Projet 5. Option avec sauts

On considère un modèle de diffusion avec sauts (suivant le modèle de Merton, c.f. Ref. 1)

$$\frac{dS}{S} = \nu dt + \sigma dW_t + (\eta - 1)dq,$$

où dq est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendant de dW_t.[2]

On montre que la valeur $v = v(t, s)$ correspondant à une option de payoff φ sur l'actif S satisfait l'E.D.P :

$$-\partial_t v - \frac{\sigma^2}{2} s^2 \partial_{ss} v - (r - \lambda\kappa) s \partial_s v + rv + L(v) = 0 \quad s > 0, \quad t \in (0, T) \tag{8a}$$

$$v(T, s) = \varphi(s) \tag{8b}$$

où on a noté $v \to L(v)$ l'operateur linéaire t.q. :

$$L(v)(s) := \lambda \left(v(s) - \int_0^\infty v(s\eta) g(\eta) d\eta \right) \tag{9}$$

avec g une fonction de l'amplitude du saut η, vérifiant $g \geq 0$, $\int_0^\infty g(\eta)d\eta = 1$, et où $\kappa := \mathbb{E}(\eta - 1) = \int(\eta - 1)g(\eta)d\eta$. Les paramètres du marchés (taux r, volatilité σ) sont supposés fixes. On propose d'implémenter une méthode numérique similaire à la Ref. 2, mais simplifiée (pas d'interpolation entre maillages ni utilisation de FFT).

1.Proposer des conditions aux limites raisonables au voisinage de $S = 0$, de la forme $v(t, S) = a(t)S + b(t)$. (Condition limite à droite : prendre $v(t, S) = 0$ pour S assez grand).

2. On travaillera sur un intervalle du type $[S_{\min}, S_{\max}]$ avec $S_{\min} > 0$, et on effectue le changement de variable logarithmique $S = Ke^x$, soit $x = \log(S/K)$. Ecrire l'EDP correspondante pour la fonction $u(t, x) \equiv v(t, S)$. Comme conditions aux limites on prendra

$$u_g(t, x) = a(t)Ke^x + b(t), \quad \text{pour } x \leq X_{\min} := \log(S_{\min}/K),$$
$$u_d(t, x) = 0 \quad \text{pour } x \geq X_{\max} := \log(S_{\max}/K),$$

3. Ecrire une approximation du terme intégral sur un maillage uniforme (x_i) de $[X_{\min}, X_{\max}]$.[3]

4. Mettre en oeuvre un schéma explicite au différences finies pour la fonction u.

5. Comparer avec une formule exacte.[4] (comparer aussi avec un modèle sans saut).

---

2. La probabilité que $dq = 1$ est $\lambda\ dt$ et la probabilité que $dq = 0$ est $1 - \lambda\ dt$. Au voisinage d'un saut on a donc $\frac{dS}{S} \simeq (\eta - 1)$ et donc on saute de la valeur S à la valeur $S + dS = \eta S$: η représente l'amplitude du saut.

3. On approchera l'integrale avec $2P + 1$ termes (x_j) centrés en $j = 0$: $\int_0^\infty v(s_i\eta)g(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}} v(Ke^{x_i+y})g(Ke^y)Ke^y dy \simeq \Delta y \sum_j v(Ke^{x_{i+j}})g(Ke^{x_j})Ke^{x_j}$. On pourra utiliser I points $x_i = X_{\min} + ih$, $i = 1, \ldots, I$ dans $[X_{\min}, X_{\max}]$, $x_0 = X_{\min}$, $x_{I+1} = X_{\max}$, le terme intégral dépendra au final des valeurs du schéma $(u_i)_{1 \leq i \leq I}$ et de P valeurs de bord u_i pour des $i \leq 0$ et aussi de P valeurs pour $i > I$, et qui pourront être calculées à l'aide de u_g et u_d.

4. Formule de Merton : pour $t < T$ et $\tau = T - t$, avec $r_n = r - \lambda(e^{\mu+\gamma^2/2} - 1) + n\frac{\mu}{t}$, $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n\frac{\gamma^2}{t}}$, $s_n = se^{n\gamma^2/2}$, $\kappa := \mathbb{E}(\eta - 1) = e^{\mu+\gamma^2/2} - 1$,

$$P_{Merton}(t, s) := e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{r_n\tau} BS(t, s_n, K, r_n, \sigma_n)$$

et où $BS(t, S, K, r, \sigma)$ est la formule de Black et Scholes après renversement du temps $t \to T - t$.

6. Proposer un schéma implicite de type Crank-Nicolson.

7. Proposer une EDP et un schéma pour l'option américaine correspondante.

8. Tester éventuellement la méthode itérative proposée dans la Ref. 2 pour accélerer le calcul du schema de Crank-Nicolson pour la partie (9).

Ref. 1 : R.C. Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, 3 :125–144, 1976.
Ref. 2 : Y. d'Halluin, P.A. Forsyth, K.R. Vetzal, *Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes*, IMA Journal on Numerical Analysis, 25 (2005) 87–112.

Références

(Projets 1-3 / 5)

[1] Y. Achdou et O. Pironneau, *Computational methods sor option pricing*, 2005, SMAI.

[2] Barles, G. and Daher, Ch. and Romano, M., *Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory,* Math. Models Methods Appl. Sci., Vol 5 (no 1), pp 125–143 (1995).

[3] O. Bokanowski, S. Maroso, H. Zidani "Some convergence results for Howard's algorithm." *SIAM J. Numer. Anal. Volume 47, Issue 4, pp. 3001-3026 (2009)*

[4] Y. d'Halluin, P.A. Forsyth, K.R. Vetzal, *Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes*, IMA Journal on Numerical Analysis, 25 (2005) 87–112.

[5] K. Ito, K. Kunisch, Semi-smooth Newton methods for variational inequalities of the first kind. ESAIM : M2AN, Vol. 37, No 1, 2003, pp. 41–62

[6] D. Lamberton et B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, 1997.

[7] F. Dubois et T. Lelievre, Efficient pricing of Asian options by the PDE approach, Journal of Computational Finance, volume 8(2), pp 55–64, 2005.

[8] R.C. Merton, Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, 3 :125–144, 1976.

[9] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications* (3rd edition), Springer Verlag, 1992.

[10] H. Pham, Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance. 2007, collection Mathématiques et Applications, Springer Verlag. (Voir éventuellement : Notes de cours, 2003, *Controle Optimal Stochastique et applications en Finance*, `http://felix.proba.jussieu.fr/pageperso/pham/constomars03.pdf`)

[11] Rogers, L. C. G. and Shi, Z., *The value of an Asian option.* J. Appl. Probab. 32 (1995), no. 4, 1077–1088.

[12] H. M. Soner, N. Touzi. *Superreplication under gamma constraints*, SIAM J. Control Optim., Vol. 39 (1) : 73–96, 2000.

[13] P. Wilmott, S. Howisson, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives - A Studen Introduction* (1998).

[14] P. Wilmott, *Derivatives, The theory and practice of Financial Engineering*, 1998, John Wiley & Sons.

[15] O. Bokanowski, A. Picarelli, H. Zidani, "Dynamic programming and error estimates for stochastic control problems with maximum cost", *Applied Math. and Optim*, Vol 71 (1) : pp. 125–163 (2015).

[16] O. Bokanowski, K. Debrabant, "High order finite difference schemes for some diffusion-obstacle problems" (2015).

[17] K. Oosterlee, "On Multigrid for linear complementary problems with application to american-style options."

[18] K. J. in't Hout and B.D. Welfert, *Stability of ADI schemes applied to convection-diffusion equations with mixed derivative terms.* Applied NUm. Math., 57, pages 19-35, 2007.

[19] T. Haentjens and K J. in't Hout, *ADI schemes for princing American options uner the Heston model.* Applied Math. Finance, 2015, vol 22, No 3 , pages 207-237.

[20] Roberto Ferretti, *A Technique for High-Order Treatment of Diffusion Terms in Semi-Lagrangian Schemes*, Commun. Comput. Phys., Vol. 8, No. 2, pp. 445-470, 2010.