最优化作业 1

第四周周三(3 月 20 日)

1. 设S_1, S_2是凸集，试讨论下列集合是否是凸集。若是给出证明，否则举一反例予以说明。
   a) $S_1 \cup S_2$;
   b) $S_1 + S_2 = \{x + y | x \in S_1, y \in S_2\}$;
   c) $S_1 - S_2 = \{x - y | x \in S_1, y \in S_2\}$;
2. 解释下列集合是否是凸集，为什么？
   a) $S = \{x | x_1^2 + x_2^2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \leq 10, -x_1 - x_2 \leq -10x_2\}$
   b) $S = \{x | x_1 + x_2 \leq 6, -2x_1 + 3x_2 \geq 2, 4x_1 - x_2 \leq 12\}$
   c) $S = \{x | -(x_1 - 1)^2 + x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3, x_1 \geq 1\}$
   d) $S = \{x | x^2 \geq 1\}$
3. 设$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_m(x)$均为凸函数，讨论下列函数是否是凸函数。若是则给出证明，否则举一反例。
   a) $g(x) = max\,\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}, x \in R$
   b) $g(x) = min\,\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}, x \in R$
   c) $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i)$ ， $x \in R^n, x_i > 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
   d) $g(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{k \leq x, k\text{是整数}\}$
   e) $g(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$， $x \in R^n, k \in Z, 1 \leq k \leq n$，$x_{(i)}$表示向量$x$的第$i$个最大元素
   f) $g(x) = x^2$
4. 将下列线性规划问题化成标准型，并采用代数法，求解其所有的基本解，验证其最优解。
   a) $Min\, z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$，$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$
   b) $Min\, z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, \text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ x_1, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$
5. 用图解法求解以下线性规划问题：
   a) $\max z = 3x_1 - 2x_2$

      $\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
   b) $\min f = -x_1 + 3x_2$

      $\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \geq 56 \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
6. 求出下面系统中的三个基本解

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4$$
$$-x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = -5$$

7. 找出方程$Ax = b$的两个基本解，并指出每个解中的B, B^{-1}, N, x_B, x_N

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

8. 证明：线性规划(LP)问题可行解$\boldsymbol{x}$为基本可行解的充要条件是$\boldsymbol{x}$中正分量对应矩阵 A 的系

数列向量线性无关.

9. 用单纯形法求解下列问题

a)
$$\text{Max } 6x_1+14x_2+13x_3,\ s.t.\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3\le 48 \\ x_1+2x_2+4x_3\le 60 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

b)
$$\text{Min } 3x_1-2x_2-4x_3,\ s.t.\begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3\le 22 \\ x_1-2x_2+x_3\le 30 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

c) $$\max z=x_1+x_2+x_3;\ s.t.\ \begin{array}{c} -x_1-2x_3\le 5 \\ 2x_1-3x_2+x_3\le 3 \\ 2x_1-5x_2+6x_3\le 5 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{array}$$

10. 采用大 M 法和两阶段法求解下列问题

$$\text{Max } 4x_1+2x_2+8x_3,\ \text{s.t.}\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3\le 30 \\ x_1+2x_2+4x_3=40 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

11. 证明：线性规划问题的对偶问题的对偶问题是原问题。
12. 讨论线性规划问题与其对偶问题的联系与区别。
13. 判断下列说法是否正确
    a) 考虑具有有界可行集的线性规划问题，如果x是一个最优解，则其必定是一个最优基本可行解。
    b) 如果线性规划问题有多个解，则其必定有无穷多个解。
    c) 考虑标准形式的线性规划问题：$\min c^T x$，s.t. $Ax=b, x\ge 0$，这里矩阵A的维数为$m\times n$，且行满秩。每个最优解上最多有m个变量值为正。
    d) 对于(c)中的标准线性规划问题，可行域的每个顶点至多有$n-m$个相邻顶点。
14. 总结线性规划的单纯性方法的基本流程，尝试编程序写出该方法的实现，并以上面的任意例子为例，给出运行结果。
15. 请安装 Julia，安装 MWorks 科教版(或者安装 JuMP 包)。使用里面的凸优化工具箱。然后尝试调用里面的求解器求解第 2 章中的制作 100 套钢管的例题。
16. 请辨析：线性优化与非线性优化，凸优化与非凸优化，光滑优化与非光滑优化之间的区别和联系，并简要介绍如何进行线性化、凸化和光滑化。以及为什么凸优化与非凸优化的分析是目前的主流。
17. 请介绍线性规划内点法的核心思想。