随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 数学科学学院

武德安

第二章几种重要随机过程

§2.1 正态过程(高斯过程)

§2.2 维纳过程

§2.3 泊松过程

§2.4 泊松过程的推广

§3.4泊松过程推广

三、更新计数过程

定义3.4.1： 设$\{N(t),t\geq 0\}$是一个计数过程,如果它的时间间隔序列$T_1,T_2,\ldots,T_n,\cdots$相互独立同分布，称为**更新计数过程**.

例： 同类型设备的更新,如一个元件；一个灯泡；一个系统…

假定每个更换对象的表命具有相同的概率密度,则相继两次损坏之间的更新时间$T_1,T_2,\cdots$相互独立同分布.

定理3.4.1 更新计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程的充要条件是时间间隔T具有指数分布.

注: 等价于时间间隔序列$T_1,T_2,\ldots,T_n,\ldots$相互独立同服从相同指数分布.

证: 由定理3.3.2知必要性,仅需证充分性,应有

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad (k=0,1,2,\cdots,\lambda>0)$$

T_i的**特征函数**为$\varphi_{T_i}(u)=\varphi_T(u)=\dfrac{1}{1-\frac{iu}{\lambda}}$, **指数分布特征函数**

等待时间$W_k=\sum_{i=1}^{k}T_i$,且$T_1,T_2,\cdots,T_k$相互独立,故

$$\varphi_{W_k}(u)=[\varphi_T(u)]^k=\frac{1}{\left[1-\frac{iu}{\lambda}\right]^k},\quad (k=1,2,\cdots)$$

由特征函数的反演公式及唯一性定理知，W_k的

密度函数为 $f_{w_k}(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda)^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

分布函数为 $F_{w_k}(t)=\begin{cases}1-\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

因 $\{W_k\le t\}=\{N(t)\ge k\}$

故 $$\begin{aligned}P\{N(t)=k\}&=P\{N(t)\ge k\}-P\{N(t)\ge k+1\}\\&=F_{w_k}(t)-F_{w_{k+1}}(t)\\&=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad (k=0,1,2,\cdots,\lambda>0)\end{aligned}$$

$\{N(t),t\ge 0\}$的概率分布为泊松分布，即 $N(t)\sim P(\lambda t)$.

一般地：设$\{N(t),t\geq 0\}$为更新计数过程,有:

1）等待时间 $W_k=\sum_{i=1}^{k}T_i$的特征函数为,

$$\varphi_{W_k}(u)=[\varphi_T(u)]^k$$

2） 因$\{W_k\leq t\}=\{N(t)\geq k\}$,有

$$F_{W_{k+1}}(t)=1-F_{N(t)}(k).$$

3） $m(t)=E[N(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{N(t)=k\}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\,[F_{W_k}(t)-F_{W_{k+1}}(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}F_{W_k}(t)$$

思考题：如何模拟一个参数为λ的Poisson过程$\{N(t),t\geq 0\}$?

提示：1. 结合定理3.4.1,并查找相关资料.

2. 给出算法步骤,并说明算法原理.

四、复合泊松过程

Eg.5：调查城市人员流动情况，可在关键路口观察公交车的载客情况，设$[0,t)$内通过的公交车数$N(t)$是一个Poisson过程,而每辆车的载客人数为ξ_n,则经公交车通过此路口的人数为:$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n$

Eg.6：若将股票交易次数$N(t)$看作一个Poisson过程,ξ_n表示第n次与第$n-1$次交易手前后股票价格差,则$X(t)$就代表直到t时刻股票的价格变化.

定义3.4.2：设$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的齐次Poisson过程，$\{\xi_n,n\geq 1\}$是相互独立同分布的随机变量序列，并与$N(t)$相互独立，称

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n$$

为**复合Poisson过程**.

定理3.4.2：设$\{X(t),t\geq 0\}$是**复合泊松过程**$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n, t\geq 0$，其中$\{N(t),\geq 0\}$是强度为$\lambda$的泊松过程，$\xi_n,n=1,2,\ldots$相互独立与$\xi$同分布，有

1) $\{X(t),t\geq 0\}$是独立增量过程。

2) ξ的**特征函数**为$\phi_\xi(u)$，则$X(t)$的**特征函数**为$\phi_X(t,u)=e^{\lambda t[\phi_\xi(u)-1]},\quad t\geq 0.$

3) **均值函数**为$m_X(t)=E[X(t)]=E[N(t)]E(\xi)=\lambda tE(\xi).$

4) **方差函数**为$D_X(t)=D(N)E(\xi^2)=\lambda tE(\xi^2).$

证明：见P65

Eg. 7：保险公司赔偿金储备问题设表险投保人的死亡数$N(t)$是强度为λ的poisson过程,ξ_n表示第n个死亡者的赔偿金额,$\xi_n, n=1,2,\ldots$相互独立同分布,ξ_n服从参数为α的指数分布。$Y(t)$是保险公司在$[0,t)$时间段内的总赔付金额,试求平均赔付金额和$D[Y(t)]$.

解：$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n,\quad t\geq 0$是一个复合泊松过程,有

$$E[Y(t)]=E[N(t)]E(\xi_1)=\lambda t E(\xi_1)$$

$$E(\xi_1)=\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx=\frac{1}{\alpha}$$

保险公司在$[0,t)$时间内平均支付的赔偿金为

$$E[Y(t)]=\lambda t E(\xi_1)=\lambda t\frac{1}{\alpha}.\quad D[Y(t)]=\lambda t E(\xi_1^2)=\lambda t\frac{2}{\alpha^2}=\frac{2\lambda t}{\alpha^2}.$$

Eg. 8：设某仪器受到震动而引起损伤，若震动次数$N(t)$按强度为λ的Possion过程发生，第k次震动时引起的损伤为D_k，且$D_1, D_2, \ldots$相互独立同分布，与$\{N(t), t \geq 0\}$相互独立．又假设仪器受到震动而引起损伤将随时间按指数衰减。需考虑总损伤的平均程度．

分析：1）设初始损伤为D_k，经时间t后衰减为$D_k e^{-\alpha t}, t \geq 0 \quad (\alpha > 0)$；2）假设各次震动而引起损伤是可叠加的，则在$t$时刻的总损伤可表示为

$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t - W_k)}$$

其中W_k是第k次受震动的时刻，需求$E[D(t)]$．

解：由全期望公式$E[D(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)}\right] = E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \mid N(t)\right]\right\}$

对任意正整数n，有

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \mid N(t) = n\right] = E\left[\sum_{k}^{n} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \mid N(t) = n\right]$$

$$= E(D_k) e^{-\alpha t} E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \mid N(t) = n\right]$$

D_k与$N(t)$相互独立。
D_k与W_k相互独立

根据定理3.3.4 可得

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \mid N(t)=n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_{(k)}}\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k}\right]=nE\left(e^{\alpha U_1}\right)$$

$$=n\frac{1}{t}\int_0^t e^{\alpha x}dx=\frac{n}{\alpha t}\left(e^{\alpha.t}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad E[D(t)\mid N(t)]=\frac{N(t)}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)E(D_1)$$

$$\Rightarrow \quad E[D(t)]=\frac{\lambda}{\alpha}E(D_1)\left(1-e^{-\alpha t}\right), t\geq 0.$$

五、泊松过程的叠加与分解

Eg. 9： 设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别是强度为λ_1和λ_2的相互独立的泊松过程，

1）令$Y(t)=N_1(t)-N_2(t), t>0$，求$Y(t)$的均值函数和相关函数.

2）证明$X(t)=N_1(t)+N_2(t), t>0$，是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

3）证明$Y(t)=N_1(t)-N_2(t), t>0$，不是泊松过程.

解： 1）$m_Y(t)=E[N_1(t)]-E[N_2(t)]=(\lambda_1-\lambda_2)t$,

$$\begin{aligned}
R_Y(s,t)&=E\{[N_1(s)-N_2(s)][N_1(t)-N_2(t)]\}\\
&=E[N_1(s)N_1(t)]+E[N_2(s)N_2(t)]-E[N_1(s)N_2(t)]-E[N_2(s)N_1(t)]\\
&=R_{N_1}(s,t)+R_{N_1}(s,t)-E[N_1(s)]E[N_2(t)]-E[N_2(s)]E[N_1(t)]\\
&=\lambda_1\min(s,t)+\lambda_1^2 st+\lambda_2\min(s,t)+\lambda_2^2 st-2\lambda_1\lambda_2 st\\
&=(\lambda_1+\lambda_2)\min(s,t)+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)st-2\lambda_1\lambda_2 st.
\end{aligned}$$

2）根据泊松分布的可加性知$X(t)=N_1(t)+N_2(t), t>0$,服从参数为$(\lambda_1+\lambda_2)t$的泊松分布.

问题: 如何证明?

3）$Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$的特征函数为

$$\varphi_Y(u)=\exp\{\lambda_1 te^{iu}+\lambda_1 te^{-iu}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}$$ 独立和的特征函数

由分布函数与特征函数的一一对应的惟一性定理知$Y(t)$不是泊松过程.

1.泊松过程的叠加

定理3.4.3 设$\{N_1(t),t\geq 0\}$和$\{N_2(t),t\geq 0\}$是相互独立的强度分别为λ_1和λ_2的泊松过程,则$\{N(t)=N_1(t)+N_2(t),t>0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

证: $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$是计数过程,而且满足

1) 零初值性 $N(0)=N_1(0)+N_2(0)=0;$

2) 独立增量性 对任意$0<t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n$

$$N(t_k)-N(t_{k-1})=N_1(t_k)-N_1(t_{k-1})+N_2(t_k)-N_2(t_{k-1})$$

相互独立.

3) 增量平稳性 需证对一切$0\leq t_1<t_2$,

$$N(t_2)-N(t_1)\sim P[(\lambda_1+\lambda_2)(t_2-t_1)]$$

$$\varphi_{N(t_2)-N(t_1)}(u)=E\left[e^{iu[N(t_2)-N(t_1)]}\right]=E\left[e^{iu(N_1(t_2)-N_1(t_1))}\right]E\left[e^{iu(N_2(t_2)-N_2(t_1))}\right]$$ 两个过程的独立性

$$=\exp\{\lambda_1(t_2-t_1)(e^{iu-1})\}\exp\{\lambda_2(t_2-t_1)(e^{iu-1})\}$$ 两个均为泊松过程

$$=\exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(t_2-t_1)(e^{iu-1})\}$$

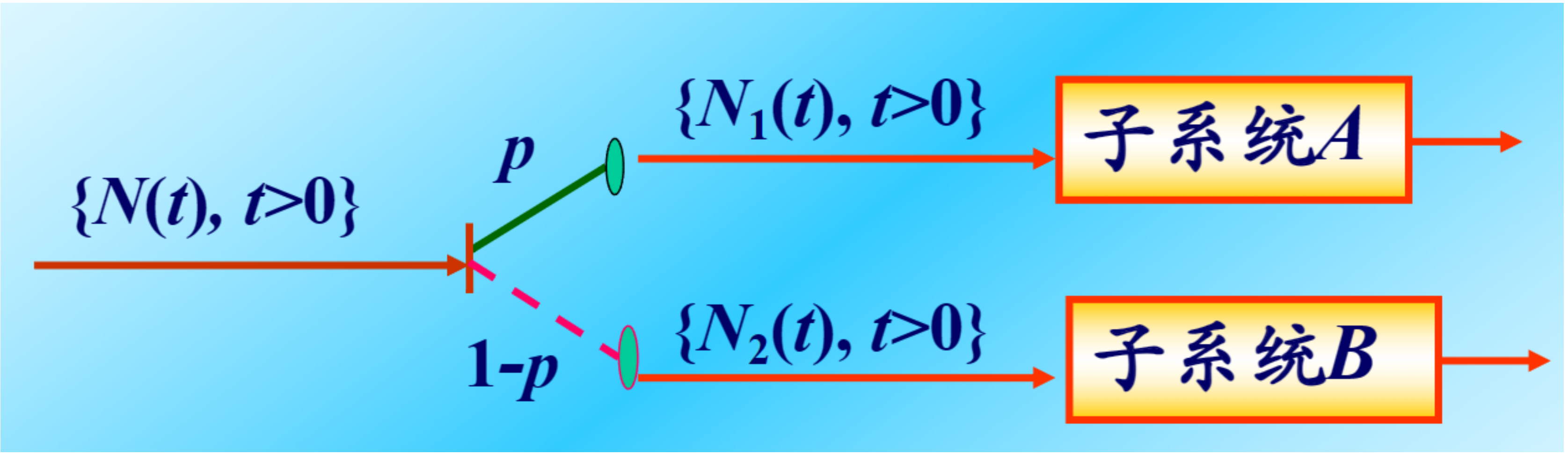
即对一切$0\le t_1<t_2$,增量$N(t_2)-N(t_1)\sim P[(\lambda_1+\lambda_2)(t_2-t_1)]$

根据定义$3.4.2'$知$\{N(t)=N_1(t)+N_2(t),t>0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

注: 定理可以推广到任意有限个过程的情形.

2.泊松过程的分解

分解模型—随机并联系统



若输入$\{N(t),t>0\}$是强度为λ的泊松过程,子系统A与B的输入过程$\{N_1(t),t>0\}$、$\{N_2(t),t>0\}$有什么关系?

设进入系统的质点数$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程,每个质点进入子系统A或B与$\{N(t),t\geq 0\}$相互独立.$N_1(t)$是以概率p进入子系统A的质点数,$N_2(t)$是以概率$1-p$进入子系统B的质点数.有

1) 对任意$t\in T, N(t)=N_1(t)+N_2(t)$;

2) $N_1(t)$与$N_2(t)$分别是强度为λp和$\lambda(1-p)$的泊松过程;

3) 对任意固定$t\in T, N_1(t)$与$N_2(t)$相互独立.

定理3.4.4 $\{N(t),t\geq 0\}$强度为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$,全体事件可分为r类,

第i类事件发生的概率为$0<p_i<1,i=1,2,\cdots,r,\sum_{i=1}^{r}p_i=1$.则$\{N(t),t\geq 0\}$可分解为$r$

个相互独立的泊松过程之和,各泊松过程的参数分别为$\lambda p_i,i=1,2,...,r$.

证: 仅证$r=2$的情形.记$\{N_i(t),t\geq 0\},i=1,2$是第i类事件发生的次数,且有

$$p_1=p,\qquad p_2=1-p,\qquad 0<p<1. \qquad (1)$$

因$0=N(0)=N_1(t)+N_2(t)$,推知$N_1(0)=0,N_2(0)=0$.(2)对任意的

$0\leq t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$,泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$的增量

$N(t_i)-N(t_{i-1}),i=1,2,\cdots,n$相互独立.

在时间间隔$[t_{i-1},t_i)$内$N(t)$出现的事件以概率p_1为第1类事件,故在时间间隔$[t_{i-1},t_i)$内

$N_1(t)$出现的事件数,即$\{N_1(t),t\geq 0\}$的增量$N_1(t_i)-N_1(t_{l-1}),i=1,2,\cdots,n$也相互独立

(3) 对任意$0 \le s < t$,用$N(s,t)=N(t)-N(s)$表示过程的增量,则$\{N_1(t),t\ge 0\}$增量分布为

$$P\{N_1(s,t)=k\}=\sum_{m=k}^{\infty}P\{N_1(s,t)=k \mid N(s,t)=m\}P\{N(s,t)=m\}$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}C_m^k p^k(1-p)^{m-k}\frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}$$

$$=\frac{[\lambda p(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)(t-s)]^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$=\frac{[\lambda p(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda p(t-s)},k=0,1,2\cdots$$

所以，$\{N_1(t),t\ge 0\}$具有平稳增量过程。

同上理,类似可证明过程$\{N_2(t),t\ge 0\}$有相同结论成立,且$\{N_2(t),t\ge 0\}$是强度为$\lambda(1-p)$的泊松过程。

(4) 证$\{N_1(t),t\ge 0\}$和$\{N_2(t),t\ge 0\}$的相互独立性. 参见讲义P72

六、非齐次泊松过程

齐次泊松过程中有“增量平稳”的假定条件,假定到达率 λ 是常数.

当过程的到达率随时间缓慢变化,**此假设合理.**

若过程的增量平稳条件不满足,到达率随时间改变,设到达率为时间函数 $\lambda(t)$,

则引入**非齐次泊松过程**概念:

定义3.3.5 如果计数过程满足下列条件

1) $N(0)=0$;

2) $\{N(t),t\geq 0\}$是一个独立增量过程;

3) $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$;

4) $P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=0(\Delta t)$.

称$\{N(t),t\geq 0\}$是具有速率函数为$\lambda(\mathrm{t})$的**非齐次Poisson过程**.

定理3.4.8 若$\{N(t),t\geq 0\}$是非齐次泊松过程,且达到率$\lambda(t)$是连续函数,则在$[t_0,t_0+t]$时间内事件A出现k次的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}\exp\{-[m(t_0+t)-m(t_0)]\},\ k=0,1,2,\cdots$$

式中 $m(t)=\int_0^t \lambda(s)\,ds.$