با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

سوال اصلی:

با توجه به منابع محدود در دسترس، چه تعداد صندلی و چه تعداد میز تولید کنیم که به حداکثر سود دست یابیم؟

جمع آوری اطلاعات

- ✓ هر یک صندلی ۴۰ هزار تومان و هر یک میز ۵۰ هزار تومان سود دارد
- ✓ برای تولید محصولات این کارگاه دو منبع مهم مورد نیاز هست، یکی چوب و یکی نیرو انسانی
- ✓ برای ساخت هر صندلی یک نفر ساعت نیروی کار و ۴ کیلوگرم چوب لازم است.
- ✓ برای ساخت هر میز، ۲ نفر ساعت نیروی کار و ۳ کیلوگرم چوب لازم است.
- ✓ میزان چوب در دسترس ۱۲۰ کیلوگرم است و میزان نیروی کار در دسترس ۴۰ نفر ساعت.

این اطلاعات را می توان از مسئول منابع انسانی و مدیریت و گروه تولیدی میتوان جویا شد.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

گام های اصلی مدل سازی

گام اول: متغیر های تصمیم را تعریف کنید

گام دوم: تابع هدف را فرموله کنید

گام سوم: محدودیت های مدل را فرموله کنید

گام اول: متغیر های تصمیم را تعریف کنید

تعداد محصول	نام محصول	منبع اول: نیروی کار(نفر ساعت)	منبع دوم: چوب(کیلوگرم)	سود (هزار تومان)
x_1	صندلی	۱	۴	۴۰
x_2	میز	۲	۳	۵۰
	موجودی	۴۰	۲۰	–

چگونه با منابع موجود حداکثر سود برسیم.

۱- متغییرها روی کالاها در نظر گرفته می شود. میز و صندلی

۲- تابع هدف = حداکثر کردن سود با توجه به سود حاصل از هر کالا در تعداد آن

۳- محدودیت ها رو منابع انسانی و مواد اولیه برای هر کالا باید در نظر گرفته شود.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

پس خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&x_1 \;\; Number \;\; of \;\; chairs \\
&x_2 \;\; Number \;\; of \;\; tables \\
&Objective \;\; Func. \;\; Max \;\; 40x_1 + 50x_2 \\
&Subject \;\; to \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 120 \end{cases} \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Distribution Problem[1]

Ch 7.1: A Distribution Problem

m:	# origins
n:	# destinations
a_i:	supply at ith origin O_i, $1 \le i \le m$
b_j:	demand at jth destination D_j, $1 \le j \le n$
k_{ij}:	capacity, max amount from O_i to D_j
x_{ij}:	amount to be shipped from O_i to D_j

These lead to the constraints:

$$
\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, & (1 \le i \le m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, & (1 \le j \le n) \\ 0 \le x_{ij} \le k_{ij}, & (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \end{cases}
$$

[1] https://www.youtube.com/watch?v=vqmJBCmJQDs&list=PLbxFfU5GKZz2-4Y3YwRFVVDEMlmxYfY6y&index=76

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Remarks:
(a) Note that we must have

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

i.e. total supple is larger or equal to total demand to have possible feasible solutions.
Otherwise the problem is not feasible.

(b) Note that this is NOT an optimization problem.
The goal is to find a feasible solution through an algorithm.

Idea: iterations.
• Start with the first origin $i = 1$, assign x_{1j} within the constraints
• Move on to the next, $i = 2$, adjust and re-arrange as needed ... many details ...

Example 7.1.1: Origins O_i, Destinations D_j. Table for capacity k_{ij}:

	D_1	D_2	D_3	D_4	Origin Supplies a_i
O_1	4	1	5	1	5
O_2	2	2	6	5	7
O_3	5	1	4	0	7
Destination Demands b_j	3	3	9	4	

Notation: a more compact tabular form:

4	1	5	1	5
2	2	6	5	7
5	1	4	0	7
3	3	9	4	

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Ch 7.2: The Transportation Problem

Problem Description:
We ship goods from O_i $(1 \le i \le m)$ to D_j $(1 \le j \le n)$.

a_i: amount of goods to be shipped from O_i, $(i = 1, \cdots, m)$
b_j: amount of goods to be shipped to D_j, $(j = 1, \cdots, n)$
c_{ij}: the cost to ship one unit amount from O_i to D_j
We must have the identity: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$
Variables: x_{ij}: the amount to ship from O_i to D_j

(T): minimize $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ subject to

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

©Wen Shen (Penn State) Math 484, Linear Programming Chapter 7 1 / 4

اول از همه باید شرط برابری را چک کنیم تا ببینیم برقرار است یا نه که برای حل این مسله شرط اصلی می باشد.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Main idea of the primal dual method: Consider the dual problem. Try to find feasible solutions. Many details ...
NB! We only need feasible solution above, not basic feasible solution.

Dual of (T) will have $(m+n)$ unrestricted variables, and mn inequalities with $\leq$.
Define variables: $u_i, i = 1, \cdots, m$ (first m constraints) $v_j, j = 1, \cdots, n$ (last n constraints)

(D): maximize $\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ subject to

$$\begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij}, & i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n \\ u_i, v_j \text{ unrestricted} \end{cases}$$

مثال اول

Example. Consider the transportation problem, with the table for c_{ij} given

	D_1	D_2	D_3	supple
O_1	3	5	7	30
O_2	4	7	11	50
demand	20	25	35	

شرط را چک میکنیم

Note: we check: $30 + 50 = 80 = 20 + 25 + 35$. OK.

شرط برقرار است.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

(T) minimize $(3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13}) + (4x_{21} + 7x_{22} + 11x_{23})$ subject to

$$\begin{cases} (O_1): & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ (O_2): & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \\ (D_1): & x_{11} + x_{21} = 20 \\ (D_2): & x_{12} + x_{22} = 25 \\ (D_3): & x_{13} + x_{23} = 35 \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Form the Dual: from the table

	v_1	v_2	v_3	
u_1	3	5	7	30
u_2	4	7	11	50
	20	25	35	

(D): maximize $30u_1 + 50u_2 + 20v_1 + 25v_2 + 35v_3$ subject to

$$\begin{cases} u_1 + v_1 \leq 3 \\ u_1 + v_2 \leq 5 \\ u_1 + v_3 \leq 7 \\ u_2 + v_1 \leq 4 \\ u_2 + v_2 \leq 7 \\ u_2 + v_3 \leq 11 \\ u_i, v_j: \text{ unrestricted} \end{cases}$$

Solving questions from scratch

Minimum Cost Spanning Tree – Prim

1-all vertices in the original graph should be considered.

نحوه حل سوال هایی که با الگوریتم پرایم Cut-edges باید حل شوند:

۱–نقطه شروع را که خود مسئله به ما می‌دهد را انتخاب می‌کنیم.

۲–کم هزینه ترین مسیر از این نقطه را انتخاب می‌کنیم.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

۳–حال یک شبکه دو نقطه ای داریم با در نظر گرفتن تمامی مسیرها متصل به شبکه, کم هزینه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنیم.

۴–شبکه هر مرحله گسترش میابد با در نظر داشتن عدم تشکیل حلقه مرحله ۳ را ادامه می‌دهیم.

۵–تا جایی ادامه می‌دهیم که تمام نود ها داخل شبکه باشند.

Prim's algorithm

- Input: Connected $G = (N, E)$ with edge costs
- Output: Subset $T \subseteq N$ of edges of G such that $G_T = (N, T)$ is a minimum cost spanning tree of G.

Algorithm 1: Prim's algorithm for the minimum cost spanning tree problem

```
S ← {u}
T ← ∅
while |T| < n − 1 do
    {u, v} ← edge in δ(S) of minimum cost /* u ∈ S and v ∈ N\S */
    S ← S ∪ {v}
    T ← T ∪ {{u, v}}
```

If all edges are scanned at each iteration, the complexity order is: $O(nm)$.

N = # of nodes M= # of edges

نحوه حل پرایم با روش node update

۱–نود شروع را صفر بقیه نودها را بی نهایت در نظر میگیریم.

۲–نود شروع به عنوان اولین نود به داخل Node Set می رود.

۳–از نود ابتدایی با توجه به مسیرهای موجود به نودهای مستقیم هزینه هر کدام را اپدیت میکنیم.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

۴–حال از میان نودها که هزینه آنها مشخص است, نود با کمترین هزینه را همراه با مسیری که هزینه آن آپدیت شده بود را انتخاب میکنیم و آن را به Node Set انتقال میدهیم و دیگر با آن نود کاری نخواهیم داشت.

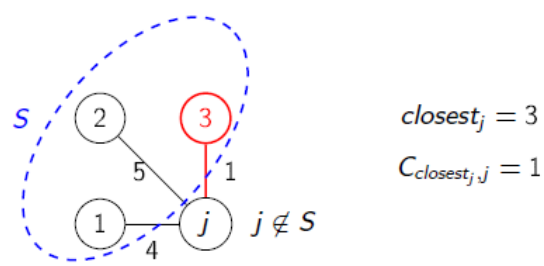
۵–این کار را با در نظر گرفتن تشکیل نشدن حلقه تا اضافه کردن اخرین نود به Node Set ادامه میدهیم.

پیچیدگی این روش نسبت به روش قبلی در صورت بیشتر بودن یال ها نسبت به نود ها کمتر است.

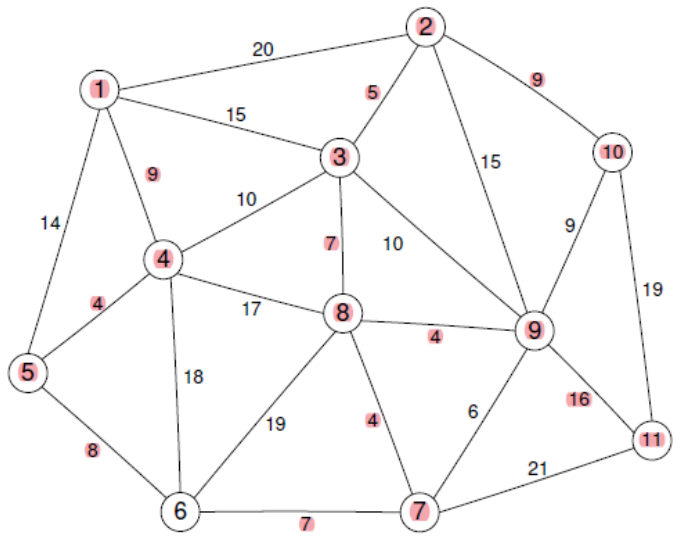
Implementation in $O(n^2)$

Data structure

- k: number of edges selected so far
- Subset $S \subseteq N$ of nodes incident to the selected edges
- Subset $T \subseteq E$ of selected edges
- $C_j = \begin{cases} \min\{c_{ij} : i \in S\}, & j \notin S \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases}$
- $closest_j = \begin{cases} \operatorname{argmin}\{c_{ij} : i \in S\}, & j \notin S \\ \text{“predecessor” of } j \text{ in the minimum spanning tree,} & j \in S \end{cases}$



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



Shortest paths with nonnegative cost

Methods

1- Dijkstra's algorithm O (n^2)

نحوه حل با این الگوریتم به صورت زیر می باشد

۱–نقطه شروع را سوال مشخص می‌کند, برای این نقطه طول مسیر صفر بوده و Prs ندارد و برای بقیه نود ها طول مسیر بینهایت و Prs نامشخص در نظر گرفته می‌شود.

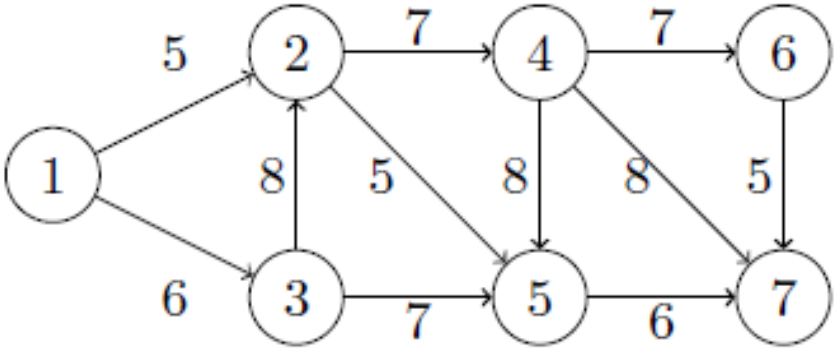
۲–برای نودهایی که مستقیم از این نود به آن ها مسیر باشد نود هایشان را نسبت به مسیر موجود اپدیت کنید.

۳–حال نودی را که کمترین طول را دارد انتخاب میکنیم و بقیه نود های باقیمانده را با توجه به طول تا آن نود حساب میکنیم– یعنی در نود بعدی طول مسیر برابر طول مسیر از نود قبلی به آن نود بعلاوه طول تا نود قبلی خواهد بود.

۴–پروسه را تاجایی ادامه میدهیم که تمام نود ها را انتخاب کرده باشیم.

2-Dynamic programing (for Acyclic graphs which correspond for topological order) O (m)

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

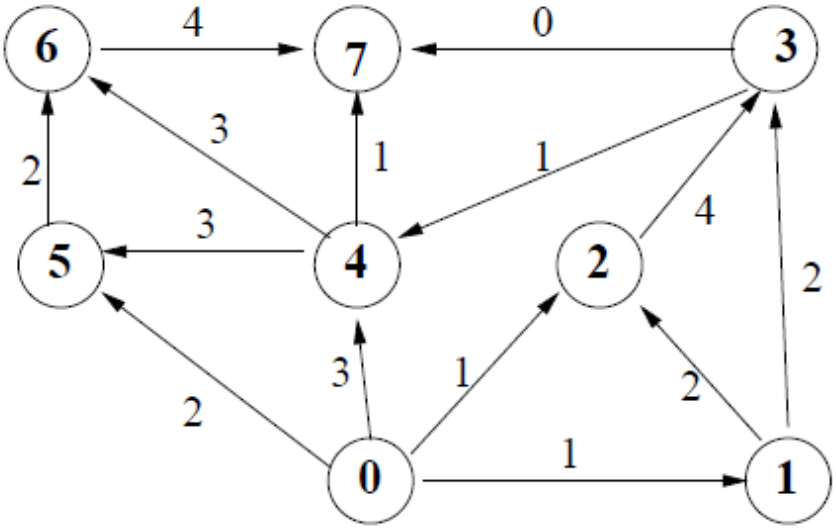


برای این گراف Topological Order به صورت زیر است

1->3->2->4->5->6->7

پس Topological order میتواند پس و پیش باشد و به ترتیب شماره گذاری نود ها نیست. بعد از مشخص شدن توپولوجیکال اردر به ترتیب آنها مسیر ها را می نویسیم.

✓ نوشتن پرنتتت آنها را همیشه از یاد میبرم توجهم باید بیشتر شود.



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

The topological order for the above graph is 0/1/2/3/4/5/6/7

1-The length of the first node is zero if there is no initial value for it.

2-For the next node the length equals to minimum of the sum of the length of the nodes that have direct path towards the certain node plus the length of the path to current node.

3-For the rest of the nodes we do this process based on topological order to reach the last one.

The graph we are dealing with is acyclic, and its node indices already correspond to a topological order. The Dynamic Programming technique can therefore be applied. It has complexity $O(m)$, smaller than that of the Dijkstra algorithm of $O(n^2)$.

- $L(0) = 0$, $p(0) = 0$;
- 0-> $L(1) = L(0) + c_{01} = 1$, $p(1) = 0$;
- 0,1-> $L(2) = \min\{L(0) + c_{02}, L(1) + c_{12}\} = \min\{0 + 1, 1 + 2\} = 1$, $p(2) = 0$;
- 1,2-> $L(3) = \min\{L(1) + c_{13}, L(2) + c_{23}\} = \min\{1 + 2, 1 + 4\} = 3$, $p(3) = 1$;
- 0,3-> $L(4) = \min\{L(0) + c_{04}, L(3) + c_{34}\} = \min\{0 + 3, 3 + 1\} = 3$, $p(4) = 0$;
- 0,4-> $L(5) = \min\{L(0) + c_{05}, L(4) + c_{45}\} = \min\{0 + 2, 3 + 3\} = 2$, $p(5) = 0$;

Algorithm	Graphe Type	Complexity
prim	Undirected + Non-negative Cost	n*n
Dynamic Programing	Undirected + Non-negative Cost	m
Dijkstra	Directed + Non-negative Cost	n*n
Floyd Warshall	Directed + Negative Cost	n*n*n

- 4,5-> $L(6) = \min\{L(4) + c_{46}, L(5) + c_{56}\} = \min\{3 + 3, 2 + 2\} = 4$, $p(6) = 5$;
- 3,4,6-> $L(7) = \min\{L(3) + c_{37}, L(4) + c_{47}, L(6) + c_{67}\} = \min\{3 + 0, 3 + 1, 4 + 4\} = 3$, $p(7) = 3$.

P(1)→ predecessor (1)

Shortest paths with negative costs and ill-posedness

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

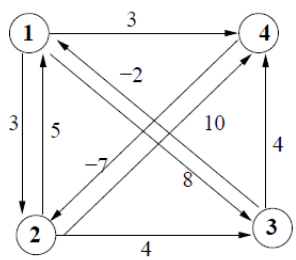
Because of negative costs we should use Floyd-Warshall's algorithm $O(n^3)$ and solve the problem or show that the problem is ill-posed.

2.6 Shortest paths with negative costs and ill-posedness

Since the graph contains negative arc costs, we use Floyd-Warshall's algorithm that finds a shortest path between each pair of nodes, or establishes that the problem is ill-posed by exhibiting a circuit of negative cost. The graph can contain cycles, but such cycles must be of nonnegative cost. It has complexity $O(n^3)$, where n is the number of nodes in the graph.

2.6 Shortest paths with negative costs and ill-posedness

Given the following directed graph, find the shortest paths between all pairs of nodes, or show that the problem is ill-posed by exhibiting a circuit of total negative cost.



Find $P^1P^2P^3P^4$ and $D^1D^2D^3D^4$ in each one k-th column and k-th row shoud be considered the same as the previous one.

In each step we should calculate C_{ij} and compare it with d_{ij}, the smallest one should be put in the ij place

$$New\ d_{ij} = \min\{C_{ij} = d_{ik} + d_{kj}, d_{ij}\}$$

Step1: $D^{(k=0)}$ and $P^{(k=0)}$

^{0}	1	2	3	4
1	0	3	8	3
2	5	0	4	10
3	−2	∞	0	4
4	∞	−7	∞	0

$\mathcal{P}^0$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

^{1}	1	2	3	4
1	0	3	8	3
2	5	0	4	8
3	–2	1	0	1
4	∞	–7	∞	0

$\mathcal{P}^1$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	1
3	3	1	3	3
4	4	4	4	4

0	3	8	3
5	min(0,3+5)	min(4,5+8)	min(10,5+3)
-2	min(inf,-2+3)	min(0,-2+8)	min(4,-2+3)
inf	min(-7,inf+3)	min(inf,inf)	min(0,inf)

^{2}	1	2	3	4
1	0	3	7	3
2	5	0	4	8
3	–2	1	0	1
4	–2	–7	–3	0

$\mathcal{P}^2$	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	2	1	2	1
3	3	3	3	3
4	2	4	2	4

Min(0,3+5)	3	Min(8,3+4)	Min(3,11)
5	0	4	8
Min(-2,5+1)	1	Min(0,5)	Min(1,9)
Min(Inf,5-7)	-7	Min(Inf,4-7)	Min(0,9-7)

^{3}	1	2	3	4
1	0	3	7	3
2	5	0	4	8
3	–2	1	0	1
4	–2	–7	–3	0

$\mathcal{P}^3$	1	2	3	4
1	1	1	2	1
2	3	1	2	3
3	3	3	3	3
4	3	4	2	3

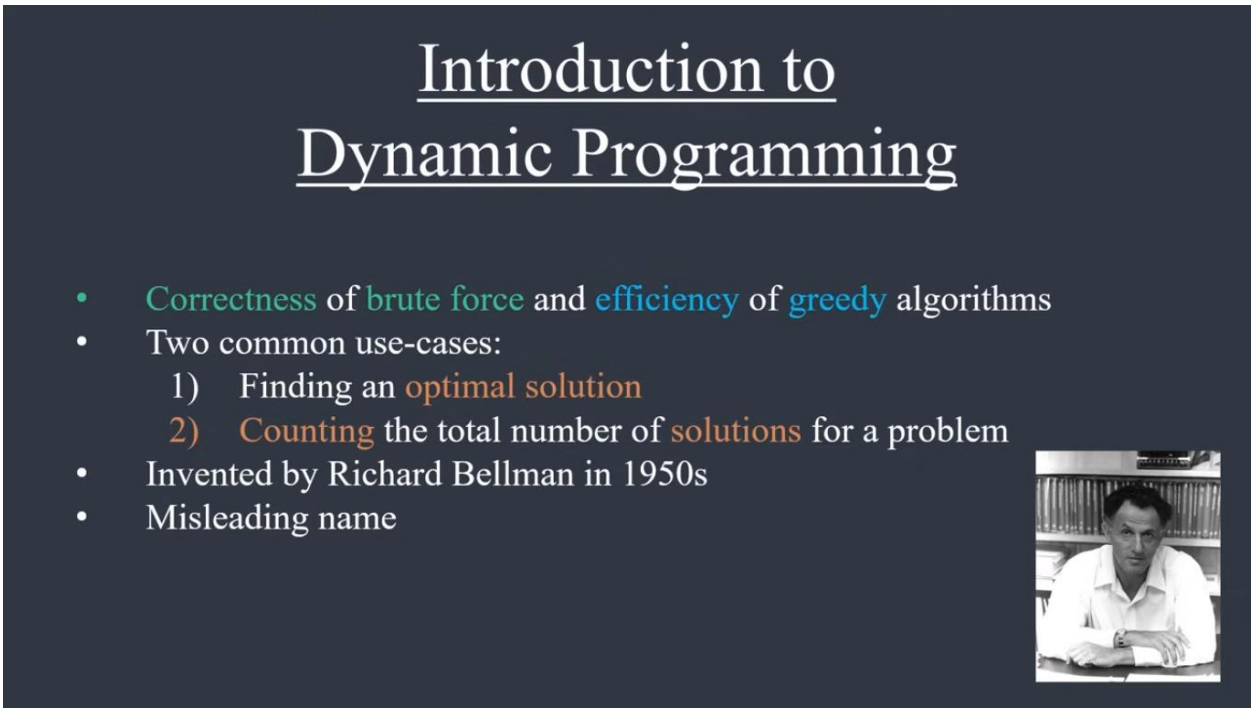
Min(0,7-2)	Min(3,7+1)	7	Min(3,7+1)
Min(5,4-2)	Min(0,4+1)	4	Min(8,4+1)
-2	1	0	1
Min(-2,-3-2)	Min(-7,1-3)	-3	Min(0,1-3)

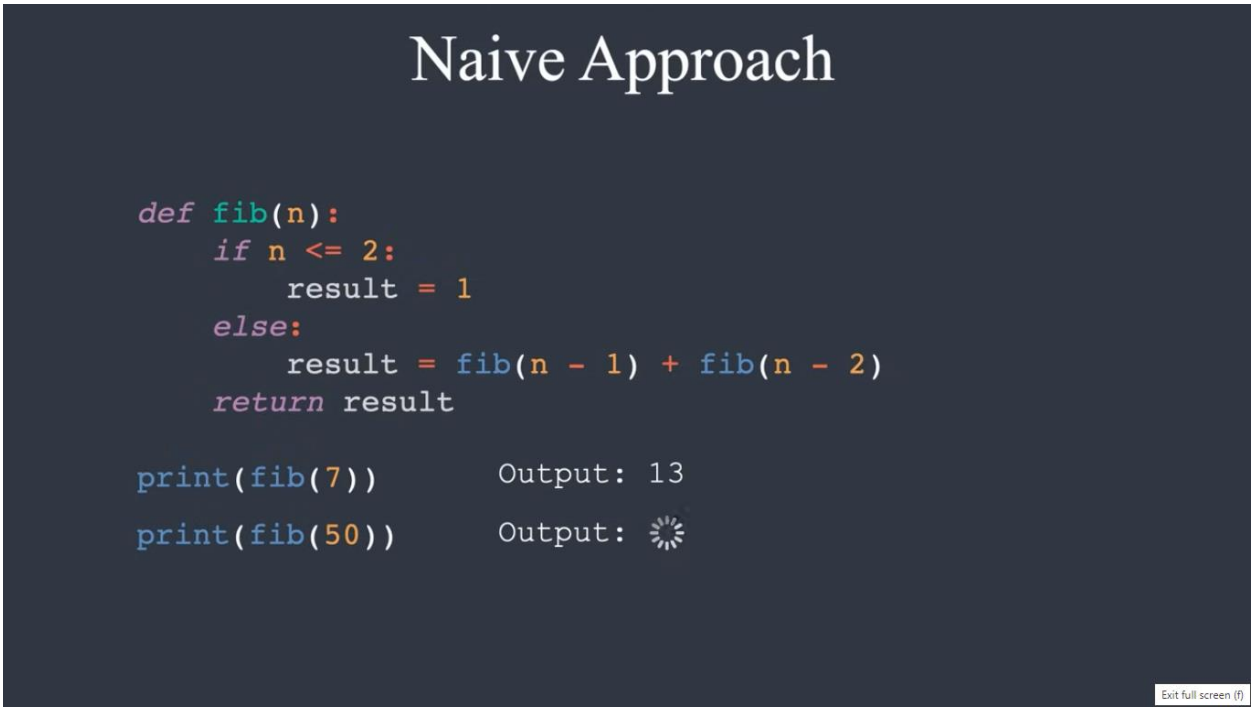
We obtain $d_{44} = -2 < 0$ and the algorithm halts: we found a circuit with a total negative cost of -2, $\langle (4,2),(2,3),(3,1),(1,4) \rangle$

- اگر در روش حل با روش Floyd warshall عدد منفی در هر مرحله از انجام آن روی قطر اصلی ظاهر شود آن مسله قابل حل نیست و کار تمام است.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

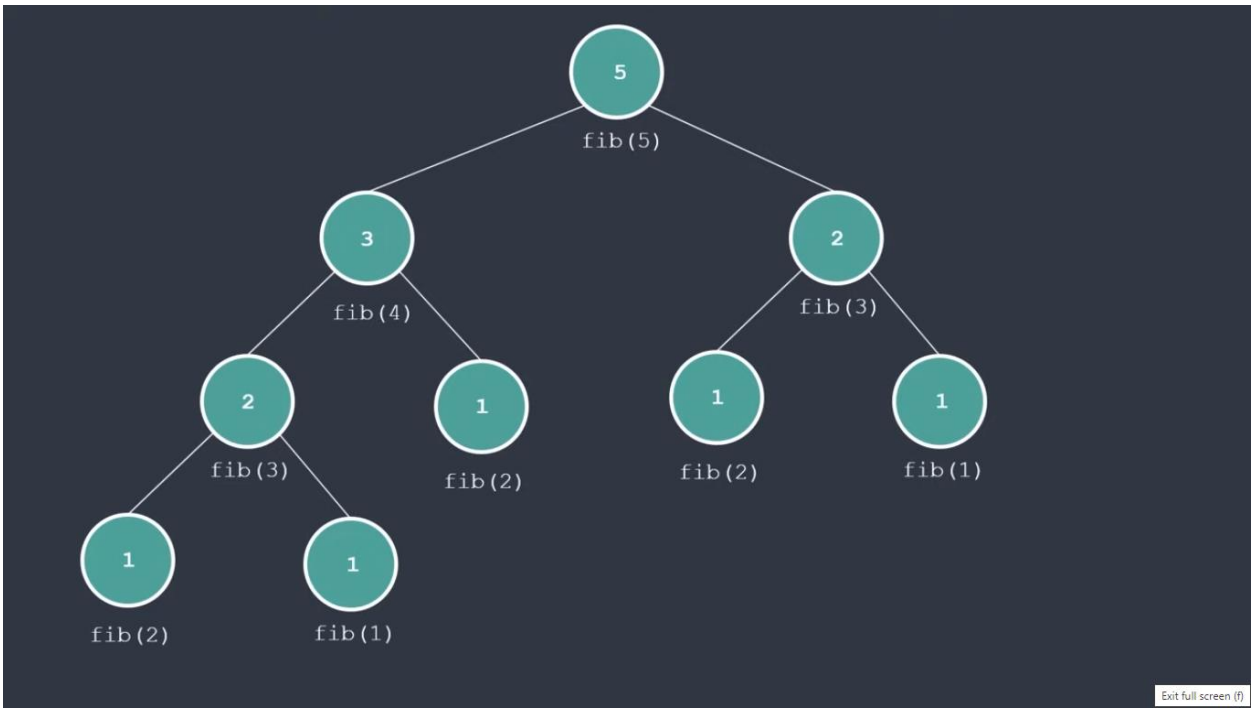
Introduction to DP[2]

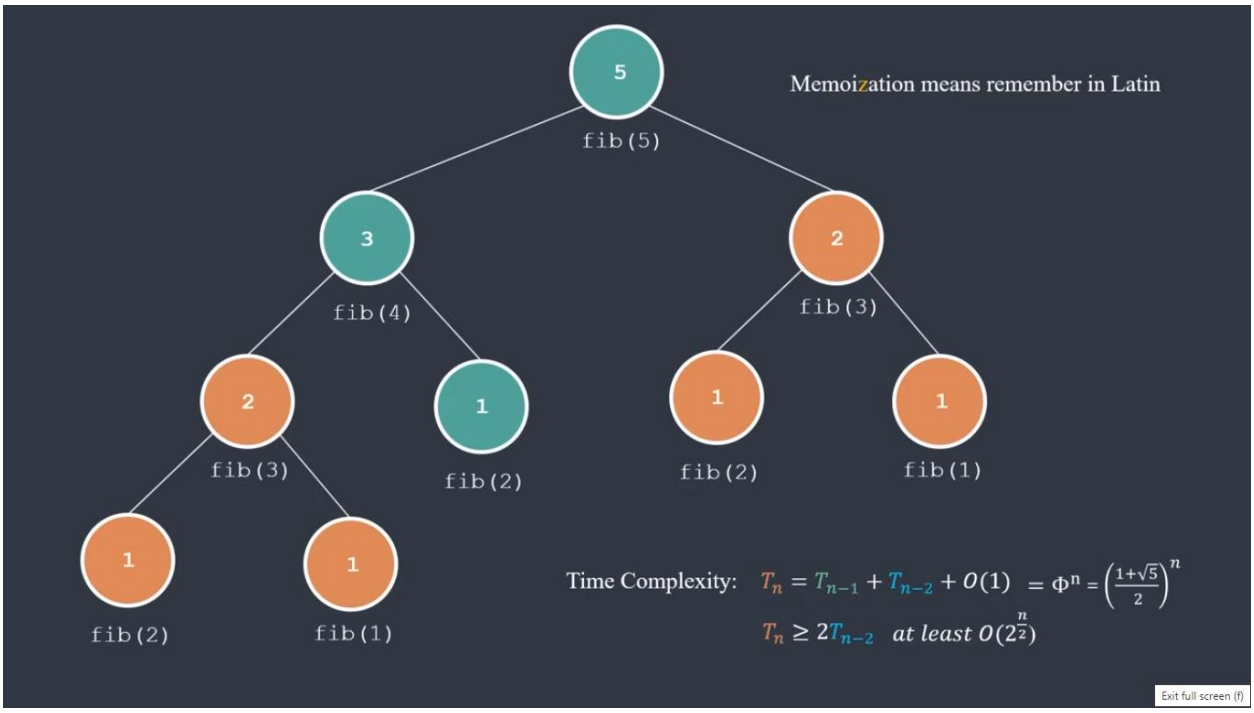




[2] https://www.youtube.com/watch?v=Hdr64lKQ3e4

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.





با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

```
memo = {}

def fib(n):
    if n in memo:
        return memo[n]

    if n <= 2:
        result = 1
    else:
        result = fib(n - 1) + fib(n - 2)

    memo[n] = result
    return result

print(fib(7))        Output: 13
print(fib(50))       Output: 12586269025
```

DP = Recursion + Memoization

Exit full screen (f)

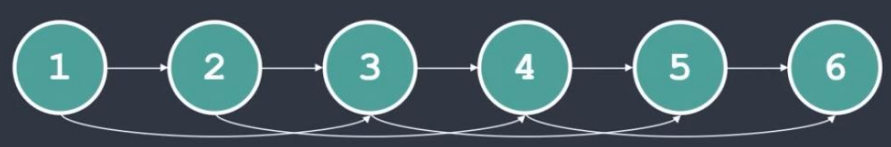
با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Bottom-up Approach

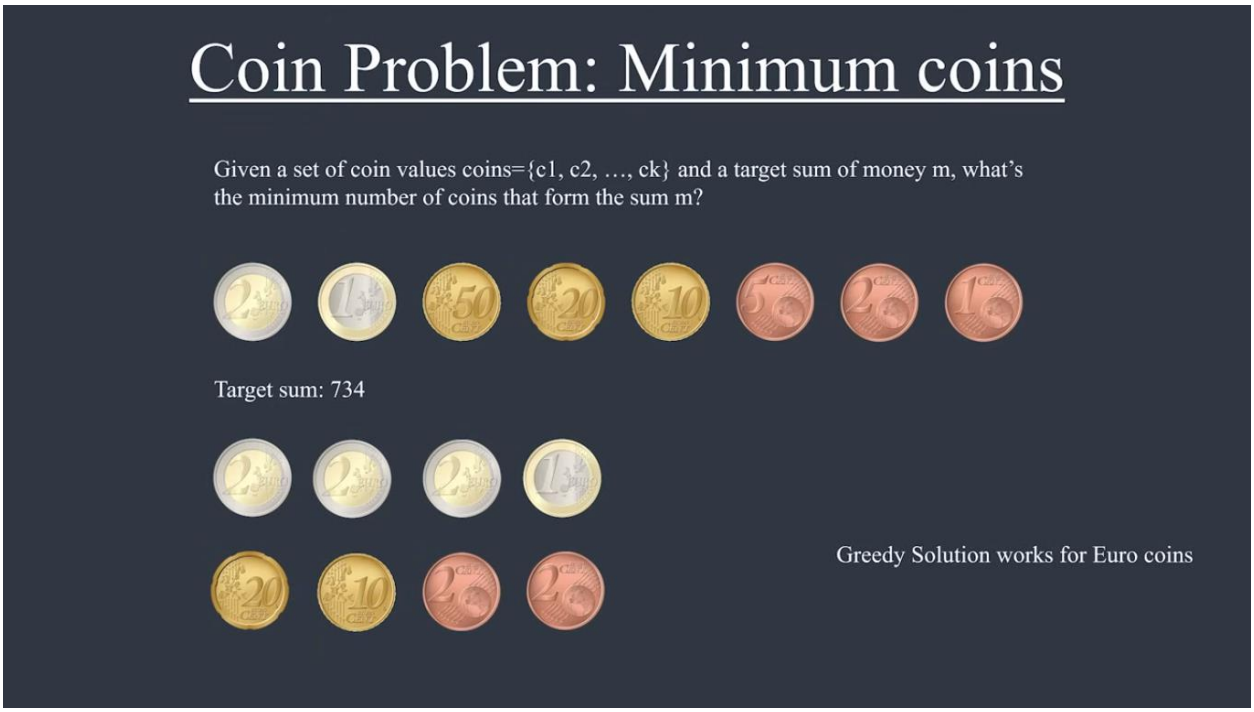
```
def fib(n):
    memo = {}

    for i in range(1, n + 1):
        if i <= 2:
            result = 1
        else:
            result = memo[i - 1] + memo[i - 2]

        memo[i] = result

    return memo[n]
```

Computing sub problems – it allows us to save memory and time

Topological sort order



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



Greedy approach=choosing the biggest amount of the biggest coin

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Coin Problem: Minimum coins

Given a set of coin values coins={c1, c2, …, ck} and a target sum of money m, what's the minimum number of coins that form the sum m?

Coins: {1, 4, 5}

Target sum: 13

Greedy: 5 coins (5+5+1+1+1)

Optimal: 3 coins (4+4+5)

Remaining Sum	Chosen Coin
13	5
8	5
3	1
2	1
1	1
0	

```python
def min_ignore_none(a, b):
    if a is None:
        return b
    if b is None:
        return a
    return min(a, b)

def minimum_coins(m, coins):
    if m == 0:
        answer = 0
    else:
        answer = None
        for coin in coins:
            subproblem = m - coin
            if subproblem < 0:
                # Skip solutions where we try to reach [m]
                # from a negative subproblem.
                continue
            answer = min_ignore_none(
                        answer,
                        minimum_coins(subproblem, coins) + 1)
    return answer
```

```python
print(minimum_coins(13, [1, 4, 5]))
```

Output: 3

```python
print(minimum_coins(150, [1, 4, 5]))
```

Output:

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Mem tech.

```python
memo = {}

def minimum_coins(m, coins):
    if m in memo:
        return memo[m]

    if m == 0:
        answer = 0
    else:
        answer = None
        for coin in coins:
            subproblem = m - coin
            if subproblem < 0:
                # Skip solutions where we try to reach [m]
                # from a negative subproblem.
                continue
            answer = min_ignore_none(
                        answer,
                        minimum_coins(subproblem, coins) + 1)
    memo[m] = answer
    return answer
```

```python
print(minimum_coins(13, [1, 4, 5]))
Output: 3

print(minimum_coins(150, [1, 4, 5]))
Output: 30
```

```python
def minimum_coins(m, coins):
    memo = {}

    memo[0] = 0
    for i in range(1, m + 1):
        for coin in coins:
            subproblem = i - coin
            if subproblem < 0:
                continue

            memo[i] = min_ignore_none(memo.get(i), memo.get(subproblem) + 1)

    return memo[m]
```

Exit full screen (f)

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Coin Problem: How many ways

Given a set of coin values coins={c1, c2, …, ck} and a target sum of money m, in how many ways can we form the sum m using these coins?

Coins: {1, 4, 5}

Target sum: 5

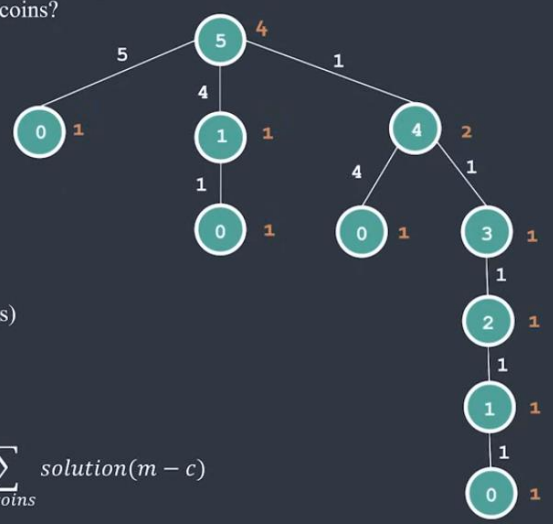
There are 4 ways in total:

1+1+1+1+1

1+4

4+1 (order in which we choose coins matters)

5



$$solution(0) = 1$$

$$solution(m) = \sum_{c \in coins} solution(m - c)$$

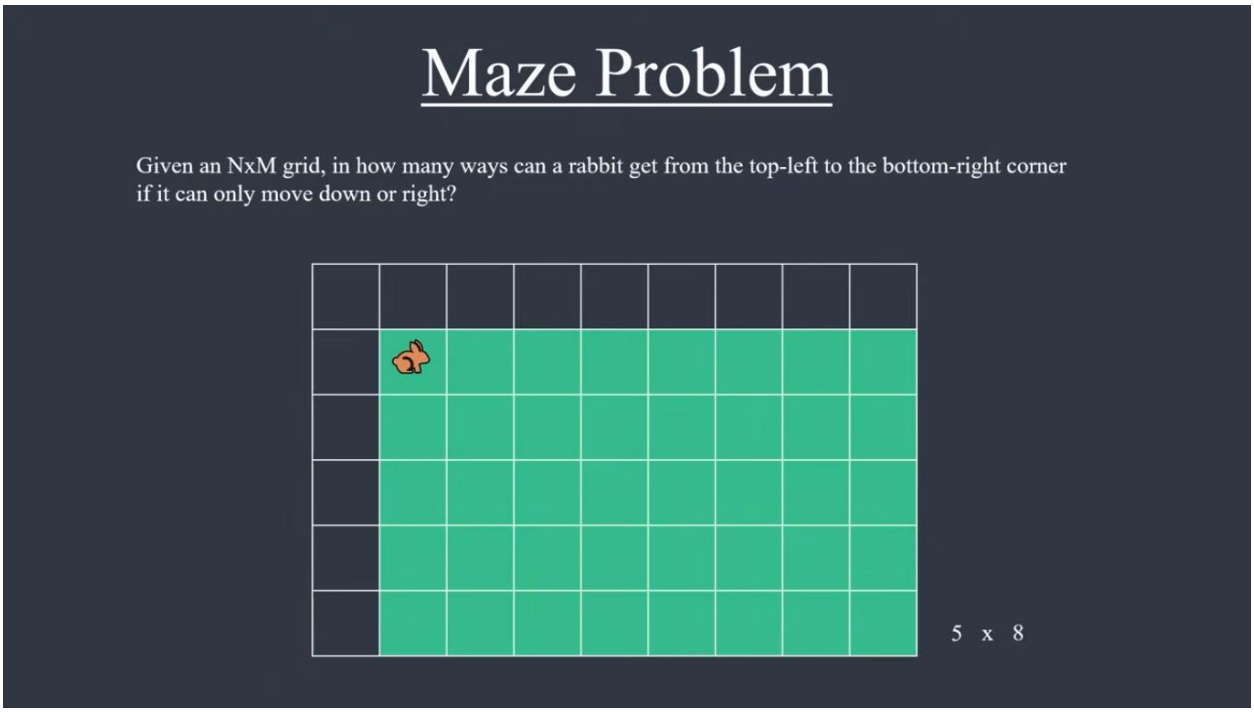
Buttom up solution

Coin Problem: How many ways

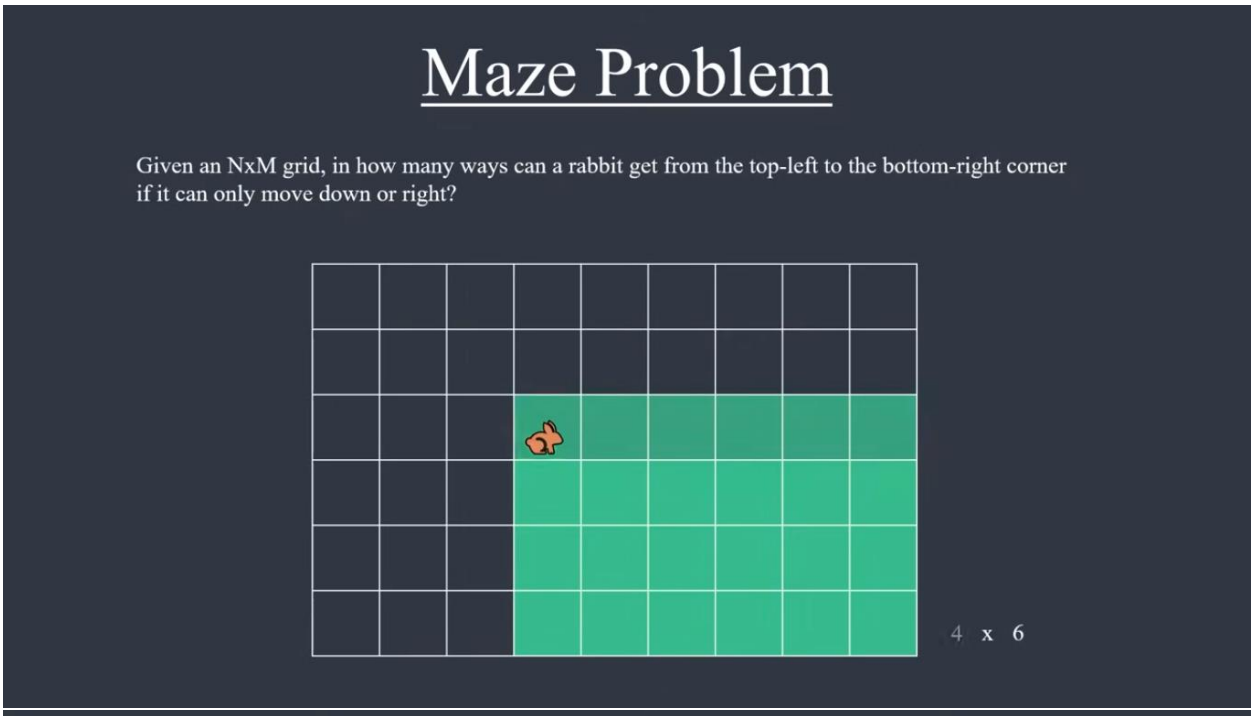
Given a set of coin values coins={c1, c2, …, ck} and a target sum of money m, in how many ways can we form the sum m using these coins?

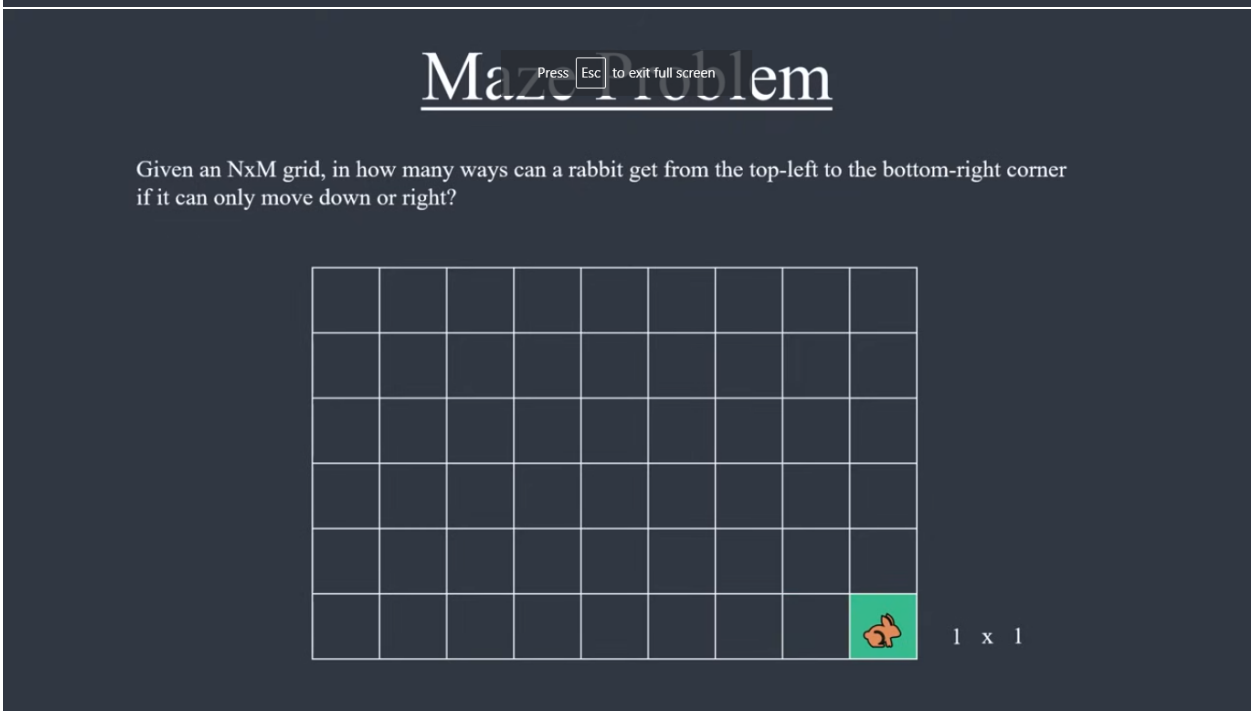
```
from collections import defaultdict


def how_many_ways(m, coins):
    memo = defaultdict(lambda _: 0)

    memo[0] = 1
    for i in range(1, m + 1):
        memo[i] = 0

        for coin in coins:
            subproblem = i - coin
            if subproblem < 0:
                continue

            memo[i] = memo[i] + memo[subproblem]

    return memo[m]


print(how_many_ways(5, [1, 4, 5]))        Output: 4
print(how_many_ways(87, [1, 4, 5, 8]))    Output: 3306149332861088
```

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



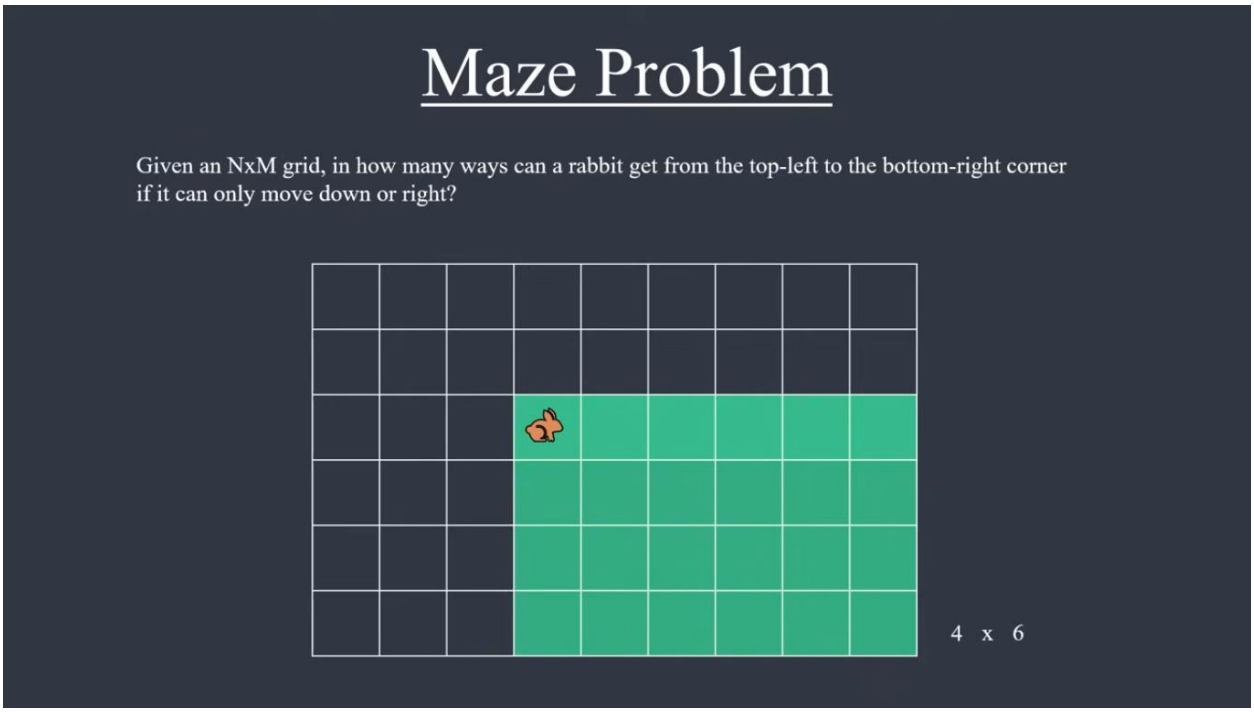
با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.





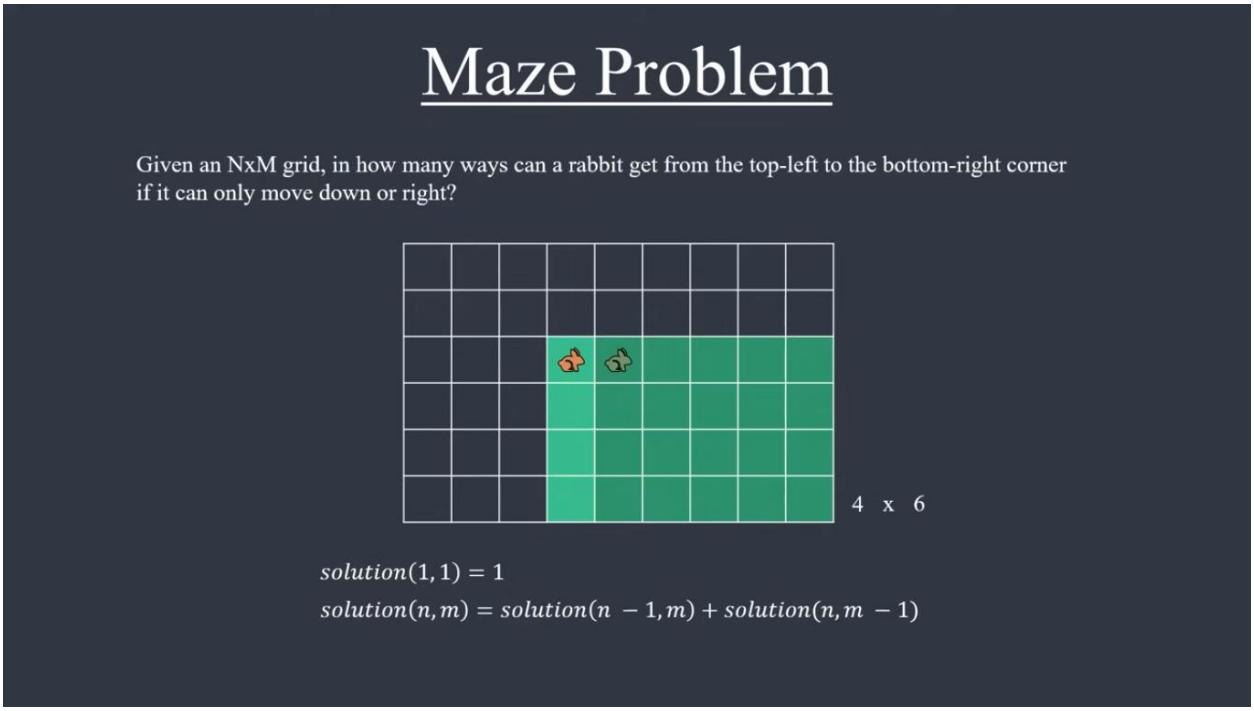
Problem

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



If the rabbit goes down, the number (HN) of the solutions is equal to the case that we have3*6.

In if it goes right, the number (HN) of the solutions is as the same as 4*5.



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Maze Problem

```python
def grid_paths(n, m):
    memo = {}

    for i in range(1, n + 1):
        memo[(i, 1)] = 1
    for j in range(1, m + 1):
        memo[(1, j)] = 1

    for i in range(2, n + 1):
        for j in range(2, m + 1):
            memo[(i, j)] = memo[(i - 1, j)] + memo[(i, j - 1)]

    return memo[(n, m)]


print(grid_paths(18, 6))      Output: 26334

print(grid_paths(75, 19))     Output: 5873182941643167150
```

Key Takeaways

1) Define the subproblem
2) What's the base case?
3) Find recursive formula for general solution

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

2.7 An application of Dynamic Programming to machine renewal

A company must buy a new machine and then determine a renewal (maintenance-replacement) plan for the next 5 years, making sure that, at any point in time, the available machine works properly. At the beginning of each year of the planning horizon, the company must decide whether to keep the old machine or to substitute it with a new machine.

The maintenance costs and the expected revenue (when the machine is sold) clearly depend on how old the machine is and they are indicated in the following table.

years	maintenance (kEuro)	revenue when sold (kEuro)
0	2	-
1	4	7
2	5	6
3	9	2
4	12	1

To avoid high maintenance costs of an old machine, the machine can be sold at the beginning of the second, third, fourth, and fifth year, and an new one can be bought. For the sake of simplicity, we suppose that a new machine always costs 12K Euro.

Show that the problem of determing a machine renewal plan of minimum total net cost (total cost for buying/rebuying the machine + maintenance costs - total revenue) can be solved via Dynamic Programming by finding a shortest path in an ad hoc directed acyclic graph. Find an optimal renewal plan. Is it unique?

نحوه حل:

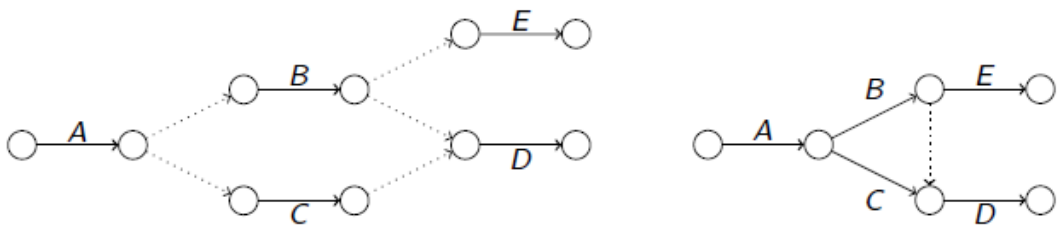
برای حل آن باید اول یک محصول را برای ۵ سال برنامه ریزی کنیم. در برنامه ریزی برای سال اول باید این را در نظر بگیرید که باید ۱۲ برای خرید و ۲ یورو برای نگهداریدر سال اول هزینه کنید و اگر اخر همان سال بفروشید ۷ یورو بدست خواهید آورد هزینه برابر ۷ = ۷-۲+۱۲ خواهد شد. برای مدت دو سال باید بدانیم که اول باید ۱۲ برای خرید و برای سال اول ۲ یورو برای نگهداری برای سال دوم ۴ یورو برای نگهداری و اگر اخر این سال بعد از دو سال بفروشیم ۶ یورو به ما باز خواهد گشت ۱۲= ۶-۴+۲+۱۲ و برای سال های دیگر نیز همین رویه رو انجام میدهیم. بعد از اتمام آن را برای خرید در ابتدای همه سال ها گسترش دهید.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

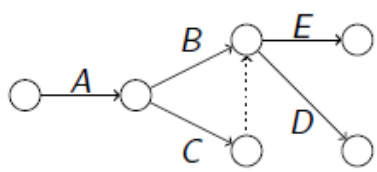
Project planning

Example

Graph G can be simplified by contracting some arcs:



Pay attention not to introduce unwanted precedence constraints.



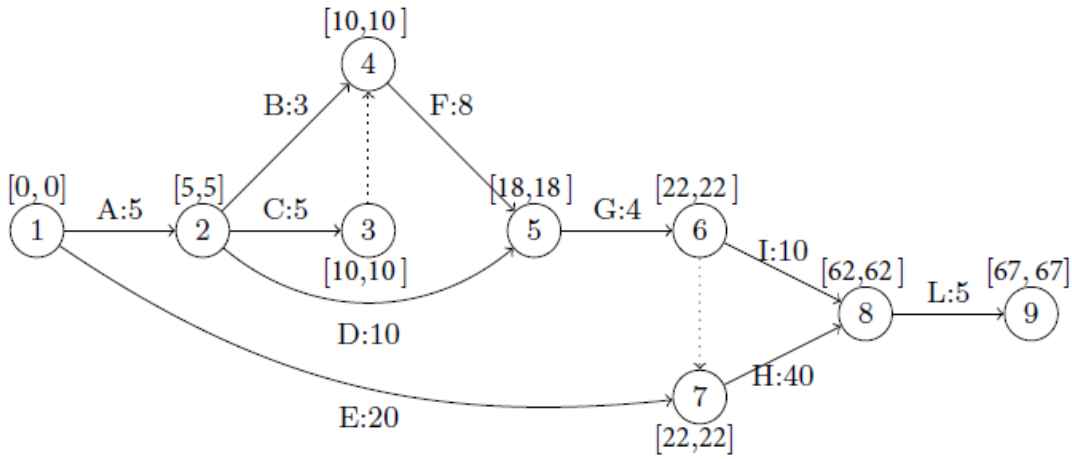
If this dummy activity is maintained, unwanted $C \propto E$ is implied!

The preparation of the apple pie has long been a tradition at Rossi's family. First the weight of the ingredients has to be determined: flour, sugar, butter, eggs, apples, cream. The butter must then be melted down, and added to a mixture of flour, sugar, and eggs. Apples must be added to this new mixture, once they have been peeled and cut into thin slices. The mixture can then be cooked, in the already heated oven. It is advisable to whip the cream only after the apple slices have been added to the mixture. Once the cake is cooked, the cream is used to garnish it.

The following table reports the time needed for each activity.

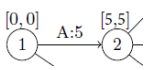
Activity		Time (minutes)
A	Weight the ingredients	5
B	Melt the butter	3
C	Mix flour, eggs and sugar	5
D	Peel the apples and cut them into slices	10
E	Heat the oven	20
F	Add butter to the mixture	8
G	Add apples to the mixture	4
H	Cook the mixture in the oven	40
I	Whip the cream	10
L	Garnish	5

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



برای درایه اول بیشترین عدد بعد از جمع با مسیر و برای درایه دومی کمترین عدد بعد از کم کردن مسیر را در نظر می گیریم.

Slack for activities A B C D E F G H I L



$i=1,\ j=2\ [T_{min},T_{max}],\ 1:[0,0]\ ,2:[5,5]\ ,\sigma(A)=T_{maxj}-T_{mini}-d_{ij}=5-0-5=0$

Critical path method

- Input: Graph $G=(N,A)$, with $n=|N|$, $m=|A|$ and the duration d_{ij} associated to each $(i,j)\in A$.
- Output: $(Tmin_i, Tmax_i)$, for $i=1,\dots,n$.

Algorithm 1: CPM

```
Sort the nodes topologically
Tmin_1 ← 0
for j = 2, ..., n do
    Tmin_j ← max{Tmin_i + d_ij : (i,j) ∈ δ⁻(j)}
Tmax_n ← Tmin_n
/* minimum project duration                    */
for i = n − 1, ..., 1 do
    Tmax_i ← min{Tmax_j − d_ij : (i,j) ∈ δ⁺(i)}
```

Complexity order

$O(n+m)$, or simply $O(m)$.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Gantt charts

Henry Gantt
(1861-1919)

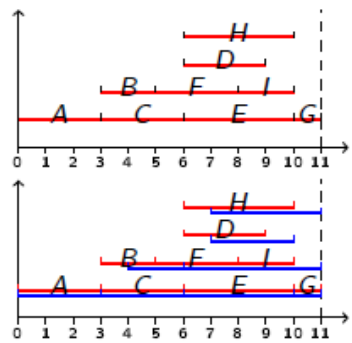
Introduced in the 1910s by Henry Gantt.

Provide temporal representations of the project.

Gantt chart at earliest: Each activity (i,j) starts at time $Tmin_i$

Gantt chart at latest: Each activity (i,j) ends at time $Tmax_j$

(i,j)	d_{ij}	$Tmin_i$	$Tmax_j$
A	3	0	3
B	2	3	6
C	3	3	6
D	3	6	10
E	4	6	10
F	3	5	9
G	1	10	11
H	4	6	11
I	2	8	11



Blend model

Mathematical model

	A	B	C	cost ($)
Feed x	3	7	3	10
Feed y	2	2	6	4
minimum daily need	60	84	72	

Variables: x, y, daily feed amount in lb

Cost function: $f(x,y) = 10x + 4y$

Minimize the cost function, subject to the constraints:

$$\begin{cases} \text{Nutrient } A: & 3x + 2y \geq 60 \\ \text{Nutrient } B: & 7x + 2y \geq 84 \\ \text{Nutrient } C: & 3x + 6y \geq 72 \\ \text{and:} & x, y \geq 0 \end{cases}$$

It is like diet problem, and we can solve it graphically.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Production model[3]

Setting:

- Produce a list of products, with selling prices;
- Uses a list of raw materials, capital, labor etc;
- Maximize profit, using limited resources;
- Minimize cost, meeting the production requirement.

Goal: proper modeling

Example 2.3.1

- Produce two types of boats, A and B;
- Resources needed are: aluminum, machine time, finishing labor

We make the table:

Boat	aluminum	machine time	finishing labor	profit
Type A	50 (lb)	6 min	3 hr	$ 50
Type B	30 (lb)	5 min	5 hr	$ 60
Max limit	2000 (lb)	300 min	200 hr	

Note that the resources are limited!

[3] https://www.youtube.com/watch?v=hWnli715Dm8&list=PLbxFfU5GKZz2-4Y3YwRFVVDEMlmxYfY6y&index=8

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Mathematical model

Boat	aluminum	machine time	finishing labor	profit
Type A	50 (lb)	6 min	3 hr	\$50
Type B	30 (lb)	5 min	5 hr	\$60
Max limit	2000 (lb)	300 min	200 hr	

Variables: A, B, number of boats produced for type A, B, resp.

Gain/profit function (to maximize): $f(A, B) = 50A + 60B$.

subject to the constraints:

$$(*) \quad \begin{cases} \text{aluminum:} & 50A + 30B \leq 2000 \\ \text{machine time:} & 6A + 5B \leq 300 \\ \text{finishing labor:} & 3A + 5B \leq 200 \\ \text{and:} & A, B \geq 0 \end{cases}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Example 2.3.2

Let's make the previous example more complicated.

The price for the aluminum is not fixed. The price for the last 500 lb is higher than the first 1500 lb by 20 cents. How do we adjust our model?

Let X be the amount (in lb) of aluminum above 1500 lb.

Profit function (which we want to maximize)

$$f(A, B, x) = 50A + 60B - 20X$$

subject to

$$\begin{cases} \text{aluminum:} & 50A + 30B \leq 2000 \\ \text{machine time:} & 6A + 5B \leq 300 \\ \text{finishing labor:} & 3A + 5B \leq 200 \\ \text{new:} & X \leq 500 \\ \text{and:} & A, B \geq 0, X \geq 0 \end{cases}$$

Example 2.3.4 – a more complicated example

We produce two types of products, P1 and P2.

We use two raw materials A and B, plus labor. We have 4 processors.

Proc.	Labor (h)	Mat. A (lb)	Mat. B (lb)	Prod. 1	Prod. 2
1	20	160	30	35	55
2	30	100	35	45	42
3	10	200	60	70	0
4	25	75	80	0	90
max	1000	8000	4000		
min				2100	1800
price		\$3/lb	\$ 7/lb		

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Cost function (which we want to minimize)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 3(160x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 75x_4) \\ &\quad +7(30x_1 + 35x_2 60x_3 + 80x_4) \\ &= 690x_1 + 545x_2 + 1020x_3 + 785x_4 \end{aligned}$$

Constraints:

$$\begin{cases} \text{Labor:} & 20x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 25x_4 \leq 1000 \\ \text{Mat. A:} & 160x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 75x_4 \leq 8000 \\ \text{Mat. B:} & 30x_1 + 35x_2 + 60x_3 + 80x_4 \leq 4000 \\ \text{P. 1} & 35x_1 + 45x_2 + 70x_3 \geq 2100 \\ \text{P. 2} & 55x_1 + 42x_2 + 90x_4 \geq 1800 \\ \text{and:} & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

We now allow overtime. We allow maximum 200 hr overtime, with additional salary of \$30/hr. Would this be beneficial?

Let x_5 be the number of hours of overtime. Then $0 \leq x_5 \leq 200$.

Cost function becomes:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + 30x_5$$

subject to

$$\begin{cases} \text{Labor:} & 20x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 25x_4 \leq 1000 \\ \text{Mat. A:} & 160x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 75x_4 \leq 8000 \\ \text{Mat. B:} & 30x_1 + 35x_2 + 60x_3 + 80x_4 \leq 4000 \\ \text{Overtime:} & x_5 \leq 200 \\ \text{P. 1} & 35x_1 + 45x_2 + 70x_3 \geq 2100 \\ \text{P. 2} & 55x_1 + 42x_2 + 90x_4 \geq 1800 \\ \text{and:} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

The transportation model

Setting:
Goods at location A_i are to be transported to locations B_j. Cost from A_i to B_j is given. Find an optimal schedule to minimize the total cost.

Example.
At locations A_1, A_2, we have goods: $A_1 = 200$ units, $A_2 = 300$ units.
We need to distribute them to B_1, B_2, B_3, with
$B_1 = 100, B_2 = 200, B_3 = 200$ units.
Note that we must have $A_1 + A_2 = B_1 + B_2 + B_3$.

The transportation expenses from A_i to B_j are given in the table:

	B_1	B_2	B_3
A_1	11	12	13
A_2	21	22	23

Schedule: x_{ij}=the units shipped from A_i to B_j.

	B_1	B_2	B_3	sum
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	200
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	300
sum	100	200	200	

Cost function (to be minimized):

$$f(\{x_{ij}\}) = 11x_{11} + 12x_{12} + 13x_{13} + 21x_{21} + 22x_{22} + 23x_{23}$$

subject to

$$\begin{cases} \text{From } A_1: & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ \text{From } A_2: & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\ \text{To } B_1: & x_{11} + x_{21} = 100 \\ \text{To } B_2: & x_{12} + x_{22} = 200 \\ \text{To } B_3: & x_{13} + x_{23} = 200 \\ \text{and:} & x_{ij}(i = 1, 2, j = 1, 2, 3) \geq 0 \end{cases}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

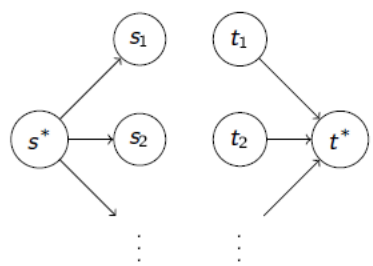
Network Flows

2.4.1 Maximum flow problem

Problem

Given a network $G = (N, A)$ with an integer capacity k_{ij} for each arc $(i, j) \in A$, and nodes $s, t \in N$, determine a feasible flow $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ from s to t of maximum value.

Note If there are many sources/sinks with a unique type of product, dummy nodes s^* and t^* can be added:



$$\delta^-(s^*) = \delta^+(t^*) = \emptyset$$

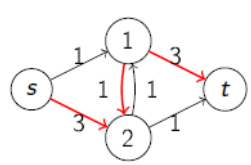
k_{s^*i} = availability limity, if any

$$k_{jt^*} = +\infty$$

2.4.2 Cuts, feasible flows and weak duality

Definition 3

- A cut separating s from t is $\delta(S)$ of G with $s \in S \subset N$ and $t \in N \backslash S$.
- Capacity of the cut $\delta(S)$ induced by S: $k(S) = \sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} k_{ij}$.



$\delta(\{s, 1\}) = \{(s, 2), (1, 2), (1, t)\}$, $k(S) = 7$

How many cuts separate s from t? 2^{n-2}, where $n = |N|$.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Consequence

If $\varphi(S) = k(S)$ for a subset $S \subseteq N$ with $s \in S$ and $t \notin S$, then $\underline{x}$ is a flow of maximum value and the cut $\delta(S)$ is of minimum capacity.

The property $\varphi(S) \leq k(S)$ for any feasible flow $\underline{x}$ and for any cut $\delta(S)$ separating s from t, expresses a weak duality relationship between the two problems:

- **Primal problem**
  Given $G = (N, A)$ with integer capacities on the arcs and $s, t \in N$, determine a feasible flow of maximum value.
- **Dual problem**
  Given $G = (N, A)$ with integer arc capacities and $s, t \in N$, determine a cut (separating s from t) of minimum capacity.

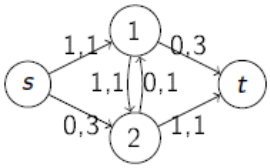
We shall see that such a relationship holds for any LP!

2.4.3 Ford-Fulkerson's algorithm

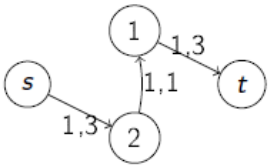
Idea

Start from a feasible flow $\underline{x}$ and try to iteratively increase its value φ by sending, at each iteration, an additional amount of product along a(n undirected) path from s to t with a strictly positive residual capacity.

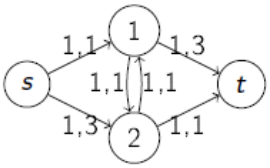
D. R. Fulkerson
(1924-1976)



$\varphi_0 = \varphi(\{s\}) = 1$



$\Delta\varphi = \delta = 1$



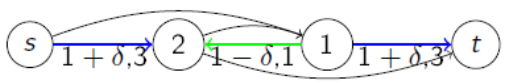
$\varphi(\{s\}) = 2$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Definition 5

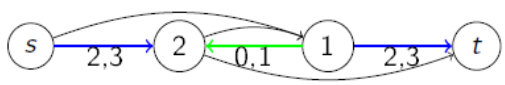
A path P from s to t is an augmenting path w.r.t. the current feasible flow $\underline{x}$ if $x_{ij} < k_{ij}$ for evey forward arc and $x_{ij} > 0$ for every backward arc.

Since the maximum additional amount of product that can be sent along the augmenting path $\langle (s,1),(1,2),(2,t) \rangle$



$\varphi(\{s\}) = 2 + \delta$

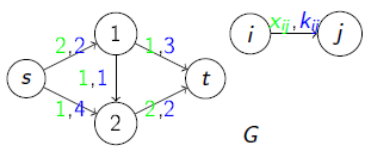
is equal to $\delta = 1$, we obtain the new feasible flow x



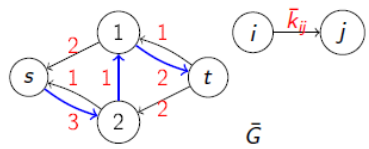
$\varphi(\{s\}) = 3$

Given a feasible flow $\underline{x}$ for $G = (N, A)$, we construct the residual network $\bar{G} = (N, \bar{A})$ associated to $\underline{x}$, accounting for all possible flow variations w.r.t. $\underline{x}$.

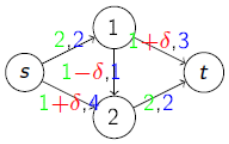
- If $(i,j) \in A$ is not empty, $(j,i) \in \bar{A}$ with $\bar{k}_{ji} = x_{ij} > 0$.
- If $(i,j) \in A$ is not saturated, $(i,j) \in \bar{A}$ with $\bar{k}_{ij} = k_{ij} - x_{ij} > 0$.
  $\bar{k}_{ij}$ is called the residual capacity.



G



$\bar{G}$



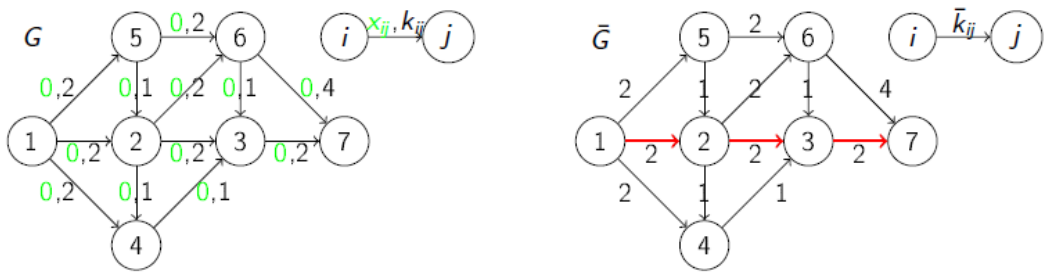
New feasible flow $\underline{x}$ of value $\varphi = 3 + \delta = 4$ $(\delta = 1)$.

At each iteration:

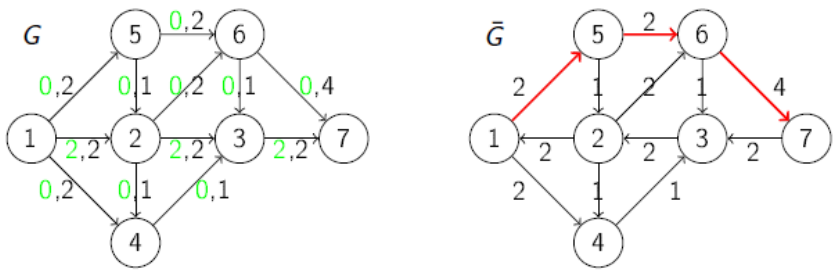
- To look for an augmenting path from s to t in G, we search for a path from s to t in $\bar{G}$.
- If there is an augmenting path from s to t, the current flow $\underline{x}$ is not of maximum value.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

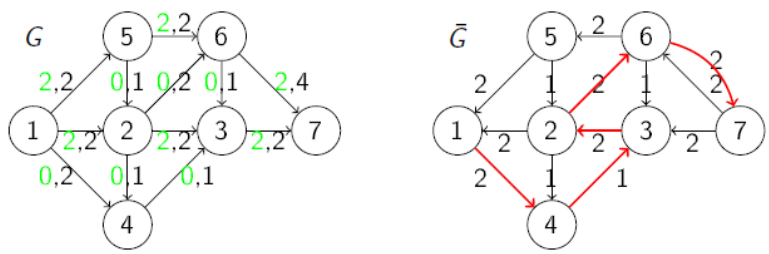
Example



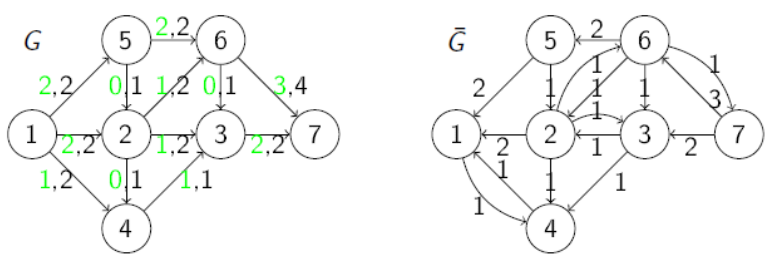
Augmenting path along which we can send $\delta = 2$ additional units of product



Augmenting path along which we can send $\delta = 2$ additional units of product



Augmenting path along which we can send $\delta = 1$ additional units of product

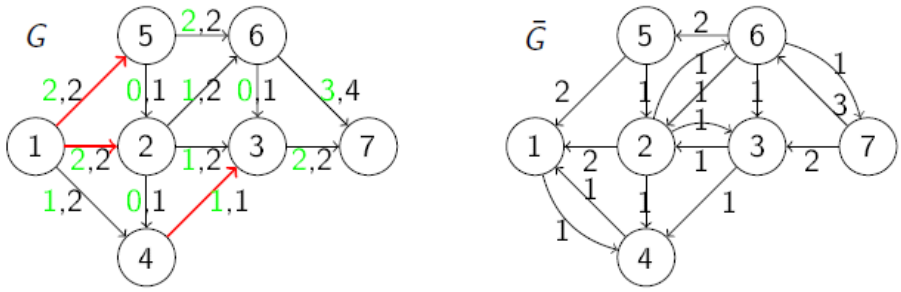


$S^* = \{1, 4\}$

subset of nodes reachable from s; $\delta^+_{\bar{G}}(S^*) = \emptyset$

7 is not reachable from 1 (only 4 is reachable) $\Rightarrow$ STOP

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



Cut $\delta_G(S^*)$ of capacity 5 and feasible flow $\underline{x}$ of value $\varphi = 5$

Note

For $S^* = \{1, 4\}$, all outgoing arcs of $\delta_G(S^*)$ are saturated and all entering ones are empty.

Complexity

- Since $\delta > 0$, the value φ increases at each iteration (cycle).
- If all k_{ij} are integer, $\underline{x}$ and $\bar{k}_{ij}$ integer and $\delta \geq 1$, then there are at most φ^* increases.
- Since
$$\varphi^* \leq k(\{s\}) \leq m\, k_{\max},$$
where $m = |A|$ and $k_{\max} = \max\{k_{ij} : (i,j) \in A\}$ and each cycle is $O(m)$, the overall complexity is $O(m^2 k_{\max})$.

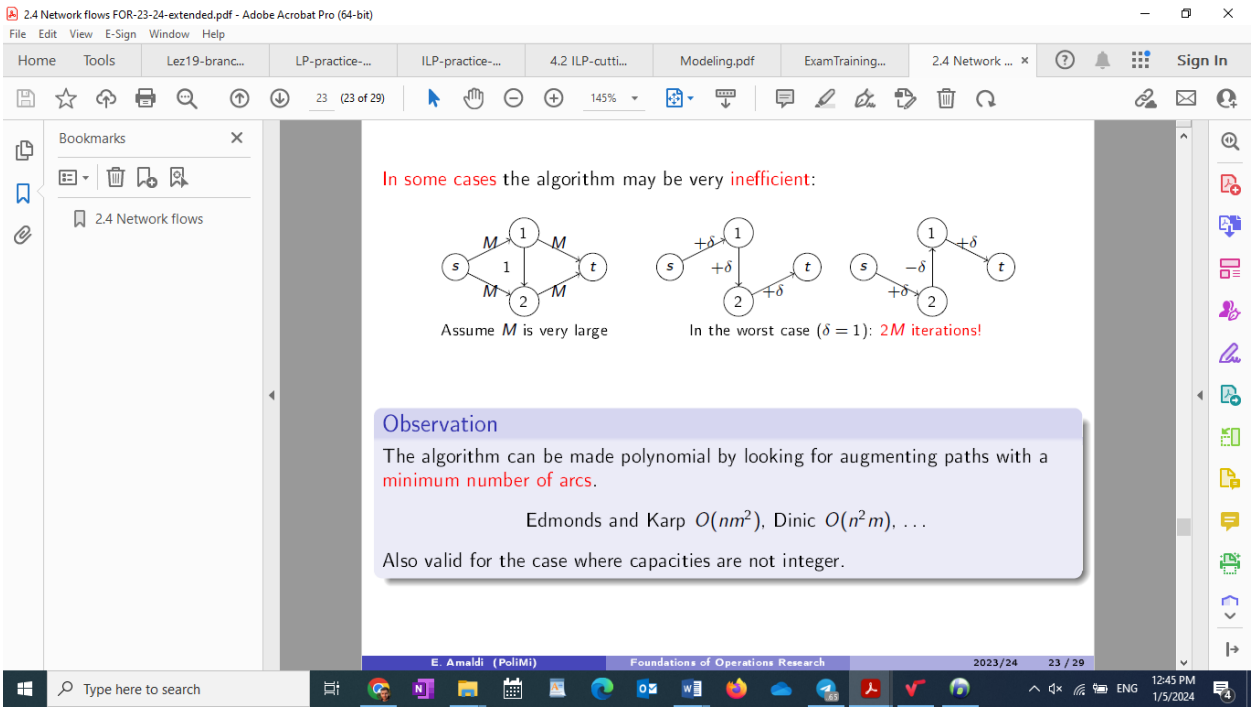
Definition 7

The size of an instance I, denoted by $|I|$, is the number of bits needed to describe the instance.

Since $\lceil \log_2 i \rceil + 1$ bits are needed to store integer i, $|I| = O(m \log_2 k_{\max})$.

$O(m^2 k_{\max})$ grows exponentially with $|I|$ because $k_{\max} = 2^{\log_2 k_{\max}}$.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



2.4.4 Indirect applications

1) Assigment (matching) problem

Given m engineers, n tasks and for each engineer the list of tasks he/she can perform. Assign the tasks to the engineers such that:

- each engineer is assigned at most one task,
- each task is assigned to at most one engineer,

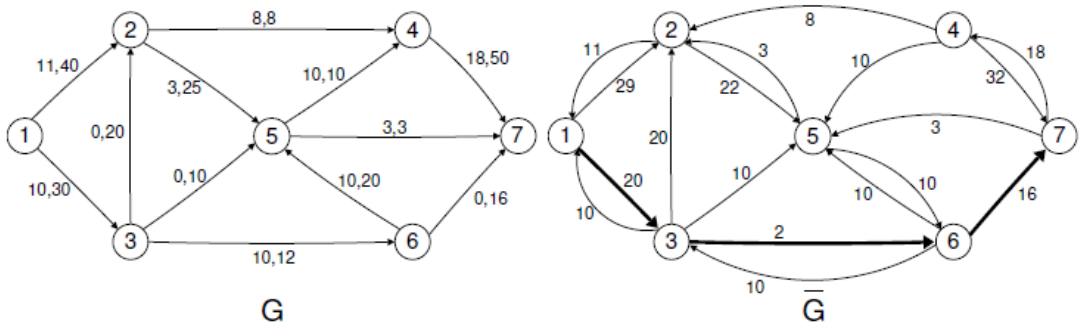
and the number of tasks that are executed (engineers involved) is maximized.

If the competences of the engineers are represented via a bipartite graph, what are we looking for in such a graph?

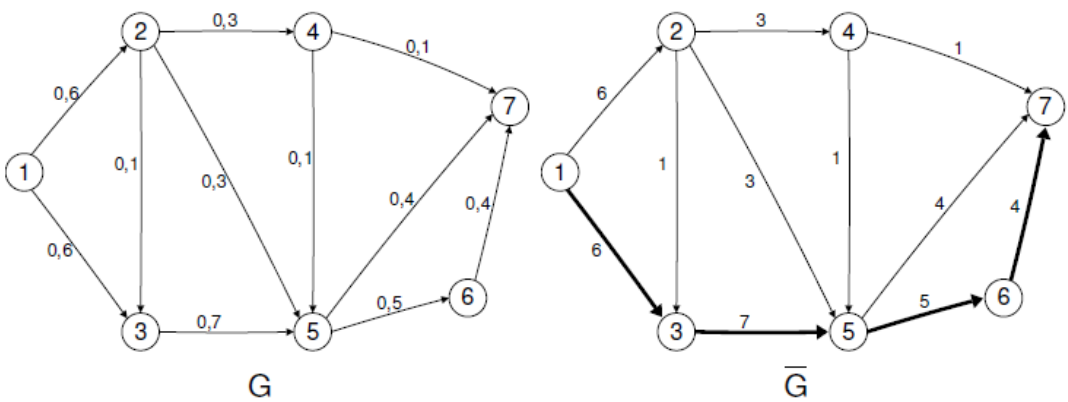
How can we reduce this problem to the problem of finding a feasible flow of maximum value in an ad hoc network?

Example1: Maximum flow with a strictly positive initial feasible flow

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



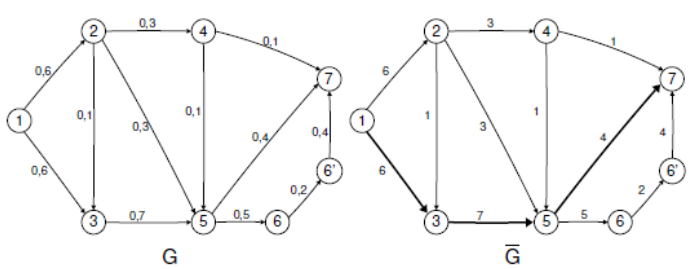
Example2: Maximim flow and minimum cut



Example3: Maximum flow with node capacity

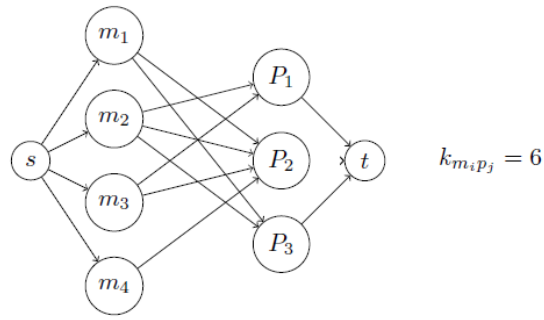
The capacities on nodes can be easily reduced to capacities on arcs. Indeed, each node i with a capacity c_i can be substituted with two auxiliary nodes, which are connected with an arc whose capacity is equal to c_i and where all entering arcs enter in the left node and all exiting arcs exit from the right node.

The network of exercise 2.11 is modified as follows.



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Look at maximum flow problems as a project that should be solved and there should be a feasible solution for it. Therefore, it suffices to exchange the graph of the problem into a graph like bellow



Always there should be a source and a target. Plus, we should a minimum cut between source and target to finish the project.[4]

Step1: read the question carefully.

Step2: draw G and $\bar{G}$. There is different between arcs and arrows.

Step3: only consider $\bar{G}$.

Step4: find the ways from S to T, one by one- write them down determine $\underline{x}_i$ and δ_i from $i = 1....n$.

Step5: when a way toward destination is occupied clear the backward arc and exchange it with $\rightarrow k_{ij} \rightarrow$ and also vice versa put $\leftarrow k_{ij} \leftarrow$ between two nodes.

Step6: consider the ways with $\rightarrow k_{ij} \rightarrow$ as minimum cut.

Step7: write S*nodes in a set also $\delta(S^*)$.

Step8: finished.

[4] "Ensuring the project's integrity involves establishing a definitive source and target, coupled with the strategic implementation of a judicious minimum cut between the source and target components, thereby culminating in the successful completion of the undertaking."

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Graphical solution of a linear program and standard form

Consider the problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s. t.} \quad & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

where

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Solve the problem graphically and determine the basic and nonbasic variables of the opti-mal solution.
2. Put the problem in the standard form w.r.t. the optimal basis (identify B, N, and the corre-sponding partition of the cost vector).

۱–معادله محدودیت ها و تابع هدف را می‌نویسیم.

۲–تابع همه محدودیت ها را رسم می‌کنیم.

۳–نقاط عطف را برمی‌داریم و در یک جدول مقدار تابع هدف Z^* را برای این نقاط می‌نویسیم.

۴–بیشترین مقدار را از میان آنها برای حالت کمینه و کمترین مقدار را برای حالت بیشینه در نظر می‌گیریم.

To put / To express / To illustrate / To indicate the problem in the standard form, the problem should be as

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c}'^T \underline{x}' \\ & A'\underline{x}' = \underline{b} \\ & \underline{x}' \geq \underline{0} \end{aligned}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.1 Equivalent forms

General form:

$$\begin{array}{lll} \min(\max) & z = \underline{c}^T \underline{x} & \\ \text{s. t.} & A_1 \underline{x} \geq \underline{b_1} & \text{inequality constraints} \\ & A_2 \underline{x} \leq \underline{b_2} & \text{inequality constraints} \\ & A_3 \underline{x} = \underline{b_3} & \text{equality constraints} \\ & x_j \geq 0, \quad \text{for } j \in J \subseteq \{1, \ldots, n\} & \\ & x_j \text{ free}, \quad \text{for } j \in \{1, \ldots, n\} \backslash J & \end{array}$$

Definition 3 (Standard form)

$$\begin{array}{lll} \min & z = \underline{c}^T \underline{x} & \\ \text{s. t.} & A\underline{x} = \underline{b} & \text{only equality constraints and} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} & \text{all nonnegative variables} \end{array}$$

- The two forms are equivalent.
- Simple transformation rules allow to pass from one form to the other form.

Warning: The transformation may involve adding/deleting variables and/or constraints.

Transformation rules

- $\max \underline{c}^T \underline{x} = -\min(-\underline{c}^T \underline{x})$
- $\underline{a}^T \underline{x} \leq b \Rightarrow \begin{cases} \underline{a}^T \underline{x} + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$ where s is a slack variable.
- $\underline{a}^T \underline{x} \geq b \Rightarrow \begin{cases} \underline{a}^T \underline{x} - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$ where s is a surplus variable.
- x_j unrestricted in sign $\Rightarrow \begin{cases} x_j = x_j^+ - x_j^- \\ x_j^+, x_j^- \geq 0 \end{cases}$.

  After substituting x_j with $x_j^+ - x_j^-$, we delete x_j from the problem.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Example

General form:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 - 7x_2 \le 5 \\ & 6x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. $x_2 = x_3 - x_4,\ x_3, x_4 \ge 0$:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_3 + 3x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 - 7x_3 + 7x_4 \le 5 \\ & 6x_1 - 2x_3 + 2x_4 \ge 4 \\ & x_1, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

2. Introduce slack and surplus variables x_5 and x_6:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_3 + 3x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 - 7x_3 + 7x_4 + x_5 = 5 \\ & 6x_1 - 2x_3 + 2x_4 - x_6 = 4 \\ & x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

3. Change the objective function sign:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3x_3 - 3x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 - 7x_3 + 7x_4 + x_5 = 5 \\ & 6x_1 - 2x_3 + 2x_4 - x_6 = 4 \\ & x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

حل کردن این مسائل

۱–تابع هدف را به حالت ماکزیمم در میاوریم.

اگر همه محدودیت ها کوچکتر مساوی بود با اضافه کردن $+s_i$ به هرکدام از محدودیت ها, آنها را به فرم استاندارد تبدیل میکنیم.

۳–اگر کوچکتر مساوی نبودند چند روش برای حل آنها وجود دارد. یعنی اگر مساوی یا بزرگتر مساوی بود

۱–۳–روش ام بزرگ

۲–۳–روش دو مرحله ای

۳–۳–روش ضرب منفی یک به طرفین

۴–تابه هدف را به یک طرف می‌بریم یعنی $z = f(x) \rhd\rhd z - f(x) = 0$

۵–تابلوی اولیه را تشکیل می‌دهیم.

۶–در ردیف مربوط به تابع هدف منفی ترین عدد را انتخاب می‌کنیم و با تقسیم عدد رایت هند به عدد ستون انتخاب شده متناظر کمترین ردیف را انتخاب میکنیم حال عدد تابلو را داریم

۷–تمام عدد های مربوط به آن ردیف را به عدد تابلو تقسیم میکنیم.

۸–متغییر ستون تابلو را به جای متغییر سطر تابلو می‌گذاریم.

۹–جدول را نسبت به متغییرهای بیسیک یکه میکنیم.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

۱۰–ردیف۶ تا ۹ را تا جایی انجام میدهیم که دیگر عدد منفی در سطر مقابل تابع هدف نباشد.

۱۱–در انتها مقدار تابع هدف بهینه و مقادیر مربوط به متغییرهای بسیک را خواهیم داست. به یاد داشته باشید که در صورت تغییر ماکزیمم به مینیمم یا بالعکس یک منفی باید به مقدار تابع هدف بهینه میدهیم.

What about the vertices of polyhedra expressed in standard form?

$$P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$

We want to solve LPs in standard form. However, these are easier to describe if we start from

$$P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\},$$

transform it into standard form

$$P' = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} + \underline{s} = \underline{b}, \underline{x}, \underline{s} \geq \underline{0}\}$$

and rename: $A := [A|I]$ and $\underline{x} := (\underline{x}^T|\underline{s}^T)$, where A has m rows.

Algebraic characterization of the vertices

Consider any $P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ in standard form.

Assumption: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is such that $m \leq n$ of rank m (A is of full rank).
Equivalent to assume that there are no "redundant" constraints.

Example

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \text{ (I)} \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \text{ (II)} \\ x_1 & & +x_3 & = & 1 \text{ (III)} \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Since (I) $\equiv$ (II) + (III), then (I) can be dropped.

- If $m = n$, there is a unique solution of $A\underline{x} = \underline{b}$. ($\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$).
- If $m < n$, there are ∞ solutions of $A\underline{x} = \underline{b}$ (the system has $n - m$ degrees of freedom, $n - m$ variables can be fixed arbitrarily). By fixing them to 0, we get a vertex.

A full rank matrix, also known as a full-rank matrix or a matrix of full rank, is a matrix in which all its rows and columns are linearly independent. In other words, the rows (or columns) cannot be expressed as linear combinations of each other. The rank of a matrix is the maximum number of linearly independent rows or columns it contains.
Let's consider an example to illustrate a full rank matrix:

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

To determine if this matrix is of full rank, we can perform row reduction or use other methods to find its rank. However, in this case, it's evident that the rows are linearly independent.
Let's check if the rows are linearly independent by setting up a linear combination:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

Now, solving the system of equations:

$$c_1 + 3c_2 = 0$$
$$2c_1 + 4c_2 = 0$$

This system has a unique solution: $c_1 = 0, c_2 = 0$. Therefore, the only way to make the linear combination equal to the zero vector is by setting both coefficients (c_1, c_2) to zero. This implies that the rows are linearly independent.
Since the matrix has two rows, and both rows are linearly independent, the matrix is of full rank.
In general, for an $m \times n$ matrix, if $m \leq n$, the matrix is of full rank if and only if all its rows are linearly independent. If $m > n$, the matrix is of full rank if and only if all its columns are linearly independent.

Non-singuar matrix[5]

$$P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$

with n variables, m constraints, and $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definition 1

A basis of such a matrix A is a subset of m columns of A that are linearly independent and form an $m \times m$ non singular matrix B.

$$A = [\overbrace{B}^{m} \mid \overbrace{N}^{n-m}]$$

First permute the columns of A, then partition A into $[B|N]$

Permute: try to find the square matrix that is non-singular or has no singularity.

[5] A non-singular matrix is a square matrix that is invertible, meaning it has an inverse.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Let $\underline{x} = [\ \overbrace{\underline{x}_B^T}^{m \text{ components}} \ \mid \ \overbrace{\underline{x}_N^T}^{n-m \text{ components}}\ ]^T$, then any system $A\underline{x} = \underline{b}$ can be written as $B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = \underline{b}$ and for any set of values for $\underline{x}_N$, if B is non singular, we have

$$\underline{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\underline{x}_N$$

Definition 2

- A basic solution is a solution obtained by setting $\underline{x}_N = \underline{0}$ and, consequently, letting $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$.
- A basic solution with $\underline{x}_B \geq 0$ is a basic feasible solution.
- The variables in $\underline{x}_B$ are the basic variables, those in $\underline{x}_N$ are the non basic variables.

Note: By construction $(\underline{x}_B^T, \underline{x}_N^T)$ together satisfy $A\underline{x} = \underline{b}$.

Theorem 3

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is a basic feasible solution if and only if $\underline{x}$ is a vertex of $P = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$.

Example

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1+x_2+5x_3 \\ \text{s. t.} & x_1+x_2+x_3+x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2+x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Choosing columns 4, 5, 6, 7, we have $B = I = B^{-1}$, so $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \underline{b} \geq \underline{0}$, thus we obtain a basic feasible solution.
- Choosing columns 2, 5, 6, 7, we have

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

and thus we obtain an infeasible basic solution.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

با کمی توجه بیشتر میتوان دریافت هدف پیدا کردن ماتریس های m*m است که باید دو ویژگی را داشته باشد تا اقلا یک راه حل داشته باشد, یک آن ماتریس یک ماتریس non-singular باشد, دوم اینکه این ماتریس همچنین یک ماتریس full rank باشد و برای اینکه feasible solution داشته باشیم باید بردار x_B هیچگونه عدد منفی نداشته باشد.

Number of basic feasible solutions

At most one basic feasible solution for each choice of the $n-m$ non basic variables (to be set to zero) out of the n variables:

$$\#\text{ basic feasible solutions } \leq \binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \binom{n}{m}.$$

$$A_{n\times m} \left| \begin{array}{l} Optimal\ \ B.S \\ BS \qquad\qquad ,n \geq m \\ BFS \leq BS \leq \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \end{array} \right.$$

همان طور که می توان دید تعدادی جواب Feasible خواهیم داشت و هدف اصلی ما پیدا کردن آپتیمال ترین جواب با توجه به تابع هدف خواهد بود.

**Finding an optimal solution requires a method that brings us such a matrix or those basic variables. The solution was introduced by George Dantzig as a simplex method for solving LP problems.

In all the models, first, we will try to convert its mathematical form into standard form, and then solve it by methods which will be introduced in the following.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Basic Solution (BS)

Rank (A) = m

Consider a system "AX=b", $(A)_{mxn}$, of m equations with n variables (n > m), and Put (n−m) variables to zero and the resulting system $B X_B = b$ solution is called the Basic Solution.

Basic Feasible Solution (BFS)

If the values of all the variables in the basic solution are non-negative, it is called a basic feasible solution (BFS).

infeasible basic solution

A basic solution having at least one variable with a negative value is called an infeasible basic solution.

Degenerate and non-degenerate basic feasible solutions

A BFS with at least one basic variable assuming the value zero is called a degenerate BFS; otherwise it is called a non-degenerate BFS.

Optimal BFS: BFS that optimize the objective function value.

$$x = [x_B, x_N] = [x_1, x_2, s_1, s_2]$$

$$Assume\ \ x_B = [x_1, x_2]\, and\ \ x_N = [s_1, s_2]$$

$$so\ \ s_1 = 0, s_2 = 0$$

$$i)\, x = [1, 2, 0, 0] \triangleright Basic\ \ Feasible\ \ Solution + Non-degenerate$$

$$ii)\, x = [2, -4, 0, 0] \triangleright Basic\ \ Infeasible\ \ Solution$$

$$iii)\, x = [0, 5, 0, 0]\, Basic\ \ Feasible\ \ Solution + degenerate$$

Basic Solution |Part 2| Linear Programming Problem- Degenerate/Non-degenerate Basic Solution

Problem. Write all basic solution to the following system and find optimal solution. Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2$

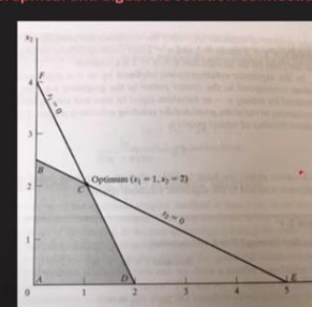
$$2x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 \le 5 \quad \text{and} \quad x_1, x_2 \ge 0$$

Solution. Convert inequalities into equality by adding slack/surplus variable

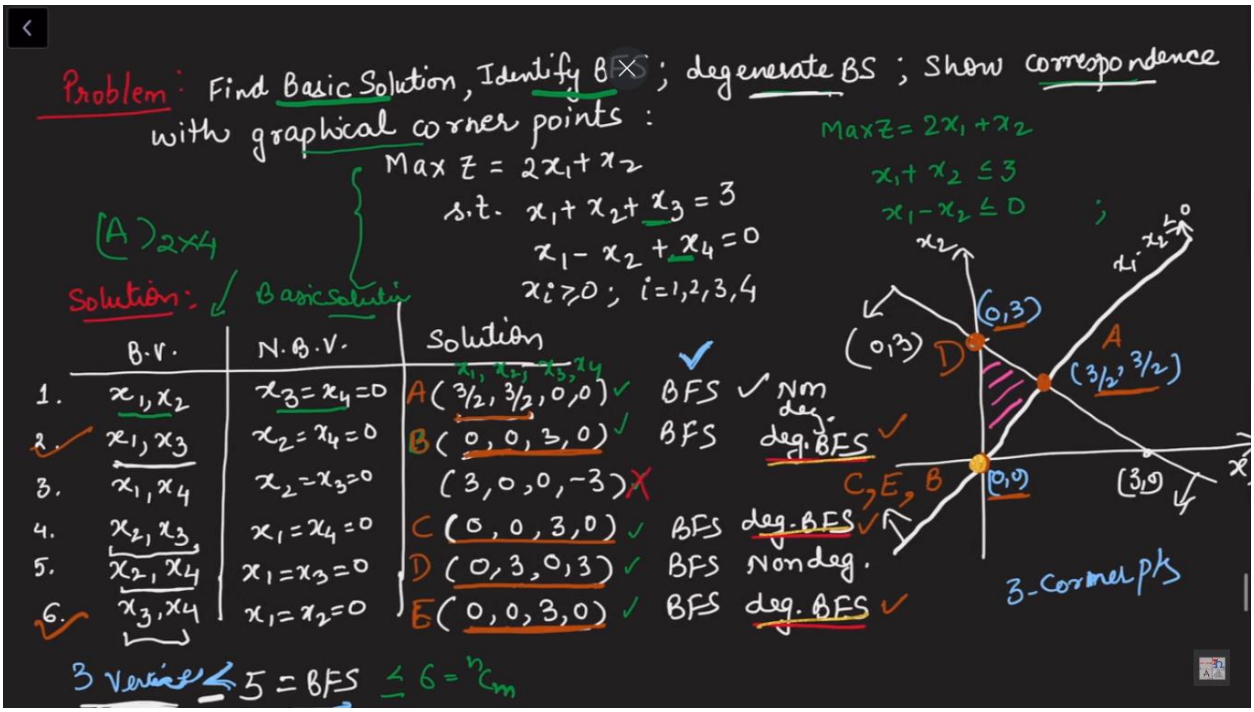
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 5 \quad \text{and} \quad x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

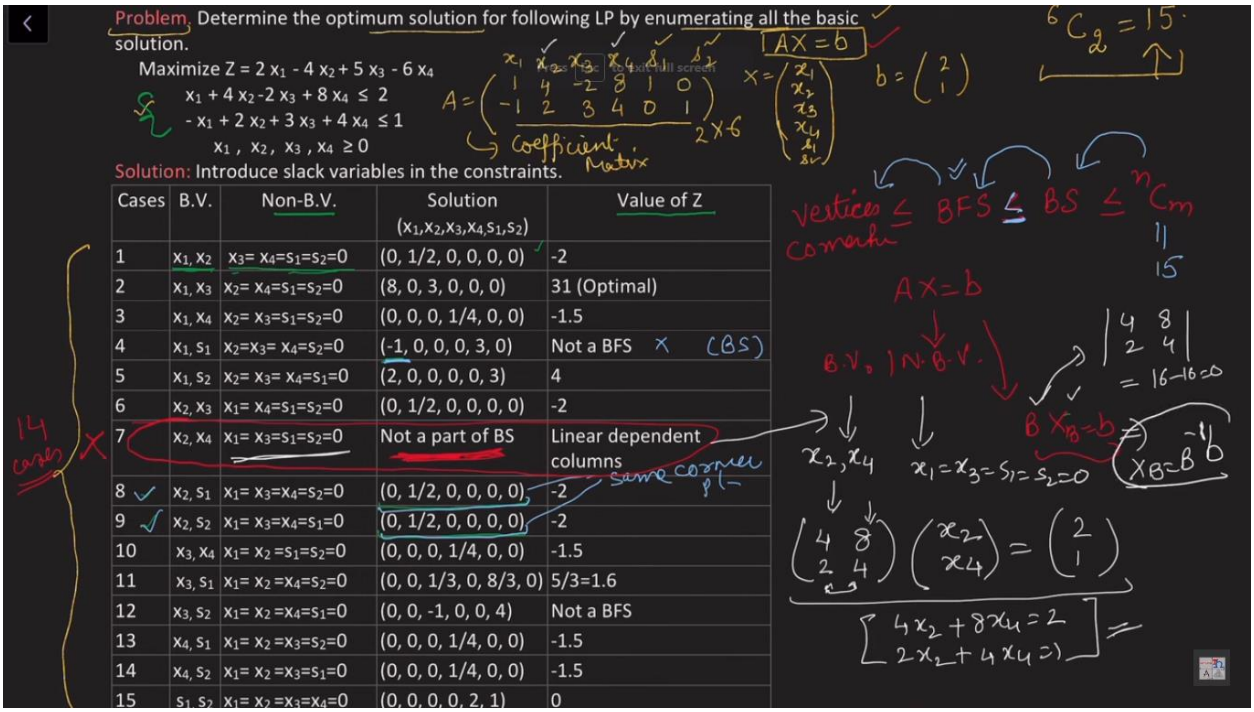
Non Basic Variables	Basic Variables	Basic solution	Associated corner point	Feasibility	Objective Value
$(x_1, x_2) = 0$	(s_1, s_2)	(4, 5)	A	Yes	0
$(x_1, s_1) = 0$	(x_2, s_2)	(4, -3)	F	No	-
$(x_1, s_2) = 0$	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	B	Yes	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	D	Yes	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, -6)	E	No	-
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(1, 2)	C	Yes	8 (Optimum)

Graphical and algebraic solution connection



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.





Cases	B.V.	Non-B.V.	Solution (x_1,x_2,x_3,x_4,s_1,s_2)	Value of Z
1	x_1, x_2	$x_3= x_4=s_1=s_2=0$	(0, 1/2, 0, 0, 0, 0)	-2
2	x_1, x_3	$x_2= x_4=s_1=s_2=0$	(8, 0, 3, 0, 0, 0)	31 (Optimal)
3	x_1, x_4	$x_2= x_3=s_1=s_2=0$	(0, 0, 0, 1/4, 0, 0)	-1.5
4	x_1, s_1	$x_2=x_3= x_4=s_2=0$	(-1, 0, 0, 0, 3, 0)	Not a BFS (BS)
5	x_1, s_2	$x_2= x_3= x_4=s_1=0$	(2, 0, 0, 0, 0, 3)	4
6	x_2, x_3	$x_1= x_4=s_1=s_2=0$	(0, 1/2, 0, 0, 0, 0)	-2
7	x_2, x_4	$x_1= x_3=s_1=s_2=0$	Not a part of BS	Linear dependent columns
8	x_2, s_1	$x_1= x_3=x_4=s_2=0$	(0, 1/2, 0, 0, 0, 0)	-2
9	x_2, s_2	$x_1= x_3=x_4=s_1=0$	(0, 1/2, 0, 0, 0, 0)	-2
10	x_3, x_4	$x_1= x_2=s_1=s_2=0$	(0, 0, 0, 1/4, 0, 0)	-1.5
11	x_3, s_1	$x_1= x_2=x_4=s_2=0$	(0, 0, 1/3, 0, 8/3, 0)	5/3=1.6
12	x_3, s_2	$x_1= x_2=x_4=s_1=0$	(0, 0, -1, 0, 0, 4)	Not a BFS
13	x_4, s_1	$x_1= x_2=x_3=s_2=0$	(0, 0, 0, 1/4, 0, 0)	-1.5
14	x_4, s_2	$x_1= x_2=x_3=s_1=0$	(0, 0, 0, 1/4, 0, 0)	-1.5
15	s_1, s_2	$x_1= x_2=x_3=x_4=0$	(0, 0, 0, 0, 2, 1)	0

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

****حواسمان باشد اول مقدار متغییرها را نگاه کنیم اگر منفی داشتند نیازی به پیدا کردن تابع هدف نیست و این جواب در ناحیه امکان پذیر نیست.

Problem. Consider the following LPP : Maximize $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

$$6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$
$$x_1,\ x_3 \geq 0,\ x_2\text{-unrestricted in sign}$$

Show that a basic solution cannot include both x_2^+ and x_2^- simultaneous where $x_2 = x_2^+ - x_2^-$

Solution: Introduce Surplus variable in first constraint.

Cases	B.V.	Non-B.V.	Solution	Value of Z
1	x_1, x_2^+	$x_2^- = x_3 = s_1 = 0$	(66/13, 64/13, 0, 0, 0)	24.9
2	x_1, x_2^-	$x_2^+ = x_3 = s_1 = 0$	(66/13, -64/13, 0, 0, 0)	
3	x_1, x_3	$x_2^+ = x_2^- = s_1 = 0$	(-106/15, 0, 0, 64/15, 0)	
4	x_1, s_1	$x_2^+ = x_2^- = x_3 = 0$	(10, 0, 0, 0, 64)	20
5	x_2^+, x_2^-	Should not be a choice of BS		
6	x_2^+, x_3	$x_1 = x_2^- = s_1 = 0$	(0, 106/37, 0,66/37, 0)	17.5
7	x_2^+, s_1	$x_1 = x_2^- = x_3 = 0$	(0, 0, 10, 0, 66)	30 (Optimal)
8	x_2^-, x_3	$x_1 = x_2^+ = s_1 = 0$	(0, -106/37, 0, 66/37, 0)	
9	x_2^-, s_1	$x_1 = x_2^+ = x_3 = 0$	(0, 0, -10, 0, 66)	
10	x_3, s_1	$x_1 = x_2^+ = x_2^- = 0$	(0, 0, 0, 10/4, 106/4)	12.5

$$\Rightarrow 6x_1 + 7x_2^+ - 7x_2^- - 9x_3 - s_1 = 4$$
$$x_1 + x_2^+ - x_2^- + 4x_3 = 10$$

$$AX = b \Rightarrow BX_B = b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 7 & -7 & -9 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 5} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

L.D.

$^5C_2 = 10$ cases.

B.V. $= x_2^+, x_2^-$

$$B = \begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \times$$

The determinant of a 3×3 matrix can be calculated using the following formula:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

For a 3×3 matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

2. **Calculate the cofactors and form the adjugate ($\mathrm{adj}(A)$):**

   Calculate the cofactors for each element a_{ij}:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = -2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = -2$$

   Similar calculations for the other elements yield:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

3. **Transpose the adjugate:**

$$\mathrm{adj}(A)^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

4. **Calculate the inverse (A^{-1}):**

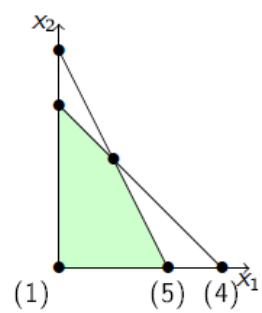
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \mathrm{adj}(A)^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 1 & 1.5 \\ -0.5 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Move to an adjacent vertex (basic feasible solution)

Example

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 6 \\ 2x_1 + x_2 \quad + s_2 &= 8 \\ x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Move from vertex (1) to vertex (5):

- In (1) $x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow s_1 = 6, s_2 = 8$ with $\underline{x}_B = (s_1, s_2)^T$, $\underline{x}_N = (x_1, x_2)T$
- In (5) $x_2 = 0, s_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, s_1 = 2$ with $\underline{x}_B = (x_1, s_1)^T$, $\underline{x}_N = (x_2, s_2)^T$

Thus, x_1 enters the basis B and s_2 exits the basis B.

Note: When moving from the current vertex to an adjacent vertex, we substitute one column of B (that of s_2) with one column of N (that of x_1).

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Several "anticycling" rules have been proposed for the choice of the variables that enter and exit the bases (indices r and s).

Bland's rule: Among all candidate variables to enter/exit the basis (x_s/x_r) always select the one with smallest index.

Proposition 2

The Simplex algorithm with Bland's rule terminates after $\leq \binom{n}{m}$ iterations.

Note: The number of pivots is finite.

In some "pathological" cases (see e.g. Klee & Minty 72), the number of iterations grows exponentially w.r.t. n or m.

However, the Simplex algorithm is overall very efficient:

Extensive experimental campaigns show that number of iterations grows linearly w.r.t. m ($m \leq \ldots \leq 3m$) and very slowly ($\approx$ logarithmically) w.r.t. n.

3.4.5 Two-phase simplex method

Phase I: Determine an intial basic feasible solution.

Example:

$$\begin{array}{lrrrl} \min & x_1 & & +x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & & \leq 5 \\ & & x_2 & +2x_3 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lrrrrl} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & & x_2 & +2x_3 & & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

There is no sub-matrix $I_{2\times 2}$ of A!

Given problem (P): $\begin{array}{ll} \min & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}$ with $\underline{b} \geq \underline{0}$, the auxiliary LP with artificial variables y_i, $i = 1, \ldots, m$, is:

$$(P_A) \quad \begin{array}{ll} \min & v = \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.t.} & A\underline{x} + I\underline{y} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y} \geq \underline{0} \end{array}$$

Obvious initial basic feasible solution: $\underline{y} = \underline{b} \geq \underline{0}$ and $\underline{x} = \underline{0}$.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Example:

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & x_1+x_2+10x_3 \\ \text{s.t.} & x_2+4x_3=2 \\ & -2x_1+x_2-6x_3=2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0 \end{array} \qquad (P_A)\quad \begin{array}{ll} \min & v = y_1+y_2 \\ \text{s.t.} & x_2+4x_3+y_1 = 2 \\ & -2x_1+x_2-6x_3+y_2=2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2\geq 0 \end{array}$$

We write $v = y_1 + y_2$ in canonical form by expressing y_1 and y_2 in terms of x_1, x_2 and x_3.

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
$-v$	-4	2	-2	2	0	0
y_1	2	0	1	4	1	0
y_2	2	-2	1	-6	0	1

		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
$-v$	0	2	0	10	2	0
x_2	2	0	1	4	1	0
y_2	0	-2	0	-10	-1	1

By swapping the roles of y_2 and x_1 (or x_3), we identify an optimal solution of the Phase I problem: $\underline{x}^* = (0,2,0)^T$, $\underline{y}^* = (0,0)^T$, with optimal value $v^* = 0$.

در مثال بالا با توجه به این که مقدار y_2 برابر صفر است میتوان x_2 را بر هر مولفه دیگری از جمله x_1 در متغییرهای بیسیک قرار داد.

BFS= Basic Feasible Solution

مدل هایی که **کانستریت های آنها مساوی** دارند با دو روش قابل حل هستند

۱–با روش دو مرحله ای – در این روش حواسمان باشد که باید در نهایت قسمت سمت راست متغیرهای جعلی صفر شود– اگر نشد جواب فیزبل نداریم

۲–با روش دوآل

Basic Variables	**متغییرهای اصلی**			**متغییرهای کمکی**			**متغییرهای جعلی**			**قسمت سمت راست**
Z	**X_1**	**X_2**	**....**	**S_1**	**S_2**	**....**	**R_1**	**R_2**	**....**	**در روش دو مرحله ای از این متغییرها استفاده میشود– این روش برای کانسترین هایی که بزرگتر مساوی هستند صفر یا مساوی صفر هستند کاربرد دارد–فقط حواسمان باشد که بعد از اجرای فاز اول باید سمت راست z برابر صفر گردد.**
S_i,R_i with positive coefficients										**مقدارهای اپتیمال**

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.5.1 Optimality conditions

Given

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & w = \underline{b}^T \underline{y} \\ \text{s.t.} & \underline{y}^T A \leq \underline{c}^T \\ & \underline{y} \geq \underline{0}. \end{array}$$

Two feasible solutions $\underline{x}^* \in X$ and $\underline{y}^* \in Y$, with $X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\underline{x} \geq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ and $Y = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^m \ : \ \underline{y}^T A \leq \underline{c}^T, \underline{y} \geq \underline{0}\}$, are optimal if and only if

$$\underline{y}^{*T} \underline{b} = \underline{c}^T \underline{x}^*$$

If x_j and y_i are unknown, this is a single equation in $n + m$ unknowns!
Since $\underline{y}^{*T} \underline{b} \leq \underline{y}^{*T} A\underline{x}^* \leq \underline{c}^T \underline{x}^*$, we have

$$\underline{y}^{*T} \underline{b} = \underline{y}^{*T} A\underline{x}^* \text{ and } \underline{y}^{*T} A\underline{x}^* = \underline{c}^T \underline{x}^*$$

and therefore

$$\underline{y}^{*T}(A\underline{x}^* - \underline{b}) = \underline{0} \text{ and } (\underline{c}^T - \underline{y}^{*T} A)\underline{x}^* = \underline{0}.$$

These are $m + n$ equations in $n + m$ unknowns.

Necessary and sufficient optimality conditions.

Example:

$$(P)\quad \begin{array}{llllll} \min & 13x_1 & +10x_2 & +6x_3 & & \\ \text{s.t.} & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 8 \\ & 3x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & x1, & x2, & x3 & \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{llll} \max & 8y_1 & +3y_2 & \\ \text{s.t.} & 5y_1 & +3y_2 & \leq 13 \\ & y_1 & +y_2 & \leq 10 \\ & 3y_1 & & \leq 6 \end{array}$$

در دوآل

۱–مین به ماکس با بلعکس تغییر میکند.

۲–باید شرط های ماکسیمم به صورت $A\underline{x} \leq \underline{b}$ و شرط های مینیمم به صورت $A\underline{x} \geq \underline{b}$ باشند و اگر نبودند باید به این صورت در بیاوریم.

۳–جلوی کانسترین ها $y_1, \ldots, y_n$ قرار می دهیم که در آن n تعداد کانسترین هاست.

۴–برای متغییرهای تصمیم جدید اگر کانسترین جلوی آن مساوی بود unrestricted و در غیر این صورت بزرگتر یا مساوری قرار می دهیم.

۵–حال با توجه به کانسترین های اولیه عمل میکنیم اگر کانسترین های اولیه unrestricted بود جلوی محدودیت متناظر با آن مساوی و در غیر این صورت با توجه به عملگر max یا min کوچکتر مساوی یا بزرگتر مساوی قرار می دهیم.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

(P)
$$\begin{aligned} &Max\ \ z(x_1,x_2)=M_1x_1+M_2x_2 \\ &s.t.\ C1\le N_1 && \mid y_1 \\ &\quad\ C2\le N_2 && \mid y_2 \\ &x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{aligned}$$

(D)
$$\begin{aligned} &Min\ \ w(y_1,y_2)=N_1y_1+N_2y_2 \\ &s.t.\ C1^T\ge M1 \\ &\quad\ C2^T\ge M2 \\ &y_1\ge 0, y_2\ge 0 \end{aligned}$$

(PD)
$$\begin{aligned} &Min\ \ w(y_1,y_2)=N_1y_1+N_2y_2 \\ &s.t.\ C1^T\ge M1 && \mid x_1 \\ &\quad\ C2^T\ge M2 && \mid x_2 \\ &y_1\ge 0, y_2\ge 0 \end{aligned}$$

(DD)
$$\begin{aligned} &Max\ \ z(x_1,x_2)=M_1x_1+M_2x_2 \\ &s.t.\ C1\le N_1 \\ &\quad\ C2\le N_2 \\ &x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{aligned}$$

Dual problems

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \max & z=\underline{c}^T\underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x}\le \underline{b} \\ & \underline{x}\ge \underline{0} \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \min & w=\underline{b}^T\underline{y} \\ \text{s.t.} & A^T\underline{y}\ge \underline{c} \\ & \underline{y}\ge \underline{0} \end{array}$$

What is the dual of a LP in standard form?

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & z=\underline{c}^T\underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x}=\underline{b} \\ & \underline{x}\ge \underline{0} \end{array} \equiv \begin{array}{ll} -\max & -z=-\underline{c}^T\underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x}\le \underline{b} \\ & -A\underline{x}\le -\underline{b} \\ & \underline{x}\ge \underline{0} \end{array}$$

$$(D)\quad \begin{array}{ll} -\min & [\underline{b}^T \quad -\underline{b}^T]\begin{bmatrix}\underline{y}^1\\ \underline{y}^2\end{bmatrix} \\ \text{s.t.} & [A^T \quad -A^T]\begin{bmatrix}\underline{y}^1\\ \underline{y}^2\end{bmatrix}\ge -\underline{c} \\ & \underline{y}^1,\underline{y}^2\ge \underline{0} \end{array} \equiv \begin{array}{ll} -\min & -\underline{b}^T(\underline{y}^2-\underline{y}^1) \\ \text{s.t.} & -A^T(\underline{y}^2-\underline{y}^1)\ge -\underline{c} \\ & \underline{y}^1,\underline{y}^2\ge \underline{0} \end{array}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

And letting $\underline{y} = \underline{y}^2 - \underline{y}^1$ (unrestricted in sign)

$$\begin{array}{ll} -\min & -\underline{b}^T(\underline{y}^2 - \underline{y}^1) \\ \text{s.t.} & -A^T(\underline{y}^2 - \underline{y}^1) \geq -\underline{c} \\ & \underline{y}^1, \underline{y}^2 \geq \underline{0} \end{array} \equiv \begin{array}{ll} \max & w = \underline{b}^T \underline{y} \\ \text{s.t.} & A^T \underline{y} \leq \underline{c} \\ & \underline{y} \in \mathbb{R} \end{array}$$

Property 1

The dual of the dual problem coincides with the primal problem.

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \min & w = \underline{b}^T \underline{y} \\ \text{s.t.} & A^T \underline{y} \geq \underline{c} \\ & \underline{y} \geq \underline{0} \end{array} \quad \ldots$$

Note It doesn't matter which one is a maximum or minimum problem.

Example

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -3x_1 - 2x_2 \leq -12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{dual} \begin{array}{ll} \min & 2y_1 - 12y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 - 3y_2 \geq 1 \\ & -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Using the above rules:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{dual} \begin{array}{ll} \min & 2y_1 + 12y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ & -y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 \end{array} \xrightarrow{\bar{y}_2 = -y_2} \begin{array}{ll} \min & 2y_1 - 12\bar{y}_2 \\ \text{s.t.} & y_1 - 3\bar{y}_2 \geq 1 \\ & -y_1 - 2\bar{y}_2 \geq 1 \\ & y_1, \bar{y}_2 \geq 0 \end{array}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.5.1 Optimality conditions

Given

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & w = \underline{b}^T \underline{y} \\ \text{s.t.} & \underline{y}^T A \leq \underline{c}^T \\ & \underline{y} \geq \underline{0}. \end{array}$$

Two feasible solutions $\underline{x}^* \in X$ and $\underline{y}^* \in Y$, with $X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\underline{x} \geq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ and $Y = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^m \ : \ \underline{y}^T A \leq \underline{c}^T, \underline{y} \geq \underline{0}\}$, are optimal if and only if

$$\underline{y}^{*T} \underline{b} = \underline{c}^T \underline{x}^*$$

If x_j and y_i are unknown, this is a single equation in $n+m$ unknowns!
Since $\underline{y}^{*T} \underline{b} \leq \underline{y}^{*T} A\underline{x}^* \leq \underline{c}^T \underline{x}^*$, we have

$$\underline{y}^{*T} \underline{b} = \underline{y}^{*T} A\underline{x}^* \text{ and } \underline{y}^{*T} A\underline{x}^* = \underline{c}^T \underline{x}^*$$

and therefore

$$\underline{y}^{*T}(A\underline{x}^* - \underline{b}) = \underline{0} \text{ and } (\underline{c}^T - \underline{y}^{*T} A)\underline{x}^* = \underline{0}.$$

These are $m+n$ equations in $n+m$ unknowns.

Necessary and sufficient optimality conditions.

Theorem: Complementary slackness conditions

$\underline{x}^* \in X$ and $\underline{y}^* \in Y$ are optimal solutions of, respectively, (P) and (D) if and only if

$$\begin{array}{lll} y_i^* & \overbrace{(\underline{a}_i^T \underline{x}^* - b_i)}^{\text{slack } s_i \text{ of } i\text{-th constraint of (P)}} & = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \underbrace{(c_j^T - \underline{y}^{*T} A_j)}_{\text{slack } s_j' \text{ of } j\text{-th constraint of (D)}} & x_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

where $\underline{a}_i$ denotes the i-th row of A and A_j the j-th column of A.

At optimality, the product of each variable with the corresponding slack variable of the constraint of the relative dual is $= 0$.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Example:

$$(P)\quad \begin{array}{llllll} \min & 13x_1 & +10x_2 & +6x_3 & & \\ \text{s.t.} & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 8 \\ & 3x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & x1, & x2, & x3 & \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{llll} \max & 8y_1 & +3y_2 & \\ \text{s.t.} & 5y_1 & +3y_2 & \leq 13 \\ & y_1 & +y_2 & \leq 10 \\ & 3y_1 & & \leq 6 \end{array}$$

Verify that the feasible $\underline{x}^* = (1,0,1)^T$ is an optimal, non degenerate solution of (P).

Suppose it is true and derive, via the complementary slackness conditions, the corresponding optimal solution of (D).

Since (P) is in standard form, the conditions $y_i^*(\underline{a}_i^T\underline{x}^* - b_i) = 0$ hold for $i = 1,2$.

Condition $(c_j^T - \underline{y}^{*T}A_j)x_j^* = 0$ is satisfied for $j = 2$ because $x_2^* = 0$.

Since $x_1^*, x_3^* > 0$, we obtain the conditions:

$$5y_1 + 3y_2 = 13, \quad 3y_1 = 6$$

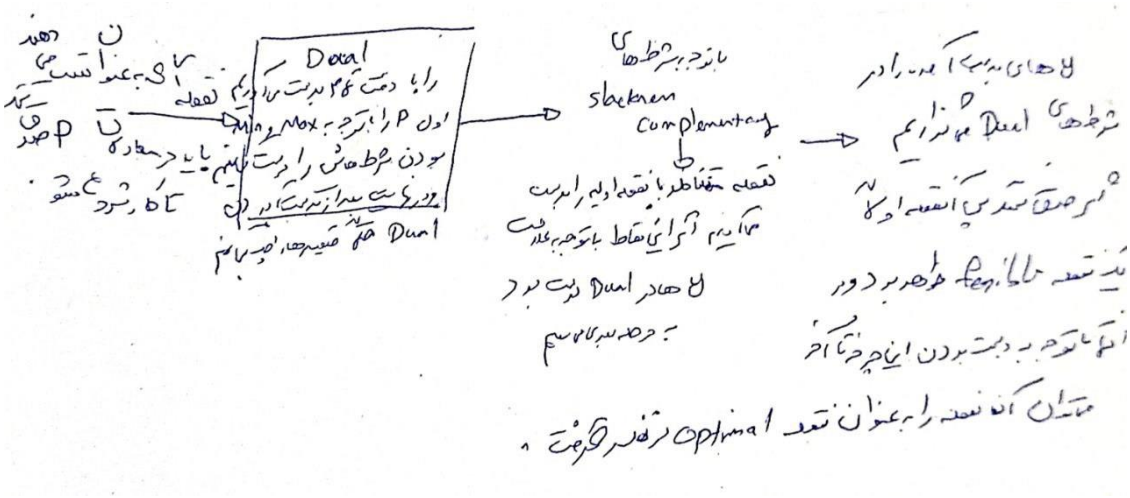
and thus the optimal solution $y_1^* = 2$ and $y_2^* = 1$ of (D) with $\underline{b}^T\underline{y}^* = 19 = \underline{c}^T\underline{x}^*$.

In (P) → $y_i^*(Ax_i - b) = 0$	→	با بررسی این شرط در نقطه داده شده میفهمیم که $y_i = 0 \ or \ y_i \neq 0$	→	In(D)→ حال شرط دوم را بررسی می کنیم و مقدار دقیق y ها را بدست می آوریم. $(c_i - y_i^*A)x_i^* = 0$	→	برای اینکه بفهمیم این نقاط بهینه هستند یا خیر باید شرط زیر برقرار باشد. $cx^* = y^*b$

X ها را اول کار در P و Y ها را آخر کار در D می سنجیم تا ببینیم اصلا

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

حل فیزبل ما هستند یا نه. به علامت Xها و Y ها دقت کنید. در صورت unrestricted بودن میتوانند منفی باشند- برای تست فیزبل بودن یا نبودن چک کردن علامت آن ها الزامیست.



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

By solving the system, we obtain $\bar{y} = (1, 0, 1)$, which satisfies the dual constraints of D_2. Since $\bar{x}$ is primal feasible and $\bar{y}$ is dual feasible, the primal/dual pair $(\bar{x}, \bar{y})$ satisfies the complementary slackness constraints and, therefore, $\bar{x}$ is an optimal solution of the primal and $\bar{y}$ is an optimal solution of the dual.

To double check, note that the objective function values of the respective problems of the two solutions are equal, namely, we have $c^T x = y^T b$.

Exercise 6

Consider the following linear programming problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ -2x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 17 \\ x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

where $x_1, x_2 \geq 0$.

دوآل مثال بالا به این شکل می باشد.

Solution

Part a)

$$\begin{aligned} \min \quad & -y_1 + 3y_2 + 17y_3 + 5y_4 + 4y_5 \\ -2y_1 + y_2 + 4y_3 - y_5 &\geq 2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

همان طور که دیده می شود, در مسئله اوریجینال x ها مثبت هستند پس اگر در سوالی به شما نقطه ای بدهند که حداکثر یکی از آنها منفی باشد بدون ورود به مسئله آن نقطه اصلا فیزبل نیست. و در انتها با توجه به اینکه y ها در مسئله دوال مثبت هستند اگر نقاط بدست آمده برای آنها منفی باشد آن جواب برای مسئله دوال آپتیمال نخواهد بود.

We get that $y_2 = -\frac{2}{5}, y_3 = \frac{3}{5}$, which is not a feasible solution to the dual problem and thus (4,1) is not optimal.

Exercise 7

Consider the following problem:

$$\max z = 9x_1 + 8x_2$$

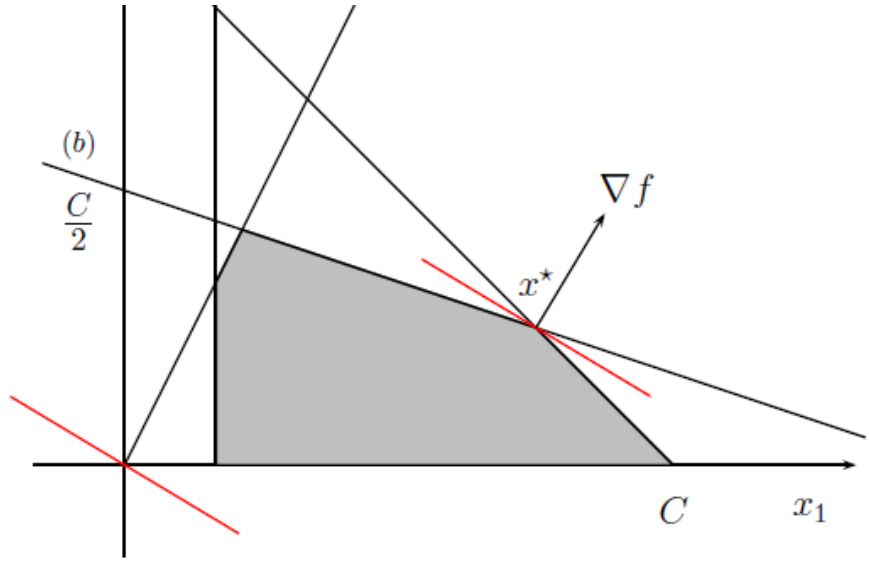
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq -1 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq -4 \end{aligned}$$

Verify if solution $x_1 = -3,\ x_2 = -1$ is optimal. Verify if solution $x_1 = -\frac{5}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}$ is optimal.

در این مثال با توجه به آنکه محدوده ای برای x مشخص نکرده است پس آنها را unrestricted در نظر می گیریم پس نقاط اولیه برای آن می توانند منفی باشند – البته همان طور که میدانید مثبت بود یا unrestricted بودن متغییرها با علامت محدودیت های ما رابطه مستقیم دارد و در نوشتن آنها حتما دقت کنید.

The risk factor represents the maximum fraction of the stock value that can be lost. A risk factor of 0.25 implies that, if stocks are bought for 100 Euro up to 25 Euro can be lost.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



ماکزیمم یا مینیمم بودن تابع هدف مهم نیست- جواب اخرین تماس خط تابع هدف با ناحیه Feasible است.

1.1 Portfolio optimization

A bank has a capital of C billions of Euro and two available stocks:

1. with an annual revenue of 15% and a risk factor of $\frac{1}{3}$,
2. with an annual revenue of 25% and risk factor of 1.

The risk factor represents the maximum fraction of the stock value that can be lost. A risk factor of 0.25 implies that, if stocks are bought for 100 Euro up to 25 Euro can be lost. It is required that at least half of C is risk-free. The amount of money used to buy stocks of (2) must not be larger than two times that used to buy stocks of (1). At least $\frac{1}{6}$ of C must be invested into (1).

Give a Linear Programming formulation for the problem of determining an optimal portfolio for which the profit is maximized. Solve the problem graphically.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Parameters

- C: available capital

Decision variables

- x_1: amount of money invested in stock of type 1
- x_2: amount of money invested in stock of type 2

Model

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 0.15x_1 + 0.25x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 \leq C \\
& \frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}C \\
& x_2 \leq 2x_1 \\
& x_1 \geq \frac{1}{6}C \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1.2 Gasoline mixture

A refinery produces two types of gasoline, mixing three basic oils according to the following gasoline mixture rules:

	Oil 1	Oil 2	Oil 3	Revenue
Gasoline A	$\leq 30\%$	$\geq 40\%$	-	5.5
Gasoline B	$\leq 50\%$	$\geq 10\%$	-	4.5

The last column of the previous table indicates the profit (Euro/barrel). The availability of each type of oil (in barrel) and the cost (Euro/barrel) are as follows:

Oil	Availability	Cost
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4

Give a Linear Programming formulation for the problem of determining a mixture that maximizes the profit (difference between revenues and costs).

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

- x_{ij}: amount of the i-th oil used to produce the j-th gasoline, for $i \in \{1,2,3\}$ and $j \in \{A,B\}$
- y_j: amount of gasoline of type j-th that is produced, for $j \in \{A,B\}$

The total revenue is $5.5y_A + 4.5y_B$, the total cost, due to the amount of oil 1, 2, and 3 that is used is, respectively, $3\sum_{j\in\{A,B\}} x_{1j}$, $6\sum_{j\in\{A,B\}} x_{2j}$, and $4\sum_{j\in\{A,B\}} x_{3j}$.

Model

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5.5y_A + 4.5y_B - 3(x_{1A} + x_{1B}) \\
& - 6(x_{2A} + x_{2B}) - 4(x_{3A} + x_{3B}) && \text{(profit)} \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_{1A} + x_{1B} \le 3000 && \text{(availability 1)} \\
& x_{2A} + x_{2B} \le 2000 && \text{(availability 2)} \\
& x_{3A} + x_{3B} \le 4000 && \text{(availability 3)} \\
& y_A = x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} && \text{(conservation A)} \\
& y_B = x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} && \text{(conservation B)} \\
& x_{1A} \le 0.3y_A && \text{(min. quantity A)} \\
& x_{1B} \le 0.5y_B && \text{(min. quantity B)} \\
& x_{2A} \ge 0.4y_A && \text{(max. quantity A)} \\
& x_{2B} \ge 0.1y_B && \text{(max. quantity B)} \\
& x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}, y_A, y_B \ge 0 && \text{(nonnegative variables)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5.5(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 4.5(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
& - 3(x_{1A} + x_{1B}) - 6(x_{2A} + x_{2B}) - 4(x_{3A} + x_{3B}) && \text{(profit)} \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_{1A} + x_{1B} \le 3000 && \text{(availability 1)} \\
& x_{2A} + x_{2B} \le 2000 && \text{(availability 2)} \\
& x_{3A} + x_{3B} \le 4000 && \text{(availability 3)} \\
& x_{1A} \le 0.3(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) && \text{(min. quantity A)} \\
& x_{1B} \le 0.5(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) && \text{(min. quantity B)} \\
& x_{2A} \ge 0.4(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) && \text{(max. quantity A)} \\
& x_{2B} \ge 0.1(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) && \text{(max. quantity B)} \\
& x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}, y_A, y_B \ge 0 && \text{(nonnegative variables)}
\end{aligned}
$$

حواستان باشد سود با درآمد فرق دارد.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Methods For Solving Linear Programming Problem

Mathematically, the general linear programming problem (LPP) may be stated as:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize or Minimize} \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{subject to} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq) \ b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq) \ b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq) \ b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Solution Methods

1. Graphical Solution LPP (x_1, x_2)
2. Algebraic Method/ Finding Basic Solution
3. Simplex method and its Variants.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Integer Linear Programming problems

Chapter 4: Integer Linear Programming (ILP)

Definition 1

An Integer Linear Programming problem is an optimization problem of the form

$$(ILP)\quad \begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \text{ with } \underline{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

If $x_j \in \{0, 1\}$ for all j, binary LP.

If not all x_j are integer, mixed integer LP.

Assumption: The parameters A, b are integer (without loss of generality).

Note: The integrality condition $x_j \in \mathbb{Z}$ is non linear since it can be expressed as $\sin(\pi x_j) = 0$.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Definition 2

Let

$$(ILP) \quad \begin{array}{rl} z_{ILP} := \max & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{x} \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

The problem

$$(LP) \quad \begin{array}{rl} z_{LP} := \max & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

is the linear (continuous) relaxation of (ILP).

Property 1

For any ILP with max, we have $z_{ILP} \leq z_{LP}$, i.e., z_{LP} is an upper bound on the optimal value of (ILP).

N.B. For any ILP with min, we have $z_{ILP} \geq z_{LP}$, i.e., z_{LP} is a lower bound on the optimal value of (ILP).

Most ILP problems are NP-hard.

$\nexists$ efficient algorithms to solve them and the existence of a polynomial time algorithm for any one would imply P = NP! Extremely unlikely.

Type of methods

- implicit enumeration: exact methods (global optimum)
- cutting planes: exact methods (global optimum)
- heuristic algorithms ("greedy", local search, ...): approximate methods (local optimum)

Implicit enumeration methods explore all feasible solutions explicitly or implicitly.

- "Branch-and-bound" method
- Dynamic programming (see optimal paths in acyclic graphs)

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

4.1 Branch-and-bound method

Idea:
Reduce the solution of a different problem to that of a sequence of simpler subproblems by (recursive) partition of the feasible region X.

Two main components: branching and bounding.

Branching:

Partition X into k subsets

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_k \quad (\text{with } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ for each pair } i \neq j)$$

and let

$$z_i = \min\{c(\underline{x}) : \underline{x} \in X_i\}, \text{ for } i = 1, \ldots, k.$$

Clearly $z = \min\{c(\underline{x}) \ : \ \underline{x} \in X\} = \min\{z_1, \ldots, z_k\}$

Illustration:

Bounding:

For each subproblem $z_i = \min\{c(\underline{x}) \ : \ \underline{x} \in X_i\}$:

- Determine an optimal solution of $\min\{c(\underline{x}) \ : \ \underline{x} \in X_i\}$ (explicit), or
- Prove that $X_i = \emptyset$ (explicit), or
- Prove that $z_i \geq z'$ = objective function value of the best feasible solution found so far (implicit).

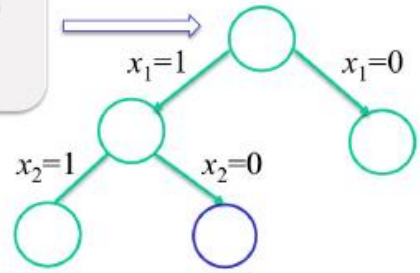
Illustration:

If the subproblem is not "solved" we generate new subproblems by further partitioning.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Example cont.:

$$\min\ 14x_1+24x_2+10x_3+28x_4$$
$$300x_1+600x_2+500x_3+1600x_4 \geq 700$$
$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$
$$0 \leq x_3 \leq 1 \quad 0 \leq x_4 \leq 1$$



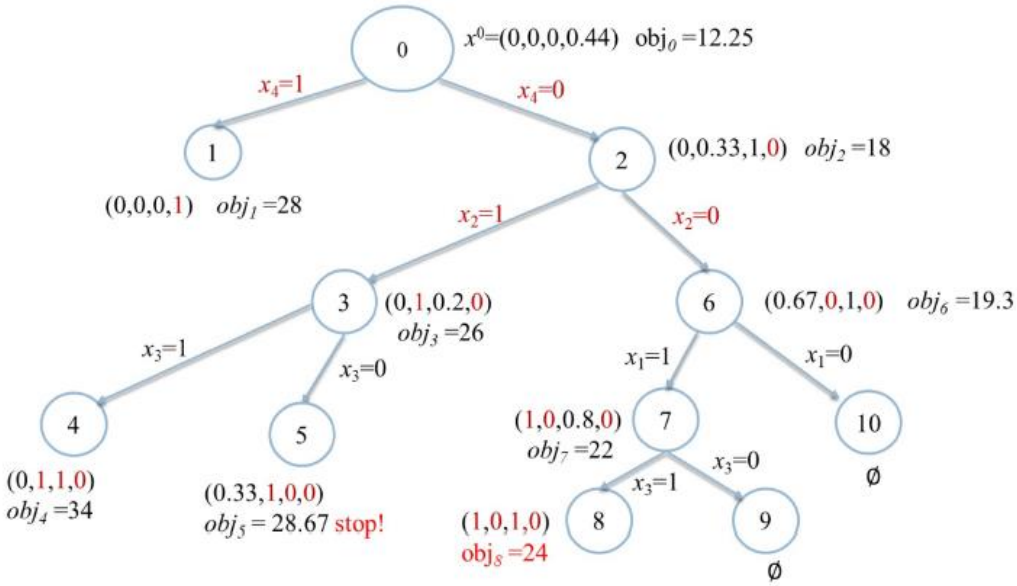
$$\min\ 14x_1+24x_2+10x_3+28x_4$$
$$300x_1+600x_2+500x_3+1600x_4 \geq 700$$
$$x_1=1 \quad x_2=0$$
$$0 \leq x_3 \leq 1 \quad 0 \leq x_4 \leq 1$$

$\Rightarrow$

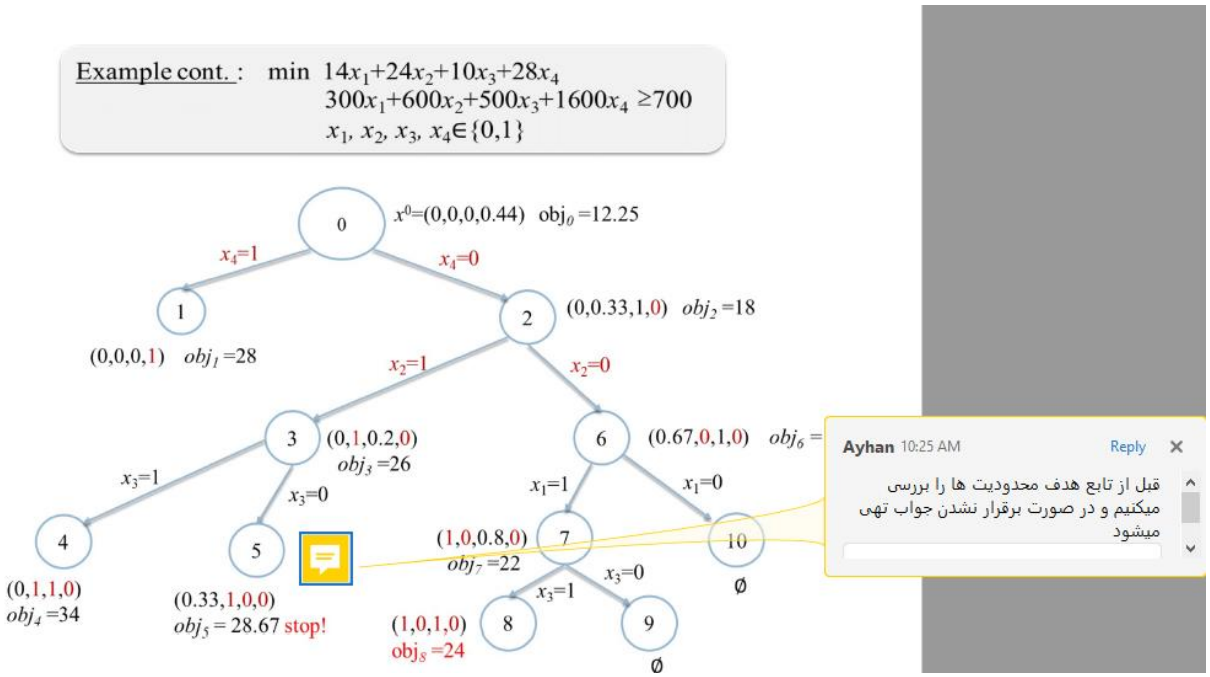
$$14 + \min\ 10x_3+28x_4$$
$$500x_3+1600x_4 \geq 400$$
$$x_3,\ x_4 \in \{0,1\}$$

Example cont. : $\min\ 14x_1+24x_2+10x_3+28x_4$

$$300x_1+600x_2+500x_3+1600x_4 \geq 700$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,1\}$$



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



4.1.1 Branch-and-bound for ILP

Given an ILP $\min\{\underline{c}^T\underline{x} \ : \ A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \text{ integer}\}$.

Branching:

Partition X into subregions (subdivision in exhaustive and exclusive subregions).

Let $\bar{\underline{x}}$ denote an optimal solution for the linear relaxation of the ILP

$$\min\{\underline{c}^T\underline{x} \ : \ A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$

and $z_{LP} = \underline{c}^T\bar{\underline{x}}$ denote the corresponding optimal value.

If $\bar{\underline{x}}$ is integer, $\bar{\underline{x}}$ is also optimal for ILP. Otherwise, $\exists \bar{x}_h$ fractional and we consider two subproblems:

$$ILP_1: \ \min\{\underline{c}^T\underline{x} \ : \ A\underline{x} = \underline{b}, x_h \leq \lfloor \bar{x}_h \rfloor, \ \underline{x} \geq \underline{0} \text{ integer}\}$$
$$ILP_2: \ \min\{\underline{c}^T\underline{x} \ : \ A\underline{x} = \underline{b}, x_h \geq \lfloor \bar{x}_h \rfloor + 1, \ \underline{x} \geq \underline{0} \text{ integer}\}$$

Bounding:

Determine a lower "bound" (if minimization ILP) on the optimal value z_i of a subproblem of ILP by solving its linear relaxation.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

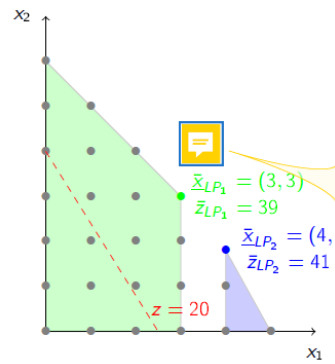
Example (cont.)

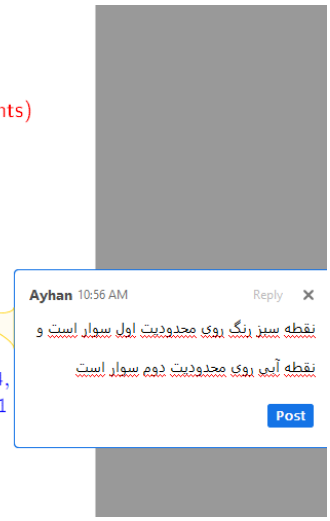
The feasible region X is partitioned into X_1 and X_2 by imposing:

$x_1 \leq \lfloor \bar{x}_1 \rfloor = 3$ or $x_1 \geq \lfloor \bar{x}_1 \rfloor + 1 = 4$ (exhaustive and exclusive constraints)

Subproblem S_1: subregion X_1
Subproblem S_2: subregion X_2

$\bar{x}_{LP_1}$ is integer $\Rightarrow$ Integer solution!
$\Rightarrow z_{ILP_1} = z_{LP_1}$





4.2 Cutting plane methods and Gomory fractional cuts

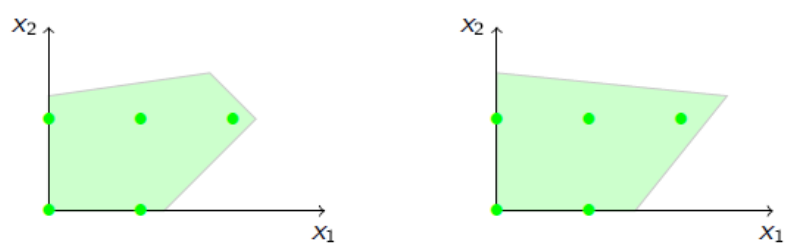
Consider a generic ILP problem:

$$(ILP) \quad \begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A\underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \text{ integer} \end{array}$$

Feasible region:
$X = \{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n : A\underline{x} \geq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$

Assumption: a_{ij}, c_j and b_i integer.

Note: The feasible region of an ILP can be described by different sets of constraints that may be weaker/tighter.



Infinitely many formulations!

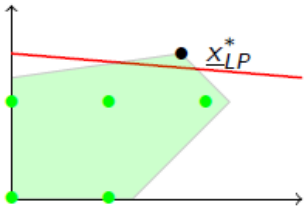
با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

4.2.1 Cutting plane methods

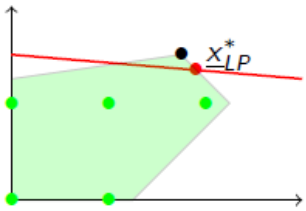
A full description of $conv(X)$ is not required, we just need a good description in the neighborhood of the optimal solution.

Definition 3

A cutting plane is an inequality $\underline{a}^T \underline{x} \leq b$ that is not satisfied by $\underline{x}^*_{LP}$ but is satisfied by all the feasible solutions of the ILP.



Idea:
Given an initial formulation, iteratively add cutting planes as long as the linear relaxation does not provide an optimal integer solution.



4.2.2 Gomory fractional cuts

Let $\underline{x}^*_{LP}$ be an optimal solution of the linear relaxation of the current formulation $\min\{\underline{c}^T\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ and $x^*_{B[r]}$ be a fractional basic variable.

The corresponding row of the optimal tableau is:

$$x_{B[r]} + \underbrace{\sum_{j \in N}}_{x_j \text{ non basic}} \bar{a}_{rj} x_j = \underbrace{\bar{b}_r}_{fractional} \qquad (1)$$

Ralph Gomory 1929-

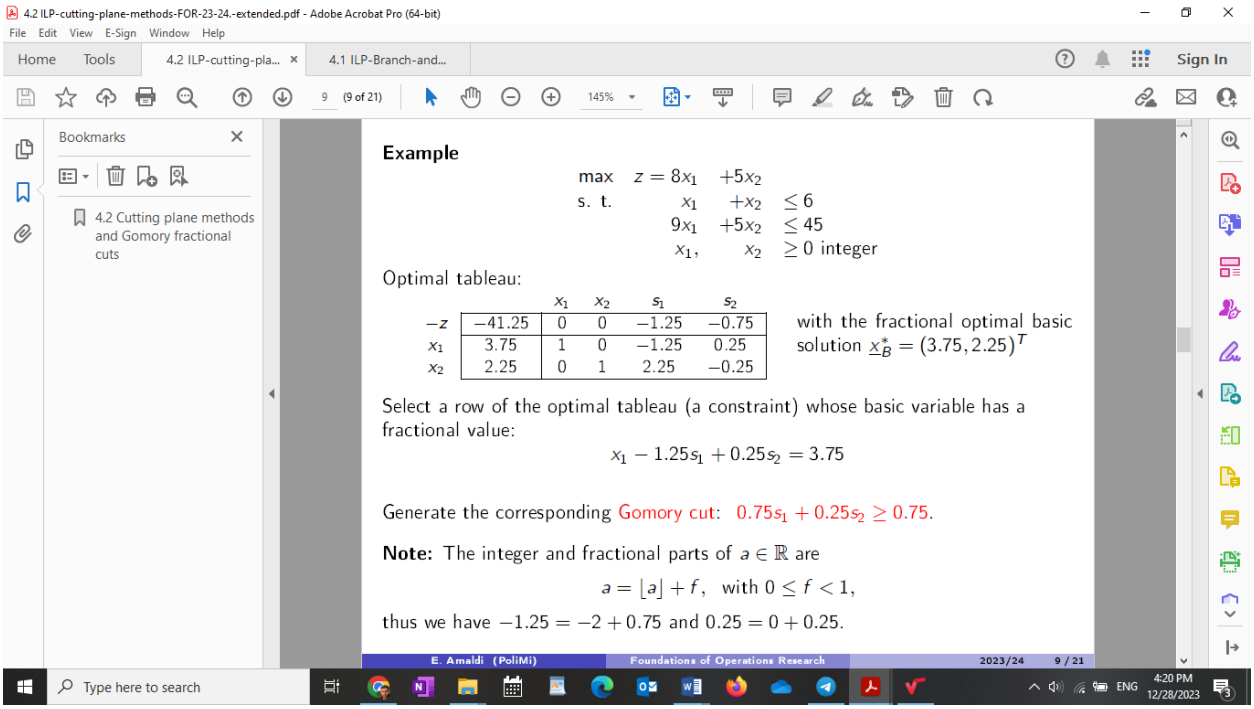
Definition 4

The Gomory cut w.r.t. the fractional basic variable $x_{B[r]}$ is:

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{rj} - \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor) x_j \geq (\bar{b}_r - \lfloor \bar{b}_r \rfloor)$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Example



Example

$$\begin{array}{lrl} \max & z = 8x_1 + 5x_2 & \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\ & x_1, \quad x_2 & \geq 0 \text{ integer} \end{array}$$

Optimal tableau:

		x_1	x_2	s_1	s_2
$-z$	-41.25	0	0	-1.25	-0.75
x_1	3.75	1	0	-1.25	0.25
x_2	2.25	0	1	2.25	-0.25

with the fractional optimal basic solution $\underline{x}_B^* = (3.75, 2.25)^T$

Select a row of the optimal tableau (a constraint) whose basic variable has a fractional value:

$$x_1 - 1.25s_1 + 0.25s_2 = 3.75$$

Generate the corresponding Gomory cut: $0.75s_1 + 0.25s_2 \geq 0.75$.

Note: The integer and fractional parts of $a \in \mathbb{R}$ are

$$a = \lfloor a \rfloor + f, \quad \text{with } 0 \leq f < 1,$$

thus we have $-1.25 = -2 + 0.75$ and $0.25 = 0 + 0.25$.

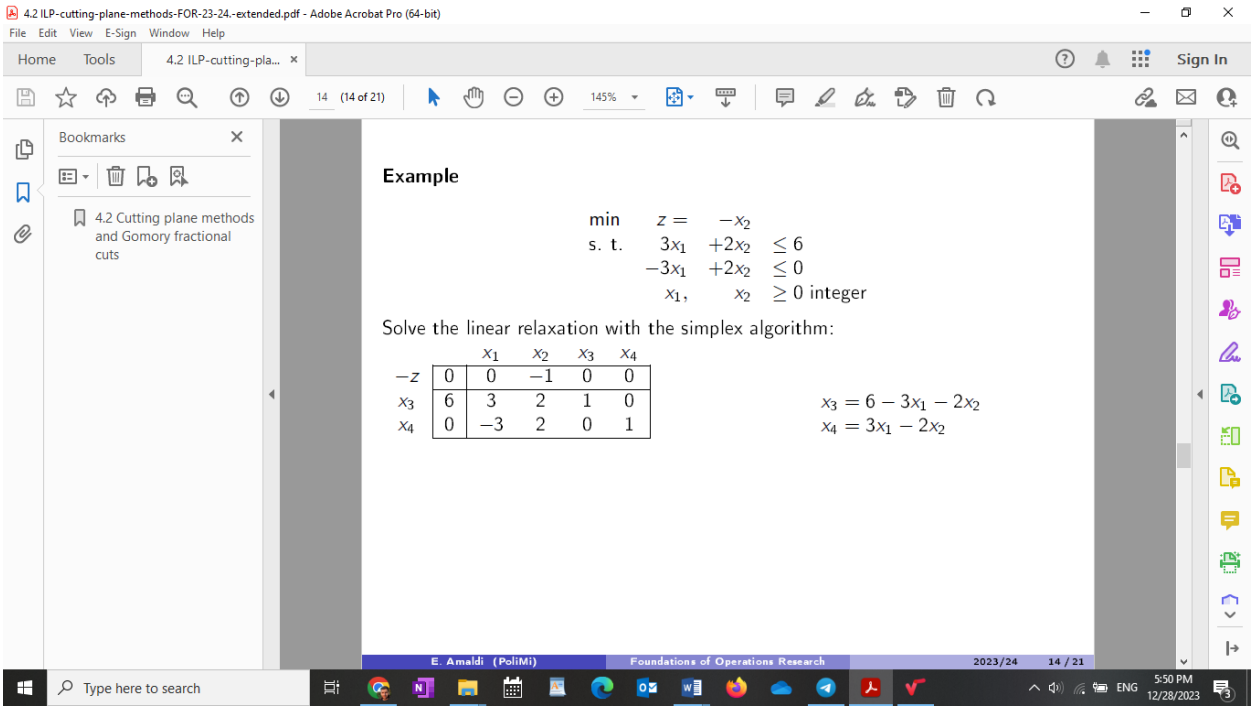
اینجا مسئله برای ماکزیمم داده شده است پس در اولین قدم آن را به مینیمم تبدیل میکنیم با این کار این مسئله را به حالت حل در dual simplex algorithm میبریم و در نهایت فق یک منی به عدد بدست امده برای z ضرب میکنیم.

یادمان باشد برای حل سیمپلکس با تابلو تابع را اگر ماکزیمم بود بعد از به یکسو بردن ضرایب از منفی ترین ضریب شروع به حل جدول تابلو میکردیم و برای میبیمم از بزرگترین عدد مثبت استفاده میکردیم.

قدم های حل این مسائل:

۱-

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	0	-1	0	0
x_3	6	3	2	1	0
x_4	0	-3	2	0	1

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.4 Simplex method-FOR-23-24-extended-covered-till-page-23.pdf - Adobe Acrobat Pro (64-bit)

Bookmarks: 3. Linear Programming (LP) — 3.4 Simplex method

"Pivoting" operation

Same operations used in the Gaussian elimination method to solve systems of linear equations.

Given $A\underline{x} = \underline{b}$:

1. Select a coefficient $\bar{a}_{rs} \neq 0$ (the "pivot")
2. Divide the r-th row by $\bar{a}_{rs}$.
3. For each row i with $i \neq r$ and $\bar{a}_{is} \neq 0$, subtract the resulting r-th row multiplied by $\bar{a}_{is}$.

	s		A		$\underline{b}$					
	1	1	1	0	6	$\longrightarrow$	0	1/2	1	-1/2	2
$r \rightarrow$	2	1	0	1	8		1	1/2	0	1/2	4

pivot

columns of basic variables

Note: This does not affect the feasible solutions.

E. Amaldi (PoliMi) Foundations of Operations Research 2023/24 14 / 28

3.4 Simplex method-FOR-23-24-extended-covered-till-page-23.pdf - Adobe Acrobat Pro (64-bit)

Bookmarks: 3. Linear Programming (LP) — 3.4 Simplex method

Moving to an adjacent basic feasible solution (vertex)

Goals: - improve the objective function value
- preserve feasibility

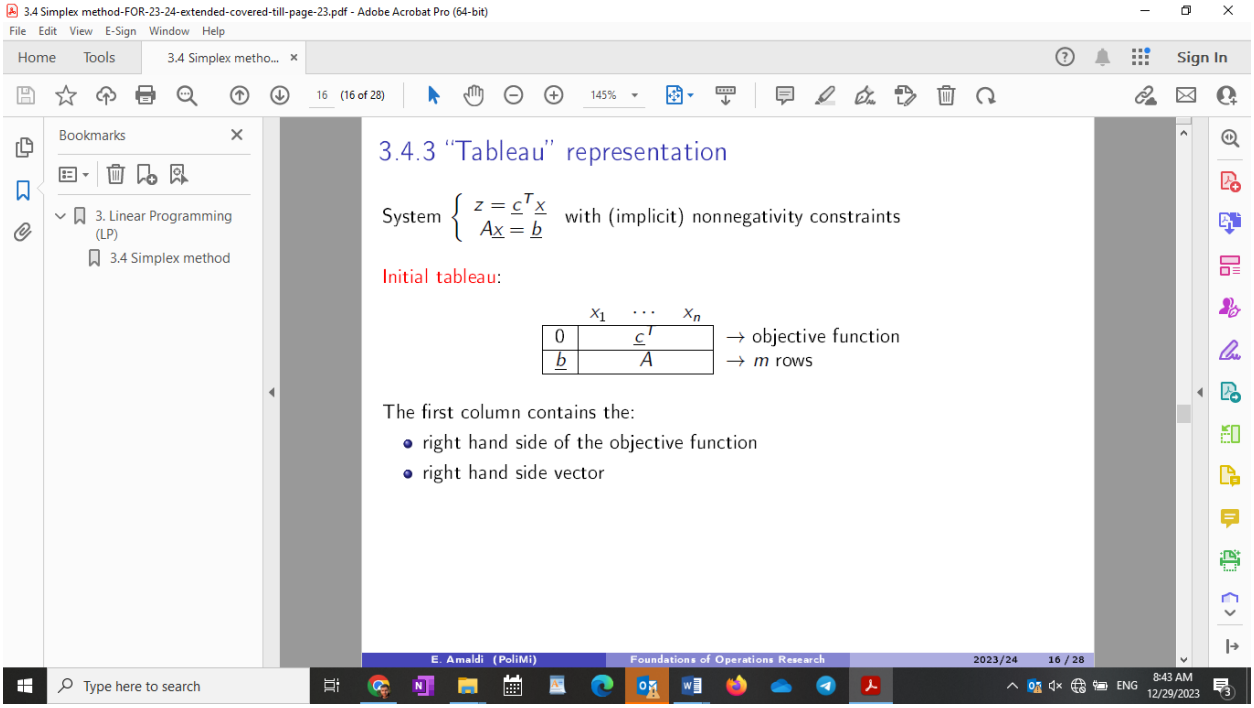
1. Which non basic variable enters the basis? (choice of pivot column s.)
   - Any one with reduced cost $\bar{c}_j < 0$.
   - One that yields the maximum Δz w.r.t. $z = c_B^T B^{-1} b$ (the actual decrement Δz also depends on θ^*).
   - Bland's rule: $s = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$. ($\bar{c}_j > 0$ for maximization problems.)
2. Which basic variable leaves the basis?

   Min ratio test: index i with smallest $\bar{b}_i/\bar{a}_{is} = \theta^*$ (thightest upper bound on increase of x_s) among those with $\bar{a}_{is} > 0$ (otherwise no limit!).
   - Bland's rule: $r = \min\{i : \bar{b}_i/\bar{a}_{is} = \theta^*, \bar{a}_{is} > 0\}$
   - randomly...

Unboundedness: If $\exists \bar{c}_j < 0$ with $\bar{a}_{ij} \leq 0 \forall i$, no element of the j-th column can play the role of a pivot. $\Rightarrow$ The minimization problem is unbounded!

E. Amaldi (PoliMi) Foundations of Operations Research 2023/24 15 / 28

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.5 Linear Programming duality-FOR-23-24-extended-slightly-updated-p18-p22.pdf - Adobe Acrobat Pro (64-bit)

Motivation: estimate of the optimal value

Given

$$\begin{array}{lrl} \max & z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \le 1 & (1) \\ & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 55 & (2) \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \le 3 & (3) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \ge 0 & \end{array}$$

find an estimate of the optimal value z^*.

Any feasible solution provides a lower bound on z^*:

$$(0,0,1,0) \Rightarrow z^* \ge 5$$
$$(2,1,1,1/3) \Rightarrow z^* \ge 15$$
$$(3,0,2,0) \Rightarrow z^* \ge 22$$
$$\dots$$

Even if we are lucky, we are not sure it is the best lower bound!

E. Amaldi (PoliMi) Foundations of Operations Research 2023/24 3 / 24

3.5 Linear Programming duality-FOR-23-24-extended-slightly-updated-p18-p22.pdf - Adobe Acrobat Pro (64-bit)

Upper bounds:

- By multiplying constraint (2) by 5/3, we obtain an inequality that dominates the objective function:

$$25/3\, x_1 + 5/3\, x_2 + 5x_3 + 40/3\, x_4 \le 275/3 \quad \forall \text{ feasible solution}$$
$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 25/3\, x_1 + 5/3\, x_2 + 5x_3 + 40/3\, x_4$$
$$\Rightarrow z^* \le 275/3$$

- By adding constraints (2) and (3), we obtain:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \le 58$$
$$\Rightarrow z^* \le 58 \text{ (better upper bound)}$$

Linear combinations with nonnegative multipliers of inequality constraints yield valid upper bounds.

E. Amaldi (PoliMi) Foundations of Operations Research 2023/24 4 / 24

Max/Min →Standard form = Min

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.1 Equivalent forms

General form:

$$
\begin{array}{lll}
\min(\max) & z = \underline{c}^T \underline{x} & \\
\text{s. t.} & A_1 \underline{x} \geq \underline{b}_1 & \text{inequality constraints} \\
 & A_2 \underline{x} \leq \underline{b}_2 & \text{inequality constraints} \\
 & A_3 \underline{x} = \underline{b}_3 & \text{equality constraints} \\
 & x_j \geq 0, \quad \text{for } j \in J \subseteq \{1, \ldots, n\} & \\
 & x_j \text{ free}, \quad \text{for } j \in \{1, \ldots, n\} \backslash J &
\end{array}
$$

Definition 3 (Standard form)

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = \underline{c}^T \underline{x} & \\
\text{s. t.} & A\underline{x} = \underline{b} & \text{only equality constraints and} \\
 & \underline{x} \geq \underline{0} & \text{all nonnegative variables}
\end{array}
$$

- The two forms are equivalent.
- Simple transformation rules allow to pass from one form to the other form.

Warning: The transformation may involve adding/deleting variables and/or constraints.

در حل به روش گرافیکی اگر برای دو متغییر سه محدودیت داشته باشیم, نقطه اپتیمال از برخورد هر کدام از دو محدودیت بدست آید اسلک های آنها صفر و اسلک محدودیت دیگر غیر صفر خواهد بود.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

3.4 Two-phase Simplex algorithm with Bland's rule

Solve the following linear program

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 \qquad + 3x_3 = 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

by applying the two-phase Simplex algorithm with Bland's rule.

AMPL

```
var $i$ = set $I$

var $x_i$ = Positive Variables with $i \in$  $\{I \cup 0 \}$

Parameter $b_{i,j}$ with $i \in \{ I$ and $j \in i \cup 0\}$

Parameter $b_{i,j}$ with $i \in \{I$ and $j \in i \cap 0\}$

Parameter $b_{i,j}$ with $i \in \{ I$ and $j \notin i \cap 0 \}$

Parameter $b_{i,j}$ with $i \in \{ I$ and $j \notin i \cup 0 \}$

$A \subset B$

$C \subseteq D$

$A \not\subset B$

$i\in \{1,2\}$

set $I=[1,2,3,4,5]$

$b_{i,j}$

$$\sum_{i \in I}\sum_{j \in I}$$

$$\sum\limits_{d}^{o}b_{i,j}x_j \le \sum\limits_{g}^{l}{f_{i,0}}{x_0}$$
```

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

```
Parameter $n$

set $I$ of all the integers between $1$ and $n$

$x_{i}\ge 0$ with $i \in \{ I \cup 0 \}$

$$x_{i}>s\sum\limits_{k=0}^{j-
1}{x_{k}}                    \quad\quad\qquad\qquad \forall j \in I$$

$(i,j)\in J$

$$\sum_{i\in N | (i,j)\in A}$$

$\{N \times N \}$

$$max\sum_{i\in I}\sum_{j\in J:i\ne j}$$
```

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Parameter $b_{i,j}$ with $i \in \{I \text{ and } j \notin i \cup 0\}$

$A \subset B$

$C \subseteq D$

$A \not\subset B$

$i \in \{1, 2\}$

set $I = [1, 2, 3, 4, 5]$

$b_{i,j}$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I}$$

$$\sum_{d}^{o} b_{i,j} x_j \leq \sum_{g}^{l} f_{i,0} x_0$$

Parameter n

set I of all the integers between 1 and n

$x_i \geq 0$ with $i \in \{I \cup 0\}$

$$x_i > s \sum_{k=0}^{j-1} x_k \qquad \forall j \in I$$

$(i, j) \in J$

$$\sum_{i \in N | (i,j) \in A}$$

$\{N \times N\}$

$$max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J : i \neq j}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Exercise 5

Solve the following linear programming problem using the Simplex algorithm with Bland's rule:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Solution

We will execute the two-phase simplex method. In Phase I we look for a basic feasible expressed in canonical form or establish that the original LP is infeasible. The auxiliary LP problem is:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + w_1 = 6 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

We express the objective function in terms of the nonbasic variables.

$$w_1 = 6 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$w_2 = 2 - x_1 - x_2 - 2x_3$$

Therefore,

$$w_1 + w_2 = 8 - 3x_1 - 2x_2 - 3x_3.$$

		x_1	x_2	x_3	w_1	w_2
	-8	-3	-2	-3	0	0
w_1	6	2	1	1	1	0
w_2	2	1	1	2	0	1

Iteration 1: Using Bland's rule x_1 enters the basis. $\theta = \min\{\frac{6}{2}, \frac{2}{1}\} = 2$, thus w_2 exists the basis. The next tableau is

		x_1	x_2	x_3	w_1	w_2
	-2	0	1	3	0	3
w_1	2	0	-1	-3	1	-2
x_1	2	1	1	2	0	1

Since the reduced costs of all the non basic variables are non negative, the corresponding basic feasible solution $[w_1, x_1] = [2, 2]$ and $[x_2, x_3, w_2] = [0, 0, 0]$ with the objective function value of 2 is an optimal solution of the auxiliary problem. Thus the original LP problem is infeasible because the objective function value of the auxiliary problem is strictly positive (and not equal to zero).

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Exercise 6

Consider the following linear programming problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ -2x_1 - x_2 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 17 \\ x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

where $x_1, x_2 \geq 0$.

a) Write the dual problem of the given problem.

b) Write the equations defining the complementarity slackness for the given problem (Notice that the problem and its dual are in symmetric form).

c) Exploiting the complementarity conditions say whether points (3,5) and (4,1) are optimal.

Solution

Part a)

$$\begin{aligned} \min \quad & -y_1 + 3y_2 + 17y_3 + 5y_4 + 4y_5 \\ -2y_1 + y_2 + 4y_3 - y_5 &\geq 2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Part b)
The equations of complementary slackness are:

$$\begin{aligned} (-2x_1 - x_2 + 1)y_1 &= 0 \\ (x_1 - x_2 - 3)y_2 &= 0 \\ (4x_1 + x_2 - 17)y_3 &= 0 \\ (x_2 - 5)y_4 &= 0 \\ (-x_1 + x_2 - 4)y_5 &= 0 \\ (-2y_1 + y_2 + 4y_3 - y_5 - 2)x_1 &= 0 \\ (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - 1)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Part c)
Point (3,5) is feasible for the primal problem. By using the equations of complementary slackness we have that:

$$\begin{aligned}(-2x_1 - x_2 + 1)y_1 = 0 &\Rightarrow y_1 = 0\\ (x_1 - x_2 - 3)y_2 = 0 &\Rightarrow y_2 = 0\\ (-x_1 + x_2 - 4)y_5 = 0 &\Rightarrow y_5 = 0\\ x_1 > 0 &\Rightarrow 4y_3 = 2\\ x_2 > 0 &\Rightarrow y_3 + y_4 = 1\end{aligned}$$

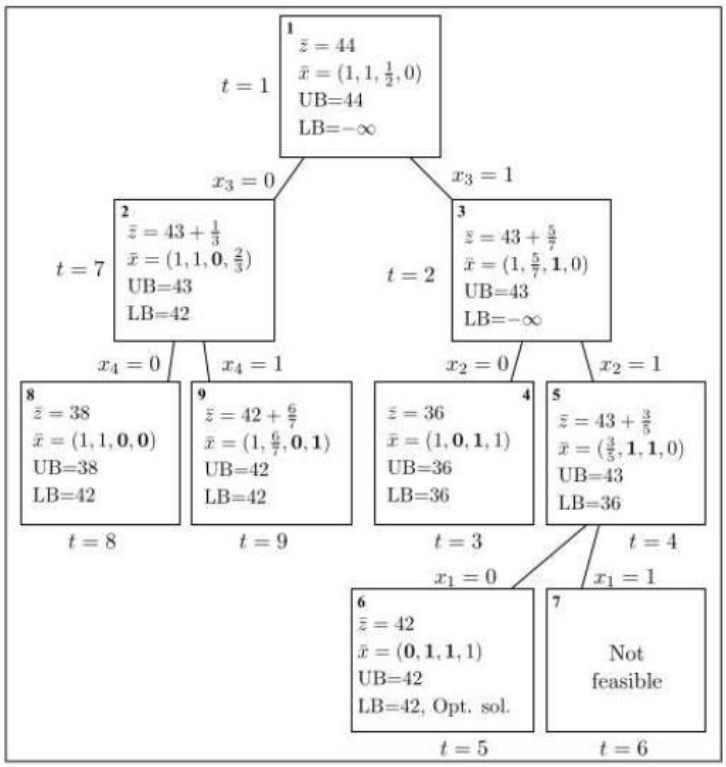
We get that $y_3 = \frac{1}{2}, y_4 = \frac{1}{2}$, which is a feasible solution to the dual problem and thus (3,5) is optimal.

Point (4,1) is feasible for the primal problem. By using the equations of complementary slackness we have that:

$$\begin{aligned}(-2x_1 - x_2 + 1)y_1 = 0 &\Rightarrow y_1 = 0\\ (x_2 - 5)y_4 = 0 &\Rightarrow y_4 = 0\\ (-x_1 + x_2 - 4)y_5 = 0 &\Rightarrow y_5 = 0\\ x_1 > 0 &\Rightarrow y_2 + 4y_3 = 2\\ x_2 > 0 &\Rightarrow -y_2 + y_3 = 1\end{aligned}$$

We get that $y_2 = -\frac{2}{5}, y_3 = \frac{3}{5}$, which is not a feasible solution to the dual problem and thus (4,1) is not optimal.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.



۱-ابتدا با توجه به الگوریتم گریدی سری غیر صعودی را بدست می‌آوریم

۲- سپس مقدار ها را برای xها با توجه به این که شرط ما برقرار باشد را مینویسیم

۳-از متغییری که عدد کسری دارد شروع به حل می کنیم در این مسیر برای باند بالا جز صحیح z را می گذاریم و برای باند پایین منفی بینهایت قرار میدهیم

٤-شروع به حل میکنیم یکی از شاخه ها را گرفته ادامه میدهیم و هر سری باند بالا را اپدیت میکنیم و باند پایین را برابر منی بینهایت قرار می دهیم تا به جایی برسیم که باند بالا و پایین یکی شوند و به یک جواب فیزبل اولیه برسیم

٥-بعد از آن میزان حداقل باند پایین را همین مقدار در نظر میگیریم و حل میکنیم

* جاهایی که باند بالا و پایین جابجا شوند کار تمام است

*در جاهایی که مقدار تابع کمتر از باند پایین باشد کار تمام است

*در جایی که جواب تابع ما عدد صحیح نبوده ولی جز صحیح آن کمتر یا مساوی حد پایینی باشد نیز کار تمام است.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

در شکل بالا از ۱ شروع میکند به ۲ میرود از آن به ۳ و در اینجا جواب اولیه بدست می آید و حد پایین برای اولین بار ست می شود

به یک مرحله قبل بر میگردیم و با دا شتن حد بالا و پایین ادامه می دهیم- از ۵ به ٦ میرسیم که جواب قابل قبولی نیست و آن را کنار می گذاریم – یه مرحله به قبل بر میکردیم و از ۵ به ۷ میرویم در این مرحله به خد پایین جدیدی می رسیم که از حد قبلی بالا تر است. پس کمترین حد پایین را دوباره با این عدد ست میکنیم.

به ابتدای درخت بر میگردیم از ۱ به ۲ میرویم حد پایین ٤۲ و حد بالا ٤۳ پس امیدی هست که به عدد ٤۳ برسیم

از ۲ به ۸ میرویم مقدار تابع کمتر از حد پایین می شود کارش تمام است.

از ۲ به ۹ میرویم با توجه به اینکه بعد از یک کات اقلا ٤۲ به ٤۱ تبدیل خواهد شد ادامه دادن این شاخه هم اهمیتی ندارد و کار تمام است

در نهایت ما به یک جواب صحیحح با متغییر های صحیح رسیدم و جواب اپتیمال ما می باشد.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

6) Standard form of LP

Given the following linear programming problem:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq 9 \\ 2x_1 + x_2 &= 16 \\ x_1 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

express the problem in standard form.

۱- اولین کار در این مسائل چک کردن علامت متغییرهای اصلی است. در صورت نا متعادل بودن علامت ها باید همه آنها را به صورت متغییرهای مثبت یا Unrestricted تبدیل میکنیم.

۲- چک کردن ماکزیمم یا مینیمم بود تابع هدف گام دوم است

۳- در این گام اگر تابع هدف مینیمم بود کاری نمی کنیم ولی اگر ماکزیمم بود آن را به مینیمم تبدیل کرده و یک منفی به دو طرف Z ضرب میکنیم.

۴- در مرحله بعد با توجه به علامت محدودیت ها سورپلاس یا اسلک ها را به آنها اضافه میکنیم تا نامعادلات به معادله تبدیل گردند.

حل مسائله بالا به دو طریق امکان پذیر است. که یکی از آنها به صورت زیر است و با توجه به این که اینجا فقط از ما خواسته شده که به فرم استاندارد ببریم میتوانیم در روش دوم کانستریت ۴ را در نظر بگیریم ولی متغییر اصلی اول را unrestricted در نظر بگیریم – اگر از ما خواسته شده باشد که این دستگاه را حل کنیم چاره ای نداریم که هم کاری که در روش زیر انجام شده را در نظر بگیریم و پیچیدگی کار ما بیشتر خواهد شد. بهترین روش برای حل این دستگاه استاندارد سازی به روش زیر و حل معادلات استاندارد زیر خواهد بود.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

$$
\begin{aligned}
\min z' = -2x_1' + x_2' - 10 \\
x_1' - x_2' + x_3 = -1 \\
3x_1' + 2x_2' - x_4 = -6 \\
2x_1' - x_2' = 6 \\
x_1', x_2', x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

2) Solve the following LP problem with the simplex algorithm:

$$
\begin{aligned}
\min z = x_1 - 2x_2 & \\
-3x_1 + 3x_2 &\leq 1 \\
+x_1 - x_2 &\leq 5 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

What can be deduced about the dual problem? Write the dual problem and solve it graphically to confirm the deduction.

با نزدیک نشدن به آدم ها ذهنیتتون نسبت به اونا تغییر نمیکنه و رویاهاتون نمی‌ریزه پس به آدما نزدیک نشین, با این کار اعتبار و ارزش شما هم حفظ می‌شود و هم بیشتر خواهد شد.

Solution 2

0	1	-2	0	0
1	-3	3	1	0
5	1	-1	0	1

Pivot on element $(1, 2)$

2/3	-1	0	2/3	0
1/3	-1	1	1/3	0
16/3	0	0	1/3	1

The problem is unbounded (first column non positive). Correspondingly, the dual problem is unfeasible. In fact, the dual problem is

$$\begin{aligned} \max w = y_3 + 5y_4 & \\ -3y_3 + y_4 &\leq 1 \\ +3y_3 - y_4 &\leq -2 \\ y_3, y_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

اگر سیستم اصلی ما دارای عدد منفی در سطر اول باشد(باقی بماند) و راهی برای از بین بردن آن نباشد مسئله ما unbounded خواهد شد در نتیجه می توان گفت مسئله dual آن نیز feasible نیست.

The problem is unbounded (first column non positive). Correspondingly, the dual problem is unfeasible. In fact, the dual problem is

$$\begin{aligned} \max w = y_3 + 5y_4 & \\ -3y_3 + y_4 &\leq 1 \\ +3y_3 - y_4 &\leq -2 \\ y_3, y_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

and its two constraints are incompatible: $-3y_3 + y_4 \leq 1$ is equivalent to $3y_3 - y_4 \geq -1$, but the second constaint requires that $3y_3 - y_4 \leq -2$.