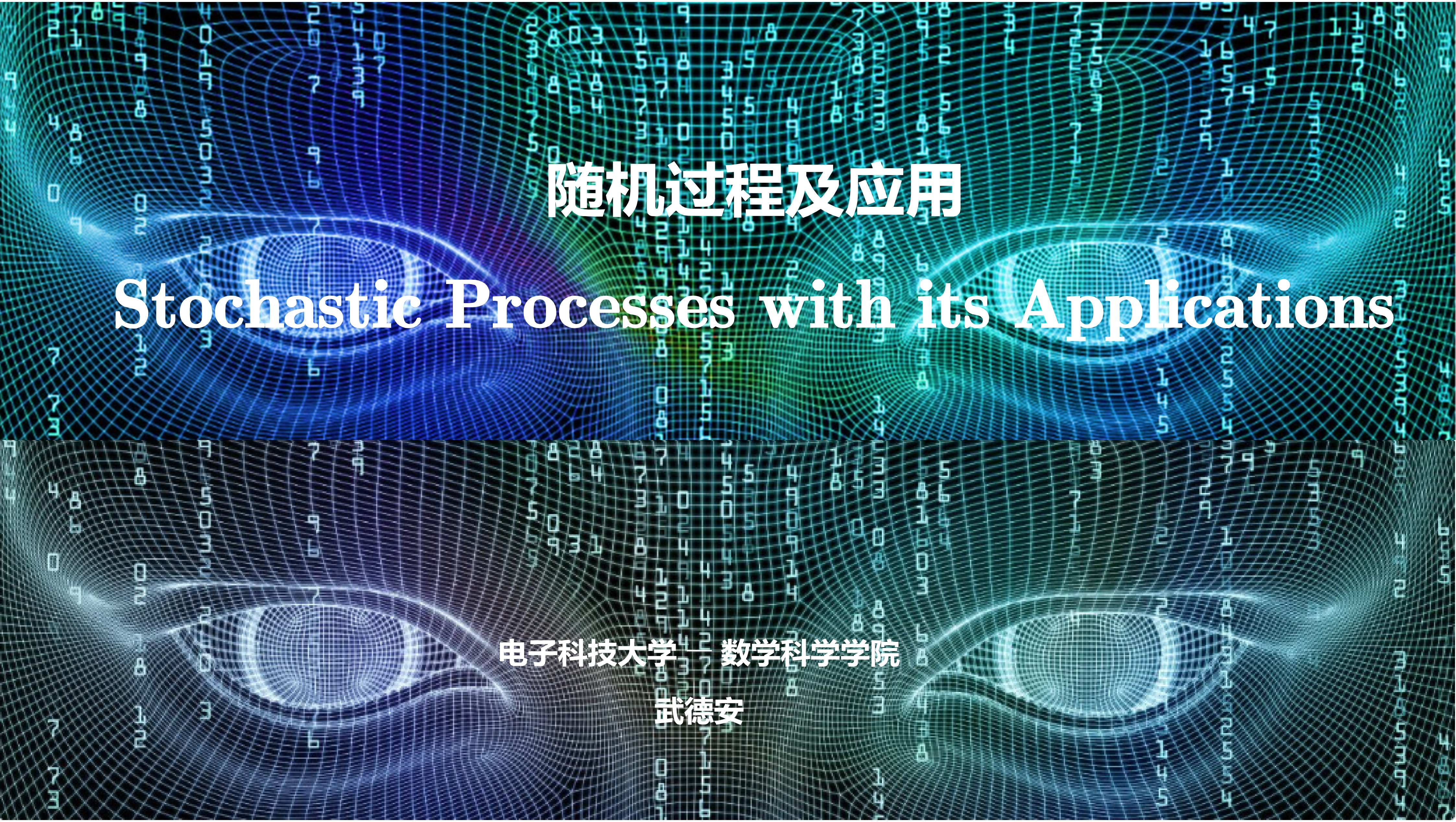

随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学 数学科学学院

武德安

第二章几种重要随机过程

§2.1正态过程(高斯过程)

§2.2维纳过程

§2.3泊松过程

§2.4泊松过程的推广

§2.1正态过程

在现实问题中,满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布.
电子技术中的热噪声是由大量的热运动引起,也服从正态分布.

由于一个随机过程可以用有限维分布来描述,为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.

一、多维正态随机变量

1.概率密度与特征函数

若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

(X,Y)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

记 $\boldsymbol{\mu}=E\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(X)\\E(Y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$

其中$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$,故协方差矩阵满足$|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

(X,Y)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

记为$(X,Y)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$.

定义3.1.1 设$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是n阶正定对称矩阵,$\boldsymbol{\mu}$是n维实值列向量,定义n维随机向量$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$的**联合密度函数**为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

其中$\mathrm{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^x$,称$\boldsymbol{X}$服从$n$维正态分布.

记为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$.

注: 当$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是n阶正定对称矩阵,有$|\boldsymbol{B}|\neq 0$,若$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{0}$则不能用式给出其概率密度.

定理3.1.1: n维正态分布随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的特征函数为

$$\varphi(u)=\exp\left\{i\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T Bu\right\}\quad 其中\quad \boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n)^T.$$

定义3.1.2: 若$\boldsymbol{\mu}$是n维实向量,$\boldsymbol{B}$是n阶非负定对称阵,称以(∗∗)式中的$\varphi(t)$为其特征函数的n维随机变量X服从n维正态分布.

注: 若(∗∗)式中的$|\boldsymbol{B}|=0$,称$\boldsymbol{X}$服从**退化正态分布或奇异正态分布.**

2.边缘分布及二阶矩

以下结论总假定随机向量$X=(X_1,X_2,...,X_n)^{\mathrm{T}}$服从$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$.

定理3.1.2 n维正态分布随机变量X的任一子向量$(X_{k_1},X_{k_2},\cdots,X_{k_m})^T \quad (m\le n)$

也服从正态分布$N(\tilde{\boldsymbol{\mu}},\tilde{\boldsymbol{B}})$，其中$\tilde{\boldsymbol{\mu}}=(\mu_{k_1},\mu_{k_2},\cdots,\mu_{k_m})$,$\tilde{\boldsymbol{B}}$是$B$保留第$k_1,k_2,....k_m$行

及列所得的m阶矩阵.

多元正态分布的边综分市仍是正态分布

定理3.1.3 设μ和B分别是随机向量X的数学期望向量及协方差矩阵,即

$$E(X_i)=\mu_i,\quad 1\le i\le n;b_{ij}=E\{(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\},\quad 1\le i,j\le n.$$

n维正态分布由二阶矩确定

3.独立性问题

定理3.1.4：n维正态分布随机向量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立的充要条件是它们两两不相关.

等价于其协方差矩阵是对角阵.

4. 正态随机向量的线性变换

定理3.1.5:正态随机向量$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$,记$E(X)=\mu$,协方差矩阵为$\boldsymbol{B}$.

1) 对X的线性组合$Y=\sum_{j=1}^{n} l_j X_j=\boldsymbol{LX}$, $\quad L=(l_1, l_2, \ldots, l_n)$有

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{n} l_j \mu_j=\boldsymbol{L\mu}, D(Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_j l_k b_{jk}=\boldsymbol{LBL}^T$$

2) 若$C=(c_{jk})_{m\times n}$,线性变换$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{CX}$,则均值向量为

$$E(\boldsymbol{Z})=E(\boldsymbol{CX})=\boldsymbol{C}E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{C\mu},$$

协方差矩阵为 $\quad \boldsymbol{D}_Z=\boldsymbol{CBC}^T$

定理3.1.6: $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^{\tau}$服从$n$维正态分布$\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$的充要条件是它的任何一个非零线性组合$\sum_{j=1}^{n} l_j X_j$,服从一维正态分布.

可将多维正态随机变量问题转化为一维正态分布问题

定理3.1.7:若$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$服从$n$维正态分布$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{C}=(c_{jk})_{m\times n}$是任意矩阵,则$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$服从$m$维正态分布$N(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\top})$.

正态分布的线性变换不变性

证: 对于任意m维实值列向量$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{Y}$的特征函数为

$$\phi_Y(\boldsymbol{u})=E(e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Y}})=E(e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}})=E\left(e^{i(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{X}}\right)=\exp\left\{i\boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{u})\right\}$$

$$=\exp\left\{i(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^T)\boldsymbol{u}\right\}$$

思考问题： 能否保证 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$ 服从非退化正态分布？

反例：设随机变量 X_0 与 V 相互独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，令

$X(1)=X_0+V, X(2)=X_0+2V, X(3)=X_0+3V,$

问 $(X(1),X(2),X(3))$ 是否服从非退化正态分布？

分析：设 $X=\begin{bmatrix}X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\V\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}X_0\\V\end{bmatrix}$

因 $\begin{bmatrix}X_0\\V\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$，$\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{CBC}^T=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{C}^T=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\Rightarrow|\boldsymbol{CBC}^T|=\begin{vmatrix}2&3&4\\3&5&7\\4&7&10\end{vmatrix}=0$$

$\boldsymbol{X}=(X(1),X(2),X(3))$ 不服从非退化正态分布.

一般地,若$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$是非退化二维正态随机向量,其线性变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$,有

1）每一分量服从正态分布;

2)不能构成二维以上的非退化联合正态分布;

分析2): 设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$的协方差矩阵为$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$, $\quad R(\boldsymbol{B})=\mathbf{2}$

线性变换矩阵$\boldsymbol{C}^T=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2}\end{bmatrix}$, $\quad R(\boldsymbol{C})\le\mathbf{2}$则线性变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$的

协方差矩阵为$\boldsymbol{\Gamma}_Y=\boldsymbol{CBC}^T$, $\quad R(\boldsymbol{\Gamma}_Y)\le\min(R(\boldsymbol{C}),R(\boldsymbol{B}))\le 2$

即二维以上的线性变换向量$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$都是**退化(奇异)联合正态分布**.

问题结论：

1）不能保证$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$服从非退化正态分布.

2）当$|CBC^T|\neq 0$时,随机向量$\boldsymbol{Y}$服从非退化正态分布.

可证明

推论： 非退化正态分布随机向量X的行满秩线性变换仍服从非退化正态分布.

定理3.1.8:若随机向量X服从$N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$,则存在一个正交变换$\boldsymbol{U}$,使得$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$是一个相互独立的正态随机向量.

证: $\boldsymbol{B}$为实对称矩阵,存在正交阵U,使

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^{\tau}=\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

d_i是$\boldsymbol{B}$的特征值

又因$\boldsymbol{B}$是正定阵(从而非奇异的)$\boldsymbol{B}$有n个线性无关特征向量设U是以特征向量为列构成的正交阵，令$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$则得证.

二、正态随机过程

定义3.1.3： 随机过程$\{X(t),t\in T\}$称为正态过程，如果它的**任意有限维分布都是联合正态分布**.

即对任意的正整数n和$t_1,t_2,\dots,t_n\in T$，n维随机变量$(X(t_1),\dots,X(t_n))$都服从正态分布.

注 1）上述几个定理均可应用于正态过程.

2）若存在n，对$t_1,t_2,\dots,t_n\in T$，n维随机变量$(X(t_1),\dots,X(t_n))$服从退化正态分布，称$\{X(t),t\in T\}$为退化正态过程.

3）正态过程的n维分布由其二阶矩完全确定.

有对任意的$n \geq 1, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^{\tau} \sim N(\mu, \mathrm{B})$

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n))^{\tau} \sim N(\mu, \mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_1, t_2) & \cdots & C(t_1, t_n) \\ C(t_2, t_1) & C(t_2, t_2) & \cdots & C(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C(t_n, t_1) & C(t_n, t_2) & \cdots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

$$C(t_i, t_j) = E\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\}, \ (1 \leq i, j \leq n)$$

Eg. 1：随机振幅电信号

设$X(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t, t\in R$

$E(\xi)=E(\eta)=0, E(\xi^2)=E(\eta^2)=\sigma^2, \omega$ 为常数ξ与η相互独立同服从正态分布，

1) 试求$X(t)$的均值函数和相关函数；

2) 写出一维概率密度和二维概率密度.

解: 1) $E\{X(t)\}=E(\xi)\cos\omega t+E(\eta)\sin\omega t=0$因$E(\xi\eta)=0$,故

$$R(s,t)=E\{(\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t)(\xi\cos\omega s+\eta\sin\omega s)\}$$

$$=E(\xi^2)\cos\omega t\cos\omega s+E(\eta^2)\sin\omega t\sin\omega s$$

$$=\sigma^2\cos\omega(t-s)=\sigma^2\cos(\tau),(\tau=t-s)$$

$$\Rightarrow \quad D(X(t))=R(t,t)=\sigma^2\cos 0=\sigma^2.$$

2) $X(t)$的一维密度为$f(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R$

$X(t_i)$是相互独立正态随机变量的线性组合，故$\big(X(t_1),X(t_2)\big)$服从二维正态分布，

其相关系数为$\rho=\dfrac{R(s,t)-m(s)m(t)}{\sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}}=\dfrac{\sigma^2\cos\omega\tau}{\sigma^2}=\cos\omega\tau$ 仅与$\tau=t-s$有关

得过程$X(t)$的二维密度为

$$f(x_1,x_2;s,t)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega\tau}}e^{-\frac{x_1^2-2x_1x_2\cos\omega\tau+x_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega\tau)}}\quad(x,y)\in R_2.$$

思考题: 此过程是否是正态过程?可否写出任意n维概率密度?

对任意$t_1,t_2\in R,t_1\neq t_2,(X_{t_1},X_{t_2})^{\mathrm{T}}$是相互独立正态随机变量$(\xi,\eta)^T$的线性变换

$$\begin{pmatrix}X_{t_1}\\X_{t_2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\\cos\omega t_2 & \sin\omega t_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},$$

因当$t_1\neq t_2$时有 $\det\boldsymbol{K}\neq 0$, $(X_{t_1},X_{t_2})^{\mathrm{T}}$服从非退化二维正态分布.

Eg. 2: 分析P37例3中的n维概率分布在随机向量的协方差矩阵$\boldsymbol{C}$中取$n=3,t_2=2t_1,t_3=3t_1$,

$$\text{则}\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\\cos 2\omega t_1 & \sin 2\omega t_1\\\cos 3\omega t_1 & \sin 3\omega t_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0\\0 & \sigma^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\\cos 2\omega t_1 & \sin 2\omega t_1\\\cos 3\omega t_1 & \sin 3\omega t_1\end{bmatrix}^T$$

可计算得$|\boldsymbol{C}|=0$,且$\mathrm{Rank}(C)=2$,故例中当$n>2$时,不能写出n维联合正态概率密度.

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0\\0 & \sigma^2\end{bmatrix}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\\vdots & \vdots\\\cos\omega t_n & \sin\omega t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\\vdots & \vdots\\\cos\omega t_n & \sin\omega t_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\Longrightarrow\det(\boldsymbol{C})=0$$

Eg. 3：设随机过程$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$相互独立,都是正态随机过程,

设$Z(t)=X(t)+Y(t), \quad t\in R$证明$Z(t)$是正态过程。

证： 对任意正整数n及$t_1,t_2,\cdots t_n\in R$, $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)) \quad (Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n))$

都是n维联合正态随机向量,并相互独立。

$(Z(t_1),Z(t_2),\cdots,Z(t_n))$的$n$维特征函数为

$$\varphi_z(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)=E\left\{e^{i[u_1(X(t_1)+Y(t_1))+\cdots+u_n(X(t_n)+Y(t_n))]}\right\}$$

$$=E\left\{e^{i[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]}\right\}E\left\{e^{i[u_1Y(t_1)+\cdots+u_nY(t_n)]}\right\}=\exp\left\{i\boldsymbol{\mu}'_X\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{C}_X\boldsymbol{u}\right\}\exp\left\{i\boldsymbol{\mu}'_Y\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{C}_Y\boldsymbol{u}\right\}$$

$$=\exp\left\{i(\boldsymbol{\mu}_X+\boldsymbol{\mu}_Y)'\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}[\boldsymbol{u}'\boldsymbol{C}_X\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'\boldsymbol{C}_Y\boldsymbol{u}]\right\}=\exp\left\{i(\boldsymbol{\mu}_X+\boldsymbol{\mu}_Y)'\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}[\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{C}_X+\boldsymbol{C}_Y)\boldsymbol{u}]\right\}$$

由特征函数和分布函数的惟一性定理知$(Z(t_1),Z(t_2),\cdots,Z(t_n))$是正态随机向量.

问题: $\boldsymbol{C}_X+\boldsymbol{C}_Y$是否是上随机向量的协方差矩阵?

根据数学期望与协方差的性质

$$\mathrm{Cov}\left[\left(X(t_1)+Y(t_1)\right),\left(X(t_2)+Y(t_2)\right)\right]=\mathrm{Cov}\left(X(t_1),X(t_2)\right)+\mathrm{Cov}\left(Y(t_1),Y(t_2)\right)$$

$\left(Z(t_1),Z(t_2),\cdots,Z(t_n)\right)$的均值向量为$\boldsymbol{\mu}_X+\boldsymbol{\mu}_Y$协方差矩阵为$\boldsymbol{C}_X+\boldsymbol{C}_Y$.

问题：能否保证是非退化正态过程?

实际应用:

怎样验证随机过程$\boldsymbol{X}_T=\{X(t),t\in T\}$是正态随机过程?

任取$n\geq 1$,及$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$,记$\boldsymbol{X}=(X(t_1),\ldots,X(t_n))$,

算法步骤如下:

1)计算X的n维协方差矩阵$\boldsymbol{B}$;

2)验证$\boldsymbol{B}$的正定性;

3)求正交矩阵$\boldsymbol{U}$,使$\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^T=\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$

4) 令$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$的协方差矩阵为$\boldsymbol{D}$; 称将$X$去相关

5) 检验$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$的独立性; 随机过程统计推断问题

6) 检验$\boldsymbol{Y}$的一维分布的正态性.

结论

若检验得$Y=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$是相互独立的正态随机变量,

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{Y}\text{是}n\text{维正态随机变量}, \\ \text{即}X_T=\{X(t),t\in T\}\text{是正态随机过程}. \end{cases}$$

思考

1) 为以上算法写出理论依据;

2) 你能考虑用其他方法验证吗?

2.平稳正态过程

对于广义平稳正态随机过程,它的均值和自相关函数满足$m_X(t)=m_X$, $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)$,

$\tau=t_1-t_2$这时,其协方差矩阵为$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_X(0) & \cdots & C_X(t_1-t_N) \\ \vdots & & \vdots \\ C_X(t_N-t_1) & \cdots & C_X(0) \end{bmatrix}$

当时间轴平移ε时,如平移后的协方差矩阵记为$\boldsymbol{C}_\varepsilon$,则

$$\boldsymbol{C}_\varepsilon=\begin{bmatrix} \mathrm{Cov}[X(t_1+\varepsilon),X(t_1+\varepsilon)] & \cdots & \mathrm{Cov}[X(t_1+\varepsilon),X(t_N+\varepsilon)] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}[X(t_N+\varepsilon),X(t_1+\varepsilon)] & \cdots & \mathrm{Cov}[X(t_N+\varepsilon),X(t_N+\varepsilon)] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_X(0) & \cdots & C_X(t_1-t_N) \\ \vdots & & \vdots \\ C_X(t_N-t_1) & \cdots & C_X(0) \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$$

由于正态随机过程的N维概率密度完全由$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{C}$确定,当$X(t)$为广义平稳随机过程时,

$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{C}$不随时间轴的平移而变化,故$X(t)$也是严格平稳的。

因此,对于正态随机过程而言,广义平稳和严格平稳是等价的。

如果$X(t)$在不同时刻状态不相关,即

$\mathrm{Cov}[X(t_i),X(t_j)]=\begin{cases}\sigma^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,N)$ 这时$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_N)$是相互独立的。

如果$X(t)$在不同时刻状态不相关，即

$$\operatorname{Cov}[X(t_i),X(t_j)]=\begin{cases}\sigma^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,N)$$ 这时$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_N)$是相互独立的。

若平稳正态过程具有均匀的功率频谱密度，则称此过程为**平稳正态白噪声**。假定$X(t)$是零均值、方差为σ^2的平稳正态白噪声。

根据白噪声的特性，其相关函数为$R_X(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$其中$N_0$为常数。

因此，对于任意两个不同的时刻t_i,t_k, $X(t_i)$与$X(t_k)$是不相关的，对于正态随机变量而言，不相关即等于独立，所以，$X(t)$的N维概率密度为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_N,t_1,t_2,\cdots,t_N)=\prod_{i=1}^{N}f_x(x_i,t_i)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right]$$

最后需要指出，在实际应用中常会遇到平稳正态噪声$N(t)$与确定性信号$S(t)$之和的随机过程$X(t)$，即

$$X(t)=W(t)+S(t)$$

设$W(t)$的均值为零，方差为σ^2，则$X(t)$的一维概率密度为

$$f_X(x,t)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{[x-S(t)^2]}{2\sigma^2}\right\}$$

从上式可以看出，$X(t)$仍为正态过程，但此时一维概率密度依赖于时间t。因此一般平稳正态噪声与信号之和是非平稳的正态过程。

例： 设平稳正态随机过程的均值为0，自相关函数为$R_X(\tau)=\dfrac{\sin(\pi\tau)}{(\pi\tau)}$。

求$t_1=0,t_2=1/2,t_3=1$时的三维概率密度。

解： $X(t)$的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C(0) & C(t_1-t_2) & C(t_1-t_3) \\ C(t_2-t_1) & C(0) & C(t_2-t_3) \\ C(t_3-t_1) & C(t_3-t_2) & C(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \sin(\pi/2)/(\pi/2) & \sin\pi/\pi \\ \sin(\pi/2)/(\pi/2) & 1 & \sin(\pi/2)/(\pi/2) \\ \sin\pi/\pi & \sin(\pi/2)/(\pi/2) & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2/\pi & 0 \\ 2/\pi & 1 & 2/\pi \\ 0 & 2/\pi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} 1 & 2/\pi & 0 \\ 2/\pi & 1 & 2/\pi \\ 0 & 2/\pi & 1 \end{vmatrix}=1-8/\pi^2,\quad \boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{\pi^2-8}\begin{bmatrix} \pi^2-4 & -2\pi & 4 \\ -2\pi & \pi^2 & -2\pi \\ 4 & -2\pi & \pi^2-4 \end{bmatrix}$$

令$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，则三维概率密度为

$$f_X(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\det^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{C})}\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\right]=\frac{1}{2\sqrt{2\pi(\pi^2-8)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(\pi^2-8)}[(\pi^2-4)(x_1^2+x_3^2)+\right.$$

$$\left.\pi^2x_2^2-4\pi(x_1x_2+x_2x_3)+8x_1x_3]\right\}$$