电磁学知识总结—电学部分

by 涂前程

1. 基本定律：

库仑定律 $$\boxed{\vec{F}_{12}=\frac{Q'Q}{4\pi\epsilon_0 R_{12}{}^2}\vec{e}_r}$$

欧姆定律 微分形式 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$

积分形式 $I1=U\cdot R$

2. 重要定理：

(1) 高斯定理：

积分形式 $$\boxed{\oint\!\!\!\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}=\frac{1}{\epsilon_0}\int\int\int\rho(\vec{r})\,d^3x}$$

微分形式 $$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

(2) 连续性方程（来源于守恒定律） $$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0}$$

3. 重要物理模型

(1) 电偶极子：

I. 电偶极子在空间中产生的电势电场：

$$\boxed{\phi\cong\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}\cong\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{r}\,(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right]}=-\vec{\nabla}\phi$$

当我们把 $\vec{p}$ 分解为 $\vec{p}_{//}$（与 $\vec{r}$ 同方向）与 $\vec{p}_{\perp}$，$p_{//}=p\cos[\theta]$，$p_{\perp}=p\cos[\theta]$

则 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\left[2\cos[\theta]\,\vec{e}_r+\sin[\theta]\,\vec{e}_\theta\right]$

注：这里提一下电偶极子与电偶极矩的区别，电偶极子是一种物理模型，在空间尺度远大于极子尺度时有上面的近似表达式，而电偶极矩是带电系统的一个物理量，它反映的是电荷的分布引入的一阶修正物理量.

比如说，对一个带电体系

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int\frac{\rho[\vec{r}\,']}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int\rho[\vec{r}\,']\left(\frac{1}{r}-\vec{r}\,'\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}+\ldots\right)d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boxed{\int\int\int\rho[\vec{r}\,']\,d^3r'}①}{r}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boxed{\int\int\int\rho[\vec{r}\,']\,\vec{r}\,'\,d^3r'}②\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}+\ldots$$

①为系统总电荷量，②定义为电偶极矩：

$$\vec{p}=\int\int\int\rho[\vec{r}\,']\,\vec{r}\,'\,d^3r'$$

则 $$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}+\ldots$$

对于一个电偶极子而言 $Q = 0$，而更高阶项是存在的，但 $r' << r$ 时，可只保留一阶项得到近似表达式.

Ⅱ.外场对电偶极子的作用

令外场在电偶极子中心的电场为 $\vec{E}$ ，则电偶极子整体受力 $\vec{F} \cong \vec{p} \cdot \nabla\vec{E}$

电偶极子系统电势能 $W \cong \vec{p} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\vec{p} \cdot \vec{E}$，力矩 $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$.

(2) 导体

Ⅰ.静电平衡导体为等势体

Ⅱ.局域面电荷与表面附近电场关系

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

因此静电平衡导体表面电场处处垂直于表面

Ⅲ.导体面微元受电场合力密度：

$$f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$$

*Ⅳ.格林互易定理

对于具有完全相同导体分布的空间区域V及边界S，当系统处于两种不同的电荷分布 $\rho\ \sigma$，以及 $\rho'\ \sigma'$，对应的电势为 $\phi\ \phi'$，满足

$$\oiint \sigma'\phi\, dS + \iiint \rho'\phi\, dV = \oiint \sigma\phi'\, dS + \iiint \rho\phi'\, dV$$

利用格林互易定理可以证明 ：$\dfrac{\partial\phi_j}{\partial q_i} = \dfrac{\partial\phi_i}{\partial q_j} = \dfrac{1}{C_{ij}} = \text{const}$

Ⅴ.导体中电荷分布：

静电平衡导体无电荷分布，理由如下：

如果导体内部初始有电荷，满足演化方程：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad \Longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sigma\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$ 故 $\rho(t) = \rho(0)\, e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0}}$ 为指数衰减，故静电平衡导体内留不住电荷

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot j = 0$$

(3) 电场线

电场线方程微分式：$d\vec{r} \times \vec{E} = 0$ 即 $\dfrac{dx}{E_x} = \dfrac{dy}{E_y} = \dfrac{dz}{E_z}$

据此可解出电偶极子电场线簇为：$r = c \cdot \sin^2\theta$

(4) 介质极化规律

无介质时 $\oiint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum Q}{\epsilon_0} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho(\vec{r})\, d^3x$

当介质存在，此时极化电荷及其分布对电场产生影响，满足

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} + \frac{\sum Q'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint \left[\rho(\vec{r}) + \rho'(\vec{r})\right] d^3x$$

极化规律满足 $\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$，其中 $\epsilon = (1 + \chi)\epsilon_0$

借助极化模型③，可得到极化电荷密度 $\rho'(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

（若为面电荷则 $\sigma'(\vec{r}) = -(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \hat{n}$）

事实上 $\rho'(\vec{r})$ 无法事先得到，在此引入辅助矢量：电位移矢量 $\vec{D} \overset{\text{def}}{=} \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

上式可转化为 $\boxed{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum Q}$ 该式与极化电荷无显式关系，可方便地求解出 $\vec{D}$，

从而利用本构方程算出 $\vec{E}\ \vec{P}$，再利用 $\rho = \epsilon_0\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ 及 $\rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ 计算电荷分布

③补充：由于介质极化微观上类似于电偶极子按一定规律（电势能满足Maxwell－Boltzmann分布）

排布产生的宏观效应，我们可以直接从电偶极子出发推导出极化电荷密度与宏观量关系：

$$\phi'(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint n(\vec{r})\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{\vec{P}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\vec{P}\cdot\left(\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\vec{\nabla}'\cdot\left(\vec{P}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)-\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oiint\frac{\vec{p}'\cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

观察上式，第一项即是电介质体系中极化体电荷产生的电场，第二项即是电介质体系边界极化面电荷产生的电场.

故：$\rho'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$\sigma'(\vec{r}) = -\vec{P}\cdot\hat{n}$ (这里只考虑了一侧为介质的情况，如果两侧均为介质需取差值)

(5) 电荷系统能量

Ⅰ.静电相互作用能与自能，静电能

离散电荷 (一般指点电荷) 系统：$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$，$W_{自} = \infty$.其中$U_i = \sum_{j=1,i\neq j}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$

连续分布体电荷系统：$W_e = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,dv$，其中$\phi(\vec{r}) = \int\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$

连续分布面电荷系统：$W_e = \frac{1}{2}\int\sigma(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,ds$，$W_{自} = 0$. 其中$\phi(\vec{r}) = \int\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}ds'$

Ⅱ.电荷系统在外场的静电能

对于一套电荷系统（设为V区域），其处在V'区域电荷产生的电场中，两者间互能为：

$$W_{互} = \frac{1}{2}\int_V\rho(\vec{r})\,\phi'(\vec{r})\,dv+\frac{1}{2}\int_{V'}\rho'(\vec{r}')\,\phi(\vec{r}')\,dv'$$

其中$\phi'(\vec{r}) = \int_{V'}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho'(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$　　$\phi(\vec{r}') = \int_V\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv$

代入得：$W_{互} = \frac{1}{2}\int_V\rho(\vec{r})\int_{V'}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho'(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'\,dv+\frac{1}{2}\int_{V'}\rho'(\vec{r}')\int_V\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv\,dv'$

$$=\int_V\rho(\vec{r})\,\phi'(\vec{r})\,dv=\int_{V'}\rho'(\vec{r}')\,\phi(\vec{r}')\,dv'$$

我们视V'为外源电荷系统后，$\phi'(\vec{r})$ 是外场电势，

记$U(\vec{r}) = \phi'(\vec{r})$，则　$W_e = \int_V\rho(\vec{r})\,\phi'(\vec{r})\,dv$　为定义的电势能

Ⅲ.电场能量密度

电场能量密度为：$\omega = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\left(=\frac{1}{2}\epsilon_0E^2+\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}\right)$