Taller de Solución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Gabriel Jaime Castaño Chica
Francisco José Correa Zabala
Universidad EAFIT

Este documento es elaborado con el objetivo de servir de complemento al desarrollo del capítulo de Sistemas de Ecuaciones Lineales. El contenido hace parte de una estrategia educativa que permita al estudiante desarrollar habilidades para el autoaprendizaje. El documento se desarrollará con las indicaciones del profesor. Algunos de los ejercicios contienen sugerencias sobre su solución.
En la página *www1.eafit.edu.co/cursonumerico* podrás encontrar ejemplos resueltos y ejercicios básicos en cada una de las sesiones que se presentan.

1. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvalo por los métodos anunciados, justificando cada uno de los pasos, según los criterios que el profesor le planteó.

   1.1

$$\begin{aligned}
-x_1 + 4x_4 - x_5 &= 61\\
-x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= 14\\
4x_1 - x_2 - x_4 &= 8\\
-x_1 + 5x_2 - x_3 - x_5 &= 5\\
-x_2 + 5x_3 - x_6 &= 9\\
-x_3 - x_5 + 6x_6 &= 23
\end{aligned}$$

   2.2

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= -1\\
3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0\\
3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4
\end{aligned}$$

   3.3

$$\begin{aligned}
10x_1 - 6x_2 + 37x_3 + 4x_4 &= -15\\
8x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 34x_4 &= 21\\
5x_1 + 31x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 5\\
56x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= -15
\end{aligned}$$

   a) Resuélvalos por medio de Eliminación Gaussiana Simple
   b) Resuélvalos por medio de Eliminación Gaussiana con Pivoteo Parcial
   c) Resuélvalos por medio de Eliminación Gaussiana con Pivoteo Total
   d) Resuélvalos por medio de Croult. (*sugerencia, si es necesario organícelo de forma adecuada el sistema*)

e) Resuélvalos por medio de Doolittle. (*sugerencia, si es necesario organícelo de forma adecuada el sistema*)

f) Resuélvalos por medio de Cholesky. (*sugerencia, si es necesario organícelo de forma adecuada el sistema*)

g) Resuélvalos por medio de Jacobi. (*sugerencia, si es necesario organícelo de forma adecuada el sistema*)

h) Resuélvalos por medio de Gauss Seidel. (*sugerencia, si es necesario organícelo de forma adecuada el sistema*)

i) Resuélvalos por medio de Gauss Seidel con Relajación . (*sugerencia, si es necesario organícelo de forma adecuada el sistema*)

2. La Eliminación Gaussiana es un método directo y por tanto, establecer el número de operaciones que se ejecutan en el método es importante para determinar la estabilidad del método. Los siguientes ejercicios están relacionados con el tema.

   a) Determine el número de operaciones necesarias (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) para efectuar el procesos de eliminación gaussiana en una matriz $A_{4\times 4}$.

   b) Determine el número de operaciones necesarias para efectuar el procesos de eliminación gaussiana en una matriz ampliada $[A|b]_{4\times 5}$.

   c) Determine el número de operaciones necesarias para efectuar el procesos de eliminación gaussiana en un sistema $Ax = b$ donde la matriz $A_{n\times n}$.

   d) Ahora cuente el número de operaciones para realizar la sustitución regresiva en el ejercicio anterior. ¿Cuántas operaciones en total para resolver el sistema?

   e) Si una máquina hace 2 millones de operaciones por minuto, ¿Cuánto demora en resolver un sistema 10000×10000?

   f) Si se supone una máquina que hace 200.000 operaciones por segundo, ¿cuánto tardará la máquina en resolver un sistema 1.000×1.000?, ¿cuánto tardará en resolver un sistema de $1.000.000 \times 1.000.000$?

   Indique su respuesta en horas, días, meses, años o siglos dependiendo de cuán conveniente sea la unidad de tiempo seleccionada.

3. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas por medio de la eliminación gaussiana, utilizando aritmética de redondeo a 3 decimales (ojo que cada operación debe redondearse a ese número de decimales y no sólo el resultado).

   a. $\begin{pmatrix} 1.00001 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.99999 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0.89 & 0.53 \\ 0.47 & 0.28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.19 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0.1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ -3.8 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

h. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0.5 & 0 & -1 \\ -1 & 0.1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 2.5 \\ -3.8 \end{pmatrix}$

4. Resuelva los sistemas del ejercicio 3, pero ahora implementando el *pivoteo parcial.*

5. Resuelva los sistemas del ejercicio 3, pero ahora implementando el *pivoteo total.*

6. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ -7 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   a) Resuélvalo de la forma más eficiente. Justifique su respuesta.

   b) Calcule el determinante de la matriz A asociada al sistema de ecuaciones anteriores de la forma $Ax = B$, sin calcular A y en el menor número de operaciones. Justifique su respuesta.

7. El siguiente sistema tiene como matriz de coeficientes la Matriz de Hilbert de orden 3

$$\begin{aligned} 1x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   a) Resuélvalo mediante Eliminación Gaussiana Simple con aritmética de dos decimales por corte.

   b) Cambie el orden de las ecuaciones y resuélvalo mediante Eliminación Gaussiana Simple con aritmética de dos decimales por corte.

   c) Compare las soluciones obtenidas y estás con la solución verdadera. Concluya y elija un método adecuado para resolver sistemas de ecuaciones con estas condiciones

   d) Defina un sistema de ecuaciones con la matriz de Hilbert de orden 6 y cuyo vector de término independientes es $B = [10 \;\; 25 \;\; 30 \;\; 45 \;\; 23 \;\; 38]^t$ y resuélvalo mediante un método adecuado. *Sugerencia. Tenga en cuenta que el sistema es inestable y debe buscar que el error de propagación no sea muy alto*

8. Considere la siguiente Matriz

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 24 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 31 & 2 & 9 \\ 7 & -8 & 9 & 47 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & -11 & 58 \end{pmatrix}$$

   a) Qué clase de matriz es?. Justifique.

   b) Utilice sus programas para hallar L y U por medio del método de Cholesky.

   c) Utilice sus programas para hallar L y U por medio del método de Croult.

   d) Utilice sus programas para hallar L y U por medio del método de Doolittle.

   e) Determine la factorización LU de la matriz A asociada al sistema dado, de tal manera que se cumpla que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 3 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 7 & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{pmatrix}$$

   f) Por medio de los resultados anteriores hallar el determinante de A con el menor número de operaciones posibles.

   g) Por medio de los resultados anteriores hallar la tercera columna de la inversa de A

   h) Si $B = [12 \quad -21 \quad 13 \quad -43 \quad 56]^t$, resuelva el sistema $Ax = B$. Utilice los resultados anteriores.

   i) Determine el radio espectral de la matriz de transición de Jacobi. Escriba la ecuación iterativa

$$x_{n+1} = T_J x_n + D$$

   y ejecute el método hasta hallar una solución con una tolerancia de 10^{-6}

   j) Determine el radio espectral de la matriz de transición de Gauss Seidel. Escriba la ecuación iterativa

$$x_{n+1} = T_G x_n + D$$

   y ejecute el método hasta hallar una solución con una tolerancia de 10^{-6}

9. Encuentre la factorización de Cholesky para la Matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 10 & 1 \\ -2 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

10. Resolver el siguiente sistema utilizando dos diferentes que involucren factoraización LU

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 \quad\quad &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

11. Considere la siguiente matriz. Determinar los valores del parámetro α para los cuales la matriz A admite factorización LU de Doolittle.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones realice un seudo-código del método más efectivo para resolverlo, recuerde los criterios para que el seudo-código sea optimo. Utilice las variables sugeridas

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

13. Dado el siguiente sistema de ecuaciones realice un seudo-código del método de la Eliminación Guassiana Simple para resolverlo. Recuerde los criterios para que el seudo-código sea optimo. Utilice las variables sugeridas

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & a_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ddots & b_{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

14. Aplique el método de Jacobi con cuatro iteraciones y con valores iniciales $x = 1$, $y = 1$, para aproximar la solución del sistema. Compare sus resultados con la solución exacta.

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & y & = & 14 \\ x & - & 2y & = & -6 \end{array}$$

15. Repita el ejercicio anterior pero con iteraciones del método de Gauss-Seidel.

16. Calcule la solución aproximada con cada uno de los métodos iterativos trabajados para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

    a)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 7x & & & - & z & = & 9 \\ -x & + & 4y & & & = & 19 \\ & & y & - & 9z & = & 23 \end{array} \right.$$

    b)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & z & = & 17 \\ x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 4z & = & 11 \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & y & - & z & = & 5 \\ -x & + & 5y & + & z & = & -9 \\ x & + & y & + & 5z & = & 15 \end{array}\right.$$

17. Resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

mediante los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. ¿Son convergentes ambos métodos? ¿Cuál converge más rápido? (Justifique).

18. Demuestre que la matriz de transición del método de Jacobi es

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

y el vector de constantes es $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$.

Sugerencia: Transforme la expresión $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{C}$$

Si necesita más indicaciones se puede basar en [**?**].

19. Resolver por el método de Gauss-Seidel el sistema

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}$$

Comience a iterar con $(1, 1)$. Interpretar los resultados. Grafíquelos. Rehaga su análisis para el método de Jacobi.

20. Sea $\mathbf{T}$ la matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

Probar que

$$\rho(\mathbf{T}) < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad |a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

21. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ c & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$$

a. ¿Qué condición es necesaria para que al resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ el método de Jacobi converja?

b. ¿Qué condición es necesaria para que al resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ el método de Gauss-Seidel converja?

c. Concluya que Jacobi converge si y sólo si Gauss-Seidel converge. ¿Cuál converge más rápido?

22. Consideramos la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$.

a. Pruebe que un método iterativo válido está dado por

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \left(\mathbf{D} - \frac{1}{2}\mathbf{L}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\mathbf{L} + \mathbf{U}\right) \mathbf{x}^{(n)} + \left(\mathbf{D} - \frac{1}{2}\mathbf{L}\right)^{-1} \mathbf{b}$$

b. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que el método anterior converge si y sólo si $a^2 < \frac{1}{2}$.

c. Verifique que el método de Gauss-Seidel satisface la misma condición del ítem anterior sobre el parámetro a. ¿Cuál de los dos métodos elegiría?.

23. Demuestre que la iteración de Jacobi para un sistema cuya matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

converge sólo si $-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$.

24. Determine qué condición es necesario que se satisfaga para que el método iterativo de Gauss-Seidel converja al resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

25. Dados α y β se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar la relación entre α y β para que el método de Jacobi sea convergente.