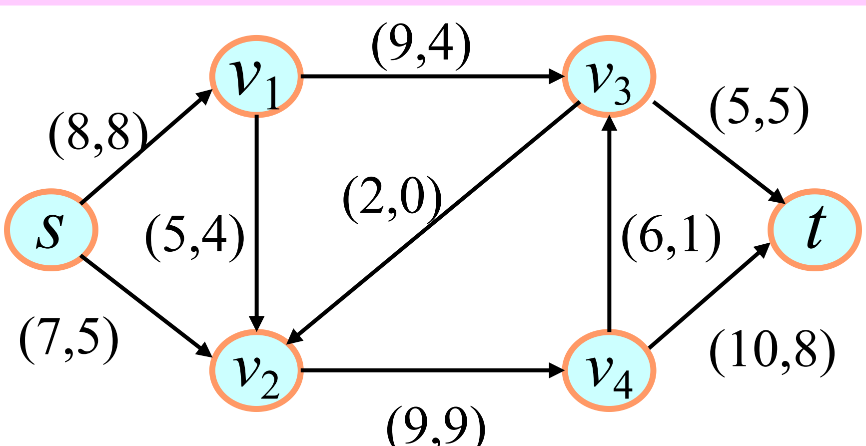
(1)容量限制条件 $0 \le f_{ij} \le c_{ij}$

(2)中间点平衡条件 $\sum_k f_{ki} = \sum_j f_{ij}$

中间节点
输入量=输出量

用$v(f)$表示网络中从$s \to t$的流量 $v(f) = \sum_j f_{sj} = \sum_j f_{jt}$

如果网络的流量为0的可行流：$f = \{0\}$



容量网络的最大流问题

在容量网络中，寻求一个流$\{f_{ij}\}$使其流量$v(f)$最大

且满足

$$0 \le f_{ij} \le c_{ij} \qquad (v_i, v_j) \in A$$

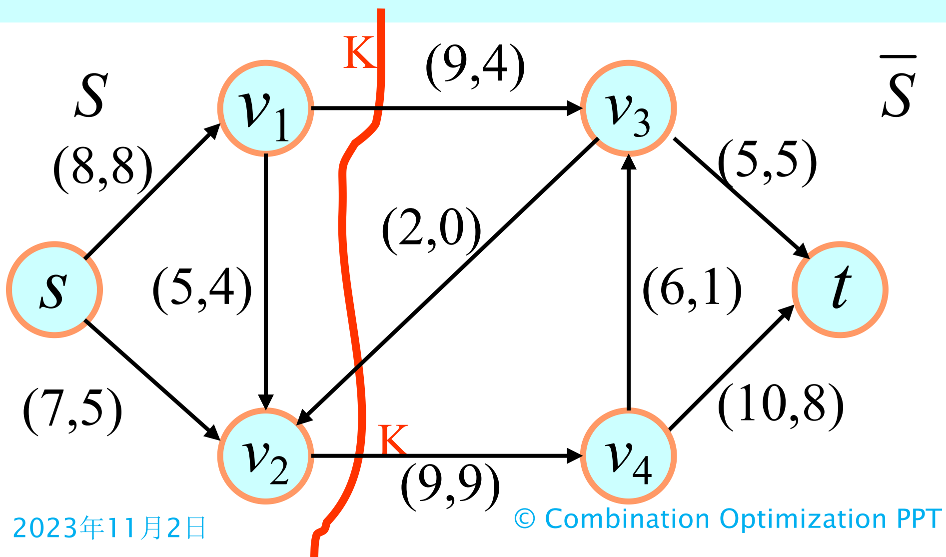
$$\sum f_{ij} - \sum f_{ji} = \begin{cases} v(f) & (v_i = s) \\ 0 & (v_i \ne s, t) \\ -v(f) & (v_i = t) \end{cases}$$

此为一个特殊的规划问题，将会看到利用图的特点，解决这个问题较为直观方便。

截集和截集的容量

设有网络$D=\{V,A,C\}$，点s与点t分别是集合V中的源点和汇点，若点集V被剖分成两个非空集合 $S,\overline{S}=V\setminus S$,且满足 $s\in S, t\in \overline{S}$,使以S中的点为始点，$\overline{S}$中的点为终点的A中弧的集合称为截集，记为$(S,\overline{S})$

截集的容量是截集中各弧的容量之和，用$c(V_1,\overline{V_1})$表示



$S=\{s,v_1,v_2\},\overline{S}=\{v_3,v_4,t\}$

截集:$\{(v_1,v_3),(v_2,v_4)\}$

截集的容量为9+9=18

定理1： 设f是容量网络D的任意一个可行流，$(S,\bar{S})$是D的任意一个截，则：

$$v(f)=\sum_{(v_i,v_j)\in(S,\bar{S})} f_{ij}-\sum_{(v_j,v_i)\in(\bar{S},S)} f_{ji}$$

定理2： 设f是容量网络D的任意一个可行流，则：

$$\sum_{v_j\in N^+(t)} f_{tj}-\sum_{v_j\in N^-(s)} f_{jt}=-v(f)$$

定理3： 设f是容量网络D的任意一个可行流，$(S,\bar{S})$ 是D的任意一个截，则： $v(f)\le c(S,\bar{S})$

定理4：设 f 容量网络D的任意一个可行流，$(S,\bar{S})$是D的任意一个截，如果 $v(f)=c(S,\bar{S})$则f是D的最大流，$(S,\bar{S})$是D中容量最小的截。

定理5: (最大流最小截定理) 任何带发点和汇点的容量网络中**都存在**最大流和最小截，并且最大流的流值**等于最小截的容量**.

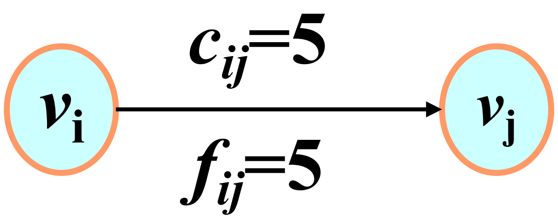
最小截集的意义

- 网络从发点到收点的各通路中，由容量决定其通过能力，最小截集则是这此路中的咽喉部分，或者叫瓶颈，其容量最小，它决定了整个网络的最大通过能力。要提高整个网络的运输能力，必须首先改造这个咽喉部份的通过能力。

可行流的分类

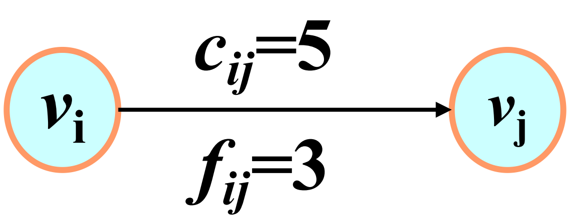
设 $f=\{f_{ij}\}$ 是网络 $\mathrm{D}=(V,A,C)$ 的一个可行流

1、如果$f_{ij}=c_{ij}$，该弧是饱和弧；



（v_i，v_j）是饱和的

2、如果$0\le f_{ij}<c_{ij}$，该弧是非饱和弧；



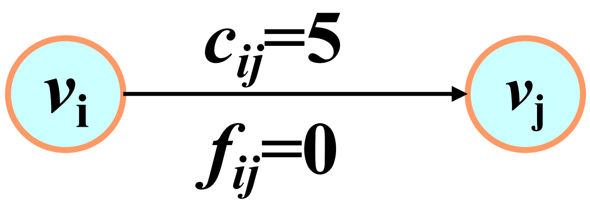
（v_i，v_j）是不饱和的

间隙为$\Delta_{12}=c_{12}-f_{12}=5-3=2$

可行流的分类（续）

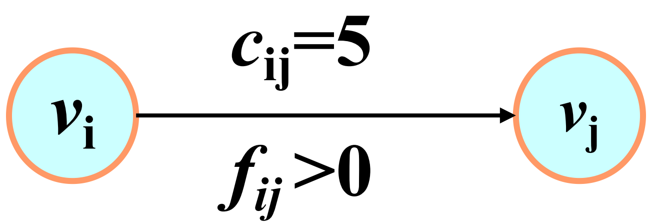
设 $f=\{f_{ij}\}$ 是网络 $\mathbf{D}=(V,A,C)$ 的一个可行流

3、如果 $f_{ij}=0$，该弧是0流弧；



（v_i，v_j）是0流弧

4、如果 $f_{ij}>0$，该弧是非0弧；



（v_i，v_j）是非0弧

增广路径---增广链

◆在最大流问题中，研究的是有向网络图。但在求最大流的方法中，则要使用无向网络中的路径(链)。

网络图D中，若μ为$v_s v_1 v_2 \cdots\cdots v_k v_t$的一条链，给$\mu$定向为从$v_s$到$v_t$，

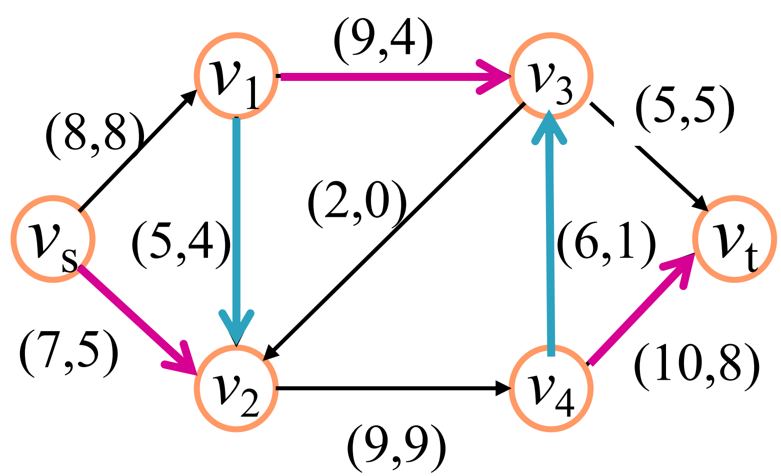
(1)前向弧集μ^+：v_i到v_j与μ同向;

(2)后向弧集μ^-：v_i到v_j与μ反向.

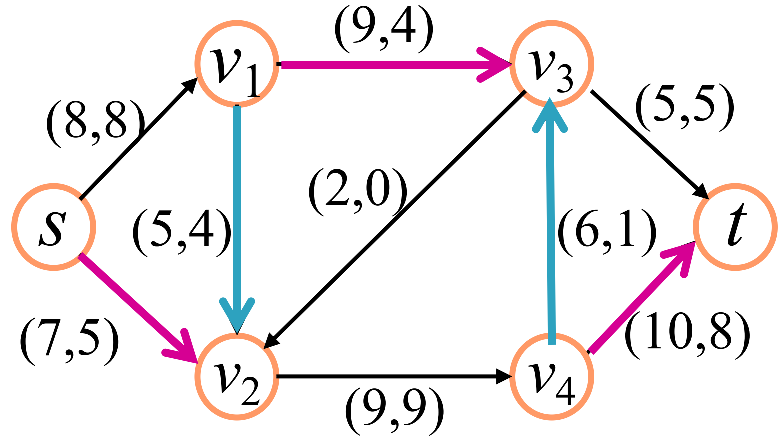
$\mu = v_s v_2 v_1 v_3 v_4 v_t$

$\mu^+ = \{(v_s,v_2), (v_1,v_3), (v_4,v_t)\}$

$\mu^- = \{(v_1,v_2), (v_4,v_3)\}$



增广路径



f是可行流，

$$\text{若}\begin{cases} 0\le f_{ij} < c_{ij} & \text{每一个}(v_i,v_j)\in\mu^+ \\ 0< f_{ij} \le c_{ij} & \text{每一个}(v_i,v_j)\in\mu^- \end{cases}$$

则称μ为可行流 f 的从 s 到 t 的可增广路径。

如何对网络图D的流量进行调整？

$$\delta_{ij}=\begin{cases} c_{ij}-f_{ij} & (v_i,v_j)\in\mu^+ \\ f_{ij} & (v_i,v_j)\in\mu^- \end{cases}$$

$$\delta=\min\{\delta_{ij}\}>0$$

$$f^*=\begin{cases} f_{ij}+\delta & (v_i,v_j)\in\mu^+ \\ f_{ij}-\delta & (v_i,v_j)\in\mu^- \\ f_{ij} & \text{非增广链上的弧} \end{cases}$$

$$v(f^*)=v(f)+\delta$$

定理6 (最大流量的充要条件): f 是容量网络 D 中的可行流，则 f 是 D 的最大流，当且仅当 D 中不存在 f 的增广路径.

求最大流的2F(Ford,Fulkerson)算法--标号算法

- 1.标号过程(寻找可增广链):

(1）给v_s以标号$(\Delta,+\infty)$

(2）对已标号的v_i，考虑v_i的所有未标号的邻接点v_j:

(a)若v_j是v_i发出的前向非饱和弧的终点，

即$f_{ij} < c_{ij}$，令$\delta_j = \min\{c_{ij} - f_{ij}, \delta_i\}$，标号为$(+v_i, \delta_j)$；否则不标号

(b)对v_j是v_i发出的后向非零弧的起点，

即$f_{ji} > 0$，令$\delta_j = \min\{f_{ji}, \delta_i\}$，标号为$(-v_i, \delta_j)$；否则不标号

(3)重复(2)直到 若v_t未得到标号，说明不存在v_s到v_t的增广链；

否则按如下方法调整。

- 2.调整过程（增加流量）:

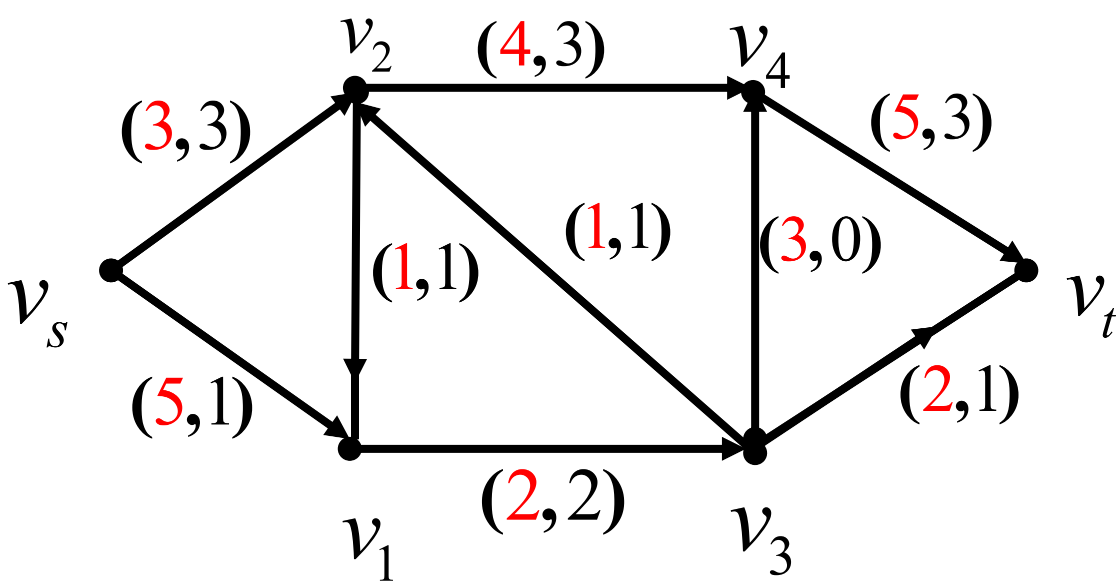
(1）令$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \boxed{\delta_t} & \text{增广链上的前向弧} \\ f_{ij} - \boxed{\delta_t} & \text{增广链上的后向弧} \\ f_{ij} & \text{不在增广链上} \end{cases}$

有$v(f') = v(f) + \delta_t$

(2）去掉所有标号，回到第1步，对可行流f'重新标号。

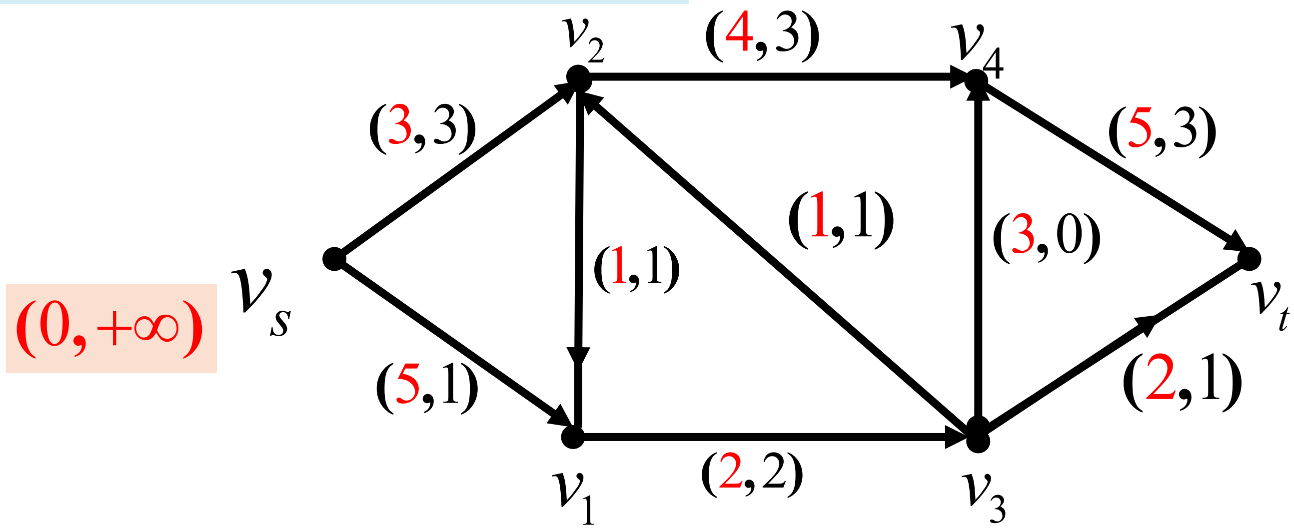
例1：用标号法求图所示网络的最大流

弧旁的数是(c_{ij},f_{ij})



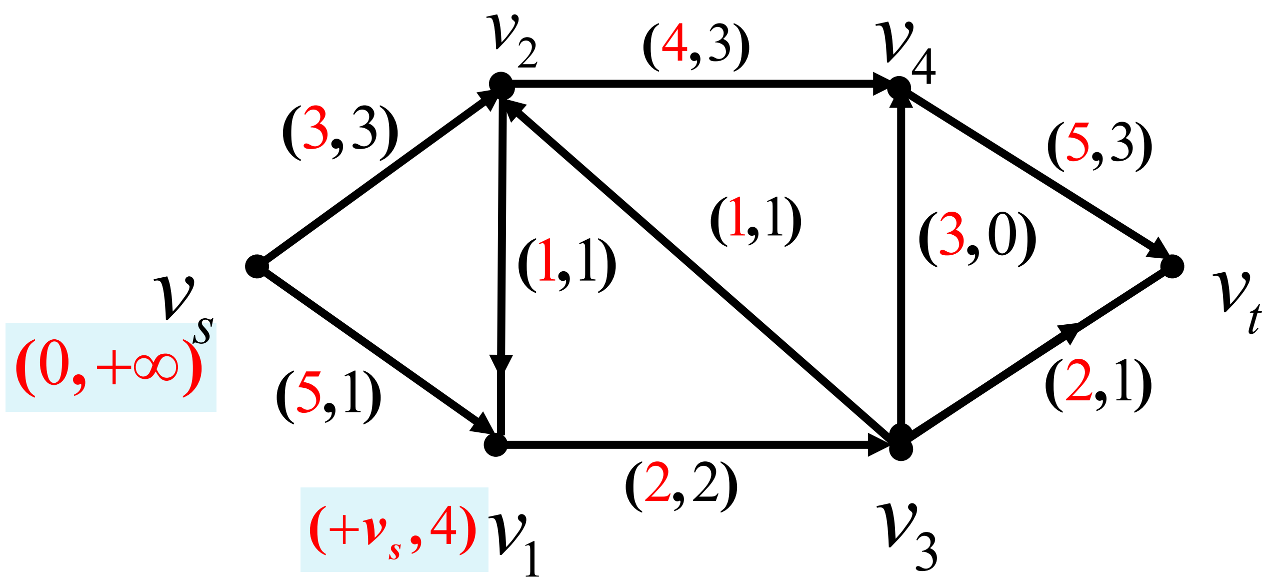
1） 寻找增广链：

a) 先给v_s 标号（0， +∞）



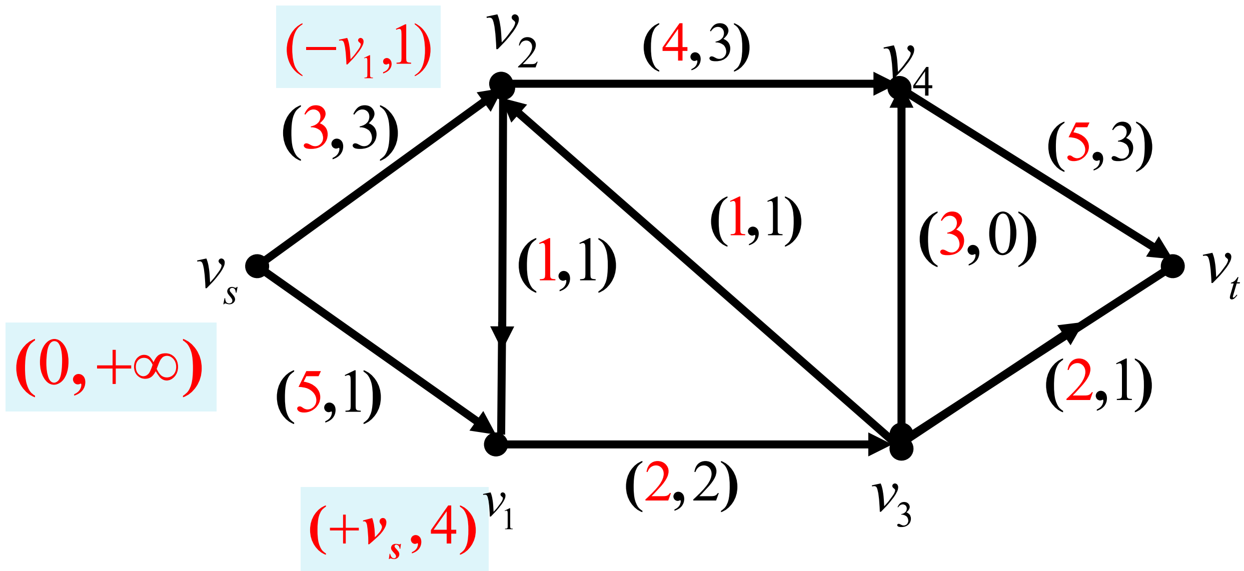
b）接着检查与相邻接的点v_1,v_2

v_2已饱和，流量不可再增;再检查 v_1 ,可调整量为 5-1=4,可提供量+∞，取调整量 $\delta(v_1) = \min[+\infty, 5-1] = 4$



给 v_1 标号$(+v_s,4)$,其中 $(+v_s,4)$表示v_1的所调整量4来自v_s ，且为正向流（向前流）。

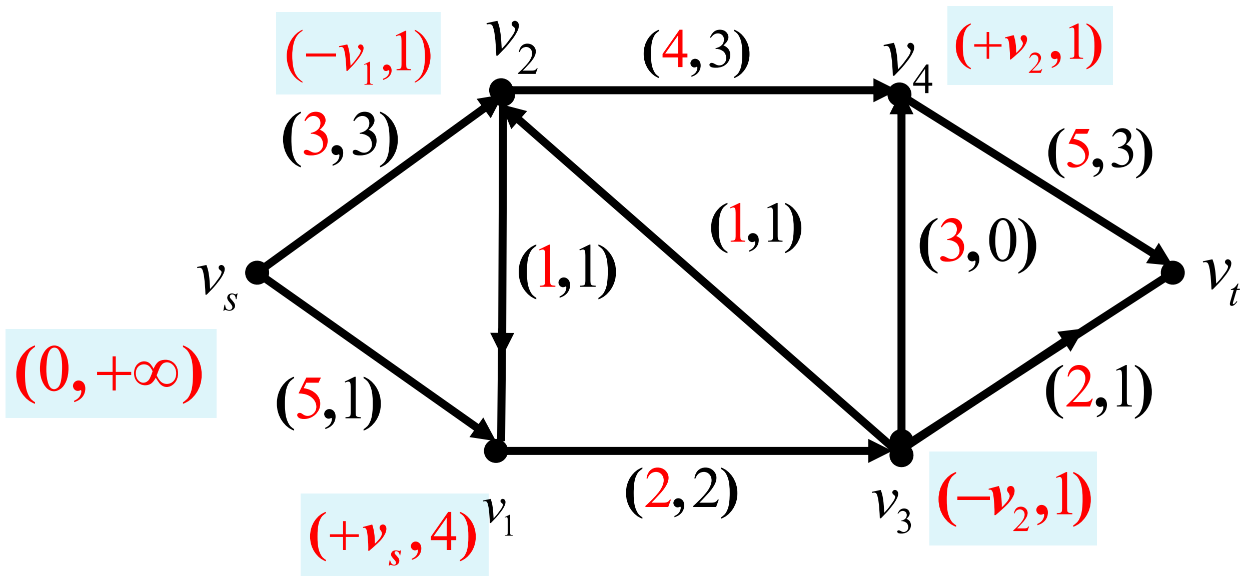
c) 对已标号点（可望调整点）接着向下检查。 v_3已饱和。再检查与 v_1相邻接且未标号的点v_2



而 v_2对v_1来讲是流入，现欲增加流出量，应该压缩 v_2的流入量，只要 v_2的流入量$f_{21}>0$,可令调整量为

$$\delta(v_2)=\min[\delta(v_1),1]=1$$

给 v_2 标号为$(-v_1,1)$,表示可控量，反方向流量。



d) 下面检查与 v_2相邻接且未标号的点 v_4 ，同理，调整量：

$$\delta(v_4)=\min[\delta(v_2),1]=1$$

给v_4标号为$(+v_2,1)$

因为流从点v_3流入v_2,且$f_{32}=1>0$

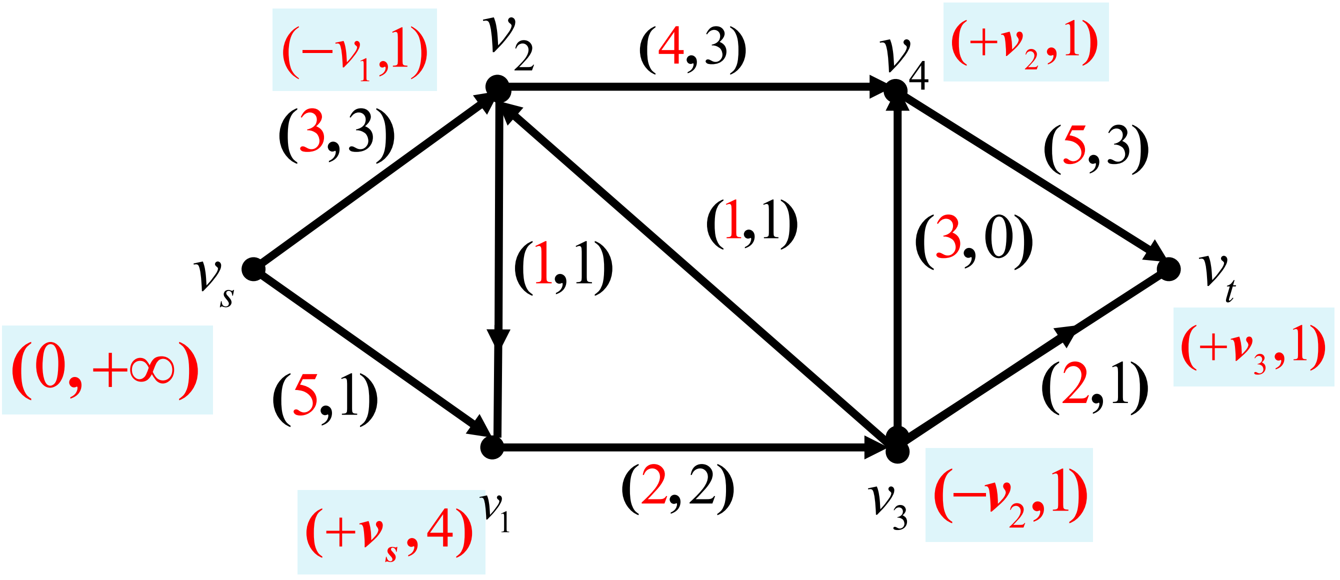
$$\delta(v_3)=\min[\delta(v_2),1]=1$$

给v_3标号$(-v_2,1)$

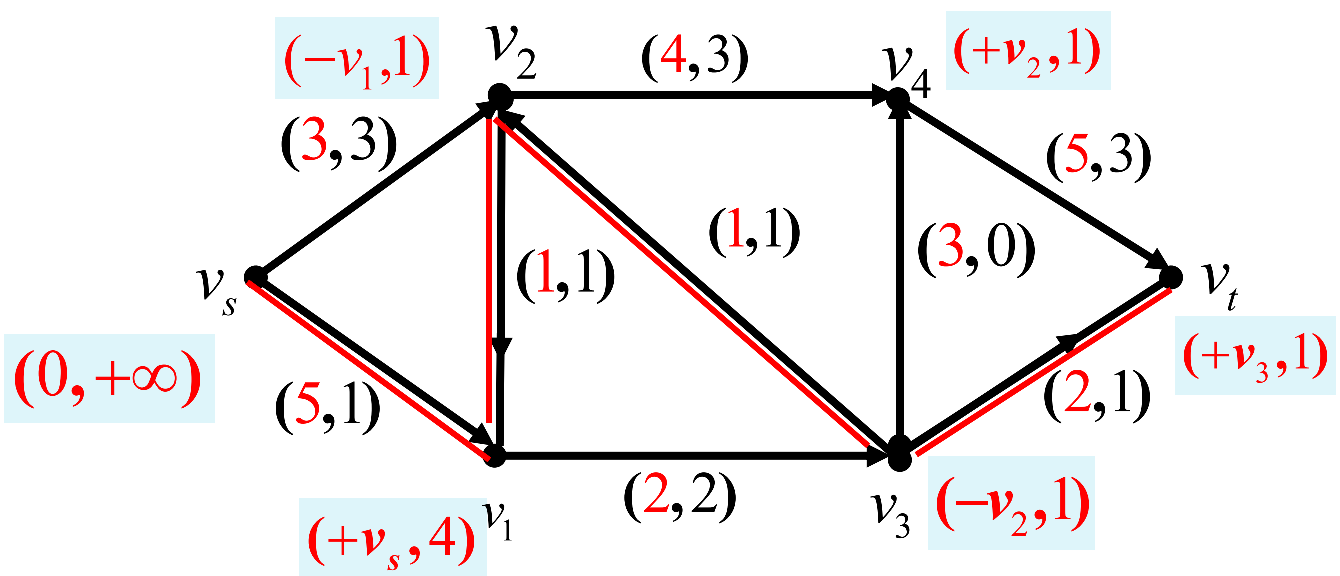
e)在v_3 v_4中任选一个进行检查。假设选v_3

$$\delta(v_t)=\min[\delta(v_3),(C_{3t}-f_{3t})]=\min[1,1]=1$$

给v_t标号$(+v_3,1)$



反向回溯追踪

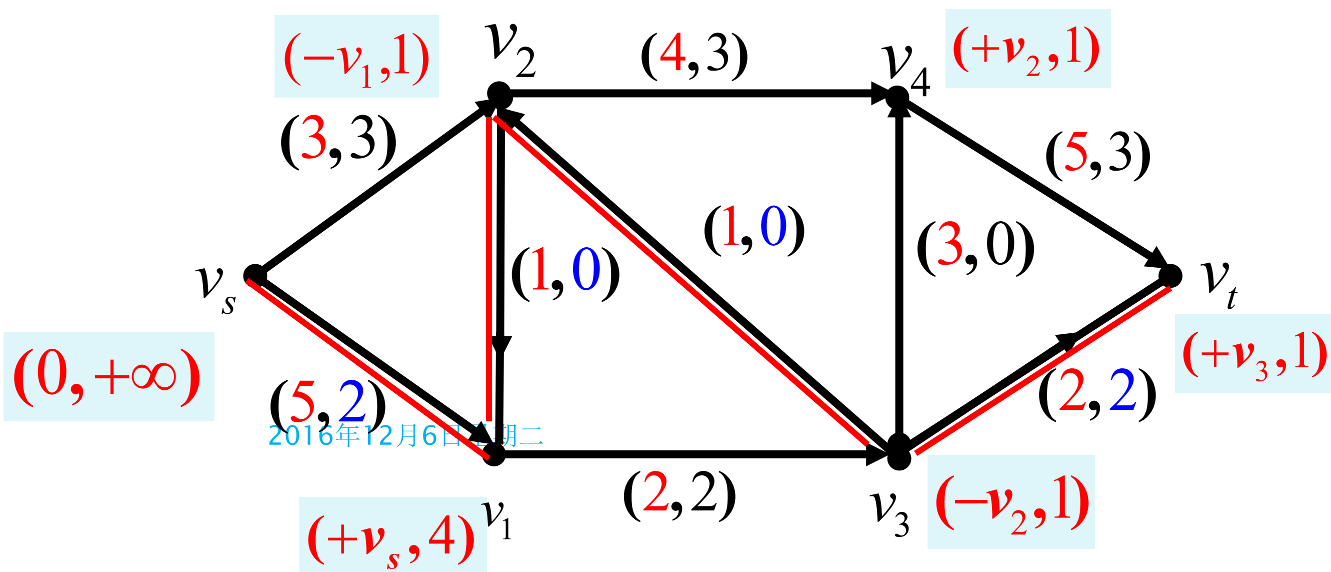


从v_t开始，根据标注进行反向回溯，直到v_s为止

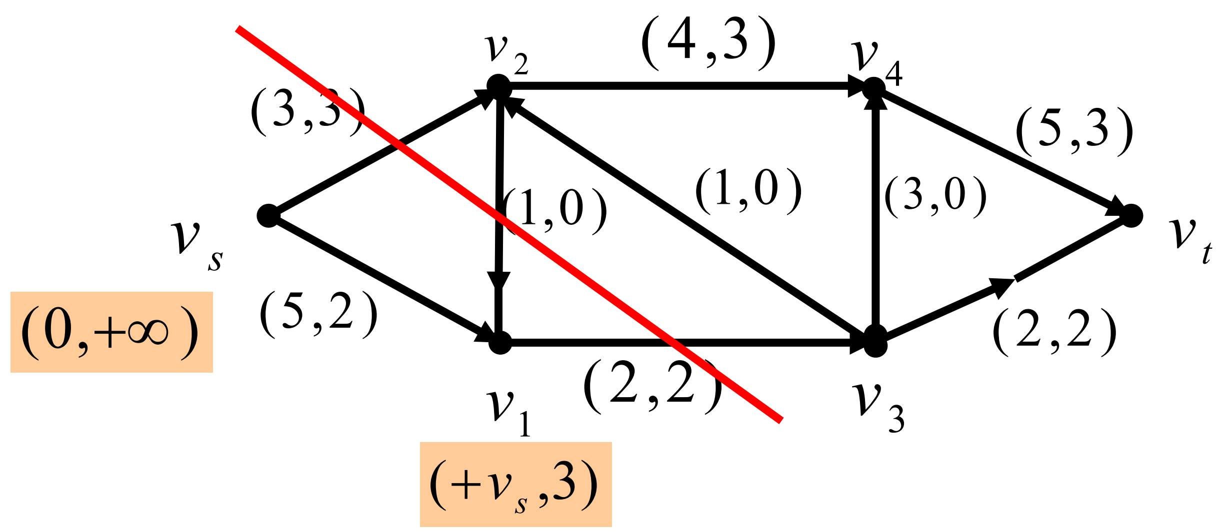
得到可增广路径$v_s\ v_1\ v_2\ v_3\ v_t$

2) 调整流量

◆从v_s到v_t所画出的红线即为增广链。沿该增广链，从 v_t倒推，标“+”号的在实际流量上加上该调整量，标“-”符号的在实际流量上减去该调整量。完成调整过程。



重新开始标号，寻找新的增广路径

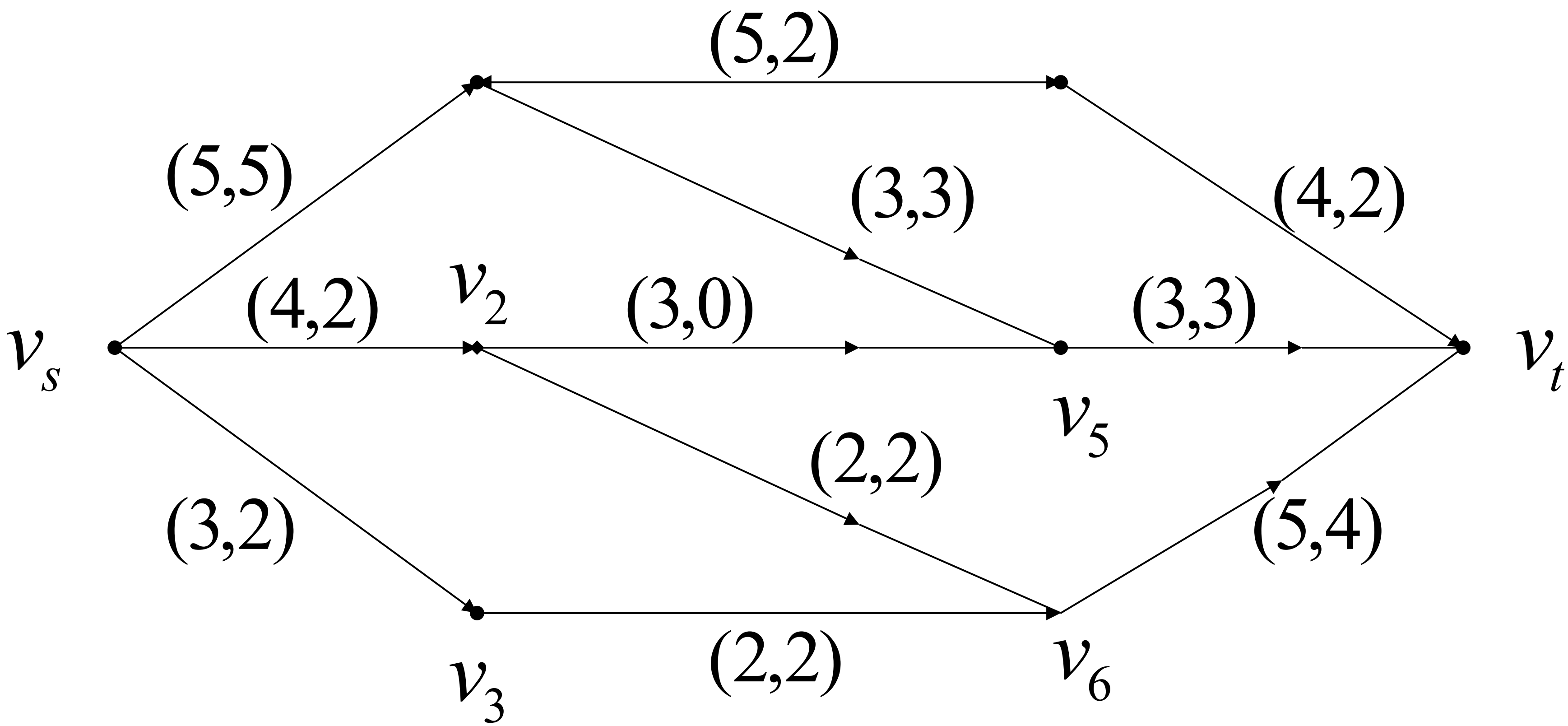


当标注与v_s相邻的点v_1 为$(+v_s,3)$后，与v_1相邻接的点v_2 ,v_3，都不满足标号条件，标号无法继续，且没有完成标号。此时最大流量即为所求$v(f)_{max} = f_{s2} + f_{13} = 5$

标号点集$V_1=\{v_s,v_1\}$;未标号点集$V\setminus V_1=\{v_2,v_3,v_4,v_t\}$.

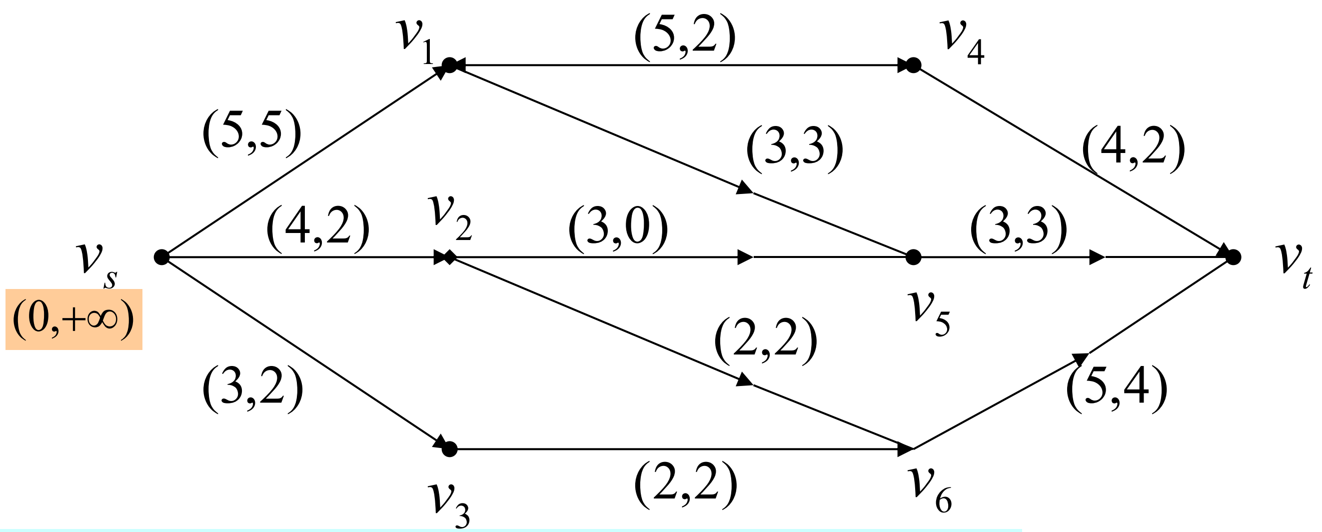
截集$(V, V\setminus V_1)=\{(v_s,v_2),(v_1,v_3)\}$，截集容量$C(V, V\setminus V_1)=3+2=5$

例2：用标号法求网络图的最大流，弧旁的数是(c_{ij},f_{ij})



1） 寻找可增广链：

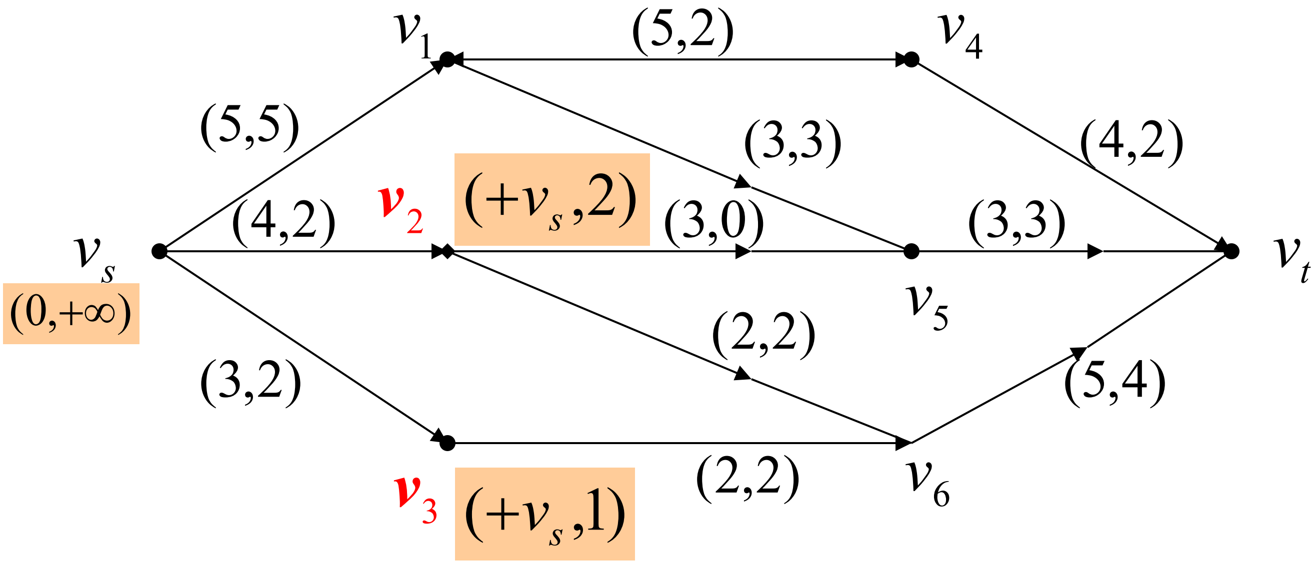
a) 先给标号 $v_s(0,+\infty)$



b）接着检查与相邻接的点 v_1 v_2 v_3

v_1已饱和，流量不可再增。再检查v_2，可调整量为 **4-2=2**，可提供量+∞，取调整量

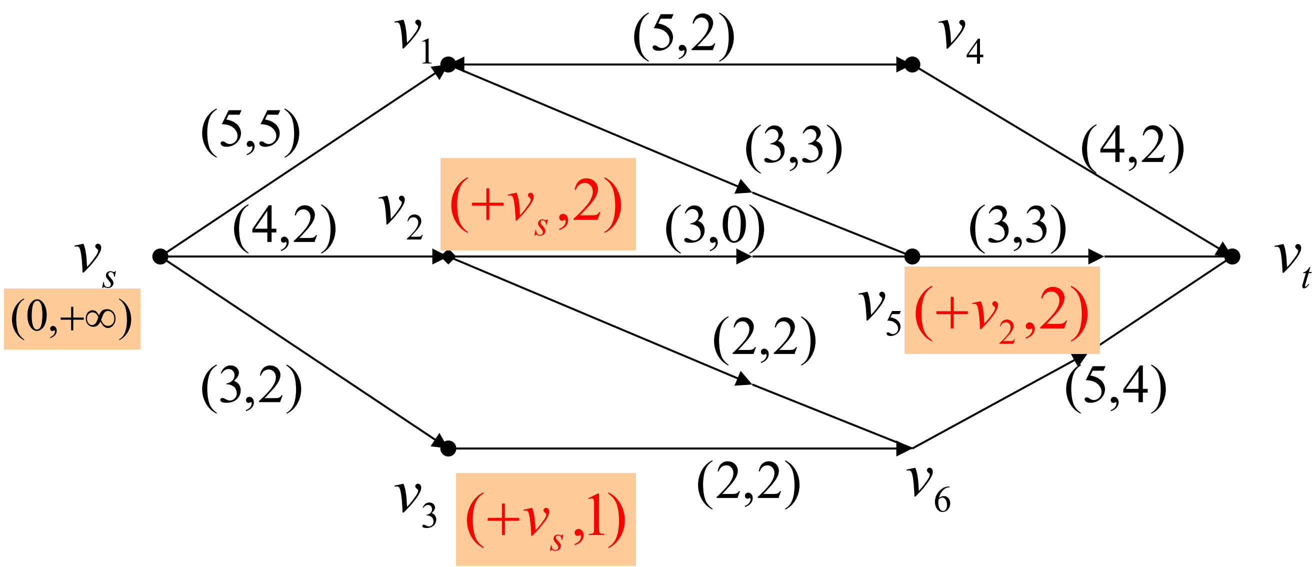
$$\delta_2 = \min\{4-2, +\infty\} = 2$$



给v_2标号$(+v_s,2)$，其中$+v_s$表示v_2的所调整量**2**来自v_s，且为正向流（向前流）。

同理，给v_3标号$(+v_s,1)$

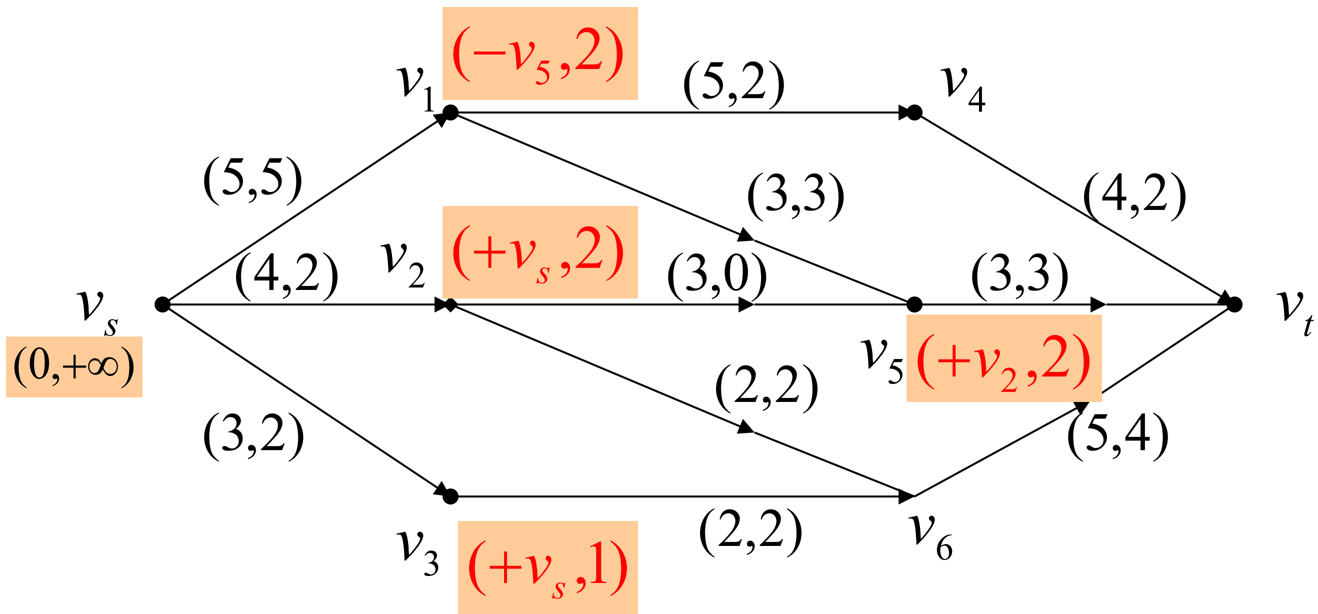
c) 下对已标号点（可望调整点）接着向下检查。v_6已饱和。再检查与v_2相邻接且未标号的点v_5, v_6



调整量为

$$\delta_5 = \min\{3-0, 2\} = 2$$

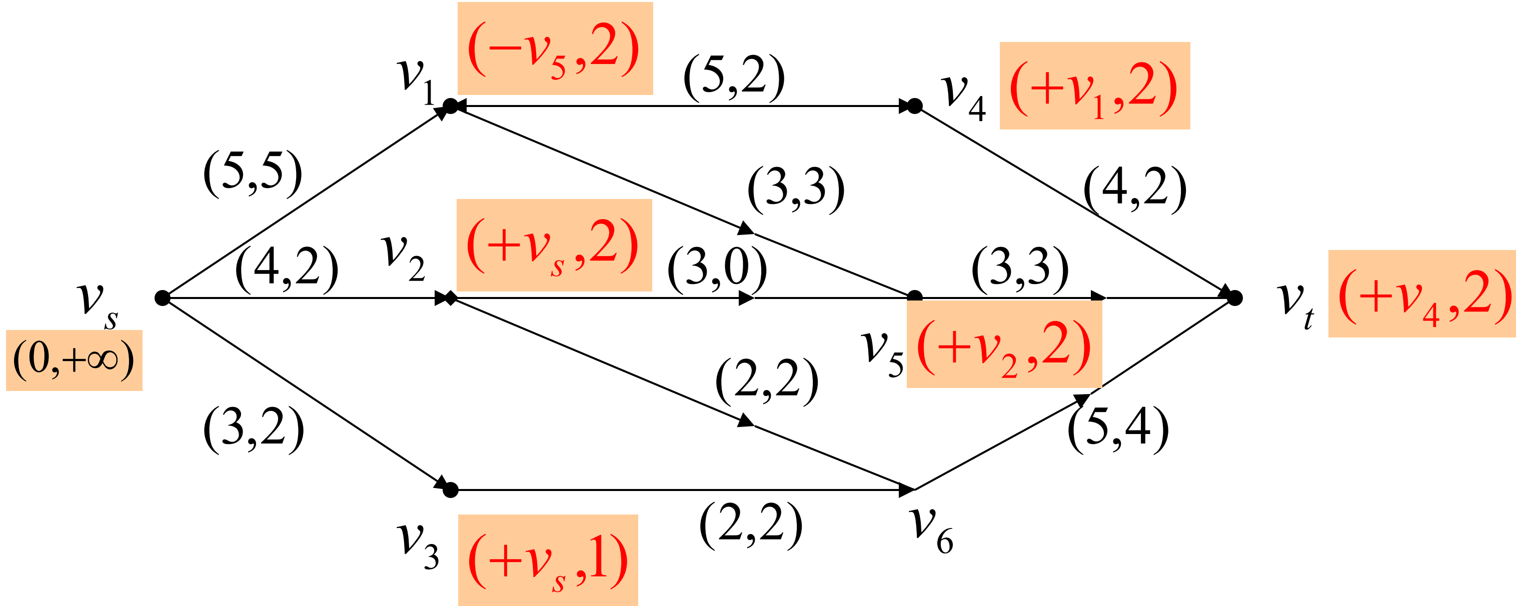
给v_5 标号为$(+v_2,2)$



d) 检查与v_5相邻接且未标号的点 v_1, v_t 。而 v_1 对 v_5 来讲是流入，现欲增加流出量，应该压缩 v_1 的流入量，只要流 入量 $f_{15} > 0$，可令调整量为

$$\delta_1 = \min\{3, 2\} = 2$$

给v_1 标号为 $(-v_5,2)$ 表示可控量，反方向流量。

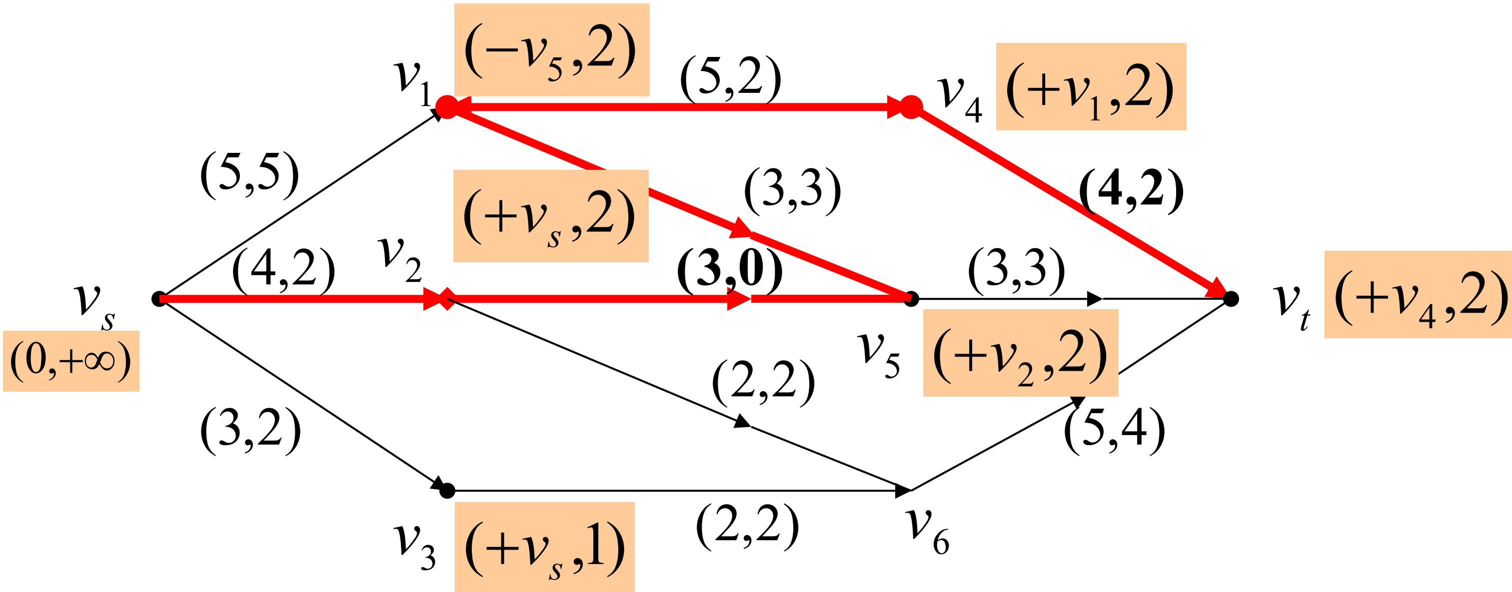


f) 下面检查与 v_1相邻接且未标号的点 v_4，同理，调整量：

$$\delta_4 = \min\{5-2,\,2\} = 2$$

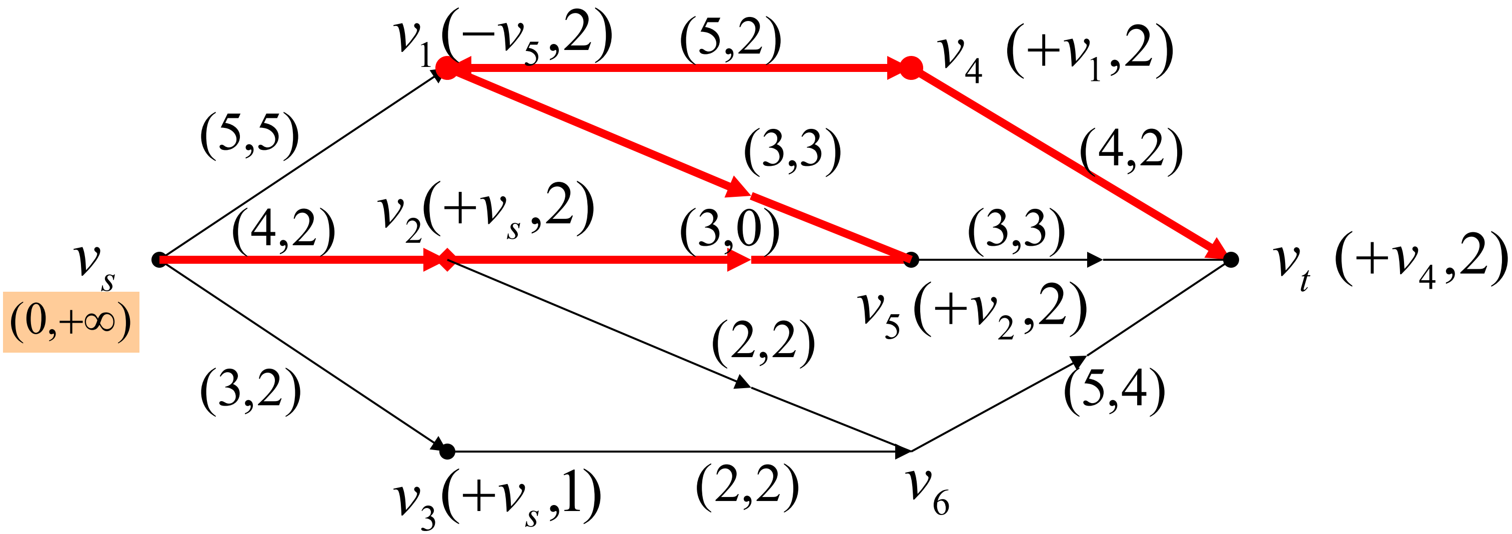
给v_4 标号为$(+v_1,2)$.

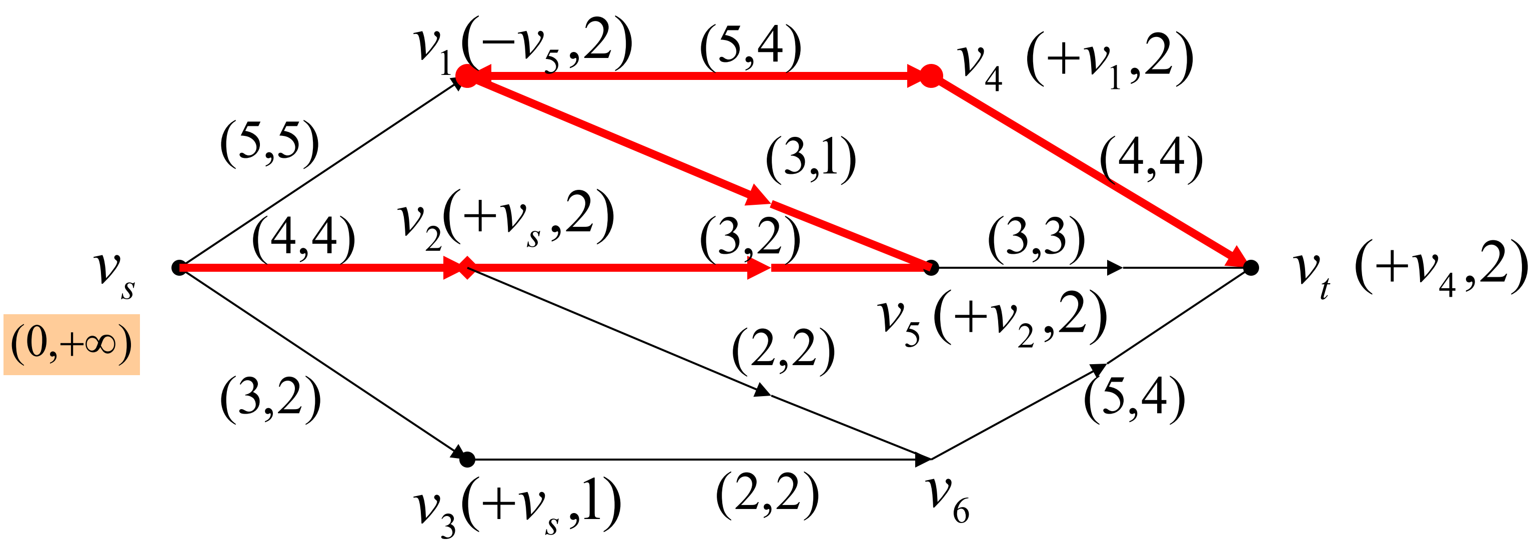
g) 最后，给 v_t 标号$(+v_4,2)$. $\delta_t = \min\{4-2,\,2\} = 2$

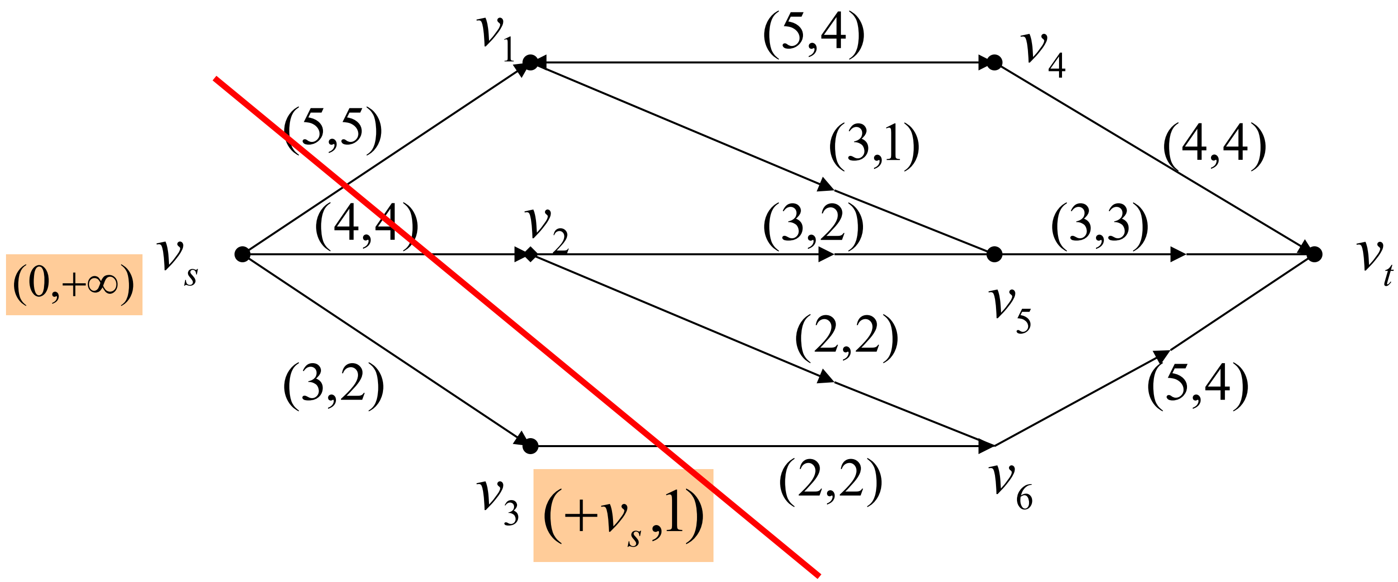


反向追踪

2）调整流量：从 v_s 到 v_t 所画出的红线即为可增广链。沿该可增广链，从 v_t 倒推，标“+”号的在实际流量上加上该调整量，标“-”符号的在实际流量上减去该调整量。完成调整过程。


$v_1(-v_5,2)$
(5,2)
$v_4\ (+v_1,2)$
(5,5)
(3,3)
(4,2)
$v_2(+v_s,2)$
(4,2)
(3,0)
(3,3)
v_s
$(0,+\infty)$
$v_t\ (+v_4,2)$
$v_5\,(+v_2,2)$
(2,2)
(3,2)
(5,4)
$v_3(+v_s,1)$
(2,2)
v_6


$v_1(-v_5,2)$
(5,4)
$v_4\ (+v_1,2)$
(5,5)
(3,1)
(4,4)
$v_2(+v_s,2)$
(4,4)
(3,2)
(3,3)
v_s
$(0,+\infty)$
$v_t\ (+v_4,2)$
$v_5\,(+v_2,2)$
(2,2)
(3,2)
(5,4)
$v_3(+v_s,1)$
(2,2)
v_6



重新开始标号，寻找可增广链。

当标到 $(+v_s,1)$ 时，v_s与 v_3， 相邻接的点 v_1，v_2，v_6 都不满足标号条件，标号无法继续，且 v_t 没有完成标号。此时最大流量即为所求。

$$w = f^*_{s1} + f^*_{s2} + f^*_{s3} = 5 + 4 + 2 = 11$$

标号点集 $V = \{v_s, v_3\}$;

未标号集 $\overline{V} = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_t,\}$;

割集 $(V,\overline{V}) = \{(v_s,v_1),(v_s,v_2),(v_3,v_6)\}$

割集容量 $C(V,\overline{V}) = c_{s1} + c_{s2} + c_{36} = 11$