Taller de solución Numérica de ecuaciones de una variable

Francisco José Correa Zabala
Universidad EAFIT

Este documento es elaborado con el objetivo de servir de complemento al desarrollo del capítulo de Ecuaciones de Una variable. El contenido hace parte de una estrategia educativa que permita al estudiante desarrollar habilidades para el autoaprendizaje. El documento se desarrollará con las indicaciones del profesor. Algunos de los ejercicios contienen sugerencias sobre su solución.
En la página *www1.eafit.edu.co/cursonumerico* podrás encontrar ejemplos resueltos y ejercicios básicos en cada una de las sesiones que se presentan.

Responda solo una de las alternativas planteadas. En la prueba aparecen tres tipos de pregunta (al comienzo del enunciado se aclara este aspecto).

1. *Selección múltiple con una única respuesta.* En este caso elija la más adecuada.

2. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Tenga en cuenta el siguiente esquema para la solución.

   ⋆ Si 1 y 2 son correctas, rellene el óvalo A
   ⋆ Si 2 y 3 son correctas, rellene el óvalo B
   ⋆ Si 3 y 4 son correctas, rellene el óvalo C
   ⋆ Si 2 y 4 son correctas, rellene el óvalo D
   ⋆ Si 1 y 3 son correctas, rellene el óvalo E

3. *Análisis de relación.* Tenga en cuenta el siguiente esquema para la solución.

   ⋆ Si la afirmación y la razón son VERDADERAS y la razón es una explicación CORRECTA de la afirmación, rellene el óvalo (A)
   ⋆ Si la afirmación y la razón son VERDADERAS, pero la razón NO es una explicación CORRECTA de la afirmación, rellene el óvalo (B)
   ⋆ Si la afirmación es VERDADERA, pero la razón es una proposición FALSA, rellene el óvalo (C)
   ⋆ Si la afirmación es FALSA, pero la razón es una proposición VERDADERA, rellene el óvalo (D)
   ⋆ Si tanto la afirmación como la razón son proposiciones FALSAS, rellene el óvalo (E)

1. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Para garantizar la existencia de una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$ se requiere que:

   1. Aplicar el método de búsquedas incrementales.
   2. $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$
   3. f sea continua en $[a, b]$
   4. $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos contrarios.

2. *Análisis de relación.* Los métodos por intervalos definidos para la solución de ecuaciones de una variable pueden llegar a diverger **PORQUE** los métodos por intervalos definidos para la solución de ecuaciones de una variable requieren de dos valores iniciales cualesquiera para su correcta ejecución.

3. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Un aspecto que hay que tener en cuenta al usar el método de búsquedas incrementales es:

    1. La solución es un intervalo con una única raíz.
    2. Saber elegir la longitud del incremento.
    3. Siempre encuentra un intervalo que contiene una raíz.
    4. Pasar por inadvertidas raíces muy cercanas.

4. *Análisis de relación.* Sea $f(x) = 0$ una ecuación. El método de la bisección es siempre convergente para un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple que $f(a)f(b) < 0$ **PORQUE** la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por el método de la bisección, bajo las condiciones adecuadas, es tal que $\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$ (donde, p es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en$[a, b]$).

5. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Si una función es continua y cambia de signo en los extremos de un intervalo cerrado entonces el método de Regla Falsa (Regula Falsi) para resolver ecuaciones NO lineales se caracteriza por:

    1. Converger SIEMPRE.
    2. Utilizar rectas secantes a la curva.
    3. Encontrar SIEMPRE una aproximación a la respuesta exacta.
    4. Ser rápido cuando converge.

6. *Selección múltiple con una única respuesta.* Una buena función de punto fijo debe cumplir tres condiciones. Al adicionar la condición $|g'(x)| < 1$, para todo x en $[a, b]$, a las otras dos, se logra:

    A. Garantizar que $g(x) \in [a, b]$.
    B. Garantizar la continuidad de f en $[a, b]$.
    C. Garantizar que g tiene único punto fijo en $[a, b]$.
    D. Garantizar que g no se salga del cuadrado que se forma según el intervalo $[a, b]$
    E. Garantizar que se puede usar el teorema del valor medio.

7. *Selección múltiple con una única respuesta.* Una buena función de punto fijo debe cumplir tres condiciones. La condición $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, permite:

    A. Garantizar la existencia de al menos un punto fijo en $[a, b]$.
    B. Garantizar la continuidad de g en $[a, b]$.
    C. Garantizar la existencia de un único punto fijo en $[a, b]$.
    D. Si g es continua en $[a, b]$, se garantiza que existe al menos un punto fijo en $[a, b]$..
    E. Garantizar que se puede usar el teorema del valor medio.

8. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Suponga la ecuación $f(x) = 0$ y una ecuación $x = g(x)$ para resolver por el método de punto fijo, un intervalo $[a, b]$ donde existe una raíz. Suponga que se encuentra un valor x_n con una tolerancia de $10^{?5}$. Con los datos dados, se puede inferir que:

    1. Es una de las raíces del intervalo $[a, b]$.
    2. El valor encontrado representa la **intercepción** entre la curva $y = g(x)$ y la recta $y = x$
    3. El valor encontrado es una aproximación a una **posible raíz de** la ecuación $f(x) = 0$.
    4. El valor encontrado es **el punto fijo** de g.

9. *Selección múltiple con única respuesta.* Sea g una función de punto fijo que cumple las tres condiciones para ser declarada como una ?buena función? en un intervalo $[a, b]$. Una de las siguientes expresiones es incorrecta:

A. Entonces existe un único punto fijo $[a, b]$.
B. Si $-1 < g'(x) < 0$ en el intervalo $[a, b]$ entonces g tiene convergencia bilateral.
C. Si $0 < g'(x) < 1$ en el intervalo $[a, b]$ entonces g tiene convergencia unilateral.
D. Intuitivamente el intervalo $[a, b]$ define un rectángulo alrededor de la recta $y = x$, tal que el gráfico de g no se sale del rectángulo, es continua y es suave.
E. El método de punto fijo, con estas condiciones, converge rápidamente.

10. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Cuando un método se define como una variante del método de punto fijo. Esta definición nos permite comprender:

    1. La rapidez que tiene el método.
    2. Los criterios de convergencia.
    3. La forma de utilizarlo para resolver ecuaciones.
    4. Los conceptos básicos para hacer el algoritmo.

11. *Selección múltiple con única respuesta.* Sea g una función de punto fijo que es continua. Con respecto al método de punto fijo una de las siguientes expresiones es incorrecta:

    A. Para que exista un punto fijo debemos garantizar adicionalmente la invariancia de la función de punto fijo en el intervalo.
    B. Para garantizar la unicidad garantizamos adicionalmente que las rectas tangentes a g en el intervalo sean más suaves que la recta $y = x$ en el intervalo.
    C. Toda función g que corta la recta $y = x$ una sola vez, es siempre “una buena” función g.
    D. Las propiedades de la funciones g se relacionan con un rectángulo alrededor de la recta $y = x$, tal que g no se salga del rectángulo, que sea continua y que sea suave.
    E. Si la función g cumple las condiciones de convergencia y la derivada es negativa la convergencia es alternada.

12. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Suponga que f es continua en todo su dominio. Al ejecutar un método numérico se observa que la sucesión de valores de x_n es alternante y se aproxima a un valor con una tolerancia de 10^{-8} y en la columna de $f(x_n)$ se observa que los signos son contrarias a medida que avanza la ejecución del método. Para disponer de argumentos que sustenten que el valor resultante es una buena aproximación a una raíz:

    1. Se evalúa la función en un valor un poco inferior a la raíz aproximada hallada.
    2. Como hay cambio de signo en los dos últimos valores de f podemos garantizar que la aproximación es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$
    3. Según las evidencias podemos garantizar tanto la exactitud como la precisión.
    4. El error es menor que la tolerancia y con eso estamos seguros.

13. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* En el método de newton se establece que $E_{n+1} = \frac{-f''(\xi)}{2f'(x_n)}E_n^2$. Este argumento plantea que:

    1. El método de Newton converge cuadráticamente.
    2. El método de Newton se acerca por medio de tangentes.
    3. El método de Newton duplica sus cifras en cada iteración.
    4. El método de Newton se puede definir por medio de series de Taylor.

14. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* El método de la Secante para resolver ecuaciones NO lineales se caracteriza por:

    1. Parte de un intervalo que contiene a una raíz
    2. Utilizar rectas secantes a la curva y = f(x)

3. Se puede definir mediante una aproximación de la derivada
4. En general es el más rápido cuando converge

15. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* En un método se establece que $E_{n+1} = kE_n^{1.7}$. Este resultado plantea que:

    1. El método es más rápido como Newton.
    2. El método un poco menos rápido que Newton.
    3. El método puede llegar a duplicar las cifras en una iteración.
    4. El método linealmente.

16. *Análisis de relación.* Para los métodos definidos para resolver ecuaciones de una variable. En general, al implementar los métodos numéricos en un computador los algoritmos correspondientes deben incluir criterios de éxito y de fracaso **PORQUE** en general los métodos numéricos implican procesos que generan infinitas aproximaciones.

17. *Selección múltiple con una única respuesta.* Dada la función $f(x) = (x-1)^2(x-2)^3\sqrt{x}$. Las multiplicidades de las raíces $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ son respectivamente:

    A. 1 y 3.
    B. 2 y 3.
    C. 1 y 2.
    D. 2 y 1.
    E. 3 y 2.

18. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Al ejecutar el método de Newton se observa que la sucesión de valores de x_n es convergente, la columna de $f(x_n)$ se observa que los valores se aproximan a cero, que el error cada vez se aproxima a cero y el método converge linealmente. Este hecho describe que:

    1. Es comportamiento normal del método.
    2. Es posible que la derivada esté convergiendo a cero.
    3. Es bueno aplicar Secante para mejorar la convergencia.
    4. Es posible que estemos ante una raíz múltiple.

19. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Desde el punto de vista numérico, al presentar la solución numérica de una ecuación de la forma f(x) = 0 es necesario presentar argumentos que tengan en cuenta:

    1. La cercanía entres aproximaciones.
    2. La cercanía al valor verdadero.
    3. La eficiencia del algoritmo.
    4. La estabilidad del algoritmo que lo define.

20. *Selección múltiple con múltiple respuesta.* Suponga que f es continua en todo su dominio. Al ejecutar el método numérico de raíces múltiples, se observa que la sucesión de valores de x_n es convergente de forma decreciente y se aproxima a un valor con una tolerancia de 10^{-8}, en la columna de $f(x_n)$ se observa que los valores se aproximan a cero y son del mismo signo a medida que avanza la ejecución del método, en la columna de $f'(x_n)$ se observa que se aproximan a cero a medida que avanza la ejecución del método y en la columna de $f''(x_n)$ se observa que se aproximan a una constante distinta de cero a medida que avanza la ejecución del método. Qué aspectos de la tabla le permiten disponer de argumentos para caracterizar mejor su solución:

1. Se evalúa la función en un valor un poco inferior a la raíz aproximada hallada.
2. El resultado obtenido es presumiblemente una raíz de multiplicidad 2.
3. El error es menor que la tolerancia y con eso estamos seguros.
4. El resultado obtenido nos confirma de que NO es una raíz de múltiple.