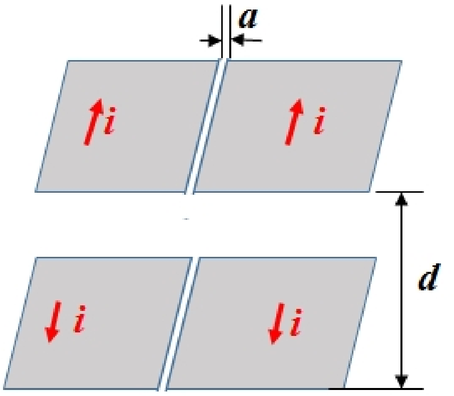
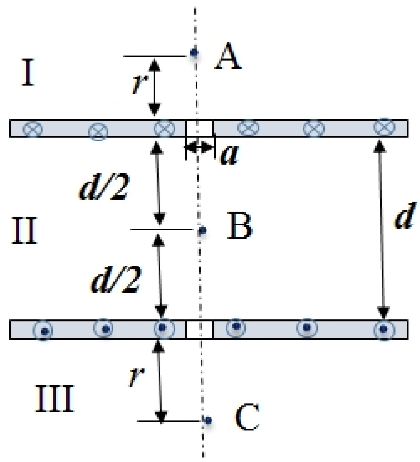
2017 年《电磁学》期末考试公共试题解答

（总分 50 分）

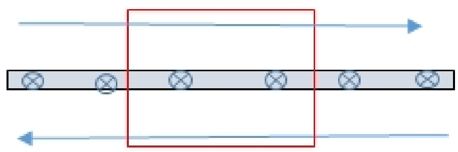
1. （15 分）两个无限大载流平面间距为 d，载有电流密度为 i，电流方向相反，但每块平面中间都有一个小槽，小槽宽度为 a，两条槽中无电流, 且距离也为 d. 求三个区域（I,II,III）中 A、B 和 C 三点处的磁感应强度大小与方向，距离见图所示，平面的厚度不计。





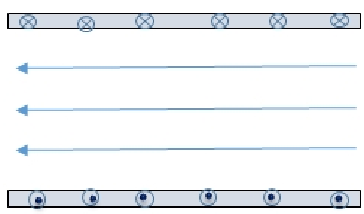
【解】本题可以用叠加原理求解，把每个无电流的槽等效于两个电流方向相反，大小为 $I=ia$ 的叠加， 结果就为无电流的槽。 因此相当于整个无限大载流平面（无槽）面电流为 i，和两根无限长直导线，电流为 I, i 方向与 I 相反所产生的磁感应强度的叠加。

如图，一个无限大载流平面的磁场可利用安培环路定理，有



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$2BL = \mu_0 iL$， $B = \dfrac{\mu_0}{2} i$， 方向如图所示。



两个无限大载流平面， 电流方向相反。叠加后磁场为

I,III 区域为零；

中间区域（II）的磁场为：

$$\vec{B} = -\mu_0 i\vec{e}_z$$

$\vec{e}_z$ 方向水平向右为正方向。

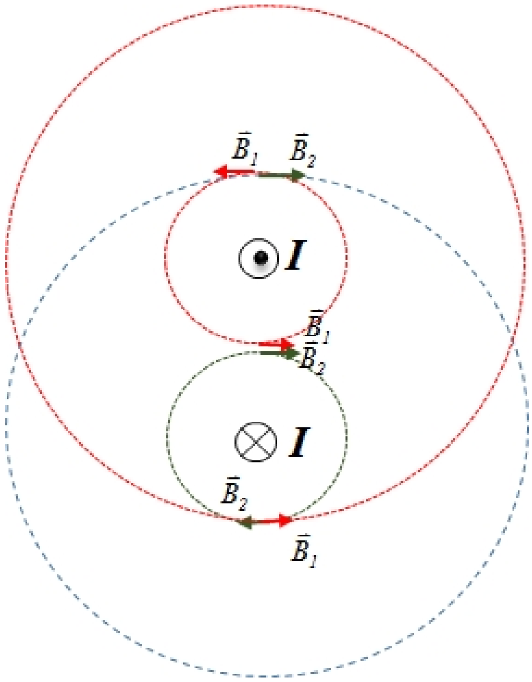
一根无限长直导线的产生的磁场，由安培环路定理有：

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 ia$$

即：

$$B=\frac{\mu_0 ia}{2\pi r}$$

A 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：



$$\vec{B}_A=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi r}\vec{e}_z+\frac{\mu_0 ia}{2\pi(r+d)}\vec{e}_z$$

$$=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+d}\right)\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\frac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z$$

B 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

$$\vec{B}_B=\frac{\mu_0 ia}{\pi d}\vec{e}_z+\frac{\mu_0 ia}{\pi d}\vec{e}_z=\frac{2\mu_0 ia}{\pi d}\vec{e}_z$$

C 点由两根无限长导线产生的磁场大小为

$$\vec{B}_C=\vec{B}_A=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\frac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z$$

综合以上结果。 得到 A,B,C 三点的磁感应强度为：

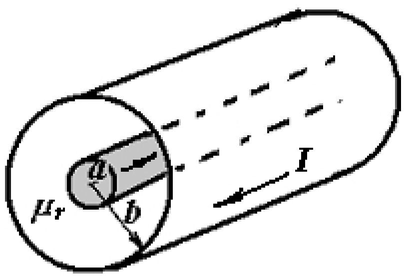
$$\begin{cases} A点: \quad \vec{B}_A=-\dfrac{\mu_0 ia}{2\pi}\dfrac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z \\ B点: \quad \vec{B}_B=\mu_0 i\left(\dfrac{2a}{\pi d}-1\right)\vec{e}_z \\ C点: \quad \vec{B}_C=-\dfrac{\mu_0 ia}{2\pi}\dfrac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z \end{cases}$$

2. (15 分)一同轴电缆，中心是半径为 a 的圆柱实心导线，外部是半径为 b 的导体薄圆筒，之间充满相对磁导率为μ_r 的介质。电流从实心圆柱导线流进，从外筒流出，设内、外导线电流分布均匀，求：

(1) 介质内外 ***B***、***H*** 和 ***M*** 的分布；（6 分）

(2) 界面处的磁化电流密度；（6 分）

(3) 电缆单位长度的自感系数。（8 分）



解：（1）由安培环路定理，有

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I$$

有：$r<a$, $2\pi r H_1=\dfrac{I}{\pi a^2}\pi r^2$， $H_1=\dfrac{I}{2\pi a^2}r$， $B_1=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$， $M_1=0$

$$a<r<b,\ H_2=\frac{I}{2\pi r},\quad B_2=\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r},\quad M_2=\frac{(\mu_r-1)I}{2\pi r}$$

$r>b$, $H_3=0$, $B_3=0$, $M_3=0$

（2）内表面，$r=a$ 处，

$$i_{m1}=\vec{n}\times(\vec{M}_1-\vec{M}_2)=-\vec{n}\times\vec{M}_2=-(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi a}\vec{n}\times\vec{e}_I=(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi a}\vec{e},$$

e_I 为电流右旋方向单位矢量，e 为电流方向单位矢量。

外表面，$r=b$ 处

$$i_{m2}=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_3)=\vec{n}\times\vec{M}_2=(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi b}\vec{n}\times\vec{e}_I=(1-\mu_r)\frac{I}{2\pi b}\vec{e}$$

（3）能量密度：

$$\begin{cases} r<a,\quad \omega_{m1}=\frac{1}{2}B_1H_1=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} \\ a<r<b,\omega_{m2}=\frac{1}{2}B_2H_2=\frac{\mu_0\mu_r I^2}{8\pi\ r^2} \\ r>b,\quad \omega_{m3}=0 \end{cases}$$

磁场的能量：$W_m=\iiint_V \omega_m r d\varphi dr dz$

$$\begin{cases} W_{m!}=\frac{\mu_0 l I^2}{16\pi}, & r<a \\ W_{m2}=\frac{\mu_0\mu_r l I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}, & a<r<b \\ W_{m3}=0, & r>b \end{cases}$$

磁场能量为：$W=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}=\frac{1}{2}LI^2$

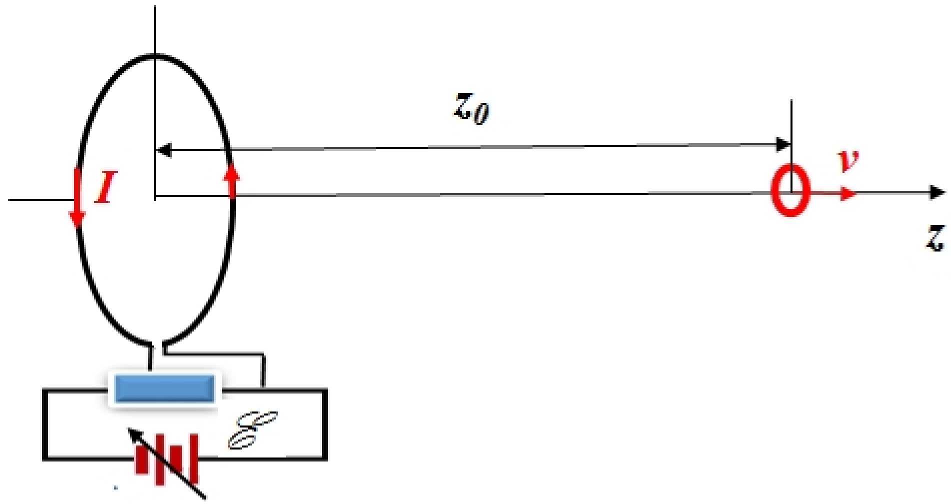
所以单位长度的自感系数 L_0 为：$L_0=\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{1}{4}+\mu_r\ln\frac{b}{a}\right]$

3.（20 分）一个半径为 a 的大线圈接到一个电动势为 $\mathscr{E}$ 的电源上，使之通有电流 I，其轴上有一个无限小线圈，两者共轴，小线圈面积为 S，电阻为 r.

(1) 设 $t=0$ 时刻两者距离为 z_0，此时小线圈沿轴运动的速度为 v，求小线圈中感应电流大小和方向。（6 分）

(2) 求出此时小线圈受到的安培力；（提示 $\vec{F}=m\frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z$，$m$ 为小线圈的磁矩）（4 分）

(3) 在线圈运动过程中，为了维持大线圈中的电流 I 不变，则需要改变其电动势的值，请给出 $\Delta\mathscr{E}$ 的大小，是增加还是减少？（10 分）
(近似认为此时的 v 为常数)



解：（1）大线圈在轴线上的磁感应强度为：

$$B(z)=\frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

小线圈在 t=0 瞬间的磁通量为：

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS=\frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2S}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

小线圈中的感应电流为：

$$i=\frac{\mathscr{E}}{r}=-\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{S}{r}\frac{dB}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{3\mu_0}{2r}\frac{Ia^2Svz}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$

即：$i(z_0)=\dfrac{3\mu_0Ia^2Sv}{2r}\dfrac{z_0}{\left(a^2+z_0^2\right)^{5/2}}$

电流的方向同 I，即按右手螺旋方向为 z 正方向。

（2）小线圈的磁矩为：$\vec{m}=iS\vec{e}_z$，其所受到的梯度力为：

$$\vec{F}=m\frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z=m\left(-\frac{3\mu_0Ia^2}{2}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\vec{e}_z$$

$$=\left(\frac{3\mu_0Ia^2S^2v}{2r}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\left(-\frac{3\mu_0Ia^2}{2}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\vec{e}_z$$

$$=-\left(\frac{3\mu_0Ia^2S}{2}\right)^2\frac{z^2v}{r\left(a^2+z^2\right)^5}\vec{e}_z$$

z 用 z_0 代入，即为小线圈在 z_0 处受到的作用力， 其方向沿-z 方向，即为阻尼力。

（3）无源小线圈向右运动，而远离大线圈时，其贡献于后者的正向磁通量Φ_{21}要减少， 相应的互感电动势$\mathscr{E}_{21}$为正向, 即$\mathscr{E}_{21}>0$， 为维持 I 不变， 有源大线圈中的电动势需要改变一个$\Delta\mathscr{E}$，即使$\Delta\mathscr{E}+\mathscr{E}_{21}=0$, 即

$$\Delta\mathscr{E} = -\mathscr{E}_{21} = -\left(-\frac{d\Phi_{21}}{dt}\right) = M\frac{di}{dt}$$

由上面（1）的磁通量结果，可以得到两线圈之间的互感系数为：

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 S}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

由（1）得到的 i， 有

$$\frac{di}{dt} = \frac{3\mu_0 a^2 ISv}{2r}\frac{d}{dt}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 a^2 ISv^2}{2r}\frac{\left(1-\frac{5z^2}{\left(z^2+a^2\right)}\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$
$$= \frac{3\mu_0 a^2 ISv^2}{2r}\frac{\left(a^2-4z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}}$$

最终有：

$$\Delta\varepsilon = M\frac{di}{dt} = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 S}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\frac{3\mu_0 a^2 ISv^2}{2r}\frac{\left(a^2-4z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}}$$
$$= \frac{3\mu_0^2 a^4 IS^2 v^2}{4r}\frac{\left(a^2-4z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{52}}$$

可见，$\Delta\mathscr{E}>0$ 或$\Delta\mathscr{E}<0$ 取决于（a^2-$4z^2$），当

$$z > a/2\text{时，}\Delta\mathscr{E} < 0$$

$$z < a/2\text{时，}\Delta\mathscr{E} > 0$$