KANDIDAT

# 10121

PRØVE

# MA0301 1 Elementær diskret matematikk

| | |
|---|---|
| Emnekode | MA0301 |
| Vurderingsform | Skriftlig eksamen |
| Starttid | 12.05.2025 13:00 |
| Sluttid | 12.05.2025 17:00 |
| Sensurfrist | 03.06.2025 23:59 |
| PDF opprettet | 14.05.2025 18:26 |

**Forside**

| Oppgave | Tittel | Oppgavetype |
|---|---|---|
| i | Forside/framside/Cover page | Informasjon eller ressurser |

**Oppgvaer**

| Oppgave | Tittel | Oppgavetype |
|---|---|---|
| 1 | Oppgaver | Muntlig |

## 1 Oppgaver

Besvar de vedlagte oppgavene på papir. Husk å begrunne alle svar.

**Knytte håndtegninger til denne oppgaven?**
Bruk følgende kode:

**0 2 4 4 1 5 3**

Håndtegning 1 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 1 | 1 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{1}$ P ¬Q Vil føre til ulike sannhetsverdier for:

$P \rightarrow \underbrace{\underbrace{(P \rightarrow Q)}_{\text{Usann}}}_{\text{Usann}}$ $\qquad$ $P \rightarrow \underbrace{\underbrace{(Q \rightarrow P)}_{\text{Sann}}}_{\text{Sann}}$

Uttrykkene kan ikke være ekvivalente siden en tilordning av P og Q gir ulik sannhetsverdi.

Håndtegning 2 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 2 | 2 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{2}$

Utsagn: $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2 \quad n \geq 1 \quad n \in \mathbb{Z}$

Bruker induksjon:

Basissteg: Sjekker utsagn for $n=1$

$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1 \qquad 1^2 = 1$

Stemmer

Induksjonssteg: Anta at utsagnet stemmer for en vilkårlig $n$ (som definert over). Sjekker om utsagnet stemmer for $n+1$

$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)$

$= \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) + 2n+1$

$= n^2+2n+1$

Formel gir: $(n+1)^2$

$= n^2+2n+1$

Utsagnet stemmer ved induksjon

Håndtegning 3 av 11

**Fill out Question Code and Test Information on every sheet.** Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 3 | 3 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{3}$ $A = \{1,2,3,4\}$

a) $\{1,2\}, \{2,3\} \in P(A)$

$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$

Det finnes 16 elementer i $P(A)$ og $\{1,2\}, \{2,3\} \in P(A)$

b) $f: P(A) \to \mathbb{N}$ $f(X) = \sum_{s \in X} s$ $f(\emptyset) = 0$

f er ikke injektiv for: $f(\{1,2\}) = f(\{3\}) = 3$

$\land \{1,2\} \neq \{3\}$

f er ikke surjektiv slik A er definert, for:

$\neg \exists x \in P(A) (f(x) = 5000) \land 5000 \in \mathbb{N}$

Altså det finnes ikke en x i $P(A)$ slik at $f(X) = 5000$.

# Håndtegning 4 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 4 | 4 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{4}$

$A = \{0, 1\}$

$R = \{(x,y) \in (A^*)^2 \mid \exists s \in A^* (xs = y)\}$

a) For at $R$ skal være en delvis ordning så må den være: transitiv, refleksiv og anti-symmetrisk.

$R$ er refleksiv: $\forall x \in A^* (xRx)$

$\Leftrightarrow \exists s \in A^* (xs = x)$

Velg $s = \lambda$

$x\lambda = x$ $\quad$ $R$ er derfor refleksiv

$R$ er anti-symmetrisk: $xRy \land yRx \Rightarrow x = y$

$\exists s \in A^* (xs = y) \land \exists k \in A^* (yk = x)$

~~Hvis~~ $xs = y \Rightarrow |x| \leq |y|$ $\qquad$ $yk = x \Rightarrow |y| \leq |x|$

$|x| = |y|$

$\Rightarrow |s| = |k| = 0 \Rightarrow s = k = \lambda$

$x\lambda = y \Rightarrow x = y$

$R$ er derfor anti-symmetrisk

Håndtegning 5 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 4 | 5 | 11 |

Writing area Skriveområde

Fortsettelse på $\boxed{4}$ a)

R er transitiv:

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

$$U = A^*$$

$$\exists s(xs = y) \wedge \exists k(yk = z)$$

Da vil $xsk = z \wedge sk \in A^*$

$$\Rightarrow xRz$$

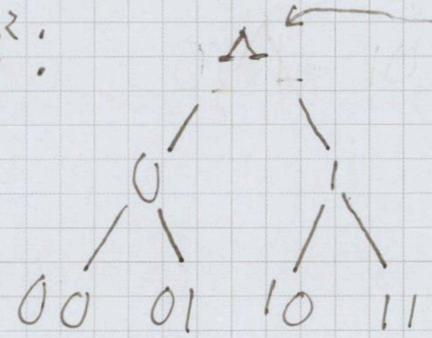
R er derfor transitiv

<u>Siden R er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv, så er R en delvis ordning.</u>

b) $B = \{s \in A^* \mid |s| \leq 2\}$

Den tomme strengen

$R \cap B^2$:




Alle elementer er relatert til de "under" seg

## Håndtegning 6 av 11

ℹ **Fill out Question Code and Test Information on every sheet.** Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 4 | 6 | 11 |

**Writing area** Skriveområde

$\boxed{4}$

c) $U = A^*$

$P(x,y) \equiv (x,y) \in R$

$\exists x \forall y\, P(x,y)$ Sann

$x = \Lambda$ vil oppfylle predikatet siden den er relatert til alle andre strenger som vist i ~~[illegible]~~ diagrammet i forrige oppgave. Så utsagnet er sant

$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \rightarrow P(x,yz))$ Sann

Utsagnet stemmer siden $yRyz$ og siden $R$ er transitiv (som vist tidligere) så:

$xRy \wedge yRyz \rightarrow xRyz$, og siden valget av $x, y, z$ var vilkårlig, så stemmer utsagnet.

$\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$ Usann

Velg $x = 0$ $y = 1$ Da vil $(1,0) \notin R \wedge (0,1) \notin R$

Siden utsagnet ikke stemmer for alle valg av $x, y$ så stemmer det ikke.

Håndtegning 7 av 11

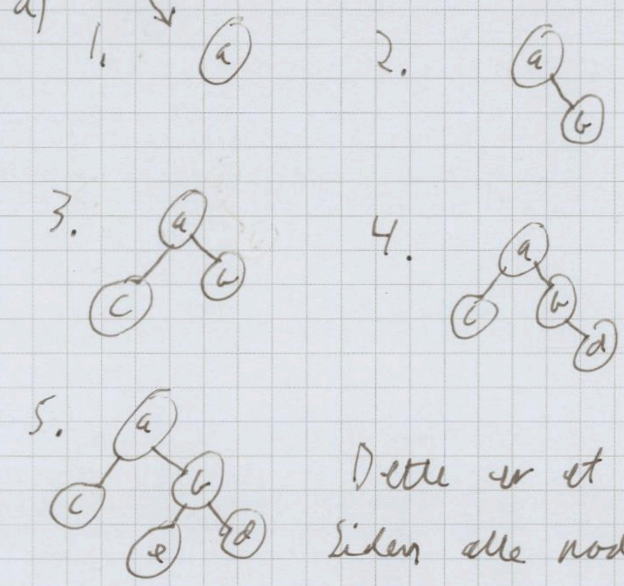
Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 5 | 7 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{5}$ a)

Basis



Dette er et sutt binærtre siden alle noder har enten 2 barn, eller så er de en løvnode.

b) Beviser at et vilkårlig tre $T=(V,E)$ har følgende egenskap: $|E| = |V|-1$, bruker den induktive definisjonen på et tre gitt i oppgaven.

Bruker strukturell induksjon:

1. Basissteg: Sjekker for $T=(V,\emptyset)$ hvor $|V|=1$

$$|V|-1=0$$

$$|\emptyset|=0 \quad \text{Stemmer}$$

Håndtegning 8 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 5 | 8 | 11 |

Writing area Skriveområde

Fortsettelse på $\boxed{5}$ b)

2. Induksjonssteg: Antar at utsagnet stemmer for et vilkårlig tre $T=(V,E)$, og sjekker for $T'$, hvor

$$T' = (V \cup \{w\}, E \cup \{v,w\})$$

$$w \notin V \land v \in V$$

Bruker utsagn:

$$|E \cup \{v,w\}| = |E| + 1 = |V| - 1 + 1 = |V|$$

Sjekker om sant:

$$|V \cup w| = |V| + 1$$

$$|E \cup \{v,w\}| = |V \cup w| - 1$$

Stemmer

Utsagnet stemmer ved strukturell induksjon.

Håndtegning 9 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | R.05.25 | MA0301 | 10121 | 6 | 9 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{6}$

a) Velg først en vilkårlig $v \in V$, som startpunkt i vandringen, du vil ~~nå~~ ha 2 valg for neste node i vandringen, og deretter igjen 2 valg, osv...

Dette gir $6 \cdot 2^8$ mulige vandringer

Antall mulige startpunkt — Lengde på vandring

$6 \cdot 2^8 = 3 \cdot 2^9 = 1536$

Det finnes 1536 mulige vandringer av lengde 8 i $C_6$

b) $H = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$

Det regulære uttrykket $(a|b)^* = r$ vil beskrive alle vandringer i $H$, så $L(r)$ = Språket av alle vandringer i $H$, siden hver vandring bare er en vilkårlig streng av "a" og "b". Siden det finnes et regulært uttrykk for språket, så må det være regulært.

Håndtegning 10 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 6 | 10 | 11 |

Writing area Skriveområde

$\boxed{6}$ c) La $G=(V,E)$ være en vilkårlig endelig graf, som betyr at mengden noder $V$ og mengden kanter $E$ også er endelige.

Bruker Kleenes teorem, at en endelig tilstandsmaskin er ekvivalent med et regulært språk som gjenkjennes nøyaktig av maskinen; Skal nå konstruere en endelig tilstandsmaskin $T$ som gjenkjenner nøyaktig alle vandringer i $G$.

Start tilstanden i $T$ er ikke aksepterende, godtar ikke en tom vandring. Deretter vil hver node i $G$ tilsvare en aksepterende tilstand, så vandringen "$v$" hvor $v \in V$ vil ende opp i tilstanden "$v$" som er aksepterende. Deretter hvis neste node $w$ i vandringen er en nabonode, altså $\{v,w\} \in E$, så vil $T$ gå til tilstanden "$w$", ellers vil den gå til en "Fail" tilstand som ikke er aksepterende og som er et "svart hull" (umulig å komme seg ut uansett input).

Håndtegning 11 av 11

Fill out Question Code and Test Information on every sheet. Fyll inn oppgavekode og emneinformasjon på alle skisseark.

| Question Code Oppgavekode | Date Dato | Subject code Emnekode | Candidate ID KandidatID | Question no Oppgavenr | Page number Sidetall | Number of pages Antall ark |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0244153 | 12.05.25 | MA0301 | 10121 | 6 | 11 | 11 |

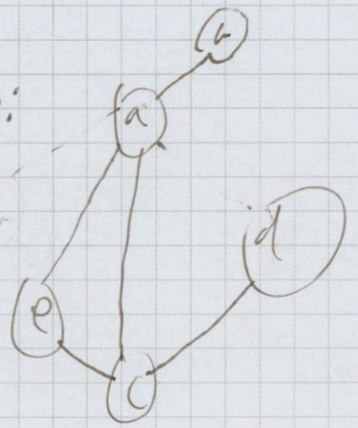
Writing area Skriveområde

Fortsettelse på $\boxed{6}$ c)

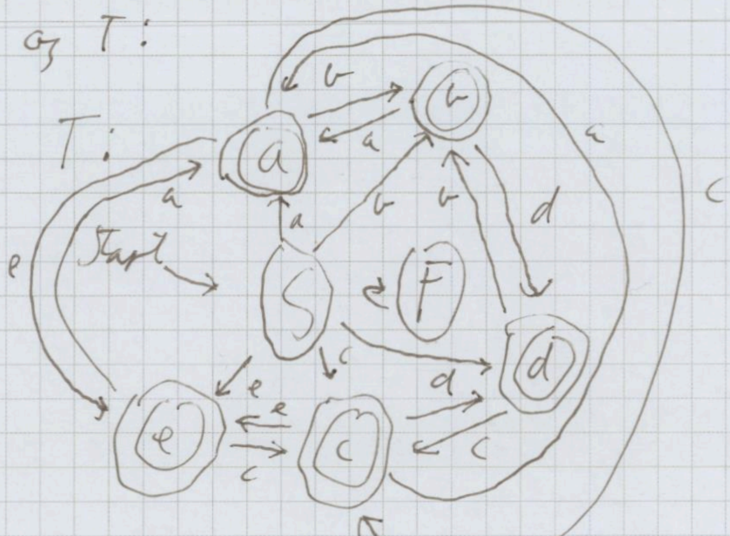
Siden V og E er endelige så vil også T være endelig, og T vil derfor være en endelig tilstandsmaskin som gjenkjenner nøyaktig alle vandringer i G (som et språk), som betyr at dette språket må være regulært, og siden valget av G var vilkårlig, så gjelder dette for alle valg av en endelig graf G.

Eksempel på G og T:

G:




T:




Alle overganger som ikke er tegnet vil gå til "F"