随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 — 数学科学学院

武德安

第三章 二阶矩过程的均方微积分

§4.4 随机过程的均方导数

一、均方导数概念

定义3.4.1 $\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程,对于确定的$t\in T$,若存在$Y\in H$,使得

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=Y$$

称$X(t)$在t处**均方可微**(可导),称Y为$X(t)$在t处的**均方导数**,记为

$$\frac{dX(t)}{dt}\text{或}X'(t).$$

若对$t\in T,X(t)$都均方可微,称$\{X(t),t\in T\}$为**均方可微过程**.

可证明均方导数过程$\{X'(t),t\in T\}$仍是**二阶矩过程**.

可定义其均方导数过程$\{X''(t),t\in T\}$,其余各高阶导数依此余推.

$X''(t),X'''(t),\cdots X^{(n)}(t),\quad t\in T.$

Eg.1 试求随机过程$X(t)=At+B$的均方导数,其中A、B是相互独立的随机变量.

解: $X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\dfrac{A(t+\Delta t)+B-(At+B)}{\Delta t}$

$$=\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\,A=A$$

而$E\left|\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-A\right|^2=E|A-A|^2=0$

在一般情况下,直接判断随机过程的可微性并求出导数过程是极其困难的.

为将随机过程的均方导数研究问题转移到实数域进行讨论分析,引进**广义二阶导数**概念:

定义4.4.2 称二元函数$f(s,t)$在(s,t)处广义二阶可微，若极限

$$\lim_{\Delta s\to 0\Delta t\to 0}\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta t\,\Delta s}$$

存在，称此极限为$f(s,t)$在(s,t)处的**广义二阶导数**.

注: 广义二阶导数是二重极限，而二阶混合偏导是二次极限，一般情况下二者不相等

广义二阶导数(二重极限)

✎定义：广义二阶导数

对于二元函数$f(s,t)$，若下列极限存在，

$$\operatorname*{l.i.m.}_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta s\Delta t}.$$

称此函数在(s,t)**广义二阶可微**，称此极限为二元函数$f(s,t)$的**广义二阶导数**.

☞**注意：广义二阶导数(二重极限)与二阶混合偏导数(二次极限)的区别(见旧课本p.166注，新课本p.75).**

$$\lim_{\Delta s\to 0}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta s\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left[\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)}{\Delta t}-\frac{f(s,t+\Delta t)-f(s,t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}[f_t'(s+\Delta s,t)-f_t'(s,t)]$$

二阶混合偏导数(二次极限)

注: 广义二阶导数是二重极限,而二阶混合偏导是二次极限,一般情况下二者不相等.

例如，考虑二元函数参见P91

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点$(x_0,y_0)=(0,0)$的偏导数与广义二阶导数。

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0;\quad f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)-f(x,0)+f(0,0)}{(x-0)(y-0)}$$

但二重极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)-f(x,0)+f(0,0)}{(x-0)(y-0)}=\lim_{x\to 0y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$

不存在。

引理3.4.1 若二元函数$f(s,t)$关于s,t的一阶偏导存在,二阶混合偏导存在并连续,则$f(s,t)$定是广义二阶可微的.且广义二阶导数为

$$f''_{st}(s,t)=f''_{ts}(s,t)$$

二、均方可微准则

定理3.4.1(均方可微准则) 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处均方可微的**充要条件**是其相关函数$R(s,t)$在(t_0,t_0)处广义二阶可微.

证： 由均方收敛定义及收敛准则可知，$\{X(t),t\in T\}$在t_0处均方可微

$$\Longleftrightarrow \quad \text{l.i.m}_{\Delta t\to 0}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}\text{存在}$$

$$\xRightarrow{\text{洛易夫准则}} \lim_{\Delta t\to 0\,\Delta s\to 0} E\left\{\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}\times\overline{\frac{X(t_0+\Delta s)-X(t_0)}{\Delta s}}\right\}\ \text{存在}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0\,\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta t\,\Delta s}\left[R(t_0+\Delta t,t_0+\Delta s)-R(t_0+\Delta t,t_0)-R(t_0,t_0+\Delta s)+R(t_0,t_0)\right]\ \text{存在}$$

即，$R(s,t)$ 在 (t_0,t_0) 处广义二阶可微.

推论3.4.1 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$在$T\times T$的对角线上广义二阶可微，则$R'_s(s,t),R'_t(s,t),R''_{st}(s,t),R''_{ts}(s,t)$在$T\times T$上均存在而且

(1) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$的均值函数为

$$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=\frac{d}{dt}E[X(t)]=m'_X(t)$$

(2) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$的自相关函数为

$$R_{X'}(s,t)=E\left[X'(s)\overline{X'(t)}\right]=R''_{st}(s,t)=R''_{ts}(s,t)$$

(3) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$与$\{X(t),t\in T\}$的互相关函数为

$$R_{X'X}(s,t)=E\left[X'(s)\overline{X(t)}\right]=R'_s(s,t)$$

$$R_{XX'}(s,t)=E\left[X(s)\overline{X'(t)}\right]=R'_t(s,t)$$

证:(1) $m_{X'}(t)=E[X'(t)]=E\left[\text{l.i.m}_{\Delta t\to 0}\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{m_X(t+\Delta t)-m_X(t)}{\Delta t}\right]=m_X'(t)$$

(3) $R_{X'X}(s,t)=E\left[X'(s)\overline{X(t)}\right]=E\left[\text{l.i.m}\dfrac{X(s+\Delta s)-X(s)}{\Delta s}\cdot\overline{X(t)}\right]$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{E[X(s+\Delta s)\overline{X(t)}-X(s)\overline{X(t)}]}{\Delta s}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{R(s+\Delta s,t)-R(s,t)}{\Delta s}=R_s'(s,t)$$

(2) $R_{X'}(s,t)=E\left[X'(s)\overline{X'(t)}\right]=E\left[\text{l.i.m}_{\Delta s\to 0}\dfrac{X(s+\Delta s)-X(s)}{\Delta s}\cdot\overline{X'(t)}\right]$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{E\left[X(s+\Delta s)\overline{X'(t)}-X(s)\overline{X'(t)}\right]}{\Delta s}$$

由(3) 可得 $=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{R_t'(s+\Delta s,t)-R_t'(s,t)}{\Delta s}=R_{ts}''(s,t)$

Eg. 2 参数为σ^2的Wiener过程$\{W(t), t\geq 0\}$在$t=t_0$否是均方可微的?

解: 因$R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$,

$$R_W(t_0+\Delta t,t_0)-R_W(t_0,t_0)=\sigma^2[\min(t_0+\Delta t,t_0)-t_0]=\begin{cases}0, & \Delta t>0;\\ \sigma^2\Delta t, & \Delta t<0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow R'_{s+}(t_0,t_0)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{0}{\Delta t}=0$$

$$R'_{s-}(t_0,t_0)=\lim_{\Delta t\to 0^-}\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta t}=\sigma^2.$$

$R'_s(t_0,t_0)$不存在,因此$\{W(t),\geq 0\}$不是均方可微的.

注: 可通过引进Dirac $-\delta$函数,定义Wiener过程的导数过程(参见P93).

Eg. 3 设随机变量ξ满足$E(\xi)=0, D(\xi)=\sigma^2$,令$X(t)=\xi t, \quad t\in T$

证明$\{X(t), t\in T\}$是均方可微过程.

证: $\{X(t), t\in R\}$是二阶矩过程,

$E[X(t)]=0, \quad D[X(t)]=t^2\sigma^2,$

$R_X(s,t)=E[X(s)\overline{X(t)}]=E[\xi s\bar{\xi}t]=stE(\xi\bar{\xi})=st\sigma^2$

其广义二阶导数为

$$\lim_{\Delta s\to 0,\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta s\,\Delta t}[R_X(s+\Delta s,t+\Delta t)-R_X(s+\Delta s,t)-R_X(s,t+\Delta t)+R_X(s,t)]$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0,\Delta t\to 0}\frac{\sigma^2}{\Delta s\,\Delta t}[(s+\Delta s)(t+\Delta t)-(s+\Delta s)t-s(t+\Delta t)+st]=\sigma^2<\infty$$

故$\{X(t), t\in T\}$是一个均方可微过程.

三、均方导数基本性质

性质3.4.1 均方可导必均方连续，$\{X(t), t\in T\}$在t处均方可微，则$X(t)$在t处均方连续.

证： $X'(t)\in H$，故

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[|X(t+\Delta t)-X(t)|^2]=\lim_{\Delta t\to 0} E\left[\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]^2\right]\cdot(\Delta t)^2$$

$$=E[X'(t)|^2]\cdot 0=0$$

注： 性质的逆不真.

Eg. 4 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，讨论随机过程

$X(t)=W^2(t),t\geq 0$是否均方可微?

解： 自相关函数为

$$R(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$$

$$R'_{s+}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{R(t+\Delta t,t)-R(t,t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\sigma^4[(t+\Delta t)t+2t^2-3t^2]}{\Delta t}=\sigma^4 t,$$

$$R'_{s-}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{R(t+\Delta t,t)-R(t,t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{\sigma^5[(t+\Delta t)t+2(t+\Delta t)^2-3t^2]}{\Delta t}=5\sigma^4 t,$$

$R'_{s+}(t,t)\neq R'_{s-}(t,t)$，所以$R'_s(t,t)$不存在，

$\Rightarrow R(s,t)$不是广义二阶可导的

$\Rightarrow X(t)=W^2(t),t\geq 0$不是均方可微的.

性质3.4.2 均方导数在概率为1的意义下唯一.

若$X'(t)=Y_1(t), X'(t)=Y_2(t)$,则$Y_1(t)=Y_2(t) \quad (a.e)$

证: 由均方极限的惟一性可得.

性质3.4.3 均方导数具有线性性$X(t),Y(t)$均方可微,则$\{aX(t)+bY(t), t\in T\}$,

$a,b\in C$,也均方可微,且$[aX(t)+bY(t)]'=aX'(t)+bY'(t)$

证: 记$\dfrac{\Delta(aX+bY)}{\Delta t}=\dfrac{[aX(t+\Delta t)+bY(t+\Delta t)]-[aX(t)+bY(t)]}{\Delta t}$

$$\frac{d[aX+bY]}{dt}=[aX'(t)+bY'(t)] \quad \text{则}$$

$$\left\|\frac{\Delta(aX+bY)}{\Delta t}-\frac{d(aX+bY)}{dt}\right\|=\left\|\frac{\Delta(aX+bY)}{\Delta t}-[aX'(t)+bY'(t)]\right\|$$

$$\leq |a|\left\|\frac{[X(t+\Delta t)-X(t)]}{\Delta t}-X'(t)\right\|+|b|\cdot\left\|\frac{[Y(t+\Delta t)-Y(t)]}{\Delta t}-Y'(t)\right\|\to 0,$$

as $\Delta t\to 0$.

性质3.4.4 设$f(t)$是定义在T上的普通可微函数,$\{X(t),t\in \mathrm{T}\}$是均方可微过程,则$\{f(t)X(t),t\in T\}$也是可微过程,有

$$[f(t)X(t)]'=f'(t)X(t)+f(t)X'(t)$$

性质3.4.5 设$\{X(t),t\in T\}$是均方可微过程,且$X'(t)=0$,则$X(t)$(以概率为1)是一个常随机变量(即与指标t无关的随机变量).

证明: 对于$\forall s,t\in T,s\neq t$,有

$$E(|X(t)-X(s)|^2)=E[(X(t)-X(s))\overline{(X(t)-X(s))}]$$

$$=R_X(t,t)-R_X(t,s)-R_X(s,t)+R_X(s,s)$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial s}R_X(t,\xi_1)-\frac{\partial}{\partial s}R_X(s,\xi_2)\right](t-s)$$

$$=\left\{E\left[X(t)\overline{X'(\xi_1)}\right]-E\left[X(s)\overline{X'(\xi_2)}\right]\right\}(t-s)=0$$

等价于

具有相等均方导数的两个随机过程,它们最多仅相差一个随机变量,即

$$[X(t)+X]' = X'(t)$$