2020 ～ 2021 学年第 2 学期数学分析B2期末参考答案

一、(本题 6 分)

由于被积函数e^{x^2-xu}对u有连续偏导数, 积分限$\sin u$, $\cos u$有连续导数, 则有

$$I'(u) = -\int_{\sin u}^{\cos u} xe^{x^2-xu}\mathrm{d}x - \sin u e^{\cos^2 u - u\cos u} - \cos u e^{\sin^2 u - u \sin u}.$$

每个求导部分各2分.

二、(本题 12 分： 每小题各 4 分)

(1) 计算$\mathbf{rot}\mathbf{v} = (0,0,0)$, 其定义域是曲面单连通的, 所以$\mathbf{v}$是有势场.————(4分)

(2)
$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \left(\frac{y}{z} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y + \left(1 - \frac{xy}{z^2}\right)\mathrm{d}z$$
$$= \left(\frac{y}{z}\mathrm{d}x + \frac{x}{z}\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z\right) + \left(\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y - \frac{1}{y}\mathrm{d}x\right) + \mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(\frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + z\right) ------ (7分)$$

所以势函数为 $\dfrac{xy}{z} - \dfrac{x}{y} + z + C$, C为任意实数.—————————-(8分)

(3)
$$\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} \mathrm{d}\left(\frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + z\right) ---------- (10分)$$
$$= \left(\frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + z\right)\Big|_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} = \frac{13}{6}. ---------- (12分)$$

三、 (本题共 20 分, 每小题各 10分)

(1) 由题意知, L由x轴上的直线段$\overline{OA}$, 圆周上的弧段$\widehat{AB}$及$y=x$上的直线段$\overline{OB}$组成.

$$\overline{OA}:\ y = 0, 0 \le x \le 2; \qquad \overline{OB}:\ y = x, 0 \le x \le \sqrt{2};$$
$$\widehat{AB}:\ x = 2\cos t, y = 2\sin t,\ (0 \le t \le \frac{\pi}{4}) --------- (2分)$$

$$\int_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s = \int_0^2 e^x \mathrm{d}x = e^2 - 1. ------------ (4分)$$
$$\int_{\overline{OB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}\mathrm{d}x = e^2 - 1. --------- (6分)$$
$$\int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}e^2. ------------- (8分)$$
$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s = \left(\int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{OB}} + \int_{\widehat{AB}}\right) e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}s = (\frac{\pi}{2} + 2)e^2 - 2. ------- (10分)$$

(2)
$$I = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s = \oint_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s = \oint_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) --------- (4分)$$

应用Green公式，及二重积分的极坐标变换，得

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y ---------- (7分)$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}} r\sin r^2 \mathrm{d}r = 2\pi. ---------- (10分)$$

四、(本题 10 分)

解： 曲面S ： $x=y^2+z^2$ ，后侧，在yoz平面上的投影D ： $y^2+z^2\le 1$，作圆盘$\Sigma: x=1,(y,z)\in D$，方向与x轴正向同向，即前侧. $S\cup\Sigma$指向外侧，所围区域为Ω，应用Gauss公式得————-(2分)

$$\iint_S 2(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\iint_{S\cup\Sigma}-\iint_{\Sigma}\right)2(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y--------(4分)$$

$$=\iiint_{\Omega}(2+y)\mathrm{d}V-\iint_{\Sigma}4\mathrm{d}y\mathrm{d}z--------(8分)$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{y^2+z^2\le x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4\pi=-3\pi.--------(10分)$$

五、(本题共 12分)

解： 曲面S为球面$x^2+y^2+z^2=4x$被柱面$x^2+y^2=2x$ 所截部分下侧，法向$\mathbf{n}=-(\frac{x-2}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})$，记$D$： $x^2+y^2\leqslant 2x$，由$Stokes$公式————-(2分)

$$I=-\iint_S\begin{vmatrix}\frac{x-2}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-2\iint_S(z-y)\mathrm{d}S--------(6分)$$

$$=-2\iint_S z\mathrm{d}S=-2\iint_D\sqrt{4x-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y--------(10分)$$

$$=-4\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi.--------(12分)$$

另解：参数法： $x=1+\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{2+2\cos t},\quad (2\pi\ge t\ge 0)$

六、(本题共16分：每小题各 8 分)

(1) 根据Fourier系数的展开公式得

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)\mathrm{d}x=0,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2},\quad b_n=0,-----------(4分)$$

$f(x)$的余弦级数为 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.————— (6分)

由Dirichet收敛定理，其余弦级数收敛到$f(x)$自身，即

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}-x,\quad x\in[0,\pi].----(8分)$$

(2) 令$x=0$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.----------(10分)$$

Parseval等式: $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$———— (12分)

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}=\dfrac{\pi^4}{96}\Longrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$.—————-(16分)

七、(本题共16分: 第1小题 4分; 第2, 3小题各 6 分)

(1) $\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$x\to 0^+$时, $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x\sim x^\alpha$, 所以第一个积分收敛当且仅当 $\alpha>-1$;——————-(2分)

$x\to+\infty$时, $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x\sim\dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$, 所以第二个积分收敛当且仅当 $2-\alpha>1$ 即 $\alpha<1$. 所以原积分收敛当且仅当$\alpha\in(-1,1)$.——————-(4分)

(2) $\alpha\in(-1,1)$时, 令$x^2=z$, 积分化为贝塔函数——————-(6分)

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{z^{\frac{\alpha-1}{2}}}{1+z}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\mathbf{B}\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)-----------(8分)$$
$$=\frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}(\frac{1+\alpha}{2})\mathbf{\Gamma}(\frac{1-\alpha}{2})=\frac{\pi}{2\sin(\frac{1-\alpha}{2}\pi)}=\frac{\pi}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2}.-----------(10分)$$

(3) 对$0<\alpha_0<1$, 当$\alpha\in[-\alpha_0,\alpha_0]$, $0<x\le 1$时

$$\frac{x^\alpha}{1+x^2}\le x^{-\alpha_0}=\frac{1}{x^{\alpha_0}}$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha_0}}\mathrm{d}x$收敛, 故由Weierstrass判别法, $\displaystyle\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x$在区间$[-\alpha_0,\alpha_0]$上一致收敛.(13分)

当$\alpha\in[-\alpha_0,\alpha_0]$, $x\ge 1$时

$$\frac{x^\alpha}{1+x^2}\le\frac{x^{\alpha_0}}{1+x^2}<\frac{1}{x^{2-\alpha_0}}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2-\alpha_0}}\mathrm{d}x$收敛, 故由Weierstrass判别法, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x$在区间$[-\alpha_0,\alpha_0]$上一致收敛.

所以含参广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间$[-\alpha_0,\alpha_0]$上一致收敛.——————(16分)

八、(本题 8 分)

证明：设上半圆周L的直径为AB, $L\cup AB$封闭曲线取逆时针, 所围区域为D

$$\int_{L\cup AB} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=(\int_{L}+\int_{AB})P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

应用Green公式, 及二重积分的积分中值定理, 得

$$\int_{L\cup AB} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M\frac{\pi}{2}r^2.------(2分)$$

其中点$M\in D$. 再由一元函数的积分中值定理, 得

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\mathrm{d}x=2rP(\xi,y_0),\quad \xi\in(x_0-r,x_0+r).$$

所以有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M\frac{\pi}{2}r^2=2rP(\xi,y_0)\Longrightarrow\pi\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M r=4P(\xi,y_0)----------(4分)$$

当$r\to 0$时, $M|to(x_0,y_0)$, 上式两边取极限得 $P(x_0,y_0)=0$, 由(x_0,y_0)的任意性, 有$P(x,y)=0$.——— (6分)

再由上式 $\frac{\partial Q}{\partial x}|_M=0$,

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial Q}{\partial x}|_M=\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=0,$$

由(x_0,y_0)的任意性, 有$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$.———(8分)