NTNU
Institutt for matematiske fag

MA0301
Elementær Diskret matematikk

Løsningsforslag Eksamen
Våren 2025

Info om retting

Hver deloppgave teller opp til 5 poeng. Høyeste mulige oppnåelige score blir da 60 poeng.

Oppgaver

$\boxed{1}$ La P, Q være utsagnsvariabler. Avgjør om $P \to (P \to Q)$ og $P \to (Q \to P)$ er ekvivalente utsagn, for eksempel ved å sette opp en sannhetsverditabell.

Løsning: Oppgave 1

Vi lar 1 representere sann og 0 representere usann. Når $P = 1$ og $Q = 0$ er første utsagn usann, men andre utsagn sann. De to utsagnende er derfor ikke ekvivalente.

Retting: Vær streng.

$\boxed{2}$ Bruk induksjon til å vise at summen av de første n positive oddetallene er lik n^2 for alle heltall $n \geq 1$, altså at $\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1) = n^2$.

Løsning: Oppgave 2

For basissteget er det nok å se at $1 = 1^2$. Anta at summen av de første n oddetallene er lik n^2. Da er summen av de $n+1$ første oddetallene lik $n^2+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ som ønsket. **(Retting: Gi opp til 2 poeng for basissteg og opp til 3 poeng for induksjonssteg.)**

$\boxed{3}$ La $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Skriv to ulike elementer i $\mathcal{P}(A)$. Hvor mange elementer finnes det i $\mathcal{P}(A)$?

b) La $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$ være definert ved at $f(X)$ er lik summen av tallene i mengden X. Er f injektiv? Er f surjektiv?
(Merk: Formelt kan vi skrive $f(X) = \sum_{s\in X} s$ og spesielt har vi $f(\emptyset) = 0$)

Løsning: Oppgave 3

a) For eksempel $B = \{1, 4\}$ og $C = \{2, 3\}$. Det finnes $2^4 = 16$ elementer i $\mathcal{P}(A)$.

b) Ikke injektiv, fordi $f(B) = f(C)$. Ikke surjektiv, fordi for $f(A) = 10$, så det finnes ingen delmengde av A slik at summen av elementene i dem er høyere enn 10.

Retting: I a), gi 3 poeng for første spørsmål og 2 for andre. I b), gi minst 3 poeng hvis det blir begrunnet at funksjonen ikke er injektiv. Gi opp til 2 poeng for begrunnelse av at den ikke er surjektiv.

$\boxed{4}$ La $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Da er A^* mengden av alle endelige bitstrenger, inklusive den tomme strengen Λ.

Vi definerer en relasjon R på A^* som følger:

$$R = \{(x, y) \in A^* \times A^* \mid \exists s \in A^* \text{ slik at } xs = y\}.$$

For eksempel er da $(\mathtt{1}, \mathtt{101})$ i R, fordi hvis vi lar $s = \mathtt{01}$ har vi $\mathtt{1}s = \mathtt{101}$.

a) Vis at R er en delvis ordning.

b) La B være mengden av bitstrenger av lengde mindre enn eller lik 2, inklusive den tomme strengen. Da er B en endelig mengde, og $R \cap (B \times B)$ er en delvis ordning på B. Tegn relasjonen $R \cap (B \times B)$, gjerne som et Hasse-diagram.

c) La $P(x, y)$ være predikatet av aritet 2 over $\mathcal{U} = A^*$ definert ved at

$$P(x, y) \equiv (x, y) \in R.$$

Bestem sannhetsverdien til utsagnene under. Husk å begrunne svarene dine.

- $\exists x \forall y P(x, y)$
- $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \to P(x, yz))$
- $\forall x \forall y (P(x, y) \lor P(y, x))$

Løsning: Oppgave 4

a) Vi viser at R er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv: La x være en bitstreng. Om vi lar $s = \Lambda$ har vi $xs = x$, så $(x, x) \in R$. La x, y være bitstrenger, og anta at $(x, y) \in R$ og $(y, x) \in R$. Da har vi $xs = y$ og $ys' = x$. Da har vi $ys' = x$ og $xs = y$, så $ys's = xs = y$, så $s's = \Lambda$, da må $s' = \Lambda$ og $s = \Lambda$, altså $x = y$. Derfor er R anti-symmetrisk. Til slutt, anta at $(x, y) \in R$ og $(y, z) \in R$. Da er $xs = y$ og $ys' = z$. Da er $xss' = ys' = z$, så $(x, z) \in R$, så R er transitiv. Dette fullfører beviset.

b) Hasse-diagram:

```
11   10   01   00
 \   /     \   /
   1         0
     \     /
        Λ
```

c) Først er sann, ved å la $x = \Lambda$. Andre er sann. Hvis $xs = y$ så er $x(sz) = yz$. Tredje er usann, ved å for eksempel velge $x = 01$ og $y = 10$.

Retting: I a), gi opp til 2 poeng for hver egenskap korrekt begrunnet, maks 5 poeng totalt. I b) ikke krev Hasse-diagram. Gi full uttelling for hver tydelige tegning. Trekk ingen poeng for om orienteringen til diagrammet er snudd på hode. I c) gi opp til 2 poeng for hver sannhetsverdi korrekt avgjort og begrunnet, maks 5 poeng totalt.

$\boxed{5}$ Vi kan definere endelige trær induktivt som følger:

(Basissteg) En graf med 1 node og ingen kanter er et tre: Altså $(V, \emptyset)$ der $|V| = 1$, er et tre.

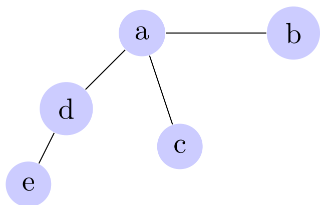
(Induksjonsseg) Hvis $T = (V, E)$ er et tre og $v \in V$ er en node, så kan vi legge til en ny node $w \notin V$ og kanten $\{v, w\}$ for å få et nytt tre. Formelt kan vi si at

$$T' = (V \cup \{w\}, E \cup \{v, w\})$$

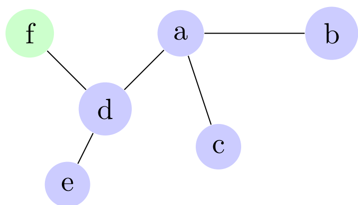
er et tre gitt $w \notin V$ og $v \in V$.

Alle trær kan konstrueres på dette viset.

Under illusterer vi et eksempel på hvordan induksjonssteget kan se ut i praksis. I blå har vi tegnet et tre.



Vi anvender nå operasjonen beskrevet i induksjonssteget, hvor vi velger en noden d og kobler til den en ny node f, tegnet i grønt.



a) Illustrer hvordan man kan bruke den induktive definisjonen av trær i oppgaven til å konstruere et fullt binærtre med minst 5 noder.
b) Bevis, gjerne med strukturell induksjon, at et tre med n noder har $n-1$ kanter.

Løsning: Oppgave 5

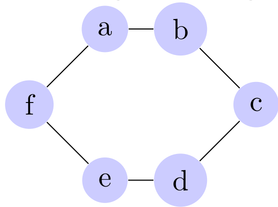
a) Vi kan konstruere et fullt binærtre med 5 noder ved å begynne med en rotnode r, så bruke induksjonssteget to ganger for å legge til to barn til r, så til slutt legge til to barn til et av barna til r.

b) Basis: Vi ser at et basis-tre har 1 node og $1 - 1 = 0$ kanter. Induksjonssteg: Vi legger i induksjonssteget alltid til én node og én kant, så vi bevarer egenskapen å ha en færre kanter enn noder.

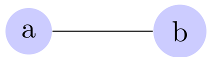
Retting: I a) må det gjøres tydelig at man bygger treet ut fra et basis-tre og bruker induksjonssteget. I b) vær streng. Andre bevis enn strukturell induksjon godtas.

$\boxed{6}$ La $G = (V, E)$ være en graf. En vandring i G er da en ikke-tom streng i V^* hvor etterfølgende noder er naboer i grafen G. Vi kan altså betrakte mengden av vandringer i G som et formelt språk over alfabetet V. For eksempel er a, b, ab og $baba$ vandringer i begge de to grafene tegnet i deloppgavene under. Derimot er Λ, aa og $abba$ eksempler på strenger som ikke er vandringer i grafene under.

a) Betrakt grafen C_6, illustrert under. Vi sier at en vandring $v_1v_2v_3\dots v_n$ har lengde $n-1$, så for eksempel er afa en vandring av lengde 2 i C_6, og d er en vandring av lengde 0 i C_6. Hvor mange vandringer av lengde 8 finnes det i C_6?



b) La H være grafen tegnet under:



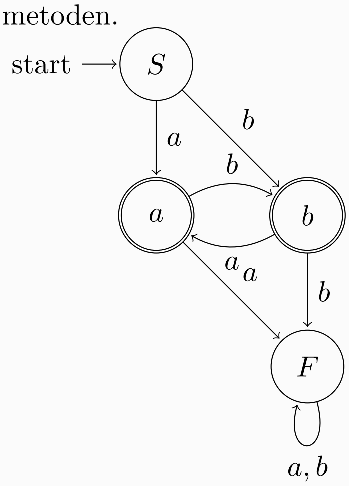
Vis at det formelle språket av vandringer i H er regulært.

c) La $G = (V, E)$ være en endelig graf. Vis at det formelle språket av vandringer i G er regulært.
(Hint: Det kan være lurt å løse deloppgave b) ved hjelp av Kleenes teorem for å få en ide til hvordan denne oppgaven kan løses.)

Løsning: Oppgave 6

a) Vi bruker multiplikasjonsprinsippet. Vi kan starte i en av 6 noder, og i hvert steg har vi to valg; enten gå med eller mot klokken. Vi har da $6 * 2^8$ vandringer av lengde 8.

b) Oppgaven kan løses direkte med regulære uttrykk, eller indirekte via Kleenes teorem, ved å designe en endelig tilstandsmaskin. Her velger vi tilstandsmaskin-metoden.



c) Vi kan generalisere løsningen fra b) som følger. Vi bygger en tilstandsmaskin med tilstander $V \cup \{S, F\}$. Altså har vi én tilstand for hver node i grafen G, pluss to ekstra tilstander, S og F. Siden G er endelig er dette et endelig antall tilstander.
Vi aksepterer alle tilstandene V, og aksepterer ikke s og f. Vi lar S være starttilstander, og beskriver nå overgangene.
Fra S, hvis vi leser en node v, flytter vi oss til tilstanden v. Fra en node v, hvis vi leser en node w som ikke er nabo med v, flytter vi oss til F. Hvis w er nabo med v, så flytter vi oss derimot til w. Hvis vi er i F flytter vi oss aldri ut av F uansett hva vi leser.
Denne maskinen godtar en streng nøyaktig om den representerer en vandring i G, som ønsket.

Retting: I a), trekk maks 1 poeng til de som svarer $6 \cdot 2^7$ i stedet for $6 \cdot 2^8$. Gi minst 2 poeng om multiplikasjonsprinsippet er anvendt på en måte som gir mening, men som kanskje ikke fanger alle mulighetene. I b) For regulære uttrykk: Gi minst 2 poeng hvis uttrykket beskriver gyldige vandringer, men kanskje ikke alle vandringer. For tilstandsmaskinløsninger/oppgaven løst med Kleenes teorem: Gi minst 1 poeng hvis maskinen er gyldig. Gi maks 3 poeng til en maskin uten tydelig starttilstand. Gi maks 3 poeng til en maskin hvor aksepterende og ikke-aksepterende tilstander ikke er indikert. I c) Vær streng. Om tilstandene kun er gitt ved V, gi maks 3 poeng.