Taller de solución Numérica de ecuaciones de una variable

Gabriel Jaime Castaño Chica
Gustavo Adolfo Restrepo Arboleda
Rafael David Rincón Bermudez
Francisco José Correa Zabala
Universidad EAFIT

Este documento es elaborado con el objetivo de servir de complemento al desarrollo del capítulo de Ecuaciones de Una variable. El contenido hace parte de una estrategia educativa que permita al estudiante desarrollar habilidades para el autoaprendizaje. El documento se desarrollará con las indicaciones del profesor. Algunos de los ejercicios contienen sugerencias sobre su solución.
En la página *www1.eafit.edu.co/cursonumerico* podrás encontrar ejemplos resueltos y ejercicios básicos en cada una de las sesiones que se presentan.

1. Considere la función
$$f(x) = e^{x+3} + \frac{x^3}{3} - 10$$
   a) Demuestre que la función tiene una **única** raíz en el intervalo $[-1, 0]$
   b) Justifique que se puede aplicar el método de bisección en $[-1, 0]$ para aproximar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y luego úselo para aproximar la raíz con una tolerancia de 10^{-6} (es decir se debe satisfacer que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$)
   c) ¿Cuántas iteraciones serían necesarias para obtener un error absoluto menor a 10^{-8}? (Responda sin realizar las iteraciones)

2. Si los intervalos sucesivos que surgen de aplicar el método de la bisección a partir del intervalo $[a, b]$ se denotan como $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \cdots, [a_n, b_n]$. Demuestre que en el método de bisección se cumple que:
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

3. Considere la siguiente función punto fijo $g(x) = \frac{A}{x}$ en donde A es una constante positiva.
   a) Si $x_0 \neq 0$ es una aproximación inicial para la iteración de punto fijo ($x_n = g(x_{n-1})$, con $n = 1, 2, \cdots$), determine x_{15} y x_{200} (En términos de A y de x_0)
   b) ¿La sucesión generada por la aplicación de la iteración de punto fijo converge?
   c) Calcule los puntos fijos de g.

4. Halle el valor de
$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots}}}.$$

5. Considere la función $f(x) = x^2 - 2x + 2 - e^x$

a) Compruebe que en el intervalo $[0.1, 0.7]$ la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real p.

b) Para cada una de las siguientes funciones dadas demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ es equivalente algebraicamente (en cierto dominio) a la ecuación $x = g(x)$:

1) $g_1(x) = \ln(x^2 - 2 * x + 2)$
2) $g_2(x) = \sqrt{e^x + 2x - 2}$
3) $g_3(x) = \frac{x^2+2-e^x}{2}$

c) Pruebe que $g_1(x)$ satisface las hipótesis del teorema de punto fijo en $[0.1, 0.7]$ y aplique el método de punto fijo con la función de iteración $g_1(x)$ para aproximar la única raíz real p de $f(x) = 0$, use $p_0 = 0.5$ y una tolerancia para el error relativo de 10^{-8}.

6. Considere el polinomio $p(x) = 7.14292992 - 20.0471x + 19.0956x^2 - 7.45x^3 + x^4$ del cual se sabe que contiene una raíz múltiple.

   a) Utilizar el método de las raíces múltiples con una aproximación inicial $x_0 = 1.4$, y una tolerancia para el error relativo de 10^{-5}. ¿Cuál es la aproximación a la raíz? Escriba las tres últimas iteraciones y demuestre que la raíz encontrada es de multiplicidad 2.

   b) El método de Newton Rhapson acelerado es una modificación al método de Newton-Rhapson el cual está dado por la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - M\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   donde $M > 1$ es la múltiplicidad de la raíce a la cual converge el método de Newton. Realice el código del método de Newton-Rhapson acelerado y úselo con los parámetros usados en los literales anteriores.

7. Sabiendo que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida mediante la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}, n = 0, 1, 2, \cdots, a > 0$$

   converge a $\sqrt{a}$ demuestre que el orden de convergencia es tres.

8. Deduzca una fórmula iterativa para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo a. (Sugerencia: Considere la ecuación $f(x) = x^2 - a$ piense porque una raíz de $f(x) = 0$ es una raíz cuadrada de a y aplique el método de Newton a la función f)

9. Considere la ecuación $f(x) = e^{2x} - e^x - 2 = 0$

   a) Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1]$

   b) Verifique que la función f satisface las hipótesis del método de Newton (Teorema 8, en Métodos Numéricos, F.Correa) en el intervalo [0,1].

   c) Use el método de newton para aproximar la raíz de $f(x) = 0$ e itere hasta que se satisfaga la condición $|f(x)| \leq 10^{-8}$

10. Para cada una de las siguientes ecuaciones determine todos los intervalos que contienen las raíces, utilice un graficador (todos debemos tener uno en nuestro equipo de cómputo) y el método de búsquedas para **refinar los intervalos** de tal manera que sean adecuados para ejecutar los métodos, utilice los algoritmos implementados para todos los métodos vistos en

clase para obtener una raíz con las condiciones dadas en cada caso. Tenga en cuenta que la cantidad de cifras que se entregan en la solución dependen los requerimientos establecidos para el error.

- ⋆ Determine todas las raíces de la siguiente ecuación, con 8 cifras significativas.

$$\ln(x^2+1) + x\cos(6x+3) - 3x - 10 = 0$$

(*sugerencia: si son cifras significativas el error que se calcula es el relativo. Determine las 5 raíces de la ecuación.*)

- ⋆ Determine todas las raíces de la siguiente ecuación, entre $[-20, 20]$ con 7 decimales correctos mediante un método adecuado.

$$e^{-x^2+1} + x\sin(x-3) - x = 0$$

(*sugerencia: Analice el comportamiento de la función con un buen graficador y no confíe en lo que vea a primera vista. Un método es adecuado si la solución la entrega en el menor número de iteraciones posibles, contraste usando varios métodos*)

- ⋆ Determine la mayor raíz negativa y la menor raíz positiva de la siguiente ecuación, con una tolerancia de 10^{-8}:

$$e^{-x^2+4} + 3x\cos(x-3) - 2x + 16 = 0$$

- ⋆ Determine todas las raíces de la siguiente ecuación, con un máximo error relativo de $0.5 * 10^{-9}$:

$$\sqrt{x^2+1} - 5xe^{-x} - 4x^2 + 31x + 12$$

- ⋆ Resuelva la siguiente ecuación, con una tolerancia de $0.5 * 10^{-9}$:

$$\tanh(x) - x^2 - 0.22 = 0$$

- ⋆ Determine las raíces positivas hasta 30 de la siguiente ecuación, con un máximo error absoluto de $0.5 * 10^{-9}$:

$$x - x\tan(x) = 0$$

- ⋆ Resuelva la siguiente ecuación, con una tolerancia de $0.5 * 10^{-9}$:

$$e{-}x + 95 - 2\tanh(x) - 5 = 0$$

11. Para cada uno de los ejercicios planteados en el punto 10 de cada solución presente argumentos sobre la velocidad de convergencia y la exactitud de la solución obtenida. (*sugerencia: para dar argumentos sobre exactitud una idea fácil es el análisis de la tabla que genera el método, observar la magnitud y el comportamiento de los signos de $f(x_n)$ para aplicar el teorema del valor intermedio. Es necesario tener en cuenta la continuidad de la función*)

12. Dada la ecuación $x - 2x\sin(x) = 0$ determine el número de puntos fijos que puede tener la ecuación $x = 2x\sin(x)$. Justifique su respuesta desde el punto de vista gráfico.

13. Considere la ecuación $f(x) = \sin(x) = 0$, la cual se sabe tiene una raíz en $x = 0$. Resuelva dicha ecuación por el Método de Newton - Raphson con $p_0 = 1.1656$ con un tolerancia de 10^{-9}. Analice la convergencia y explique el comportamiento del método.

14. Encuentre todas las raíces de la ecuación con una tolerancia de 10^{-10}:

$$f(x) = x^2 + 10\cos(x) = 0$$

15. La siguiente expresión define un nuevo método para resolver ecuaciones de una variable:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

El método se puede ver como una variante de punto fijo

a) Elabore un seudo código y el correspondiente código en Octave para el método

b) Utilícelo para resolver los problemas propuestos en el ejercicio 10

c) Analice las características del método en comparación con los otros métodos.