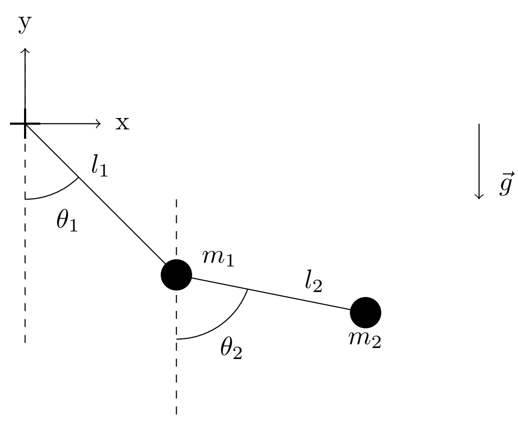
Double pendule

1 Description du système :

Le système est constitué d'une masse m_1 accrochée à l'origine par un fil de masse nulle, indéformable et de longueur l_1. A cette masse est accroché un pendule similaire composé d'une masse m_2 et d'un fil de longueur l_2.
Les angles formés par les fils l_1 et l_2 avec la verticale sont respectivement appelés θ_1 et θ_2.
A tout instant t la masse m_1 sera repérée par le couple de coordonnées (x_1, y_1) et possèdera la vitesse v_1. De même la masse m_2 est repérée par le couple (x_2, y_2) et possède la vitesse v_2.
Il s'agit ici de mettre en équation le mouvement du double pendule en vue d'une simulation en javascript du système.



2 Mise en équation :

$x_1 = l_1 \sin(\theta_1) \qquad x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2)$
$y_1 = -l_1 \cos(\theta_1) \qquad y_2 = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)$

Il suffit maintenant de déterminer les expressions des angles θ_1 et θ_2. Pour cela on utilise le Lagrangien $L = E_c - E_p$ où E_c et E_p sont respectivement les énergies cinétiques et potentielles du système.

$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$
$E_c = \frac{1}{2}m_1(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2)$

$\dot{x_1} = l_1\dot{\theta_1}\cos(\theta_1) \qquad \dot{x_2} = l_1\dot{\theta_1}\cos(\theta_1) + l_2\dot{\theta_2}\cos(\theta_2)$
$\dot{y_1} = l_1\dot{\theta_1}\sin(\theta 1) \qquad \dot{y_2} = l_1\dot{\theta_1}\sin(\theta 1) + l_2\dot{\theta_2}\sin(\theta 2)$

$\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2 = l_1^2\theta_1^2 \qquad \dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2 = l_1^2\dot{\theta_1}^2 + l_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)$

$E_c = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\theta_1}^2 + l_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)$

$E_p = m_1gy_1 + m_2gy2 = -(m_1 + m_2)gl_1\cos(\theta_1) - m_2gl_2\cos(\theta_2)$

Les equations de Lagrange pour θ_1 et θ_2 sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

Les calculs suivants sont longs mais simples, aussi si l'on passe les détails voici ce qu'on obtient en posant $\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2)-\mu\sin\theta_1)-\left(l_2\dot{\theta}_2^{\,2}+l_1\dot{\theta}_1^{\,2}\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\sin(\theta_1-\theta_2)}{l_1(\mu-\cos^2(\theta_1-\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)-\sin\theta_2)+\left(\mu l_1\dot{\theta}_1^{\,2}+l_2\dot{\theta}_2^{\,2}\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\sin(\theta_1-\theta_2)}{l_2(\mu-\cos^2(\theta_1-\theta_2))}$$

Pour réaliser une simulation informatique du système il suffit maintenant, grâce à la méthode d'Euler, de définir des conditions initiales ainsi qu'un intervalle de temps dt. On obtient $\ddot{\theta}_1$ et $\ddot{\theta}_2$ grâce aux formules précédentes puis $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ par multiplication par dt. On obtient de même θ_1 et θ_2 et donc les coordonnées des deux masses.