BÀI TẬP 3
(Phương pháp Monte Carlo)
THỐNG KÊ MÁY TÍNH VÀ ỨNG DỤNG (CLC)

1. Dùng phương pháp Monte Carlo, ước lượng

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

   với sai số chuẩn không quá 0.01.

2. Cho $U_1, U_2, ...$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối $\mathcal{U}(0,1)$, đặt

$$T = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}.$$

   Người ta chứng minh được rằng

$$E(T) = e.$$

   (a) Từ kết quả trên, đề xuất phương pháp Monte Carlo ước lượng số e.
   (b) Thực hiện ước lượng với cỡ mẫu $N = 10000$.
   (c) Ước lượng RMSE và tìm khoảng tin cậy 95% cho ước lượng ở Câu (b).

3. Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ độc lập và cùng phân phối với phương sai σ^2, đặt

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2,$$

   với

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   Người ta chứng minh được rằng S_n^2 là một ước lượng chệch cho σ^2, tức là $E(S_n^2) \neq \sigma^2$. Dùng phương pháp Monte Carlo kiểm chứng khẳng định trên với $n = 5$ và $X_1, X_2, ..., X_n$ có phân phối Exp(1).

4. Dùng phương pháp lấy mẫu quan trọng, ước lượng giá trị I ở Câu 1. Tính (hoặc ước lượng) tỉ lệ giảm phương sai so với phương pháp ở Câu 1.

5. Dùng phương pháp biến đối nghịch, ước lượng giá trị I ở Câu 1. Tính (hoặc ước lượng) tỉ lệ giảm phương sai so với phương pháp ở Câu 1.

6. Dùng phương pháp biến kiểm soát, ước lượng giá trị I ở Câu 1. Tính (hoặc ước lượng) tỉ lệ giảm phương sai so với phương pháp ở Câu 1.

Lưu ý:

- Các thuật toán cần được trình bày bằng mã giả và cài đặt bằng Python.
- Cần kiểm tra và đánh giá kết quả chạy các thuật toán.
- Được phép dùng các hàm sinh số ngẫu nhiên từ thư viện `numpy.random`.

— HẾT —