组合优化理论

第4章　动态规划法

主讲教师：陈安龙

第4章 动态规划法

1.动态规划的基本原理

2.动态规划求最短路径

3.动态规划的应用

一、问题的提出

动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的一种方法。由美国数学家贝尔曼（Bellman）等人在20世纪50年代提出。他们针对多阶段决策问题的特点，提出了解决这类问题的“最优化原理”，并成功地解决了生产管理、工程技术等方面的许多实际问题。

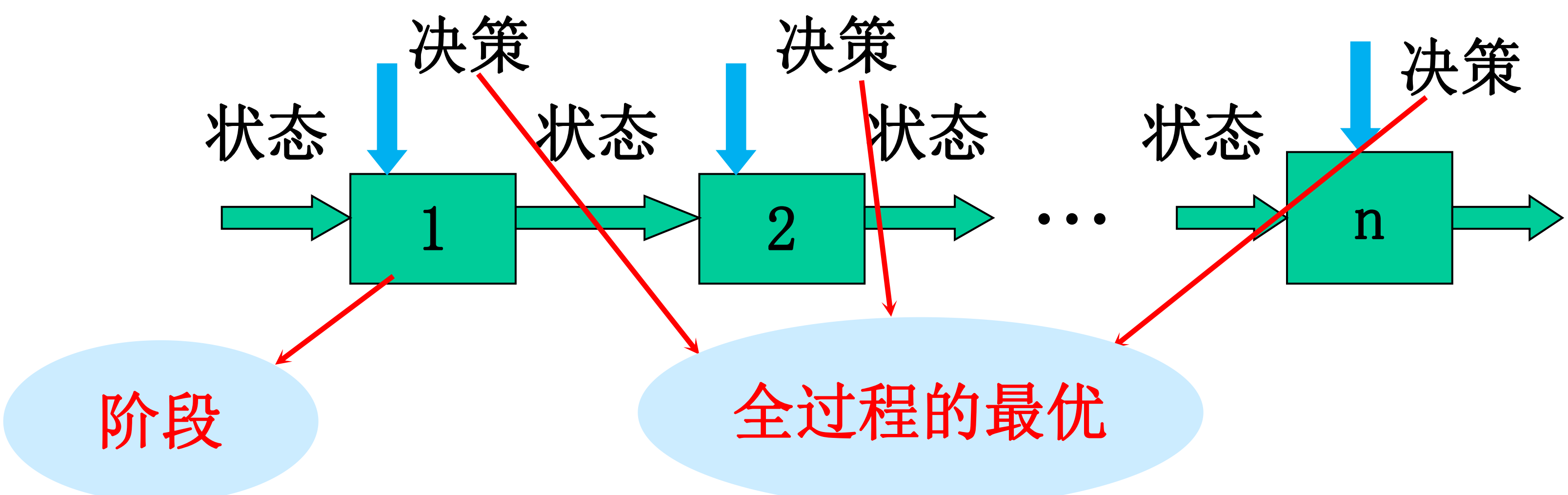
动态规划是现代企业管理中的一种重要决策方法，可用于最优路径问题、资源分配问题、生产计划和库存问题、投资问题、装载问题、作业排程问题及生产过程的最优控制等。

多阶段动态决策问题：

在多阶段决策过程中，系统的动态过程可以按照时间进程分为状态相互联系而又相互区别的各个阶段；每个阶段都要进行决策，目的是使整个过程的决策达到最优效果。

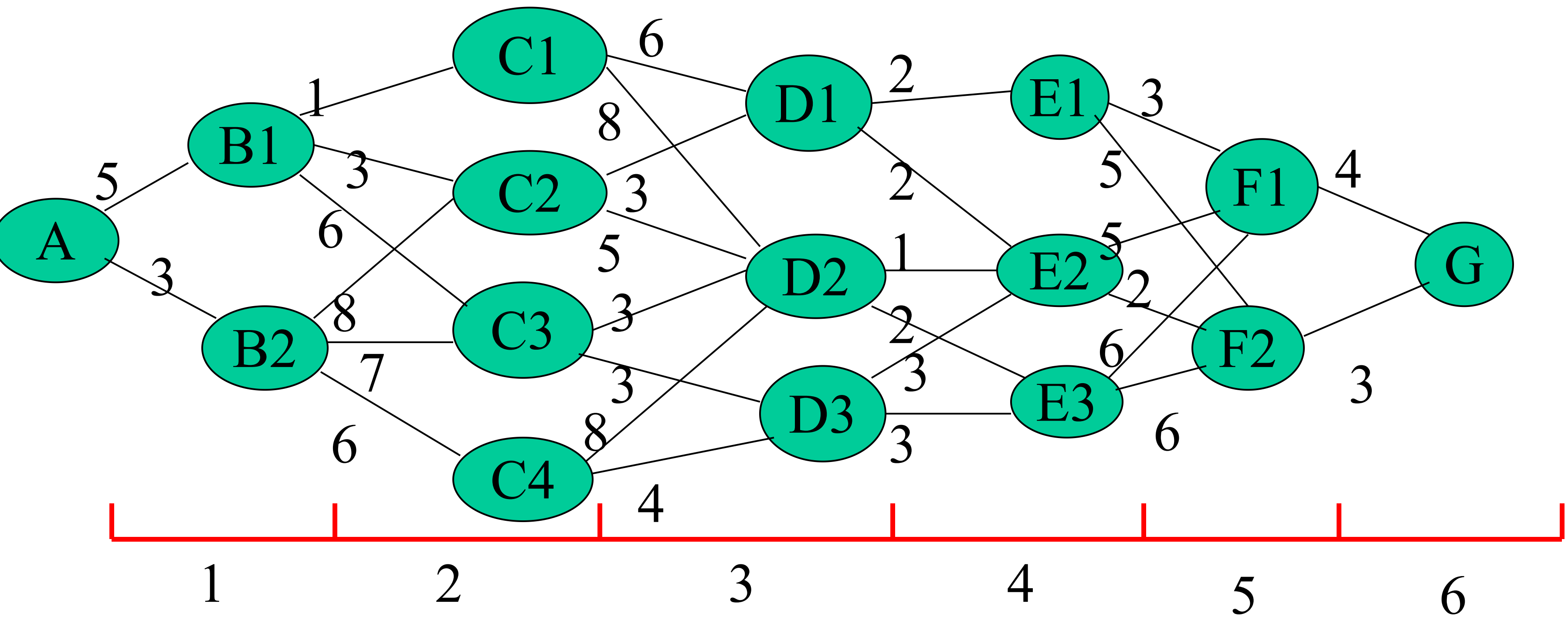
系统所处的状态和时刻是进行决策的重要因素。

找到不同时刻的最优决策以及整个过程的最优策略。



二、动态规划的基本思想

（一）、基本概念



1、阶段、阶段变量

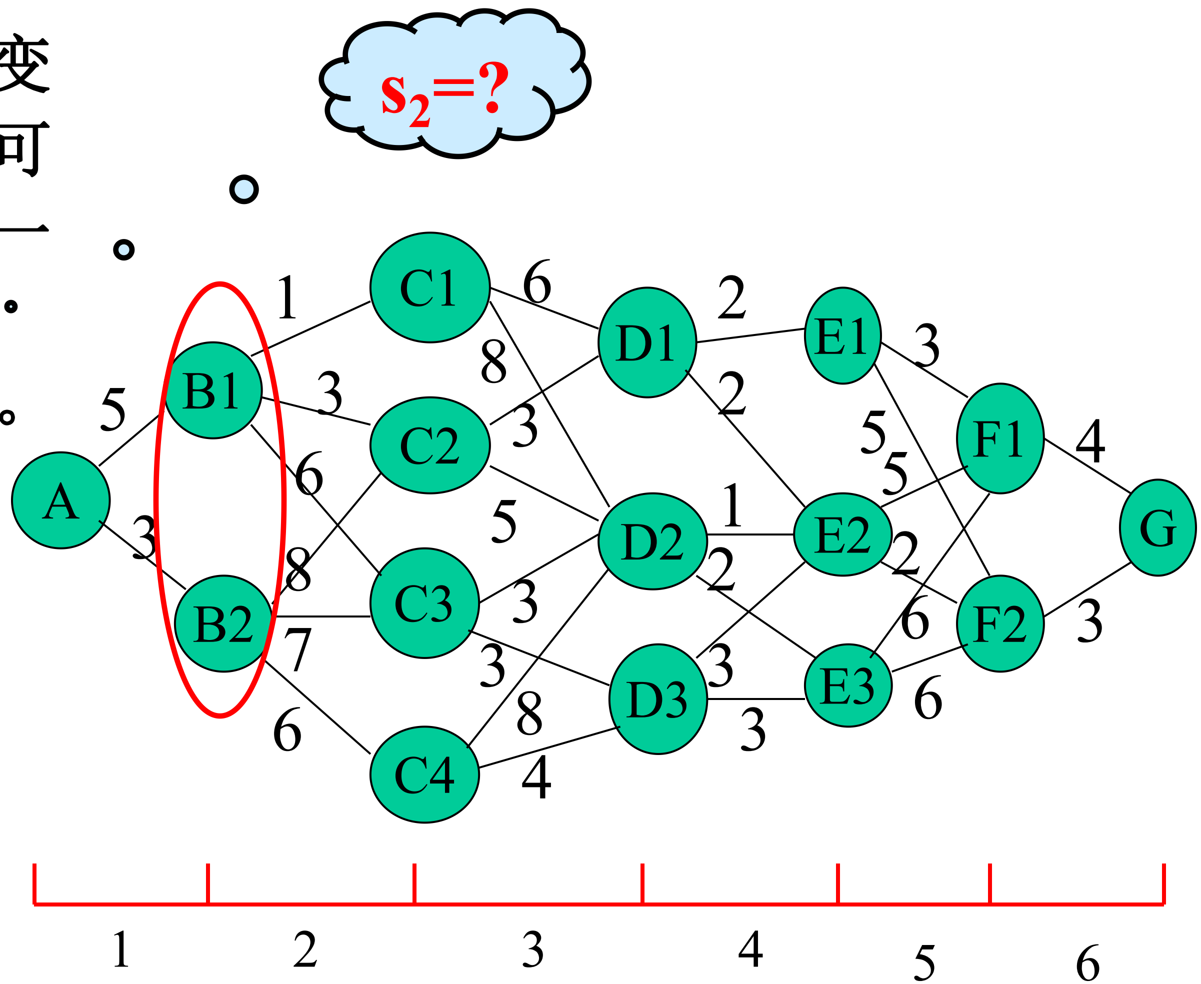
把所给问题的过程，适当（按时间和空间）地分为若干个相互联系的阶段；描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。

2、状态、状态变量

每个阶段开始所处的自然状态或客观条件，描述过程的状况，通常一个阶段有若干个状态。

描述过程状态的变量称为状态变量，它可用一个数、一组数或一向量来描述，常用 s_k 表示第 k 阶段的状态。

状态允许集合，状态变量的取值允许集合或范围。



3、决策、决策变量

某一阶段、某个状态，可以做出不同的决定（选择），决定下一阶段的状态，这种决定称为决策。

在最优控制中也称为控制。

$u_k(s_k) \in D_k(s_k)$

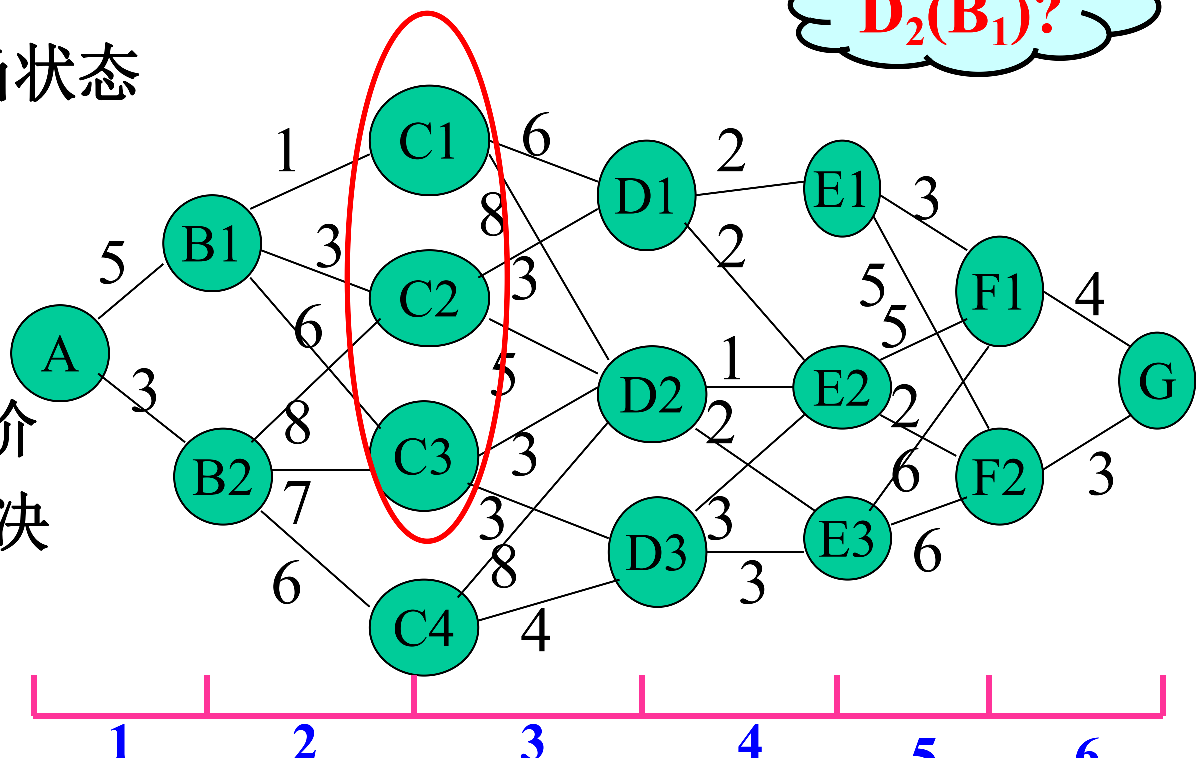
决策变量，描述决策的变量。

$D_2(B_1)$?

$u_k(s_k)$，表示第 k 阶段当状态为 s_k 时的决策变量。

允许决策集合，

常用 $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合。



4、多阶段决策过程

在每个阶段进行决策 → 控制过程的发展；

其发展是通过一系列的状态转移来实现的；

系统当前的状态和决策

系统过去的历史状态和决策

s_1=A,u_1=B_1,
s_2=?

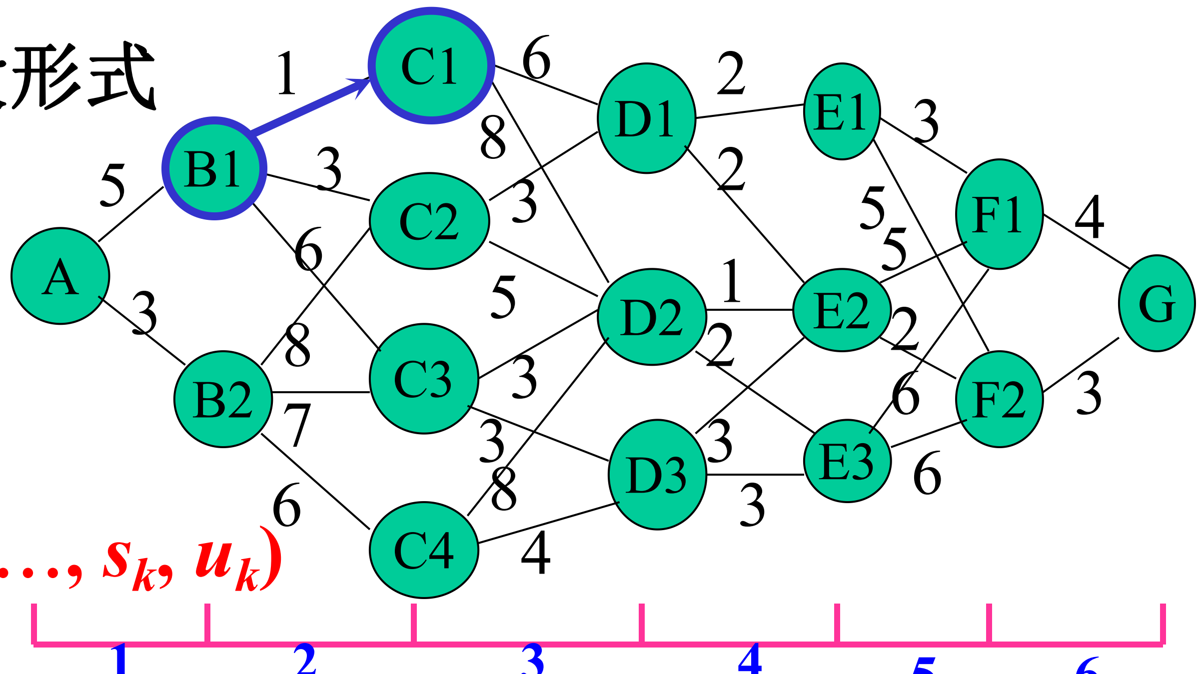
状态转移方程的一般形式

$$s_2=T_1(s_1, u_1)$$

$$s_3=T_2(s_1, u_1, s_2, u_2)$$

…… ……

$$s_{k+1}=T_k(s_1, u_1, s_2, u_2, \ldots, s_k, u_k)$$



5、能采用动态规划求解的问题的一般要具有3个性质：

- **最优性原理**：如果问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的，就称该问题具有最优子结构，即满足最优性原理。
- **有重叠子问题**：即子问题之间是不独立的，一个子问题在下一阶段决策中可能被多次使用到。（该性质并不是动态规划适用的必要条件，但是如果没有这条性质，动态规划算法同其他算法相比就不具备优势）。
- **无后效性或马尔可夫性**：如果某阶段状态给定后，则在这个阶段以后过程的发展不受这个阶段以前各阶段状态的影响；过程的过去历史只能通过当前的状态去影响它未来的发展。

构造动态规划模型时，要充分注意**状态变量**是否满足无后效性的要求；

状态转移方程？

状态具有无后效性的多阶段决策过程的状态转移方程如下：

$$s_2=T_1(s_1, u_1)$$

$$s_3=T_2(s_2, u_2)$$

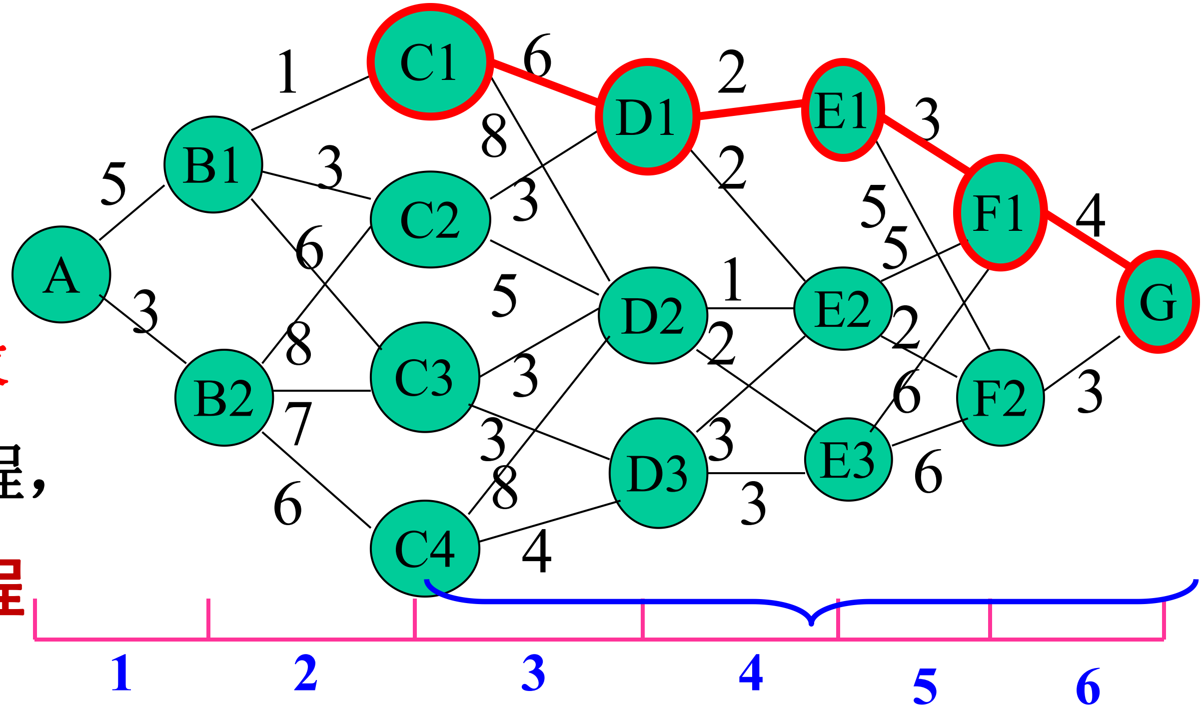
$$\cdots\ \cdots$$

$$s_{k+1}=T_{\mathrm{k}}(s_k, u_k)$$

6、策略

按顺序排列的决策组成的集合。

由过程的第k 阶段到终止状态为止的过程，称为问题的**后部子过程**（k 子过程）。



从第k阶段状态开始，由每段的决策按顺序排列组成的决策函数序列称为 k 子过程策略。简称**子策略**，记为$p_{k,n}(s_k)$，

即， $P_{k,n}(s_k)=\{u_k(s_k),u_{k+1}(s_{k+1}), \ldots,u_n(s_n)\}$

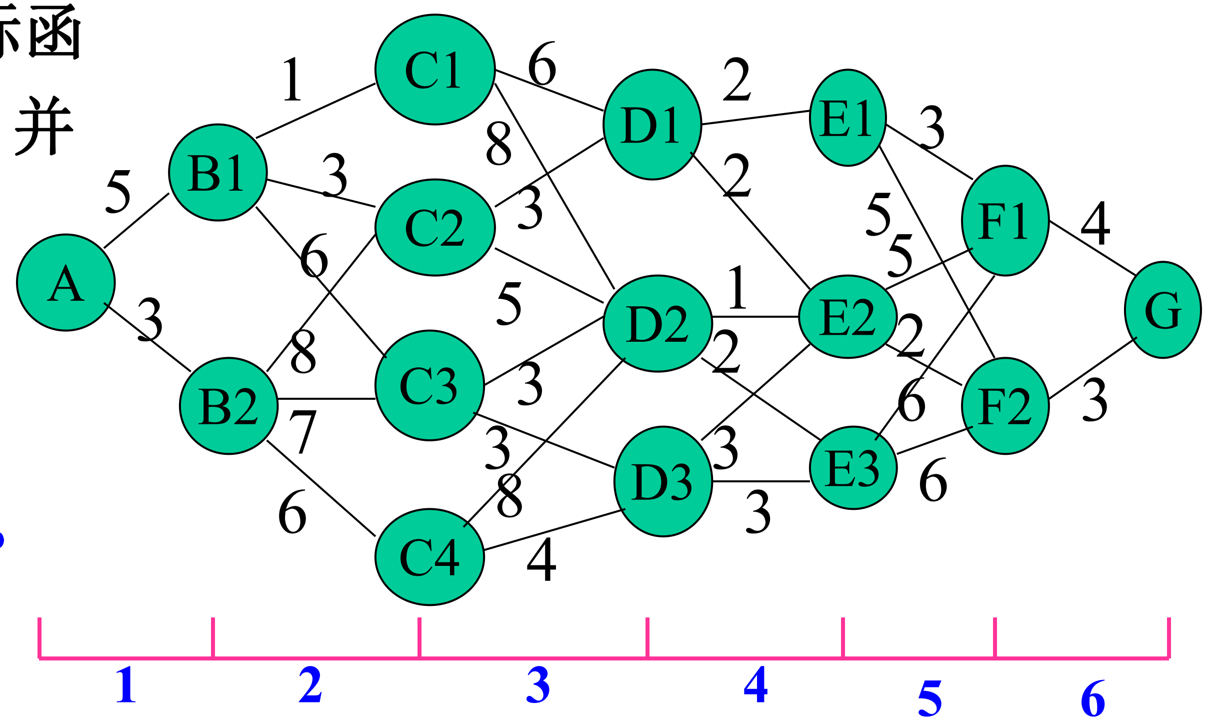
7、指标函数和最优值函数

指标函数，用来衡量**所实现过程优劣**的一种**数量指标**，它是定义在**全过程或所有后部子过程上**确定的数量函数。用 $V_{k,n}$ 表示。$V_{k,n}= V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, s_{n+1}), k=1,2,\ldots,n$

动态规划模型的指标函数，应具有可分离性，并满足**递推**关系。

即 $V_{k,n}$ 可以表示为

$s_k, u_k, V_{k+1,n}$ 的函数。



常见的指标函数的形式是:

过程和:它的任一子过程的指标是它所包含的**各阶段的指标和**。即

$$V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})=\sum_{j=k}^{n}v_j(s_j,u_j)$$

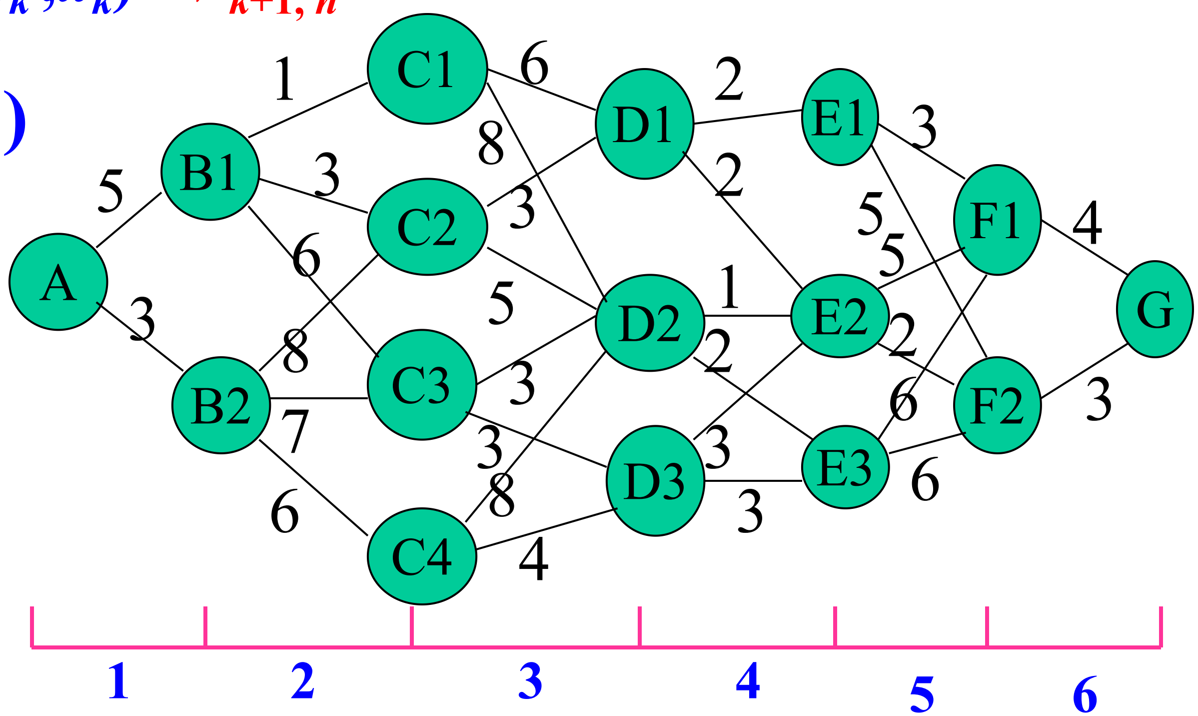
无后效性的结果

其中$V(s_j,u_j)$表示第j阶段的**阶段指标**。这时上式可写成

$$V_{k,n}(s_k,u_k,\ldots,s_{n+1})=v_k(s_k,u_k)+V_{k+1,n}$$

$$V_{5,6}=V_{5,6}(s_5,u_5,V_{6,6})$$

$$=v_5(s_5,u_5)+V_{6,6}$$



过程积：它的任意子过程的指标是它所包含的**各阶段的指标的乘积**。即

$$V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})=\prod_{j=k}^{n}v_j(s_j,u_j)$$

可改写成

$$V_{k,n}(s_k,u_k,\ldots,s_{n+1})$$

$$=v_k(s_k,u_k)\cdot V_{k+1,n}(s_{k+1},u_{k+1},\ldots,s_{n+1})$$

最优值函数：

指标函数的最优值，记为 $f_k(s_k)$。表示从第 k 阶段的状态 s_k 到第 n 阶段的**终止状态**的采取**最优策略**所得到的指标函数值。即 $f_k(s_k)=\underset{\{u_k,\cdots,u_n\}}{opt}V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})$

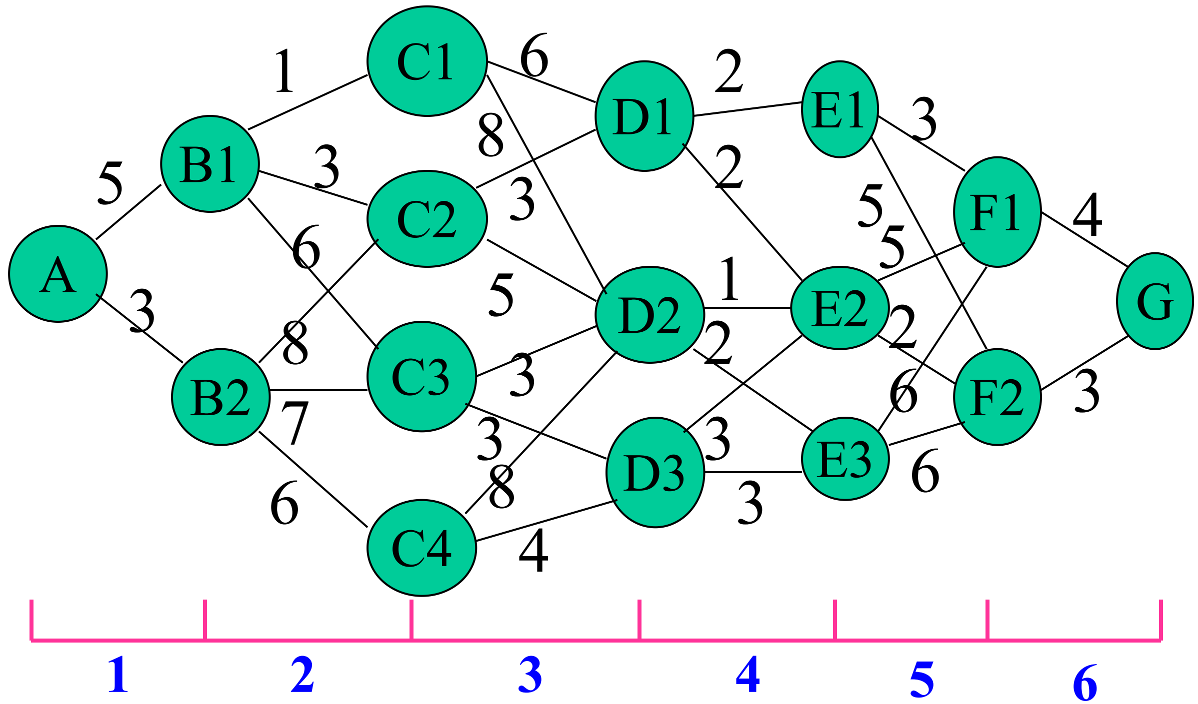
全过程的最优值函数记为 $f_1(s_1)$

$f_6(s_6)=?$

$f_6(F_1)=4$

$f_6(F_2)=3$

$f_5(E_1)=?$



多阶段决策过程的数学模型：（具有无后效性，以和式为例）

$$\underset{\{u_1,\, u_2,\ldots,u_n\}}{opt} \quad V_{k,\,n}(s_k\,,\, u_k\,,\,\ldots,\, s_{n+1}) = \sum_{j=k}^{n} v_j(s_j,\, u_j)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} s_{k+1} = T_k(s_k,\, u_k) \\ s_k \in S_k \\ u_k \in D_k \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

无后效性

动态规划本质上是**多阶段决策过程**；

概念：阶段变量 k、状态变量 s_k、决策变量 u_k；

方程：状态转移方程 $s_{k+1}=T_k(s_k,u_k)$

指标：

效益

$$V_{k,n}=V_{k,n}(s_k,u_k,s_{k+1},u_{k+1},\ldots,s_{n+1})$$

$$=\varphi_k[s_k,u_k,V_{k+1,n}(s_{k+1},u_{k+1},\ldots,s_{n+1})]$$

可递推

指标函数形式：**和、积 两种形式**

$$f_k(s_k)=\underset{\{u_k,\ldots,u_n\}}{opt}V_{k,n}(s_k,u_k,\ldots,s_{n+1})$$

解多阶段决策过程问题，应求出：

最优策略： 即最优决策序列

$$\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$$

最优路线： 即执行最优策略时的状态序列

$$\{s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*\}$$

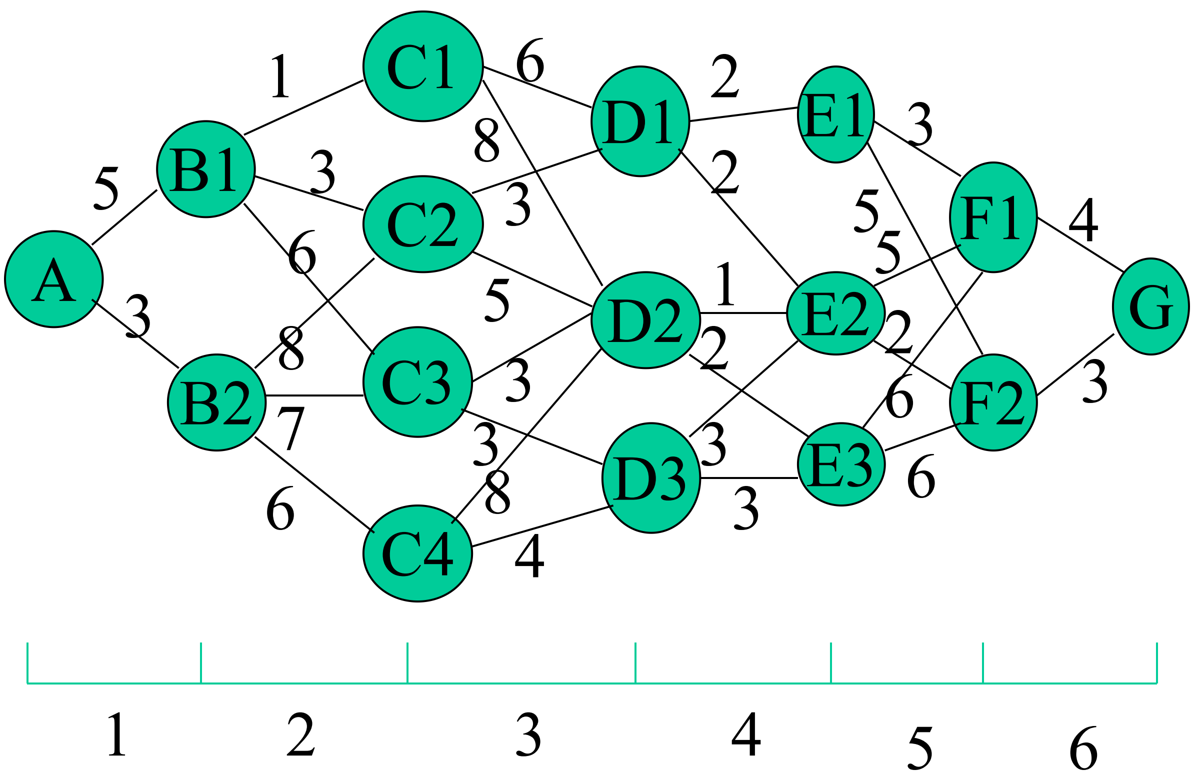
最优目标函数值：

$$f_1(s_1)=?$$

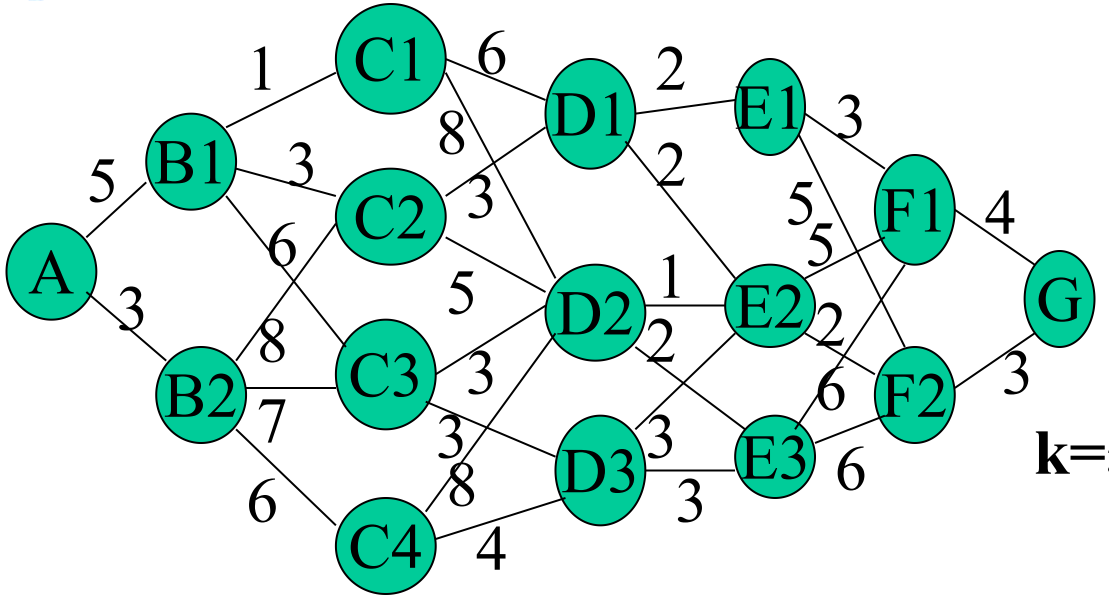
§3 动态规划的基本思想和基本方程

最短路的特性：

如果已有从起点到终点的一条最短路，那么**从最短路线上中间任何一点出发到终点的路线仍然是最短路**。（证明用反证法）



（穷举法48条路线）



k=6，

$F_1 \rightarrow G$， $f_6(F_1)=4$

$F_2 \rightarrow G$， $f_6(F_2)=3$

k=5，出发点有 E_1, E_2, E_3

$$f_5(E_1)=\min\begin{Bmatrix} d_5(E_1,F_1)+f_6(F_1) \\ d_5(E_1,F_2)+f_6(F_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 3+4 \\ 5+3 \end{Bmatrix}=7 \rightarrow$$

$u_5(E_1)=F_1$

$E_1 \rightarrow F_1 \rightarrow G$

$$f_5(E_2)=\min\begin{Bmatrix} d_5(E_2,F_1)+f_6(F_1) \\ d_5(E_2,F_2)+f_6(F_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 5+4 \\ 2+3 \end{Bmatrix}=5 \rightarrow$$

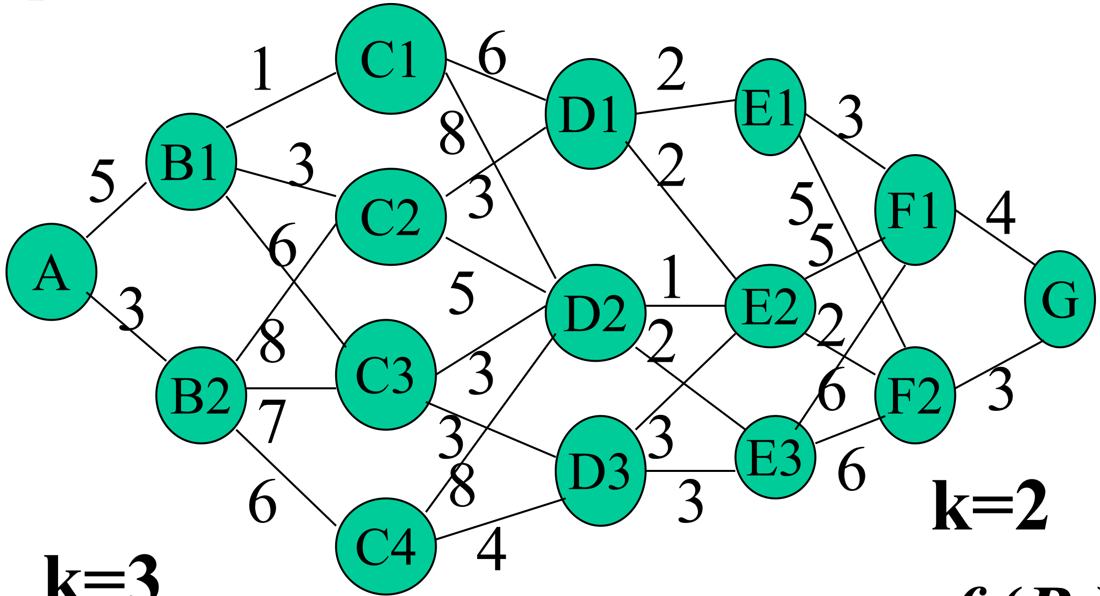
$u_5(E_2)=F_2$

$E_2 \rightarrow F_2 \rightarrow G$

$$f_5(E_3)=\min\begin{Bmatrix} d_5(E_3,F_1)+f_6(F_1) \\ d_5(E_3,F_2)+f_6(F_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 6+4 \\ 6+3 \end{Bmatrix}=9 \rightarrow$$

$u_5(E_3)=F_2$

$E_3 \rightarrow F_2 \rightarrow G$



k=4

$f_4(D_1)=7 \quad u_4(D_1)=E_2$

$f_4(D_2)=6 \quad u_4(D_2)=E_2$

$f_4(D_3)=8 \quad u_4(D_3)=E_2$

k=3

$f_3(C_1)=13 \quad u_3(C_1)=D_1$

$f_3(C_2)=10 \quad u_3(C_2)=D_1$

$f_3(C_3)=9 \quad u_3(C_3)=D_2$

$f_3(C_4)=12 \quad u_3(C_4)=D_3$

k=2

$f_2(B_1)=13 \quad u_2(B_1)=C_2$

$f_2(B_2)=16 \quad u_2(B_2)=C_3$

k=1

$$f_1(A) = \min\begin{Bmatrix} d_1(A,B_1)+f_2(B_1) \\ d_1(A,B_2)+f_2(B_2) \end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 5+13 \\ 3+16 \end{Bmatrix}$$

$$= 18$$

$u_1(A)=B_1$

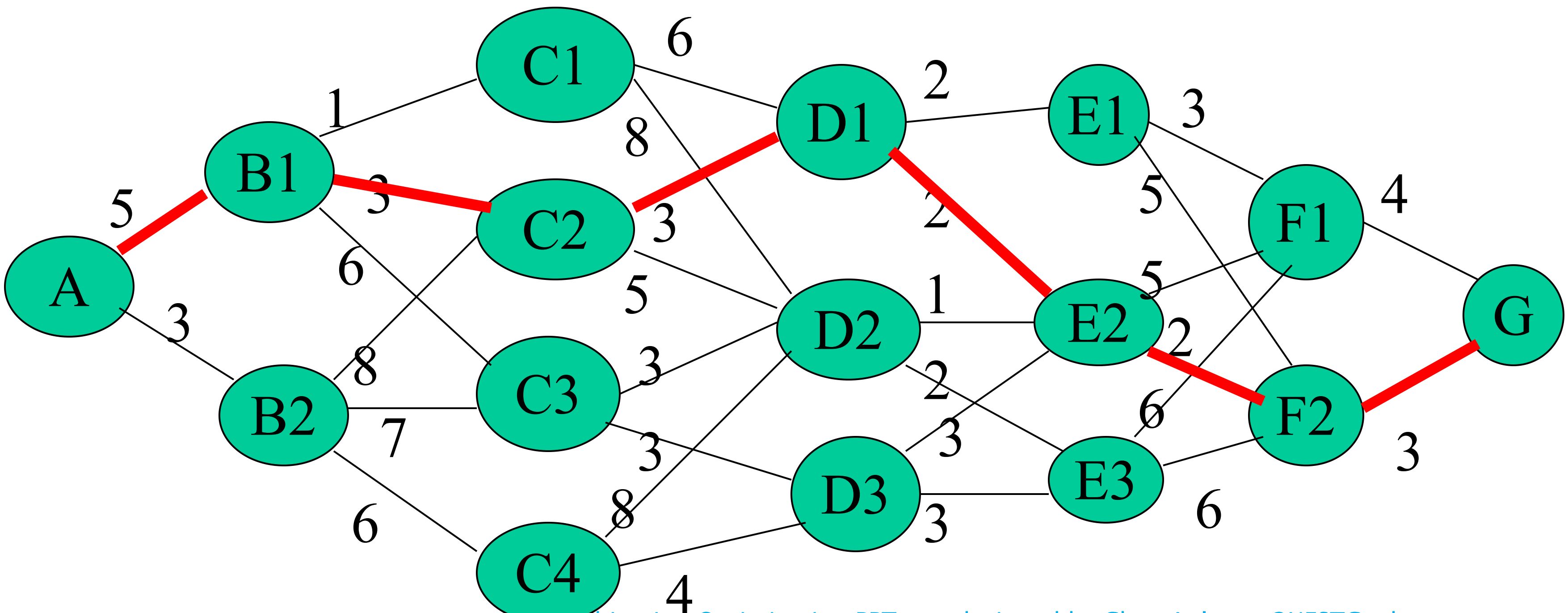
最优决策函数序列 {u_k}：

$$u_1(A)=B_1,\ u_2(B_1)=C_2,\ u_3(C_2)=D_1,$$
$$u_4(D_1)=E_2,\ u_5(E_2)=F_2,\ u_6(F_2)=G$$

最优策略

最短路线为

$$A\rightarrow B_1\rightarrow C_2\rightarrow D_1\rightarrow E_2\rightarrow F_2\rightarrow G$$



求解的各个阶段，我们利用了k阶段与$k+1$阶段之间的递推关系：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\limits_{u_k \in D_k(s_k)} \{d_k(s_k, u_k(s_k)) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_7(s_7) = 0 \\ k = 6, 5, 4, 3, 2, 1 \end{cases}$$

动态规划基本方程

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{opt} \{v_k(s_k, u_k(s_k)) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \quad \text{（边界条件）} \end{cases}$$

动态规划的理论基础

最优性原理（*R. Bellman* ）：

“一个过程的最优策略具有这样的性质：**即无论其初始状态及初始决策如何，对于先前决策所形成的状态而言，余下的决策序列仍构成最优策略。**”

含义

最优策略的任何一部分子策略，也是它相应初始状态的最优策略。**每个最优策略只能由最优子策略构成。**

动态规划的最优性定理： 设阶段数为 n 的多阶段决策过程，其阶段编号为 $k=0,1,\dots,n-1$。允许策略

$$p^*_{0,\, n-1}=(\, u^*_0,\ u^*_1,\ \dots,\ u^*_{n-1}\,)$$

是**最优策略的充要条件**是:

对任意一个 $k,\ 0<k<n-1$ 和 $s_0\in S_0$，有

$$\tilde{s}_k = T_{k-1}(s_{k-1}, u_{k-1})$$

$$V_{0,n-1}(s_0, p^*_{0,n-1}) = \mathop{opt}_{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)} \Big\{ V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \mathop{opt}_{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \Big\}$$

$$p_{0,n-1} = (p_{0,k-1}, p_{k,n-1})$$

证明：必要性

$$V_{0,n-1}(s_0, p^*_{0,n-1}) = \underset{p_{0,n-1}\in P_{0,n-1}(s_0)}{opt} V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1})$$

$$= \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)}{opt} \{ \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{opt} [V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})]\}$$

$$= \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)}{opt} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{opt} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\}$$

充分性： 设$p_{0,n-1}=(p_{0,k-1},p_{k,n-1})$为任一策略，$s_k$为由（$s_0$，$p_{0,k-1}$）所确定的$k$阶段的起始状态，则有（**以最大化为例**）

$$V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \le \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(s_k)}{opt} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})$$

$$V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}) = V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})$$

$$\leq V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1} \in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{opt} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})$$

$$\leq \underset{p_{0,k-1} \in P_{0,k-1}(\tilde{s}_0)}{opt} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1} \in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{opt} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\}$$

$$= V_{0,n-1}(s_0, p^*_{0,n-1})$$

推论：若允许策略 $p^*_{0,n\text{-}1}$ 是最优策略，则对任意的 k，$0<k<n\text{-}1$，它的子策略 $p^*_{k,n\text{-}1}$ 对于**以 $s^*_k = T_{k\text{-}1}(s^*_{k\text{-}1}, u^*_{k\text{-}1})$ 为起点的 k 到 $n\text{-}1$ 子过程来说，必是最优策略**。（注意：k 段状态 s^*_k，是由 s_0 和 $p^*_{0,k\text{-}1}$ 所确定的）

最优性原理

动态规划（逆序法）小结：

1. 将问题的过程划分成恰当的阶段；
2. 选择状态变量 s_k，既能描述过程的变化又满足无后效性；
3. 确定决策变量 u_k 及每一阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$；
4. 正确写出状态转移方程；
5. 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系，它应满足下面三个性质：

   ① 1.是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数；

   ② 2.要具有可分离性，并满足递推关系。即

$$V_{k,n}(s_k, u_k, \ldots, s_{n+1})$$

$$= \varphi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, s_{n+1})]$$

   ③ 函数 φ_k（s_k， u_k， $V_{k+1,n}$）对于变量 $V_{k+1,n}$ 要严格单调求

6. 求解时，从边界条件开始，逆（或顺）过程行进方向，逐段递推寻优。

7. 每段决策的选取都是从全局考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

8. 在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，**每段的决策都是该段状态的函数**，故最优策略所经过的各段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

§4 动态规划与静态规划

例1：某公司有资金10万元，若投资于项目i（i=1, 2, 3）的投资额为x_i时，其效益分别为

$$g_1(x_1)=2x_1^2, g_2(x_2)=9x_2, g_3(x_3)=4x_3$$

问如何分配投资数额才能使总效益最大?

解：可列出静态规划问题的模型如下

$$\max Z = 2x_1^2 + 9x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_i \geq 0, \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

- **分阶段：** 分三个阶段，即k=3，2，1。
- **确定决策变量：**

  通常可以取静态规划中的变量为决策变量。
- **确定状态变量：**

  每一阶段可使用的资金数为状态变量s_k。
- **状态转移方程**

$$s_1 = 10, s_2 = s_1 - x_1, \quad s_3 = s_2 - x_2$$
$$0 \le x_1 \le s_1, 0 \le x_2 \le s_2, 0 \le x_3 \le s_3$$

- **指标函数** $V_{k,3}=\sum_{i=k}^{3} g_i(x_i)$

- **基本方程**

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\} & k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$$

当阶段 $k=3$ 时，有

$$f_3(s_3)=\max_{0\le x_3\le s_3}\{4x_3\}$$

最优决策为 $x_3^*=s_3$，最优目标函数 $f_3(s_3)=4s_3$

当阶段k=2时，有

2阶导数>0

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+f_3(s_3)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\{\ x_2+\ \ s_3\ =\max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+4(s_2-x_2)\}$$

最优决策为 $x_2^*=s_2$， 最优目标函数 $f_2(s_2)=9s_2$

当阶段k=1时，有 $f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}\{2x_1^2+f_2(s_2)\}$

$$=\max_{0\le x_1\le s_1}\{2x_1^2+9(s_1-x_1)\}$$

是**凸函数**，最大值点只能在[0,s_1]的端点上取得，即

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=10}\{2x_1^2+9(10-x_1)\}=200 \text{（最优决策）}$$

$$f_1(s_1)=\max_{x_1=0}\{2x_1^2+9(10-x_1)\}=90$$

所以 $s_1 = 10, s_2 = s_1 - x_1, \quad s_3 = s_2 - x_2$

$$0 \le x_1 \le s_1, \quad 0 \le x_2 \le s_2, \quad 0 \le x_3 \le s_3$$

$$^{*}_{1} = {}_{1} = 10; \quad ^{*}_{2} = s_2 = 0; \quad ^{*}_{3} = {}_{3} = s_2 - x_2^{*} = 0$$

最优投资方案是全部资金投于第1个项目，可得最大收益200万元。

例2： 求解下面问题：

$$\max Z = x_1 \times x_2^2 \times x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

(考虑用动态规划的逆序法进行求解。)

解题思路？

$$\max Z = x_1 \times x_2^2 \times x_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \quad (c > 0) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

解：

1、将该问题划分为三个阶段，即k=1，2，3

2、确定状态变量并可得状态转移方程：

$s_3 = x_3;\quad s_3 + x_2 = s_2;\quad s_2 + x_1 = s_1 = c$

$x_3 = s_3;\quad 0 \leq x_2 \leq s_2;\quad 0 \leq x_1 \leq s_1 = c$

3、指标函数 $V_{1,3} = \prod_{i=1}^{3} v_i(s_i, x_i) = x_1 x_2^2 x_3$

最优值函数

4、基本方程

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{v_k(s_k, x_k) \times f_{k+1}(s_{k+1})\} & k = 3,2,1 \\ f_4(s_4) = 1 \end{cases}$$

最优决策

当阶段k=3时，有

$$f_3(s_3) = \max_{x_3 = s_3} (x_3) = s_3 \quad x_3^* = s_3$$

当阶段k=2时，有

$$f_2(s_2) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} [x_2^2 f_3(s_3)] = \max_{0 \le x_2 \le s_2} [x_2^2 (s_2 - x_2)]$$

得最优决策 $x_2^* = \frac{2}{3} s_2$， 最优目标函数 $f_2(s_2) = \frac{4}{27} s_2^3$

当阶段k=1时，有 $f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}[x_1 f_2(s_2)]=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}[x_1\frac{4}{27}(s_1-x_1)^3]$

最优决策：$x_1^*=\frac{1}{4}s_1$， 最优目标函数：$f_1(s_1)=\frac{1}{64}s_1^4$

$s_3=x_3$; $s_3+x_2=s_2$; $s_2+x_1=s_1=c$

$x_3=s_3$; $0\le x_2\le s_2$; $0\le x_1\le s_1=c$

因此最后可得：

$x_1^*=\frac{1}{4}c$, $f_1(s_1)=\frac{1}{64}c^4$

$x_2^*=\frac{2}{3}s_2=\frac{1}{2}c$, $f_2(s_2)=\frac{1}{16}c^3$

$x_3^*=\frac{1}{4}c$, $f_3(s_3)=\frac{1}{4}c$

动态规划的优缺点

优点：

① 最优解是全局最优解。

② 能得到一系列（包括子过程）的最优解。

③ 不需要对系统状态转移方程、阶段效应函数等的解析性质作任何假设。

缺点：

① 没有统一的标准模型和标准的算法可供使用。

② 应用的局限性，要求满足“无后效性”。

③ “维数灾难”问题。

§5 资源分配问题

5.1 资源平行分配问题

设有某种原料，总数量为 a，用于生产 n 种产品。若分配数量 x_i 用于生产第 i 种产品，其收益为 $g_i(x_i)$，问应如何分配，才能使生产 n 种产品的总收入最大？

$$Max\ Z = g_1(x_1)+g_2(x_2)+\ldots+g_n(x_n)$$

$$s.t.\quad \begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=a \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

静态规划模型

例： 某公司拟将5台某种设备分配给所属的甲、乙、丙三个工厂，各工厂若获得这种设备，可以为公司提供的盈利如表。

问：这五台设备如何分配给各工厂，才能使公司得到的盈利最大。

工厂 / 盈利 / 设备台数	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

s_3的可达状态集合

s_2的可达状态集合

s_1的可达状态集合

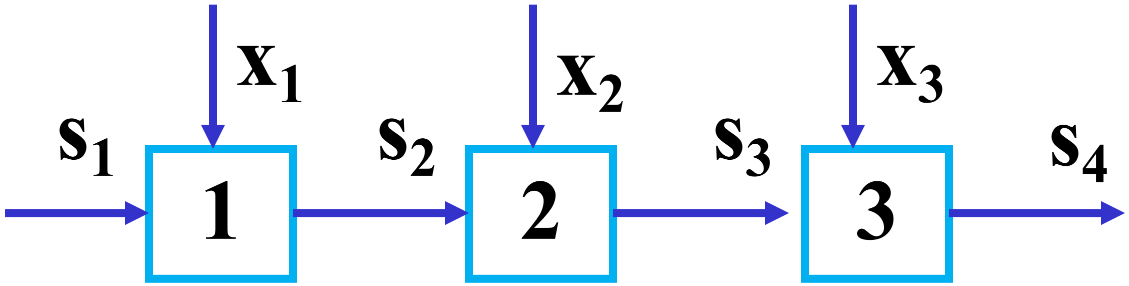
决策变量 $0 \le u_k(s_k) \le s_k$

x_k

3个阶段

状态转移方程?

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12



$$s_{k+1} = s_k - x_k$$

指标函数 $g_k(x_k)$?

基本方程?

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

解： 将问题按工厂分为三个阶段，甲、乙、丙分别编号为1，2，3。

决策变量x_k:：

分配给生产第 k 个工厂的设备数量

状态变量 s_k：

分配给第 k 个工厂至第 3 个工厂的设备数量。(**即当前剩余可分配设备**)

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

状态转移方程: $s_{k+1} = s_k - x_k$

x_k的取值范围?

$D_k(s_k)=\{ u_k | 0 \le x_k \le s_k \}$

基本方程:

$$\begin{cases} \boxed{f_k(s_k)} = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} [g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})] \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

数量为 s_k 的原料分配给第 k 个工厂至第 3 个工厂所得到的最大总收益

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$k=3$， $s_3=0,1,2,3,4,5$， $0\le x_3 \le s_3$

$\boxed{x_3^*(0)=0}$

$s_3=0$ $f_3(0)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}\{g_3(x_3)+f_4(s_4)\}=g_3(0)=0$

$s_3=1$ $f_3(1)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}\{g_3(x_3)+f_4(s_4)\}=\max\limits_{x_3=0,1}\begin{Bmatrix} g_3(0) \\ g_3(1) \end{Bmatrix}=4$

$\boxed{x_3^*(1)=1}$

$s_3=2$ $f_3(2)=6$

$\boxed{x_3^*(2)=2}$

$s_3=3$ $f_3(3)=11$

$\boxed{x_3^*(3)=3}$

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$s_3 = 4$ $f_3(4) = 12$

$\boxed{x_3^*(4) = 4}$

$s_3 = 5$ $f_3(5) = 12$

$\boxed{x_3^*(5) = 4,5}$

结果可写成表格的形式:

x_3 \\ s_3	$g_3(x_3)$						$f_3(s_3)$	x^*_3
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

$k=2$， $s_3 = s_2 - x_2$， $s_2=0,1,2,3,4,5$， $0 \le x_2 \le s_2$， 有

$s_2 = 0$

$$f_2(0) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{ g_2(x_2) + f_3(s_3) \} = g_2(0) = 0$$

$$\boxed{x_2^*(0) = 0}$$

s_3 \ x_3	$g_3(x_3)$ 0	1	2	3	4	5	$f_3(s_3)$	x^*_3
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$s_2 = 1$

$$f_2(1) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{g_2(x_2) + f_3(s_3)\}$$

$$= \max_{x_2=0,1} \begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(1) \\ g_2(1) + f_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$= \max_{x_2=0,1} \begin{Bmatrix} 0+4 \\ 5+0 \end{Bmatrix} = 5$$

$\boxed{x_2^*(1) = 1}$

s_3 \ x_3	$g_3(x_3)$						$f_3(s_3)$	x^*_3
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$s_2 = 2$

$$f_2(2) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{g_2(x_2) + f_3(s_3)\}$$

$$= \max_{x_2=0,1,2} \begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(2) \\ g_2(1) + f_3(1) \\ g_2(2) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max_{x_2=0,1,2} \begin{Bmatrix} 0+6 \\ 5+4 \\ 10+0 \end{Bmatrix} = 10$$

$\boxed{x_2^*(2) = 2}$

x_3 \ s_3	$g_3(x_3)$ 0	1	2	3	4	5	$f_3(s_3)$	x^*_3
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$$s_2 = 3 \quad f_2(3) = \max_{0 \le x_2 \le s_2} \{ g_2(x_2) + f_3(s_3) \}$$

$$= \max_{x_2=0,1,2,3} \begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(3) \\ g_2(1) + f_3(2) \\ g_2(2) + f_3(1) \\ g_2(3) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max_{x_2=0,1,2,3} \begin{Bmatrix} 0 + 11 \\ 5 + 6 \\ 10 + 4 \\ 11 + 0 \end{Bmatrix} = 14$$

$$\boxed{x_2^*(3) = 2}$$

x_3 \ s_3	$g_3(x_3)$ 0	1	2	3	4	5	$f_3(s_3)$	x^*_3
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$s_2 = 4$

$$f_2(4) = \max_{0\le x_2\le s_2}\{g_2(x_2) + f_3(s_3)\}$$

$$= \max_{x_2=0,1,2,3,4}\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_3(4) \\ g_2(1)+f_3(3) \\ g_2(2)+f_3(2) \\ g_2(3)+f_3(1) \\ g_2(4)+f_3(0) \end{Bmatrix} = \max_{x_2=0,1,2,3,4}\begin{Bmatrix} 0+12 \\ 5+11 \\ 10+6 \\ 11+4 \\ 11+0 \end{Bmatrix} = 16$$

$\boxed{x_2^*(4) = 1,2}$

x_3 \ s_3	$g_3(x_3)$						$f_3(s_3)$	x^*_3
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

$s_2 = 5$

$$f_2(4) = \max_{0\le x_2 \le s_2}\{g_2(x_2) + f_3(s_3)\}$$

$$= \max_{x_2=0,1,2,3,4,5}\begin{Bmatrix} g_2(0)+f_3(5) \\ g_2(1)+f_3(4) \\ g_2(2)+f_3(3) \\ g_2(3)+f_3(2) \\ g_2(4)+f_3(1) \\ g_2(5)+f_3(0) \end{Bmatrix} = \max_{x_2=0,1,2,3,4,5}\begin{Bmatrix} 0+12 \\ 5+12 \\ 10+11 \\ 11+6 \\ 11+4 \\ 11+0 \end{Bmatrix} = 21$$

$\boxed{x_2^*(5) = 2}$

x_3 / s_3	$g_3(x_3)$						$f_3(s_3)$	x^*_3
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	1
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	4,5

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

结果列于下表：

x_2 / s_2	$g_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)$						$f_2(s_2)$	x^*_2
	0	1	2	3	4	5		
0	0+0						0	0
1	0+4	5+0					5	1
2	0+6	5+4	10+0				10	2
3	0+11	5+6	10+4	11+0			14	2
4	0+12	5+11	10+6	11+4	11+0		16	1,2
5	0+12	5+12	10+11	11+6	11+4	11+0	21	2

$k=1$时， $s_2 = s_1 - x_1$， $\boxed{s_1 = 5,}$ $0 \le x_1 \le s_1$， 有

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1}\{g_1(x_1)+f_2(s_2)\}$$

$$=\max_{x_1=,0,1,2,3,4,5}\begin{Bmatrix} g_1(0)+f_2(5) \\ g_1(1)+f_2(4) \\ g_1(2)+f_2(3) \\ g_1(3)+f_2(2) \\ g_1(4)+f_2(1) \\ g_1(5)+f_2(0) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+21 \\ 3+16 \\ 7+14 \\ 9+10 \\ 12+5 \\ 13+0 \end{Bmatrix}=21$$

$\boxed{x_1^*(5)=0,2}$

s_2 \ x_2	$f_2(s_2)$	x^*_2
0	0	0
1	5	1
2	10	2
3	14	2
4	16	1,2
5	21	2

	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

结果可写成表格的形式

x_1 / s_1	$g_1(x_1)+f_2(s_1-x_1)$						$f_1(s_1)$	x^*_1
	0	1	2	3	4	5		
5	0+21	3+16	7+14	9+10	12+5	13+0	21	0,2

最优分配方案一：由 $x_1^* = 0$，根据 $s_2 = s_1 - x_1^* = 5 - 0 = 5$，查表知 $x_2^* = 2$，由 $s_3 = s_2 - x_2^* = 5 - 2 = 3$，故 $x_3^* = s_3 = 3$。即得甲工厂分配0台，乙工厂分配2台，丙工厂分配3台。

最优分配方案二：由 $x_1^* = 2$，根据 $s_2 = s_1 - x_1^* = 5 - 2 = 3$，查表知 $x_2^* = 2$，由 $s_3 = s_2 - x_2^* = 3 - 2 = 1$，故 $x_3^* = s_3 = 1$。即得甲工厂分配2台，乙工厂分配2台，丙工厂分配1台。

以上两个分配方案所得到的总盈利均为21万元。

问题：

如果原设备台数是4台，求最优分配方案？

如果原设备台数是3台，求最优分配方案？

5.2 资源连续分配问题

第一年

资源数量

s_1

A种生产

数量u_1投入 收益$g\,(u_1)$

年终资源回收率a

B种生产

数量s_1-u_1 收益$h\,(s_1$-$u_1)$

年终资源回收率b

第二年

资源数量

$s_2=au_1+b(s_1-u_1)$

A种生产

数量u_2投入;收益$g(u_2)$;

年终资源回收率a

B种生产

数量s_2-u_2;收益h(s_2-u_2);

年终资源回收率b

到n年

如此进行 n 年，如何确定投入 A 的资源量 u_1、…、u_n，使总收入最大？

此问题的静态规划问题模型为：

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} \{g(u_i) + h(s_i - u_i)\}$$

$$s.t.\begin{cases} s_2 = au_1 + b(s_1 - u_1) \\ s_3 = au_2 + b(s_2 - u_2) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ s_{n+1} = au_n + b(s_n - u_n) \\ 0 \le u_i \le s_i, i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

例4 机器负荷分配问题

投入生产的机器数量

机器
- 高负荷：产量函数 $g = 8u_1$，
  年完好率为 a=0.7，
- 低负荷：产量函数 $h = 5y$，
  年完好率为 b=0.9。

假定开始生产时完好机器的数量为1000台。

试问每年如何安排机器在高低两种负荷下的生产，可使5年内生产的产品总产量最高?

分析： 阶段？

状态变量 s_k → 第 k 年初拥有的完好机器台数

决策变量 u_k → 第 k 年高负荷下投入的机器数

$0 \le u_k \le s_k$

$s_k - u_k$ ← 第 k 年低负荷下投入的机器数

状态转移方程

$$s_{k+1} = au_k + b(s_k - u_k) = 0.7u_k + 0.9\,(s_k - u_k)$$

递推方程？

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le u_k \le s_k} \{8u_k + 5(s_k - u_k) + f_{k+1}\underbrace{\boxed{(0.7u_k + 0.9(s_k - u_k))}}_{\boxed{s_{k+1}}}\} \\ f_6(s_6) = 0 \\ k = 5, 4, 3, 2, 1 \end{cases}$$

指标函数

第k年度产量为 $v_k(s_k, u_k) = \underbrace{\boxed{8u_k + 5(s_k - u_k)}}_{\boxed{\text{阶段指标}}}$

$$V_{1,5} = \sum_{k=1}^{5} v_k(s_k, u_k)$$

解： 设阶段序数 k 表示年度，s_k为第 k 年初拥有的完好机器台数，第 k 年度高负荷下投入的机器数为u_k台。

则状态转移方程为

$$s_{k+1} = 0.7u_k + 0.9\,(s_k - u_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, 5$$

基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le u_k \le s_k} \{8u_k + 5(s_k - u_k) + f_{k+1}(0.7u_k + 0.9(s_k - u_k))\} \\ f_6(s_6) = 0 \\ k = 5, 4, 3, 2, 1 \end{cases}$$

$k=5$ $$f_5(s_5)=\max_{0\le u_5\le s_5}\{8u_5+5(s_5-u_5)+f_6(s_6)\}$$

$$=\max_{0\le u_5\le s_5}\{3u_5+5s_5\}$$

$f_6(s_6) = 0$

$u^*_5=s_5$ $f_5(s_5)=8s_5$

$k=4$ $$f_4(s_4)=\max_{0\le u_4\le s_4}\{8u_4+5(s_4-u_4)+f_5(u_5)\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{8u_4+5(s_4-u_4)+f_5(0.7u_4+0.9(s_4-u_4))\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{8u_4+5(s_4-u_4)+8*(0.7u_4+0.9(s_4-u_4))\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{8u_4+5.6u_4+5(s_4-u_4)+7.2(s_4-u_4)\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{13.6u_4+12.2(s_4-u_4)\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le s_4}\{1.4u_4+12.2s_4\}$$

$u^*_4=s_4$ $f_4(s_4)=13.6s_4$

依次类推可得，

$$u_3^* = s_3 \qquad f_3(s_3) = 17.5s_3$$
$$u_2^* = 0 \qquad f_2(s_2) = 20.8s_2$$
$$u_1^* = 0 \qquad f_1(s_1) = 23.7s_1$$

因此**最优策略**为

$$u_1^* = 0, u_2^* = 0, u_3^* = s_3, u_4^* = s_4, u_5^* = s_5$$

最高产量为 23700。

6. 背包问题

有一个徒步旅行者，其可携带物品重量的限度为a 公斤，设有n 种物品可供他选择装入包中。已知每种物品的重量及使用价值（作用），问此人应如何选择携带的物品（各几件），使所起作用（使用价值）最大?

物品	1	2	…	j	…	n
重量（公斤/件）	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n

这就是背包问题。类似的还有工厂里的下料问题、运输中的货物装载问题、人造卫星内的物品装载问题等。

设x_j为第j种物品的装件数（非负整数）则问题的数学模型如下：

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le a \\ x_j \ge 0\text{且为整数} \quad (j=1.2.\cdots.n) \end{cases}$$

用动态规划方法求解，令

$f_k(y)$ =在选择装前k种物品后，当前还可装重量不超过y公斤的物品的最大使用价值, 其中$y \ge 0$, $k=1,2,\ldots,n$ 。

所以问题的本质就是求 $f_n(a)$

其递推关系式为：

$$f_k(y) = \max_{0 \le x_k \le \frac{y}{a_k}} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}$$

其中 $2 \le k \le n$

当 k=1 时，有：

$$f_1(y) = c_1 \left(\frac{y}{a_1} \right), \quad \left[x_1 = \left(\frac{y}{a_1} \right) \right]$$

其中$\left(\frac{y}{a_1} \right)$表示不超过 $\frac{y}{a_1}$的最大整数

例：求下面背包问题的最优解(a=5)

$$\max Z = 8x_1 + 5x_2 + 12x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

物品	1	2	3
重量（公斤）	3	2	5
使用价值	8	5	12

解： $a=5$， 问题是求 $f_3(5)$

$$f_3(5) = \max_{\substack{0 \le x_3 \le \frac{5}{a_3} \\ x_3\text{整数}}} \{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$f_3(5) = \max_{\substack{0 \le x_3 \le \frac{5}{a_3} \\ x_3 \text{整数}}} \{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$= \max_{\substack{0 \le x_3 \le \frac{5}{5} \\ x_3 \text{整数}}} \{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$= \max_{x_3 = 0,1} \{12x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$$= \max \left\{ \underset{(x_3=0)}{0 + f_2(5)}, \quad \underset{(x_3=1)}{12 + f_2(0)} \right\}$$

$$f_2(5) = \max_{\substack{0 \le x_2 \le \frac{5}{a_2} \\ x_2\text{整数}}} \{5x_2 + f_1(5-2x_2)\}$$

$$= \max_{\substack{0 \le x_2 \le \frac{5}{2} \\ x_2\text{整数}}} \{5x_2 + f_1(5-2x_2)\}$$

$$= \max_{x_2=0,1,2} \{5x_2 + f_1(5-2x_2)\}$$

$$= \max\left\{ \underset{(x_2=0)}{0 + f_1(5)},\ \underset{(x_2=1)}{5 + f_1(3)},\ \underset{(x_2=2)}{10 + f_1(1)} \right\}$$

$$f_2(0)=\max_{\substack{0\le x_2\le \frac{0}{a_2}\\ x_2\text{整数}}}\left\{5x_2+f_1(0-2x_2)\right\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x_2\le \frac{0}{2}\\ x_2\text{整数}}}\left\{5x_2+f_1(0-2x_2)\right\}$$

$$=\max_{x_2=0}\left\{5x_2+f_1(0-2x_2)\right\}$$

$$=\max\left\{\underset{(x_2=0)}{0+f_1(0)}\right\}=f_1(0)$$

$$f_1(5) = c_1 x_1 = 8 \times \left[\frac{5}{3} \right] = 8 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(3) = c_1 x_1 = 8 \times \left[\frac{3}{3} \right] = 8 \quad (x_1 = 1)$$

$$f_1(1) = c_1 x_1 = 8 \times \left[\frac{1}{3} \right] = 0 \quad (x_1 = 0)$$

$$f_1(0) = c_1 x_1 = 8 \times \left[\frac{0}{3} \right] = 0 \quad (x_1 = 0)$$

$$\therefore \boldsymbol{f_2(5) = \max \left\{ \underset{(x_2=0)}{0 + f_1(5)}, \quad \underset{(x_2=1)}{5 + f_1(3)}, \quad \underset{(x_2=2)}{10 + f_1(1)} \right\}}$$

$$\boldsymbol{= \max \{8, \quad 5+8, \quad 10\} = 13 \quad (x_1 = 1, x_2 = 1)}$$

$$f_2(0) = \max\left\{ \underset{(x_2=0)}{0 + f_1(0)} \right\} = f_1(0) = 0 \quad (x_1 = 0, x_2 = 0)$$

$$\therefore\ f_3(5) = \max\left\{ \underset{(x_3=0)}{0 + f_2(5)},\quad \underset{(x_3=1)}{12 + f_2(0)} \right\}$$

$$= \max\{\ 0 + 13,\qquad 12 + 0\ \}$$

$$= 13 \quad (x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0)$$

所以，最优解为 X＝（1，1，0），最优值为 $Z = 13$。