

中国科学技术大学

2019—2020学年第二学期期末考试试卷

考试科目: 数学分析B2

得分_____

学生所在院系:_____

姓名_____

学号_____

一 (10分): 设 $f(u, v)$ 在 \mathbb{R}^2 上有连续的偏导数, 令 $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} f(x + \alpha, x - \alpha) dx$, 求 $F'(\alpha)$.

参考答案: 按变上限公式求导, 注意被积函数是二元函数 $f(\xi, \eta)$, 因此

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{d\alpha} + \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{d\alpha}$$

二 (10分):

计算三重积分 $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中积分区域 V 由曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 8$ 所围成.

解

$$\int_0^8 dz \iint_{x^2+y^2=2z} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = \frac{1024\pi}{3}$$

三 (10分):

计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin x dx$, 其中 $0 < a < b$.

解

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \int_a^b e^{-ux} du \sin x dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-ux} \sin x dx du = \int_a^b \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \arctan b - \arctan a. \end{aligned}$$

或采取求导方式

$$F'(b) = \int_0^\infty e^{-bx} \sin x dx = \frac{1}{1+b^2}$$

再积分.

要说明交换理由。

四 (10分):

设 $n, m > 0$, 利用Euler 积分计算积分 $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^m}} dx$.

解 令 $t = x^m$. $x = t^{1/m}$, $dx = \frac{1}{m} t^{1/m-1} dt$

$$= \frac{1}{m} \int_0^1 t^{\frac{n}{m}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{m} B\left(\frac{n}{m}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{m} + \frac{1}{2}\right)}$$

五 (10分):

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截部分的外侧.

解

加盖和底并利用Gauss 公式 $S = \Sigma + S_+ + S_-$

$$\int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 9\pi$$

$$\int_{S_-} = 0, \int_{S_+} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \int_{x^2+y^2=1} 3 dx dy = 3\pi$$

所以 $I = 6\pi$. 或用其它方法.

六 (10分):

(1) 将函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的Fourier级数(须

讨论其收敛性).

(2) 分别求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的值.

解 利用奇偶性 $b_n = 0$

(1)

$$a_0 = 1, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \cos(2k+1)x = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \\ \frac{1}{2} & x = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(2) 令 $x = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$$

在 $[0, \pi/2]$ 上积分, 也可用Parseval 等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

七 (6分):

试定出正数 λ , 使下列曲面

$$F(x, y, z) = xyz - \lambda = 0, \quad G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

在第一象限某一点相切, 即有共同的切平面.

解 根据相切条件

$$(F'_x, F'_y, F'_z) = t(G'_x, G'_y, G'_z)$$

推得

$$yz = t \frac{2x}{a^2}, \quad xz = t \frac{2y}{b^2}, \quad xy = t \frac{2z}{c^2},$$

两边分别乘以 x, y, z 得

$$\lambda = t \frac{x^2}{a^2} = t \frac{y^2}{b^2} = t \frac{z^2}{c^2},$$

相加得 $3\lambda = t$, 因此切点 (第一象限)

$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z_0 = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

代入第一个方程得

$$\lambda = x_0 y_0 z_0 = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

八 (10分): 讨论 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性和可微性.

解 连续性: 根据定义

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$$

可微性：

因在 $(0,0)$

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

所以两个偏导数存在且 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

若可微, 有

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o(\rho)$$

所以 $\frac{f(x,y)}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0$ 但是

$$\frac{f(x,y)}{\rho} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

在 $(0,0)$ 没有极限, 所以不可微。

九 (6分):

设 $f(x,y), g(x,y)$ 在单位圆盘 $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, 证明: 在单位圆周上存在一点 (ξ, η) , 使得 $f(\xi, \eta)\eta = g(\xi, \eta)\xi$.

证明 利用Green 公式有

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D (g'_x - f'_y) dx dy = \oint f(x,y) dx + g(x,y) dy \\ &= \int_0^{2\pi} (-f(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta + g(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

被积函数连续, 因此由积分中值公式, 存在 $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ 使得

$$-f(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \sin \theta_0 + g(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \cos \theta_0 = 0,$$

记 $(\xi, \eta) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, 它是圆周上一点, 就有

$$f(\xi, \eta)\eta = g(\xi, \eta)\xi.$$

十 (6分):

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 计算

$$I = \iiint_{\Omega} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

解 对 $0 < r < 1$, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 的法向量为 $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} = (x, y, z)$,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \vec{r} \cdot \nabla f dV \\ &= \int_0^1 dr \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \vec{r} \cdot \nabla f dS = \int_0^1 r dr \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \nabla f \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_0^1 r dr \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \nabla \cdot \nabla f dV = \int_0^1 r dr \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \Delta f dV \\ &= \int_0^1 r dr \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \end{aligned}$$

利用球坐标 $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$ 最后的积分为

$$I = \int_0^1 r dr \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{6}$$

十一(12分): 1. 设 $u = ax + by$, $v = cx + dy$, 其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是正交常数矩阵.

证明: 对平面上任意的光滑 (至少有二阶连续偏导数) 数量场 f , 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

2. 设变换 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 有二阶连续的偏导数. 已知对平面的任意光滑数量场 f , 下列等式成立

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(1) 证明: 参数变换的 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

(2) 证明: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ 是常值矩阵。

解答:

1 直接验证.

2(1) 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{uu} u_x^2 + 2f_{uv} u_x v_x + f_{vv} v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{uu} u_y^2 + 2f_{uv} u_y v_y + f_{vv} v_y^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}. \end{aligned}$$

所以条件就等价于对任意数量场 f ,

$$f_{uu}(u_x^2 + u_y^2 - 1) + 2f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + f_{vv}(v_x^2 + v_y^2 - 1) \\ + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) = 0.$$

分别取 $f = u, f = v, f = u^2, f = v^2, f = uv$ 代入上式, 就得

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0, \\ u_x^2 + u_y^2 - 1 = 0, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0, \quad v_x^2 + v_y^2 - 1 = 0,$$

其中后三个等式就推出Jacobi矩阵是正交阵。

2 (2) 对等式 $u_x^2 + u_y^2 = 1$ 求偏导, 就得到

$$u_x u_{xx} + u_y u_{xy} = 0, \quad u_x u_{xy} + u_y u_{yy} = 0.$$

所以向量 $(u_{xx}, u_{xy}) \parallel (u_{xy}, u_{yy})$, 这说明矩阵

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & -u_{xx} \end{pmatrix}$$

的行列式等于0. 因此 $u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = 0$, 这说明 $u = u(x, y)$ 是 (x, y) 的一次函数。

同理可以证明 v 是 (x, y) 的一次函数。