随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 数学科学学院

武德安

第一章随机过程的基本概念

§1.1随机过程的定义及分类

§1.2随机过程的分布

§1.3随机过程的数字特征

§1.4随机过程的基本类型

§1.2 随机过程的分布

一、分布函数

定义1.2.1： 随机过程$X_T=\{X(t),t\in T\}$，对$\forall t\in T$,随机变量$X(t)$的分布函数$F(t;x)=P\{X(t)\le x\},x\in R$称为过程$X_T$的**一维分布函数**.

注： 一维分布函数描述了随机过程在各个孤立时间点处的统计特性，未给出过程的整体统计特性.

定义2.2.2:随机过程$\{X(t),t\in T\}$,对任给的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,随机向量$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\right)$的联合分布函数

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

称为过程的n**维分布函数**.

记

$$\underbrace{\mathbf{F}=\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n):t_i\in T,x_i\in R_i,t=1,2,\cdots,n,n\ge 1\}}_{X_T\text{的任意有限维分布函数的全体构成的集合}}$$

称F为X_T的**有限维分布函数族**.

定义2.2.3 过程$\{X(t),t\in T\}$的n维特征函数定义为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)=E\left\{e^{j[\theta_1X(t_1)+\cdots+\theta_nX(t_n)]}\right\}$$

称$\{\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n):\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$

为X_T的**有限维特征函数族.**

特征函数和分布函数是相互唯一确定.

二. 随机过程存在定理

随机过程的n维分布函数族能近似地描述过程的统计特性,n越大则描述越趋于完善.

需研究随机过程与有限维分布函数的关系.

随机过程的有限维分布函数有以下性质:

1) 对称性(横向相容性): 对$1,2,\ldots,n$的任一排列$j_1,j_2,\ldots,j_n$, 均有

$$F(t_{j_1},\cdots,t_{j_n};x_{j_1},\cdots,x_{j_n})=F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

注: 因事件乘积满足交换律. $P(AB)=P(BA)$

2）相容性(纵向相容性):对任意固定的自然数$m<n$,均有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\ldots,x_m)=F_{t_1,t_2,\cdots,t_m,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_m,\infty,\cdots,\infty)$$

$$=\lim_{x_{m+1},\cdots,x_n\to\infty}F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,\ldots,x_m,\cdots x_n)$$

注: 联合分布函数能完全确定边缘分布函数.

类似地,随机过程的有限维特征函数满足:

1）对$1,2,\ldots,n$的任一排列$j_1,j_2,\ldots,j_n$有

$$\varphi(t_{j_1},\cdots,t_{j_k};\theta_{j_1},\cdots,\theta_{j_x})=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$$

2）对任意固定的自然数$m<n$,均有

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_m;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_m,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,0,\cdots,0)$$

相容的有限维概率分布族决定无穷维概率分布的“相容性定理”。

定理1.1.3(Kolmogrov随机过程存在定理)

如果有限分布函数族$\boldsymbol{F}=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$满足相容性和对称性,则存在一个概率空间上的一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$以$\boldsymbol{F}$为有限维分布函数族,即有$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_{t_1}\leq x_1,X_{t_2}\leq x_2,\cdots,X_{t_n}\leq x_n\}$

故可用有限维分布描述随机过程的整体统计特性.

Eg. 1：设随机过程$\{X_t(\omega), t\in R\}$只有两条样本函数$x_t(\omega_1)=2\cos t, x_t(\omega_2)=-2\cos t$,

$t\in R$且　$P(\omega_1)=\dfrac{2}{3}, P(\omega_2)=\dfrac{1}{3}$

求 1) 一维分布函数$F(0;x)$和$F(\pi/4;\ x)$;

2) 二维分布函数$F_{0,\pi/4}(0,\pi/4;\ x,y)$.

解： 1) 对任意实数$t\in R$,有

X_t	$-2\cos t$	$2\cos t$
p	$1/3$	$2/3$

特别的$\Longrightarrow$

X_0	-2	2
p	$1/3$	$2/3$

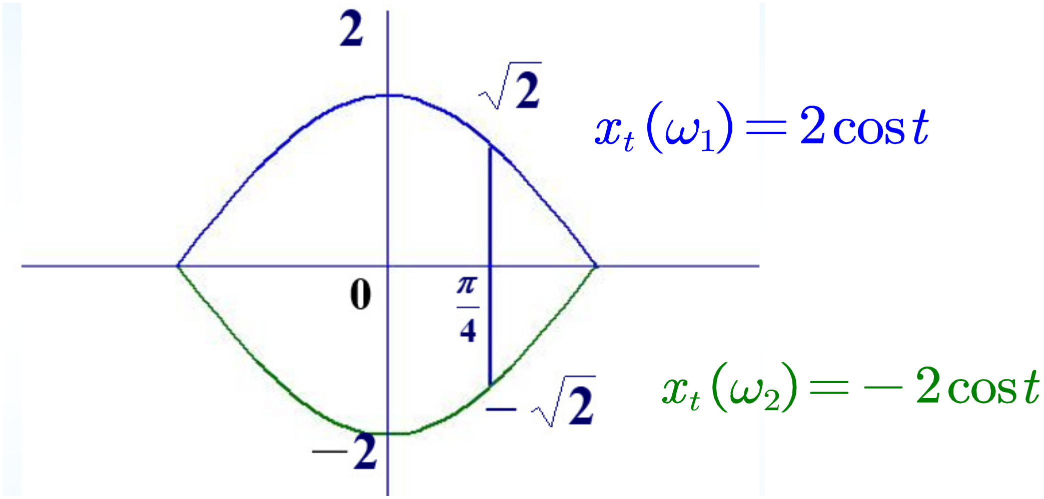
$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
p	$1/3$	$2/3$

其分布函数分别为

$$F_{X_0}(x)=\begin{cases}0, & x<-2;\\ \frac{1}{3}, & -2\le x<2;\\ 1, & 2\le x;\end{cases}\qquad F_{X_{\frac{\pi}{4}}}(x)=\begin{cases}0, & x<-\sqrt{2};\\ \frac{1}{3}, & -\sqrt{2}\le x<\sqrt{2};\\ 1, & \sqrt{2}\le x;\end{cases}$$

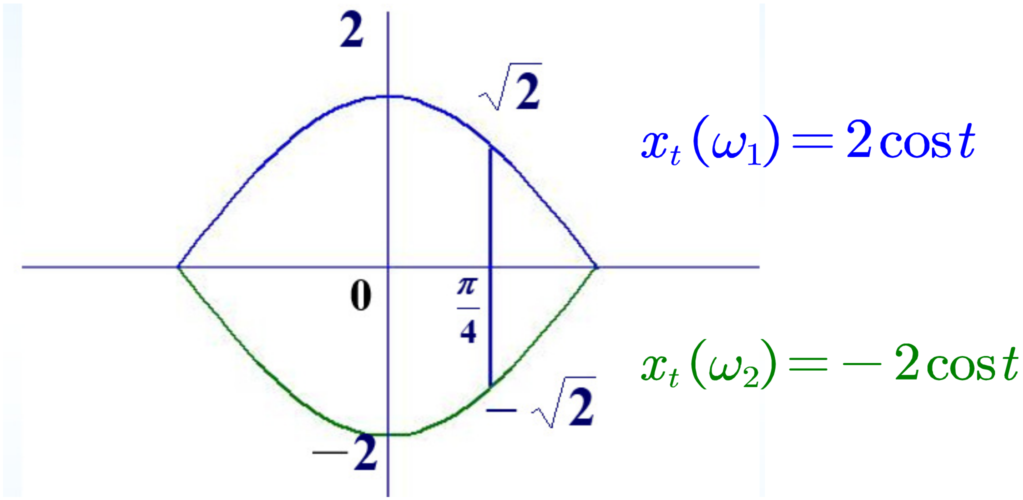
2）分析

X_t	$-2\cos t$	$2\cos t$
p	$1/3$	$2/3$



2）分析

X_t	$-2\cos t$	$2\cos t$
p	$1/3$	$2/3$



二维随机变量 $(X_0, X_{\pi/4})$ 的联合分布律为

$(X_0(\omega), X_{\pi/4}(\omega))$	$(-2, -\sqrt{2})$	$(2, \sqrt{2})$
p	$1/3$	$2/3$

二维随机变量 $(X_0, X_{\pi/4})$ 的联合分布律为

$(X_0(\omega), X_{\pi/4}(\omega))$	$(-2, -\sqrt{2})$	$(2, \sqrt{2})$
p	$1/3$	$2/3$

其联合分布函数为

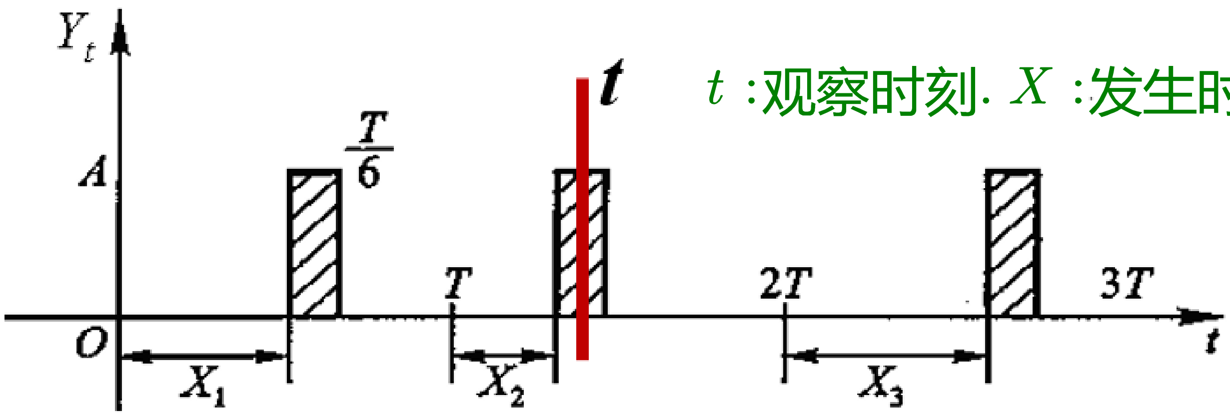
$$F_{0,\frac{\pi}{4}}(x,y) = P\left\{X_0 \le x, X_{\frac{\pi}{4}} \le y\right\} = \begin{cases} 0, & x < -2, \text{ 或 } y < -\sqrt{2}; \\ \dfrac{1}{3}, & -2 \le x < 2 \text{ 且 } -\sqrt{2} \le y \text{ 或 } -\sqrt{2} \le y < \sqrt{2} \text{ 且 } 2 \le x; \\ 1, & 2 \le x, \sqrt{2} \le y; \end{cases}$$

问题: 随机变量 $X(0)$ 和 $X(\pi/4)$ 是否相互独立?

Eg.2 (脉冲位置调制信号):一个通信系统传输的信号$Y_t(\omega)$称为脉冲位置调制信号,一条样本函数如下图.

1) 系统每隔T秒输出宽度为$T/6$,幅度为A的脉冲;

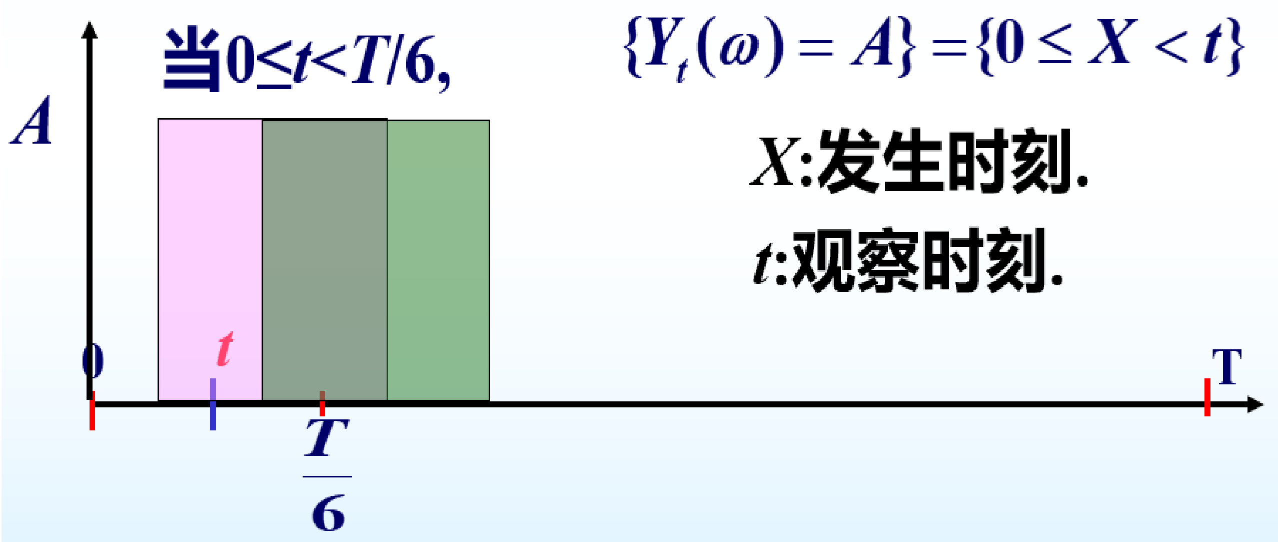
2) 各脉冲开始时间为$X_j, j=1,2,\ldots$,相互独立. 3),$X_j \sim U(0,5/6T)$.



t :观察时刻. X :发生时刻.

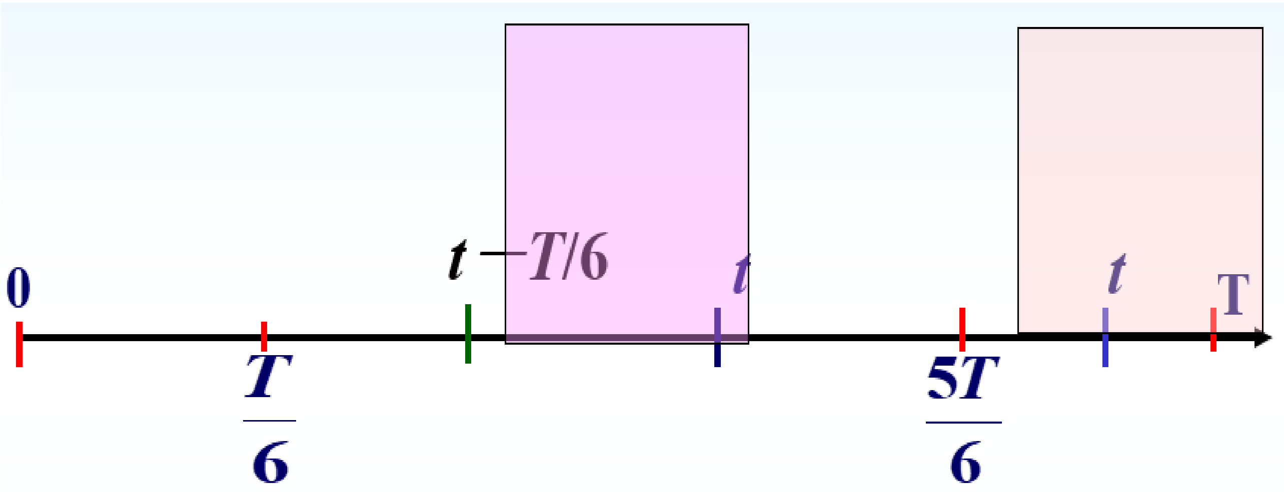
求Y的一维概率分布. $\mathrm{Max}(0,t-T/6)<X<\min(5T/6,t)$

解: X_j的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{5T}, & 0\le x\le \dfrac{5}{6}T;\\ 0, & 其它.\end{cases}$ $\mathrm{Max}(0,t-T/6)<X<\min(5T/6,t)$



(1) 当 $0\le t<T/6$, $P\{Y_t(\omega)=A\}=P\{0\le X<t\}=\dfrac{6t}{5T}$

(2) 当 $T/6 \le t < 5T/6$, $\quad \mathrm{Max}(0, t - T/6) < X < \min(5T/6, t)$:



$$P\{Y_t(\omega) = A\} = P\left\{t - \frac{T}{6} \le X < t\right\} = \left[t - \left(t - \frac{T}{6}\right)\right]\frac{6}{5T} = \frac{T}{6}\frac{6}{5T} = \frac{1}{5}$$

(3) 当 $5T/6 \le t < T$, $P\{Y_t(\omega) = A\} = P\left\{< X < \frac{5T}{6}\right\} = \left[\frac{5T}{6} - \left(t - \frac{T}{6}\right)\right]\frac{6}{5T} = \frac{6}{5T}(T - t).$

Eg. 3: 随机正弦波设随机过程$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$, $t\in R$,其中ω是正常数,随机变量A与Θ相互独立,$A\sim U(0,1)$,$\Theta\sim U(-\pi,\pi)$,试求过程的一维概率密度.

解: 1)首先固定$A=a$,设$Y(t)=a\cos(\omega t+\Theta)\Longrightarrow \Theta=\arccos\dfrac{y_t}{a}-\omega t$

其中 a 是常数,可求得 $Y(t)$ 的一维概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_X\left[h_i(y)\right]\cdot|h_i'(y)|=2\frac{1}{2\pi}\left|\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{y_t}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & |y|<a;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\\ 0\end{cases}$$

$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta),\quad t\in R,\ \omega$是正常数,随机变量$A$与$\Theta$相互独立,$A\sim U(0,1),\Theta\sim U(-\pi,\pi)$,试求过程的一维概率密度.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & |y|<a\}\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

2)在$A=a$的条件下,X的条件概率密度为用连续型全概率公式 $f_{X|A}(x|a)=f_Y(x)$

$$f_X(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|A}(x|a)\,dF_A(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|A}(x|a)f_A(a)\,da$$

$$=\int_0^1 f_{X|A}(x|a)\,da=\begin{cases}\displaystyle\int_{|x|}^1\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}da, & |x|<1;\\ 0 & 其它.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right), & |x|<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

思考题:为什么可以用过程的有限维分布函数族或特征函数族描述随机过程的统计特性?