Taller de Interpolación, Diferenciación, Integración y Ecuaciones Diferenciales

Gabriel Jaime Castaño Chica
Francisco José Correa Zabala
Universidad EAFIT

Este documento es elaborado con el objetivo de servir de complemento al desarrollo de los capítulos de Interpolación, Diferenciación, Integración y ecuaciones diferenciales. El contenido hace parte de una estrategia educativa que permita al estudiante desarrollar habilidades para el autoaprendizaje. El documento se desarrollará con las indicaciones del profesor. Algunos de los ejercicios contienen sugerencias sobre su solución.
En la página *www1.eafit.edu.co/cursonumerico* podrás encontrar ejemplos resueltos y ejercicios básicos en cada una de las sesiones que se presentan.

1. Dados los siguientes puntos (x, y) resuelva los siguientes problemas

1.1

n	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y_i	$-8,721968$	$-11,390940$	$-14,345230$	$-17,583432$	$-21,104092$	$-24,905700$

Sugerencia: la función que define el conjunto de puntos es $f(x) = x2^{(x/5)+1} - 4x^2 + 2$. *Utilice está información para comprobar sus resultados*

1.2

n	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2.2	2.3	2.5	2.7	3
y_i	$2,135335$	$4,578425$	$6,057253$	$9,514264$	$13,625041$	$21,000911$

Sugerencia: la función que define el conjunto de puntos es $f(x) = e^{-x^2+2} + 8x^2 - 21x + 12$. *Utilice está información para comprobar sus resultados*

a) Determine mediante un sistema de ecuaciones el polinomio interpolante

b) Determine el polinomio interpolante de Newton con diferencias divididas.

c) Utilice el polinomio que halló en $1b$ para estimar el valor de $f(2.45)$ y contraste su resultado con el valor verdadero.

d) Determine el polinomio interpolante de Lagrange.

e) Utilice el polinomio que halló en $1d$ para estimar el valor de $f(2.45)$ y contraste su resultado con el valor verdadero

f) Determine la función definida por tramos que origina el trazador lineal con todos los puntos dados.

g) Determine la función definida por tramos que origina el trazador cuadrático con todos los puntos dados.

h) Determine la función definida por tramos que origina el trazador cúbico con todos los puntos dados.

2. La tabla de diferencias divididas para el polinomio interpolante de newton con diferencias divididas de una función f definida en $[0, 0, 7]$ esta dada por:

x	$Orden\ \ 0$	$Orden\ \ 1$	$Orden\ \ 2$
0	$f[x_0] =?$		
0.4	$f[x_1] =?$	$f[x_0, x_1] =?$	
$0,7$	$f[x_2] =?$	$f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$

a) Encuentre los valores de que faltan para completar la tabla.

b) Determine el polinomio interpolante de Newton con diferencias divididas para los puntos dados.

c) Utilice el polinomio para estimar el valor de f(0.45).

3. Se quiere determinar la cantidad de personas que circulan por una escalera eléctrica en tiempos de promociones. Al momento de comenzar a medir el medidor marca 150 personas por minuto, luego de 5 minutos su ritmo subió a 175 personas por minuto. A los 10 minutos estaba en 213 personas por minuto y luego de un cuarto de hora mostraba 188 personas por minuto.

a) Con los datos dados, encuentre el polinomio que describe la cantidad de personas que circulan en cualquier minuto.

b) ¿Cuántas personas por minuto debieron pasar en la mitad del tiempo de medición?

c) Determine mediante métodos numéricos la cantidad total de personas que pasaron en el tiempo en que se tomaron las medidas

d) Determine mediante análiticos la cantidad total de personas que pasaron en el tiempo en que se tomaron las medidas. *Sugerencia: utilice el polinomio resultante en 3*a

4. Determine si existen valores a, b, c, d, e para que la siguiente función definida por tramos sea un spline cúbico natural con la tabla dada:

a)

n	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	-1	0	-1	2

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 2x^2 + b & 0 \leqslant x < 1 \\ -3x^3 + cx - d & 1 \leqslant x < 2 \\ ex^3 + 1 & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

b)

n	0	1	2	3
x_i	-1	1	2	4
y_i	-1	1	5	-2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{51}{140}x^3 + ax^2 + \frac{89}{140}x + b & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -cx^3 + \frac{297}{35}x^2 - \frac{473}{70}x + d & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{24}{35}x^3 - \frac{288}{35}x^2 + \frac{1867}{70}x + e & 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

5. Dados los siguientes puntos (x, y) determine el valor de la derivada para cada uno de los puntos dados utilizando el máximo numero de puntos posibles, si hay varias alternativas calculelas.

n	0	1	2	3	4
x_i	2	2.2	2.4	2.6	2.8
$f(x_i)$	$-8,721968$	$-11,390940$	$-14,345230$	$-17,583432$	$-21,104092$
$f'(x_i)$	?	?	?	?	?

Sugerencia: la función que define el conjunto de puntos es $f(x) = x2^{(x/5)+1} - 4x^2 + 2$. Utilice está información para comprobar sus resultados

6. Dada las siguientes integrales, define una partición adecuada para que pueda determinar su valor numérico utilizando todas las formulas simples y compuestas. Compare y analice las soluciones obtenidas.

   a)
   $$\int_2^{4.4} e^{-x^2+3} \ln(x) dx$$

   b)
   $$\int_3^{4.2} \frac{xe^{-x+5}}{\ln(x)} dx$$

   c)
   $$\int_0^3 x^2 e^{-x} \cos(x+3) dx$$

7. La regla del trapecio aplicada a $\int_0^4 f(x)dx$ da como resultado el valor de 6 y la regla de simpson 1/3 da el valor de 4. ¿Qué valor da f(2)?

8. Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales,

   a) $y' = yx - x + 4$ en el intervalo $[2, 4]$ donde $y(2) = 3.4456$. Resuélvalo con varios valores de h. Analice sus resultados y concluya.

   b) $y' = t^2 - t + y - 3$ en el intervalo $[1, 2]$ donde $y(1) = 0.5875$. Resuélvalo con un valores de $h = 0.2$.

   c) $y' = y^2 + x^2 + yx - 3$ en el intervalo $[4, 5]$ donde $y(5) = 0.345623$. Resuélvalo con varios valores de h. Analice sus resultados y concluya.

   Resuelva las ecuaciones dadas en $8a$, $8b$, $8c$ utilizando los programas de computador para siguientes métodos numéricos y tenga en cuenta las condiciones dadas en cada caso.

   1) Método de Euler
   2) Método de Heun
   3) Runge Kutta de orden 2
   4) Runge Kutta de orden 3
   5) Runge Kutta de orden 4
   6) Supongamos que se define un método para resolver ecuaciones diferenciales dado por las siguientes ecuaciones:

   $$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(\frac{k_1}{4} + \frac{3k_2}{4}) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i - 2hk_1) \end{aligned}$$

   7) Supongamos que se define un método para resolver ecuaciones diferenciales dado por la siguiente ecuación:

   $$y_{i+1} = y_i + h(f(x_i, y_i) + f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hf(x_i, y_i)}{2})$$

9. Utilizar una fórmula de derivación numérica centrada para aproximar $f''(0)$ para la función $f(x) = \cos(x)$ en donde el error sea proporcional a 10^{-4}

10. Se tiene la siguiente tabla de valores que almacena la información sobre los puntos por donde pasa una función $f(x)$:

x	2	-1	1	0
y	-3	2	5	-1

   a. Aproxime el valor de $f'(0)$ por medio de diferencias hacia adelante.
   b. Aproxime el valor de $f'(0)$ por medio de diferencias hacia atrás.
   c. Aproxime el valor de $f'(0)$ por medio de diferencias centradas.
   d. Aproxime el valor de $f'(0)$ utilizando un polinomio interpolante de grado 3.
   e. Aproxime el valor de $f'(0)$ utilizando spline cúbicos.

11. Repita el ejercicio anterior, pero ahora para encontrar $f'(0.5)$.

12. Utilizar el método de Euler para resolver la ecuación diferencial $y' = y(2 - y)$ con condición inicial $y(0) = 0.1$ en el intervalo $[0, 10]$.

13. Repetir el ejercicio anterior pero ahora utilizando el método de Euler Modificado y luego el método de Runge-Kutta (por favor grafique las nubes de puntos que cada método genera para comprobar las diferencias).

14. Considerar en general el problema de valores iniciales $y' = \lambda y$ con $y(0) = y_0$.

   Probar que el método de Euler genera la sucesión

$$y(t_i) = (1 + \lambda h)^i y_0$$

   donde h es la separación entre los t_i.

   Justifique si es cierto que si $\lambda < 0$, la nube de puntos obtenida tiende a cero.

15. Considere el siguiente Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\pi - t}; \quad 0 \leq t < \infty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   a. Calcular la solución exacta.
   b. Resolver utilizando el método de Euler con $h = 0.1$ en el intervalo $[0, 5]$. (Compare sus resultados, con los resultados exactos).

16. Considerar un ecosistema simple, que consiste de conejos, que disponen de una cantidad de recursos ilimitada, y de zorros que los depredan para comer. Un modelo clásico de este problema, debido a Volterra, es el descrito por el siguiente par de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dr}{dt} = 2r - \alpha r f \qquad r(0) = r_0$$
$$\frac{df}{dt} = -f + \alpha r f \quad f(0) = f_0$$

donde t es el tiempo, $r = r(t)$ es el número de conejos, y $f = f(t)$ es el número de zorros. Cuando la constante $\alpha > 0$ los zorros encuentran a los conejos con una probabilidad que es proporcional al producto de sus cantidades. Esto resulta en una disminución del número de conejos, y por razones menos claras, en un aumento en el número de zorros.

Investigar el comportamiento de este sistema para $\alpha = 0.1$, $r_0 = 300$ y $f_0 = 150$.

Algunas modificaciones se han hecho cambiando

$$\frac{dr}{dt} = 2r\left(1 - \frac{r}{R}\right) - \alpha r f$$

que impide que el número de conejos puede hacerse infinito, donde R es el número máximo de conejos posibles. Vuelva a resolver el problema con $R = 1000$.

17. Desde el curso de Cálculo Integral se vió que el cálculo de

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx$$

no es posible hacerlo buscando la antiderivada con los métodos tradicionales. Sin embargo el área bajo esa curva existe y cualquier calculadora programable entrega una buena aproximación a ese valor.

Utilice los métodos compuestos, con mínimo 10 puntos, para aproximar el valor de esa integral.

18. Un automovil recorre una pista en 84 segundos. Su velocidad se calcula cada 12 segundos con un radar y está dada en pies/seg.

Los datos medidos son:

Tiempo	0	12	24	36	48	60	72	84
Velocidad	124	148	147	121	99	78	104	123

¿Qué longitud tiene la pista?

19. Sea $[a, b]$ un intervalo cualquiera. Pruebe que la regla de Simpson 1/3 proporciona resultados exactos para cualquier polinomio cúbico.

20. Use la regla del Trapecio Compuesta con $n = 5$ para aproximar la cuarta parte del área de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

¿Cuál es el área total de la elipse?

21. Pretendemos ocupar un local en un centro comercial, ubicado directamente al frente de la entrada al parqueadero. Tomaremos el local si las vitrinas pueden ser vistas por no menos de 1500 personas diarias.

Para saberlo contabilizamos cada hora, durante un minuto, la cantidad de personas –no de autos– que ingresan al centro comercial por la entrada del parqueadero.

Hora	9:00 a.m.	10:00 a.m.	11:00 a.m.	12:00 p.m	1:00 p.m	2:00 p.m	3:00 p.m	4:00 p.m	5:00 p.m	6:00 p.m	7:00 p.m
p/m*	7	5	5	3	5	0	3	1	1	2	0

*Personas por minuto.

Utilice un método numérico adecuado para responder la siguiente pregunta:

¿Tomamos el local?

Nota: Ojo con las unidades en las que están dados los datos.

22. La velocidad $V(t)$ de un móvil se muestra en la siguiente tabla:

t	$V(t)$
8.0	3.855
9.0	4.154
10.0	4.425
11.0	4.670
12.0	4.892

a. Encuentre la aceleración en $t = 10.0$.

b. Encuentre el espacio recorrido desde $t = 8.0$ hasta $t = 12.0$ utilizando todos los puntos de la tabla.

23. Utilice los métodos compuestos del Trapecio y de Simpson, con un mínimo de 10 puntos, para encontrar el valor aproximado de

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

24. Otro método para resolver la integral definida de una función, si se tienen 3 puntos igualmente espaciados, es el conocido como método del punto medio:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Utilice las versiones compuestas de método y del método de Simpson para aproximar la integral de la función

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

en el intervalo $[-1.96, 1.96]$. Cada método debe utilizarse con 10 puntos como mínimo.

Note que la función $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria X normal estandar.

25. El número π se puede calcular como

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx$$

Calcule varias aproximaciones de π utilizando Simpson $\frac{1}{3}$ y Simpson $\frac{1}{3}$ generalizado de tal manera que se pueda medir la precisión de una aproximación con respecto a la anterior hasta obtener 4 cifras significativas en el resultado.

Nota: No se puede usar el valor de π de la calculadora como valor exacto.

26. Utilice el método de Simpson y su versión compuesta para calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)\, dx$$

hasta obtener por lo menos 3 cifras significativas.

27. Un ingeniero está proyectando una carretera y necesita calcular el volumen de movimiento de tierras en el tramo comprendido entre los puntos kilométricos 1730 y 1810. Dispone para ello de perfiles transversales cada cinco metros. En cada perfil se han medido con un planímetro las áreas de desmonte A_D y terraplén A_T como me muestra en la siguiente tabla:

Punto Kilométrico (m)	Área Desmonte (m^2)	Área Terraplén (m^2)
1730	2.51	0.05
1735	1.32	0.61
1740	1.12	0.82
1745	0.85	0.95
1750	0.63	1.21
1755	0.05	1.35
1760	0.00	1.56
1765	0.00	2.58
1770	0.00	2.41
1775	0.25	2.21
1780	0.56	1.90
1785	0.85	1.50
1790	0.94	0.85
1795	1.57	0.34
1800	1.83	0.11
1805	2.61	0.00
1810	2.57	0.20

A partir de estos datos, los volúmenes de desmonte V_D y terraplén V_T pueden calcularse como

$$V_D = \int_{1730}^{1810} A_D(x)\,dx \qquad V_T = \int_{1730}^{1810} A_T(x)\,dx$$

a. Utilice dos métodos numéricos, con todos los datos de la tabla, para aproximar el valor del volumen de desmonte.

b. Utilice dos métodos numéricos, con todos los datos de la tabla, para aproximar el valor del volumen de terraplén.

c. Calcule el balance de tierras (diferencia entre volúmenes).

28. Considere la función $f(x) = \frac{1}{2}2^x$.

a. Calcular el polinomio $p(x)$ que interpola a $f(x)$ en los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$.

b. Calcular el error relativo que se comete al aproximar $f\left(\frac{3}{2}\right)$ mediante $p\left(\frac{3}{2}\right)$.

29. Considerar la función $T(x)$ definida como sigue:

$$T(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^2 - 22x + 26, & 0 \leq x \leq 1 \\ 7x^2 - 28x + 28, & 1 \leq x \leq 3 \\ -3x^3 + 34x^2 - 109x + 271, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Explicar cuáles propiedades cumple y cuáles no cumple $T(x)$ para ser un spline cúbico natural de la siguiente tabla:

x	0	1	3	4
y	26	7	7	187

30. Considerar la siguiente función:

$$S(x) = \begin{cases} -5x^2 - 11x + 7, & x \in [-1, 0] \\ -14x^3 + 27x^2 - 11x + 7, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

a. Inspeccionar si $S(x)$ satisface o nó la siguiente tabla:

x	y
-1	13
0	7
1	9

b. Determinar si la función $S(x)$ es un Trazador Cúbico natural para la tabla dada. Precisar cuáles condiciones se cumplen y cuáles no.

31. Calcular el spline cúbico natural que interpola la siguiente tabla

x	y
0	0
2	-2
3	0

Explicar cada uno de los pasos dados para hallar el spline.

32. Calcular el spline Cúbico $S(x)$ para la tabla siguiente

x	-1	1	2
y	0	2	0

que satisfaga $S'(0) = -1$ y $S''(2) = 0$.

33. A partir de la siguiente tabla de logaritmos decimales

x	1.0	1.5	2.0	3.0	3.5
$\log x$	0.00000	0.17609	0.30103	0.47712	0.54407

forma una tabla de diferencias divididas y utilízala para estimar $\log 1.25$ y $\log 2.5$ por interpolación cúbica (no es por splines).

34. Obtner el polinomio de interpolación de los puntos

$$(0, -5), \quad (1, -3), \quad (2, 1), \quad (3, 13)$$

a. Mediante resolución de un sistema de ecuaciones.

b. Mediante el método de Lagrange.

c. Mediante el método de Newton.

35. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$. Encuentre (utilizando el método de Newton) los polinomios que interpolan la función en $n+1$ puntos igualmente espaciados $x_0 = -1, \ldots, x_i = x_0 + \frac{2i}{n}, \ldots, x_n = 1$, para $n = 1, 2, \ldots, 5$.

36. Determinar todos los valores de a, b, c, d, e para los cuales la siguiente función es un spline cúbica:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2 & x \in [1, 3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & x \in [3, 8] \end{cases}$$

Luego determinar los valores de los parámetros tal que el spline cúbico interpole esta tabla:

x	0	1	4
y	26	7	25