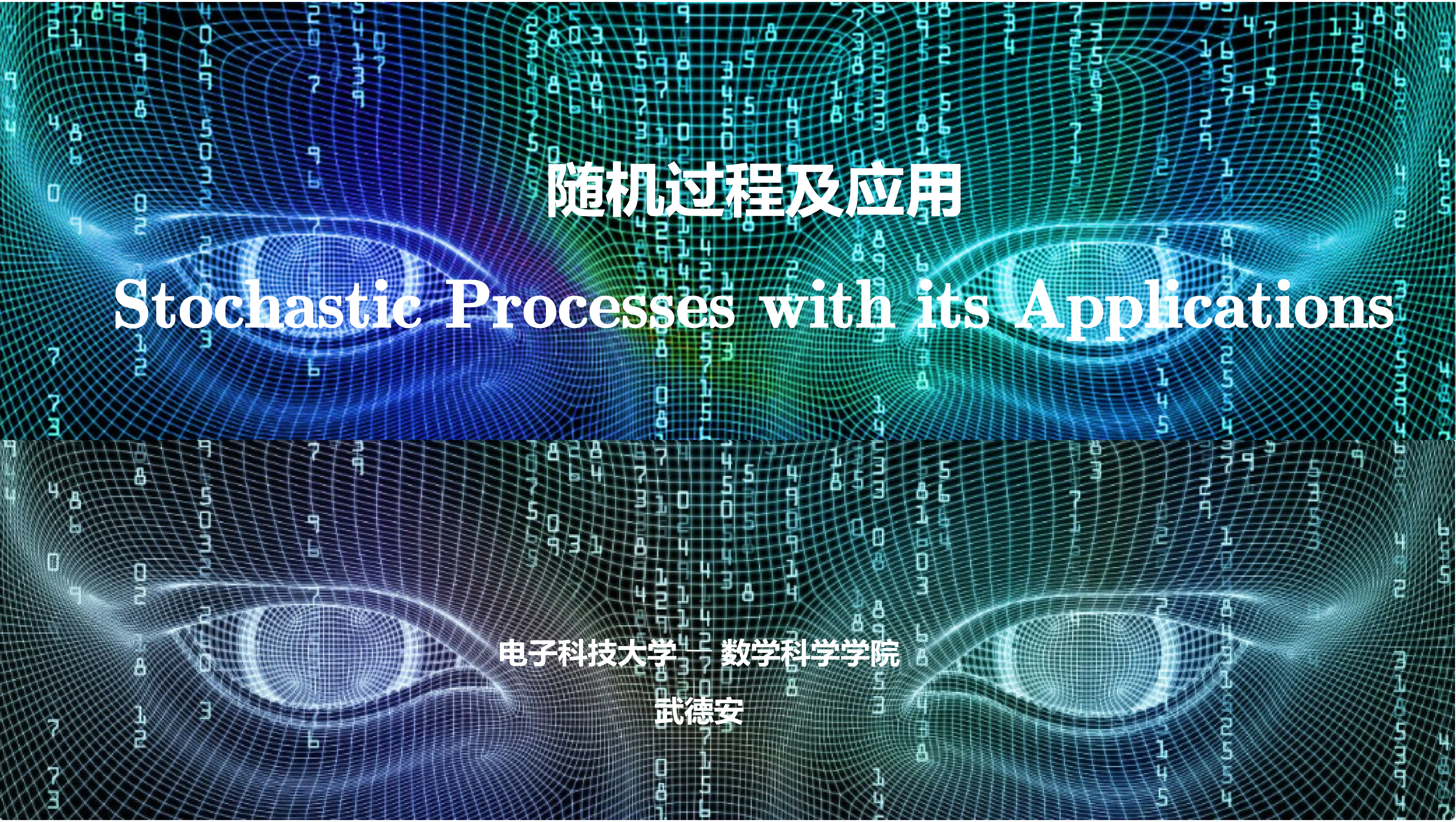


随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学　数学科学学院

武德安

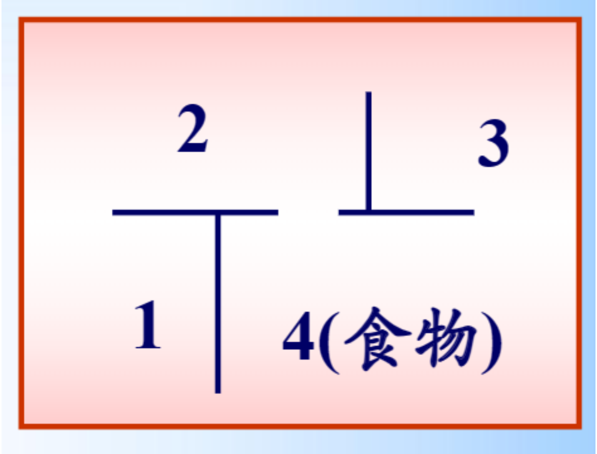
第五章马尔可夫过程

§5.4马氏吸收链

Eg.1 另一类迷宫问题迷宫的四个分隔间都是相通的，在第四分隔间里放有食物。

分析: 老鼠受到食物的吸引不会再运动到其它房间.老鼠运动过程的转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{bmatrix}0.3&0.3&0&0.4\\0.2&0.3&0.2&0.3\\0&0.3&0.3&0.4\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(p_{ij})$$

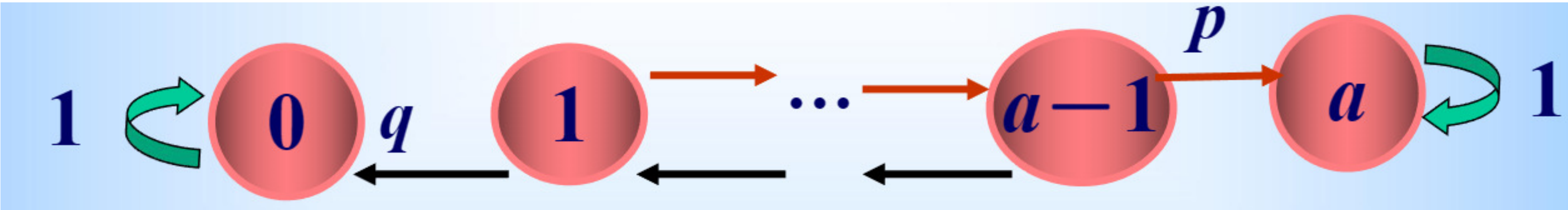


有两个特点:

1. 老鼠一旦进入状态4,它将永远停留在状态4;
2. 从任何一个状态出发,都可以进入状态4.

定义5.4.1 若马氏链至少含有一个吸收状态,并且从每一个非吸收状态出发,都可以到达某个吸收状态，称此马氏链为**吸收链**.

Eg.2：设马氏链的状态空间$E=\{0,1,2,\ldots,a\}$,状态转移图为



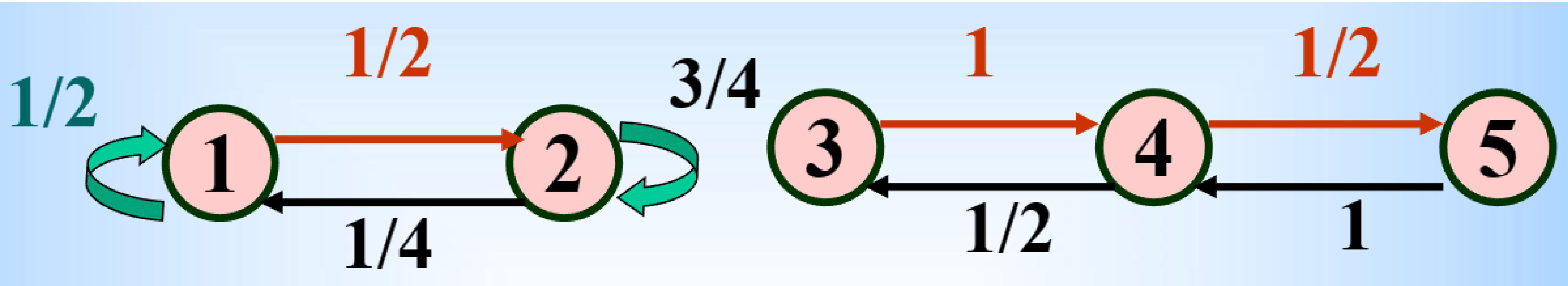
其一步转移矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $(0<q<1,0<p<1)$

0 和a是吸收状态，是吸收链.

Eg. 3 设马氏链的状态空间$E=\{1,2,3,4,5\}$,其一步转移矩阵为

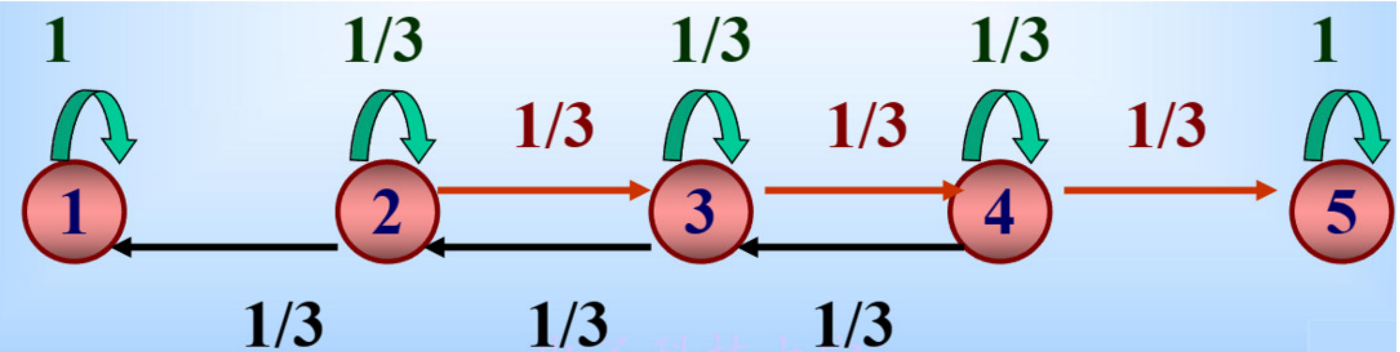
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其一步状态转移图如下



不是吸收链.

Eg.4 醉汉问题状态空间$E=\{1,2,3,4,5\}$状态转移图为



转移概率矩阵为$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1/3&1/3&1/3&0&0\\0&1/3&1/3&1/3&0\\0&0&1/3&1/3&1/3\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$如何计算他从各街口回家或重回酒吧的平均徘徊次数?

对矩阵$\boldsymbol{P}$进行行初等变换与列初等变换,得到$\boldsymbol{P}$的等价矩阵：$\boldsymbol{T}=$

$$\begin{array}{c}\\ 1\\ 5\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&5&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{R}&\boldsymbol{S}\end{bmatrix}$$

一般,有n个状态,r个吸收状态的吸收链的转移矩阵的标准形式为:

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S} \end{bmatrix}$其中,$\boldsymbol{S}$为$s\times s$矩阵,$s=n-r$,$\boldsymbol{S}$是非吸收状态到非吸收状态的转移矩阵.

定义5.4.2 在吸收链的标准形式中,称$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{S})^{-1}$为**基矩阵**.

定理5.4.3 设吸收链的基矩阵为$\boldsymbol{F}$,有

1) $\boldsymbol{F}$的元素f_{ij}是从非吸收状态"i"到达非吸收状态"j"的平均转移步数,即

$$f_{ij}=\mu_{ij}=E[T_{ij}]=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

2) $\boldsymbol{F}$的第i行元素之和是从非吸收状态"i"出发,被某个吸收状态吸收之前的平均转移步数.

问题1：计算§5.3Eg.6中从赢利$N-1$个单位到破产或达到目标值的平均经营次数.

问题2：计算醉汉从各街口回家或重回酒吧的平均徘徊次数?

定理5.4.4 令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{R}=(b_{ij})$则$b_{ij}$是从非吸收状态$i$出发，被吸收状态$j$**吸收的概率**.

问题：计算5.5Eg.6中从赢利$N-1$个单位到破产的概率.

Eg.5 智力竞案问题(参见教材P222.17题)

甲乙两队进行智力竞案,赛前规定如下

1）比赛前双方各记2分;

2）每比赛一次胜方得1分，负方则扣去1分，有一队总分达4分时结束比赛.

甲队赢1分的概率为$p, 0 < p < 1$,讨论:

1）甲队获得1，2，3分的平均次数?

2）决出胜负时,甲队分数的平均转移次数?

3）甲队最终获胜的概率?

分析: 甲队的可能得分是0,1,2,3,4,其中0,4是吸收状态,1,2,3是非吸收状态

并且2是初始状态.转移矩阵为$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$
\boldsymbol{P}\text{矩阵等价于}\boldsymbol{T}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}0 & 4 & 1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\4\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1-p & 0 & 0 & p & 0\\0 & 0 & 1-p & 0 & p\\0 & p & 0 & 1-p & 0\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}
$$

分数转移过程的基矩阵为

$$
\boldsymbol{F}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & p & 0\\1-p & 0 & p\\0 & 1-p & 0\end{bmatrix}\right\}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -p & 0\\p-1 & 1 & -p\\0 & p-1 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix}1-pq & p & p^2\\q & 1 & p\\q^2 & q & 1-pq\end{bmatrix};\ q=1-p.
$$

1）根据定理3，因初始状态是2，甲队获得分数为1，2，3分的平均次数分别为：

$$\frac{q}{1-2pq},\frac{1}{1-2pq},\frac{p}{1-2pq}$$

2）决出胜负时，甲队的分数转移的平均次数为

$$\frac{q}{1-2pq}+\frac{1}{1-2pq}+\frac{p}{1-2pq}=\frac{2}{1-2pq}$$

3）计算 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}=\dfrac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix}1-pq & p & p^2\\ q & 1 & p\\ q^2 & q & 1-pq\end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1-p & 0\\ 0 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}$

$$=\frac{1}{1-2pq}\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}(1-pq)q & p^3\\ q^2 & p^2\\ q^3 & (1-pq)p\end{bmatrix} & \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\\ \begin{array}{cc}0 \quad\quad & \quad\quad 4\end{array} & \end{array}=(b_{ij})_{3\times 2},$$

根据定理5.4.4，甲队获胜的概率为 $b_{24}=\dfrac{p^2}{1-2pq}$

Appendix

吸收Markov链三个重要的问题

吸收Markov链性质之一是不论从那一个状态开始,经过多次试验转移后,必会到达吸收状态,因此对于吸收马可夫链,有三个重要的问题:

(1) 被吸收状态吸收以前,在每一个非吸收状态上平均各停留几次?

(2) 由某一非吸收状态开始,平均经过几次转移后会被吸收状态所吸收?

(3) 由某一非吸收状态开始，被某一特定吸收状态吸收的概率为受少?

为了分析方便起见,我们将吸收马可夫链的吸收状态调整集中至矩阵最上面,而将非吸收状态调整排列在矩阵最下面,因此将原来转移矩阵修改具有下列的标准型式

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{array}{r} \text{吸收状态} \\ \text{非吸收状态} \end{array} \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right] \right.$$

设此一标准型式的转移矩阵有r个吸收状态和s个非吸收状态。

$\boldsymbol{I}_{r\times r}$:　r个吸收状态所组成的$r\times r$单位矩阵

$\boldsymbol{R}_{s\times r}$:　s个非吸收状态进入r个吸收状态之概率,所组成的$s\times r$矩阵

$\boldsymbol{Q}_{s\times s}$:　s个非吸收状态所组成的$s\times s$方阵

$\mathbf{0}_{r\times s}$:　$r\times s$零矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{array}{c} \text{吸收状态} \\ \text{非吸收状态} \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_{r\times r} & \mathbf{0}_{r\times s} \\ \hdashline \boldsymbol{R}_{s\times r} & \boldsymbol{Q}_{s\times s} \end{array}\right]$$

此标准型式的转移矩阵，经过n次转移，根据$\mathrm{C-K}$方程可求得

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^n = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{R}+\boldsymbol{QR}+\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{R}+\cdots+\boldsymbol{Q}^{n-1}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}^n \end{array}\right]$$

其中$\boldsymbol{Q}^n$表示经n次转移后，非吸收状态到非吸收状态的概率矩阵，因为$\boldsymbol{Q}$为概率矩阵，所以在$\boldsymbol{Q}$矩阵中的每一个元素皆小于1，因此当n很大时，$\boldsymbol{Q}^n$矩阵会趋近于零矩阵。

又 $\mathbf{R}+\mathbf{QR}+\mathbf{Q}^2\mathbf{R}+\ldots+\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{R}=(\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\ldots+\mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{R}$

由代数公式可知

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\ldots+\boldsymbol{Q}^{n-1})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\ldots+\boldsymbol{Q}^{n-1})\xrightarrow{n\to\infty}\boldsymbol{I},\quad \left(\because \mathbf{Q}^{\mathbf{n}}\xrightarrow{\mathbf{n}\to\infty}\mathbf{0}\right)$$

$$\Longrightarrow (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\ldots+\mathbf{Q}^{n-1})\xrightarrow{n\to\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$$

令$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$为马可夫链的基本矩阵($Fundamental Matrix$),

请读者注意,求$\boldsymbol{N}$时所用的单位矩阵$\boldsymbol{I}$之行列数必须与$\boldsymbol{Q}$相同,为$s\times s$单位矩阵,

并非前述由吸收状态所组成的$r\times r$单位矩阵。

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{n} \xlongequal{n\to\infty} \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}^{n} \end{array}\right]$$

$$\tilde{P}^n \xrightarrow[]{n\to\infty} \left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline (I-Q)^{-1}R & Q^n \end{array}\right]$$

定义：基本矩阵

$F = (I - Q)^{-1}$.

定理：基本矩阵与吸收之前的平均转移步数

设F为基本矩阵，有

(1) F的元素f_{ij}是从非吸收状态i出发，到从非吸收状态j的平均转移步数，即

$$f_{ij} = \mu_{ij} = \mathrm{E}[T_{ij}] = \sum_{k=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}.$$

(2) F的第i行元素之和元素是从非吸收状态i出发，被某个吸收状态吸收之前的平均值转移步数.

定义:

$\mathrm{B} = \mathrm{FR} = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})^{-1}\mathrm{R}.$

定理: B与吸收概率

设$\mathbf{B} = (b_{ij})$, 则b_{ij}是从从非吸收状态i出发, 被吸收状态j吸收的概率.