随机过程及应用

Stochastic Processes with its Applications

电子科技大学　数学科学学院

武德安

第三章 二阶矩过程的均方微积分

§3.1 收敛性与极限定理

§3.2 二阶矩随机变量空间及均方极限

§3.3 随机过程的均方极限与均方连续

§3.4 随机过程的均方导数

§3.5 随机过程的均方积分

导入：

(1) 随机过程的性质完全由其分布函数族决定，但是现实中很难确定其分布函数族.

(2) 正态过程的有限维分布可以由其一二阶矩完全决定.

(3) 很实际问题可以通过对其一二阶矩的讨论就足以了解其统计特征.

§4.2 二阶矩随机变量空间及均方极限

均方微积分应用实例一数学模型:

Black − Scholes期权定价公式1997年的诺贝尔经济学奖获得者，美国学者：

RobertC.Merton；Myron.Scholes以及FisherBlack(1938 − 1995)

创建的了著名的Black − Scholes理论.

Black − Scholes在股票价格的变化是一种几何布朗运动的假定下，从机理上

导出一个随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

μ 一股价的期望收益率，

σ 一股价收益率的波动率；

W_t 一标准布朗运动，表示了对股票收益率的随机干扰作用.

由此得到期权价格作为时间和股价的函数所满足的抛物型方程及显示解，

称为$\mathrm{Black-Scholes}$公式。

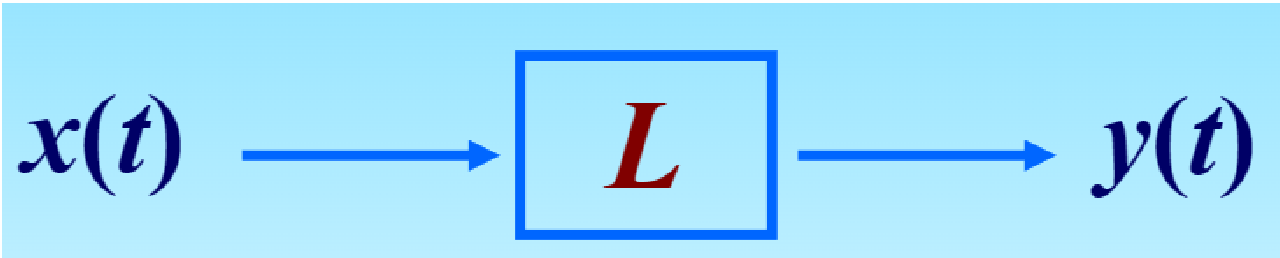
由Merton进一步完善和系统化，创建了$\mathrm{Black-Scholes}$理论.

被誉为“华尔街第二次革命”；人类有史以来使用最频繁的数学工具；

奠定了研究新型衍生证券设计的新学科—金融工程的基础.

均方微积分应用实例二

考虑一个时不变系统



对任意常数τ,输入和输出满足$y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$

若L是**积分算子**,则 $$y(t)=\int_0^T x(t)\,dt$$

若L是**微分算子**,则 $$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

对于随机输入信号$X(t)$如何进行微积分运算?

一、二阶矩随机变量空间H

本章着重介绍二阶矩过程的随机分析—**均方意义下的微积分**.

普通微积分学中的微分、积分、连续等概念都是建立在极限的基础上,

而极限定义又取决于实数(复数)域上点间距离的定义.

为定义关于随机变量的距离以及极限概念,引进

定义4.2.1 称定义在概率空间(Ω,F,P)上的具有有限二阶矩的随机变量

的全体组成的集合

$$H=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{E}[|\boldsymbol{X}|^2]<+\infty\}$$

完备的赋范线性空间

为**二阶矩随机变量空间**.

注: 在H中称X与Y相等,若 $P\{X=Y\}=1$ (记为 $X=Y$, a.e.)

Eg.1：余弦波过程$X(t)=A\cos(\omega t+\theta),t\geq 0$.振幅$A$与角频率$\omega$取常数，相位$\theta\sim U(-\pi,+\pi)$

因 $E|X(t)|^2=\int_{-\pi}^{+\pi}A^2\cos^2(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta\leq A^2,\forall t\geq 0,$

故$X(t)$是一个二阶矩过程。且$E\{X(t)\}=\int_{-\pi}^{+\pi}A\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0,$

$$R(s,t)=E[X(t)X(s)]=\int_{-\pi}^{+\pi}A^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega s+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega(s-t)=\frac{1}{2}A^2\cos\omega\tau;\ (\tau=s-t)$$

理解本章思路地图

目的: 在二阶矩随机过程构成的空间$\mathcal{H}$上将数学分析的工具微积分移植过来!

方法: ① $\mathcal{H}$是线性空间 $\Rightarrow$ 定义$\mathcal{H}$上的范数($Norm$)

$\Rightarrow$ ② 定义$\mathcal{H}$上的距离(distance)

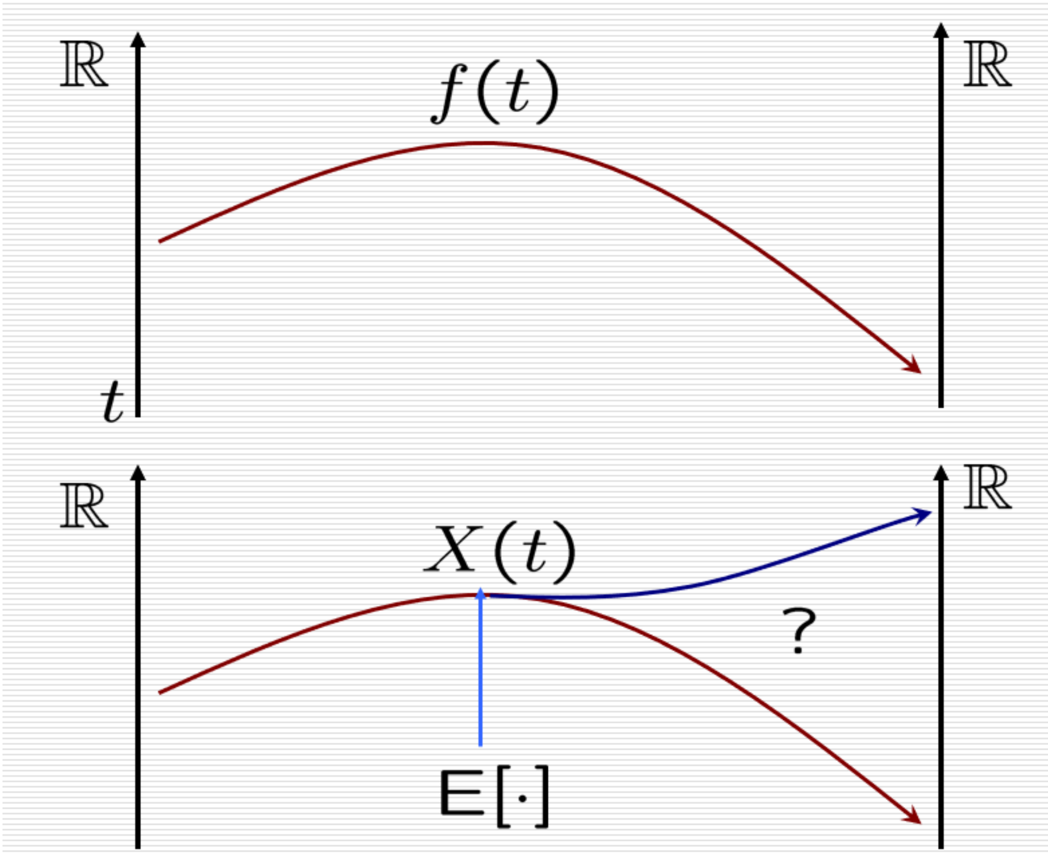
$\Rightarrow$ ③ 考查$\mathcal{H}$上随机序列的收敛性，和唯一性

$\Rightarrow$ ④ 考查$\mathcal{H}$上随机过程的极限和连续性

$\Rightarrow$ ⑤ 定义$\mathcal{H}$上随机过程的微分

$\Rightarrow$ ⑥ 定义$\mathcal{H}$上随机过程的积分类比微积分建立的过程

移植微积分的思路



定理4.2.1 H为线性空间,即设$X,Y\in H$,则对任意复数a,b,

有$aX+bY\in H.$

$\mathcal{H}$ **的线性性**

$\mathcal{H}$ **构成一个线性赋范空间**

证: 由许瓦兹不等式

$$\{E[|XY|]\}^2\le E[|X|^2]\cdot E[|Y|^2]<\infty$$

$$\begin{aligned}E[|aX+bY|^2]&=|a|^2E[|X|^2]+2|a|\cdot|b|E[|X\overline{Y}|]+|b|^2E[|Y|^2]\\&\le|a|^2E[|X|^2]+2|a|\cdot|b|\sqrt{E[|X|^2]}\sqrt{E[|Y|^2]}+|b|^2E[|Y|^2]\\&<\infty\end{aligned}$$

即有$aX+bY\in H.$

引理4.2.1 对$X\in H$,令$\| X \| = [E(|X|^2)]^{\frac{1}{2}}$

$\mathcal{H}$ **构成一个线性赋范空间**

1) $\forall X,Y\in H, |E(XY)| \le E(|XY) \le \| X \| \cdot \| Y \|$;

2) $\forall X\in H, \quad |E(X)| \le E(|X|) \le \| X \|$.

证: $\mathrm{Cauchy-Schwarz}$不等式, $\{E[X\overline{Y}]\}^2 \le E[|X|^2]\cdot E[|Y|^2] < \infty$

由许瓦兹不等式证得(1),在(1)中取$Y=1$得(2)

引理4.2.2 如上定义的$\|\cdot\|$是范数,即有

1) 正定性: $\forall X\in H,\ \|X\|\geq 0$,且$\|X\|=0\Leftrightarrow P\{X=0\}=1$

2) 齐次性: $\forall a\in C,\forall X\in H,\ \|aX\|=|a|\cdot\|X\|$;

$\|$ X $\|$ 是$\mathcal{H}$的范数

3) 三角不等式: $\forall X,Y\in H,\ \|X+Y\|\leq\|X\|+\|Y\|$.

证: (1)和(2)显然. (3)

$$\boxed{\|X\|=[E(|X|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}\|X+Y\|^2&=E[|X+Y|^2]\\&\leq E[|X|^2]+2E[|XY|]+E[|Y|^2]\\&\leq\|X\|^2+2\|X\|\cdot\|Y\|+\|Y\|^2=\|X\|+\|Y|^2\end{aligned}$$

结论H构成一个线性赋范空间.

定义在 $\mathcal{H}$ 上的距离 $d(X,Y)$

定理4.2.2 对任意$X,Y\in H$,令$d(X,Y)\triangleq\|X-Y\|$则$d(X,Y)$是H中的距离.

即对任意$X,Y,Z\in H$,有

1) **非负性** $d(X,Y)\geq 0, X=Y(a.e)\Longleftrightarrow d(X,Y)=0;$

2) **对称性** $d(X,Y)=d(Y,X);$

3) **三角不等式** $d(X,Z)\leq d(X,Y)+d(Y,Z).$

将H构成一个距离空间

二、随机变量序列的均方极限

定义4.2.2 设$X_n, X \in H, n=1,2,\dots$,如果

$$\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0, \ (*)$$

根据$\mathcal{H}$中距离的定义有

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(X, X_n) = \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0.$$

称X_n**均方收敛**于X,记为$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$

注1: 按H中距离定义知$(*) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0$;

注2: 均方极限具有唯一性,即若$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$和$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = Y$

同时成立,则$X = Y \quad (a.e.)$

$$\because \quad d(X,Y) \le d(X_n, X) + d(X_n, Y) \to 0 \quad (\text{as } n \to \infty)$$

$$\therefore \quad d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E\{|X-Y|^2\} = 0 \Rightarrow P\{X = Y\} = 1$$

定理4.2.3(Cauchy 柯西均方收敛准则) H中随机变量序列$\{X_n\}$均方收敛的充要条件为 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|X_m - X_n\| = 0$

二重极限 称$\{X_n\}$为均方收敛基本列(柯西列).

此定理称为**完备性定理**,说明**H是完备的线性赋范空间**.

证: 仅证必要性基本列(柯西列).若 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$,

因 $$\|X_m - X_n\| \le ||X_m - X|| + ||X_n - X||$$

$$\Rightarrow \lim_{m,n\to\infty} ||X_m - X_n\| = 0$$

Eg.1 相互独立随机变量序列 $X_n \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{n^2} & 1-\frac{1}{n^2} \end{bmatrix} \quad n=1,2,\cdots$

$$E[|X_n|^2]=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1<\infty, X_n\in H, \quad n=1,2,\cdots$$

由于 $\|X_m-X_n\|^2=E(X_m^2-2X_mX_n+X_n^2)$

$$=1-2\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}+1=2\left(1-\frac{1}{mn}\right)\xrightarrow{m,n\to\infty}2$$

故 $\{X_n\}$ 不均方收敛.

Eg. 2 设$\{X_n\}$是相互独立同分布随机变量序列,均值为μ,方差为1,

定义$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$证明$Y_n$均方收敛于$\mu$.

证: $\|Y_n-\mu\|^2=E[|Y_n-\mu|^2]=E\left[(Y_n-\mu)\overline{(Y_n-\mu)}\right]$

$$=E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right)\overline{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\left[(X_i-\mu)\left(\overline{X_k}-\bar{\mu}\right)\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Cov}\,(X_i,X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\,(X_k)=\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\|Y_n-\mu\|^2=0.\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}Y_n=\mu.$$

一. 均方极限的性质

性质 1： 均方极限是唯一的,即若 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} X_n = X$ and $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} X_n = Y \Longrightarrow \mathrm{P}\{X=Y\}=1.$

证明: (1)均方极限具有唯一性,即

若$\text{li.im}_{n\to\infty} X_n = X$和 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ X_n = Y$同时成立,则$X=Y\,(a.e.)$

$$\because \quad d(X,Y)\le d(X_n,X)+d(X_n,Y)\to 0 \quad (\text{ as } n\to\infty)$$

$$\therefore \quad d(X,Y)=0 \Leftrightarrow E\{|X-Y|^2\}=0 \Rightarrow P\{X=Y\}=1$$

性质2：极限与数学期望的次序

若$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}[\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, X_n] = \mathrm{E}[X]$.

证明：见旧课本p. 160 .

性质3：均方极限的数字特征

若 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ X_n = X,\ \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ Y_n = Y$则

(1) $\lim\limits_{m\to\infty;n\to\infty} \mathrm{E}[X_m Y_n] = \mathrm{E}[XY],\ \lim\limits_{m\to\infty;\ n\to\infty} \mathrm{E}[X_m X_n] = \mathrm{E}[X^2]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}(X_n) = \mathrm{D}\left(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ X_n\right) = D(X).$

(3) $\mathrm{E}\left[\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ e^{itX_n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}[e^{itX_n}] = \mathrm{E}[e^{itX}].$

证: 1)仅证实随机变量的情形

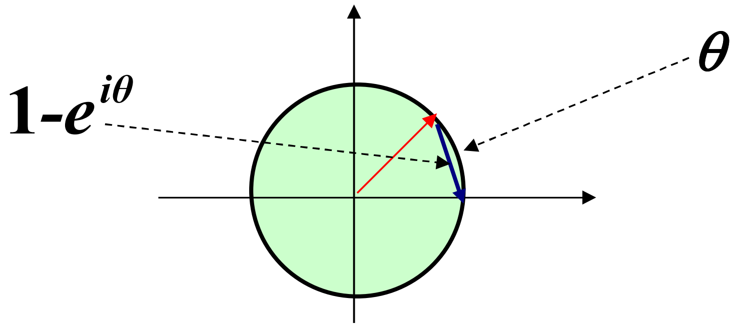
$$
\begin{aligned}
|E[X_m Y_n] - E(XY)| &= |E(X_m Y_n - XY)| \\
&= |E[X_m Y_n - X_m Y + X_m Y - XY_n + XY_n - XY + XY - XY]| \\
&\le E|(X_m - X)(Y_n - Y)| + E|X(Y_n - Y)| + E|(X_m - X)Y| \\
&\le \|X_m - X\| \cdot \|Y_n - Y\| + \|X\| \cdot \|Y_n - Y\| + \|X_m - X\| \cdot \|Y\|
\end{aligned}
$$

因$X, Y \in H$, $\|X\| < \infty$, $\|Y\| < \infty$,令$m, n \to \infty$, 1)得证.

(2) 在1) 与性质2可证(2).

(3) $$\left|E(e^{itX_n})-E(e^{itX})\right|=\left|E(e^{itX_n}-e^{itX})\right|$$
$$=\left|E\left[e^{itX}\left(1-e^{it(X_n-X)}\right)\right]\right|$$
$$\le E\left[\left|1-e^{it(X_n-X)}\right|\right]\le E\left[\left|t(X_n-X)\right|\right]\le|t|\cdot\|X_n-X\|\underset{as}{\to}\mathbf{0}$$

注: 随机变量序列$\{X_n\}$均方收敛,其相应的数学期望数列,方差数列及特征函数列也收敛



三、随机变量序列的均方极限性质

性质 4：均方极限的线性性质

定理3.2.4 设$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}_n} X_n = X$,且$\text{l.i.m}_{n\to\infty} Y_n = Y, a, b$

是复常数,则 $$\lim_{n\to\infty}(aX_n + bY_n) = aX + bY;$$

证： $$\|(aX_n + bY_n) - (aX + bY)\| = \|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)\|$$

$$\le |a|\cdot\|X_n - X\| + |b|\cdot\|Y_n - Y\| \underset{\text{as }n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

三、随机变量序列的均方极限性质

性质5：与极限为0数列的积

设$\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$为普通数列，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,[a_n X] = 0$.

性质6：Loève收敛准则(Loève′s criterion)

随机变量序列$\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{H}$均方收敛的必要条件是$\lim\limits_{m\to\infty} E[X_n X_m]$存在.

将随机变量序列的收敛性问题转化为自相关函数的

性质7：均方收敛与概率收敛的关系

均方极限必依概率收敛，即$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} X_n \xrightarrow{P} X$

性质6：Loève收敛准则(Loève′s criterion)

定理4.2.6(Loève洛易夫均方收敛判别准则) 随机变量序列$\{X_n\}\in H$均方收敛的充分必要条件是极限$\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_m\overline{X_n}\right)$存在.

将随机变量序列的均方收敛性转化为自相关函数的收敛性问题.

证： 必要性由定理4.2.5之1)即得.充分性

设 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_m\overline{X_n}\right)=c,$

由 $\|X_m-X_n\|^2=E(|X_m-X_n|^2)$

$$=E(|X_n|^2)+E(|X_m|^2)-E\left(\overline{X_m}X_n\right)-E\left(X_m\overline{X_n}\right)\underset{as\ n,m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

由柯西均方收敛准则知$\{X_n\}$均方收敛.

定理4.2.5(均方极限的数字特征) 设$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n=X$,且$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}Y_n=Y$,则

1) $\lim\limits_{m,n\to\infty}E\left(X_m\overline{Y_n}\right)=E(X\overline{Y})$; $\boxed{\text{乘积性质}}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)=E\left(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n\right)=E(X)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}E(|X_n|^2)=E\left(|\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n|^2\right)=E(|X|^2)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}D(X_n)=D\left(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n\right)=D(X)$;

5) 若实随机变量$X,X_n\in H$,则$E\left(e^{it\,\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n}\right)=E(e^{itx})=\lim\limits_{n\to\infty}E[e^{itX_n}]$.

证: (1) 仅证实随机变量的情形

$$|E[X_mY_n]-E(XY)|=|E(X_mY_n-XY)|$$

$$=|E[X_mY_n-X_mY-XY_n+XY+X_mY-XY+XY_n-XY]|$$

$$\le E(X_m-X)(Y_n-Y)|+E|X(Y_n-Y)|+E|(X_m-X)Y|$$

$$\le \|X_m-X\|\cdot|Y_n-Y\|+|X\|\cdot|Y_n-Y|+|X_m-X|\cdot\|Y|$$

因$X,Y\in H$, $\|X\|<\infty$, $\|Y\|<\infty$,令$m,n\to\infty$, 1)得证.

(2) 在1) 中令$Y_n\equiv 1$,得2).

(3) 在1) 中令$Y_n\equiv X_n$,得3).

(4) 由1)与2)可证4).

(5) $$|E(e^{jtX_n})-E(e^{itX})|=|E(e^{itX_n}-e^{itX})|=\left|E\left[e^{itX}\left(1-e^{it(X_n-X)}\right)\right]\right|$$

$$\le E[1-e^{it(X_n-X)}]\le E[t(X_n-X)]\le|t|\cdot\|X_n-X\|\xrightarrow{\text{as}\, n\to\infty} 0$$

注: 随机变量序列$\{X_n\}$**均方收敛**,其相应的数学期望数列,方差数列及特征函数数列也收敛.

Eg. 4 设$\{X_w, n\geq 1\}$是泊松随机变量序列,证明:该序列的均方极限服从泊松分布.

证: 记$E(X)=\lambda, E(X_n)=\lambda_n$,

因$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E\left(\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} X_n\right)$

性质3之1 $= E(X)$;

即$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$,

设$\varphi_n(u)$和$\varphi(u)$为X_n和X的特征函数，有

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \lim_{n\to\infty} E(e^{iuX_n}) = \lim_{n\to\infty} e^{\lambda_n(e^{iu}-1)}$$

性质3之3 $$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(e^{iu}-1)} = e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \varphi(u)$$

因特征函数与分布函数一一对应,$\varphi(u)$是泊松分布随机变量的特征函数，故X服从泊松分布.

Eg. 3 设$\{X_n, n\geq 1\}\in H$,又$\{a_n, n\geq 1\}$为复数列,试研究随机变量序列

$\left\{Y_n=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k, n\geq 1\right\}$均方收敛的条件.

解: $R_Y(m,n)=E\left(Y_m\overline{Y_n}\right)=E\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}a_k\overline{a_r}X_k\overline{X_r}\right]$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}a_k\overline{a_r}E\left(X_k\overline{X_r}\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}a_k\overline{a_r}R_X(k,r)$$

由均方收敛准则知

$\{Y_n, n\geq 1\}$均方收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty}E\left(Y_m\overline{Y_n}\right)$存在,

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}a_k\overline{a}_rR_X(k,r)\text{收敛.}$$

思考题:

1) 在二阶矩随机变量空间除定义均方极限外，还可以定义其他极限吗?

2) 均方极限与普通函数极限有什么相似之处?