MA0301
Elementær Diskret matematikk

Eksamen
Våren 2025

Info

Oppgavesettet består av 6 oppgaver, totalt 12 deloppgaver. Alle deloppgaver er likt vektet. Oppgave 1 og 2 teller hver som én deloppgave. Alle svar må begrunnes. Under følger en liten huskeliste som kan være nyttig.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Om A er en mengde er $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.
- En delvis (også kalt partiell) ordning er en refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk relasjon.
- Gitt en endelig mengde A er A^* mengden av endelige strenger/ord over A, inklusive den tomme strengen Λ. Når vi snakker om *lengden* til en streng mener vi antall tegn i strengen. Den tomme strengen har lengde 0, men for eksempel bitstrengen 001 har lengde 3.

Oppgaver

$\boxed{1}$ La P, Q være utsagnsvariabler. Avgjør om $P \to (P \to Q)$ og $P \to (Q \to P)$ er ekvivalente utsagn, for eksempel ved å sette opp en sannhetsverditabell.

$\boxed{2}$ Bruk induksjon til å vise at summen av de første n positive oddetallene er lik n^2 for alle heltall $n \geq 1$, altså at $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$.

$\boxed{3}$ La $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Skriv to ulike elementer i $\mathcal{P}(A)$. Hvor mange elementer finnes det i $\mathcal{P}(A)$?

b) La $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$ være definert ved at $f(X)$ er lik summen av tallene i mengden X. Er f injektiv? Er f surjektiv?
(Merk: Formelt kan vi skrive $f(X) = \sum_{s \in X} s$ og spesielt har vi $f(\emptyset) = 0$)

$\boxed{4}$ La $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Da er A^* mengden av alle endelige bitstrenger, inklusive den tomme strengen Λ.

Vi definerer en relasjon R på A^* som følger:

$$R = \{(x, y) \in A^* \times A^* \mid \exists s \in A^* \text{ slik at } xs = y\}.$$

For eksempel er da $(\mathtt{1}, \mathtt{101})$ i R, fordi hvis vi lar $s = \mathtt{01}$ har vi $\mathtt{1}s = \mathtt{101}$.

a) Vis at R er en delvis ordning.

b) La B være mengden av bitstrenger av lengde mindre enn eller lik 2, inklusive den tomme strengen. Da er B en endelig mengde, og $R \cap (B \times B)$ er en delvis ordning på B. Tegn relasjonen $R \cap (B \times B)$, gjerne som et Hasse-diagram.

c) La $P(x, y)$ være predikatet av aritet 2 over $\mathcal{U} = A^*$ definert ved at

$$P(x, y) \equiv (x, y) \in R.$$

Bestem sannhetsverdien til utsagnene under. Husk å begrunne svarene dine.

- $\exists x \forall y P(x, y)$
- $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(x, yz))$
- $\forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x))$

5 Vi kan definere endelige trær induktivt som følger:

(Basissteg) En graf med 1 node og ingen kanter er et tre: Altså $(V, \emptyset)$ der $|V| = 1$, er et tre.

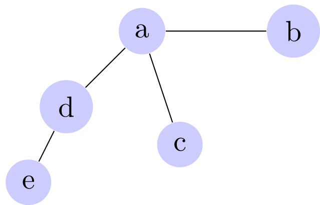
(Induksjonsseg) Hvis $T = (V, E)$ er et tre og $v \in V$ er en node, så kan vi legge til en ny node $w \notin V$ og kanten $\{v, w\}$ for å få et nytt tre. Formelt kan vi si at

$$T' = (V \cup \{w\}, E \cup \{v, w\})$$

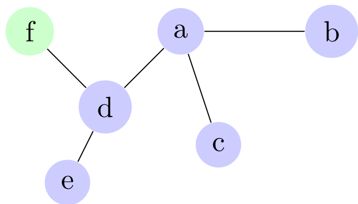
er et tre gitt $w \notin V$ og $v \in V$.

Alle trær kan konstrueres på dette viset.

Under illusterer vi et eksempel på hvordan induksjonssteget kan se ut i praksis. I blå har vi tegnet et tre.



Vi anvender nå operasjonen beskrevet i induksjonssteget, hvor vi velger en noden d og kobler til den en ny node f, tegnet i grønt.

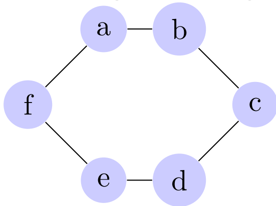


a) Illustrer hvordan man kan bruke den induktive definisjonen av trær i oppgaven til å konstruere et fullt binærtre med minst 5 noder.

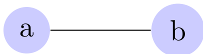
b) Bevis, gjerne med strukturell induksjon, at et tre med n noder har $n-1$ kanter.

$\boxed{6}$ La $G = (V, E)$ være en graf. En vandring i G er da en ikke-tom streng i V^* hvor etterfølgende noder er naboer i grafen G. Vi kan altså betrakte mengden av vandringer i G som et formelt språk over alfabetet V. For eksempel er a, b, ab og $baba$ vandringer i begge de to grafene tegnet i deloppgavene under. Derimot er Λ, aa og $abba$ eksempler på strenger som ikke er vandringer i grafene under.

a) Betrakt grafen C_6, illustrert under. Vi sier at en vandring $v_1v_2v_3\dots v_n$ har lengde $n-1$, så for eksempel er afa en vandring av lengde 2 i C_6, og d er en vandring av lengde 0 i C_6. Hvor mange vandringer av lengde 8 finnes det i C_6?



b) La nå H være grafen tegnet under:



Vis at det formelle språket av vandringer i H er regulært.

c) La $G = (V, E)$ være en endelig graf. Vis at det formelle språket av vandringer i G er regulært.
(Hint: Det kan være lurt å løse deloppgave b) ved hjelp av Kleenes teorem for å få en ide til hvordan denne oppgaven kan løses.)