Mathe III

Ralf Herbrich

Eindimensionale Zufallsvariablen

Überblick

1. Zufallsvariable
2. Dichte und Zähldichte
3. Verteilungsfunktion
4. Transformation und Simulation von Zufallsvariablen
5. Erwartungswert
6. Varianz
7. Ungleichungen von Markov und Tschebyscheff

Überblick

1. Zufallsvariable
2. Dichte und Zähldichte
3. Verteilungsfunktion
4. **Transformation und Simulation von Zufallsvariablen**
5. Erwartungswert
6. Varianz
7. Ungleichungen von Markov und Tschebyscheff

Transformation von Zufallsvariablen

- Der große Vorteil von Zufallsvariablen liegt darin, dass man mit ihnen rechnen kann. Doch wie verändert sich dabei die Verteilung?
- **Definition (Transformation von Zufallsvariablen).** Gegeben eine Zufallsvariable X mit Verteilung P_X sowie eine Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann wird durch Anwendung von g auf den Wert von X eine neue Zufallsvariable Y. Wir nennen Y die Transformation von X mit g.
  - **Beispiel (Transformation von Zufallsvariablen).** Bei einem Gewinnspiel würfelst du mit einem fairen Würfel. Die Zufallsvariable X beschreibt die gewürfelte Augenzahl. Du gewinnst das Zehnfache der gewürfelten Zahl, allerdings kostet der Einsatz 35€.
    - Dein Gewinn wird folglich beschrieben durch die Transformation $Y = 10X - 35$.
    - Dann gilt für die Zähldichte:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & y \in \{-25,-15,-5,5,15,25\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Per Annahme — 1-zu-1 Abbildung — Per Abbildung

Transformation von Zufallsvariablen

- **Satz (Dichte einer transformierten Zufallsvariable).** Sei X eine Zufallsvariable in einen Raum $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, P_X)$. Gegeben die Transformation Y von X mit einer Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei g differenzierbar und strikt monoton wachsend oder fallend ist. Dann ist die Dichte p_Y von Y gegeben durch

$$p_Y(y) = p_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

  wobei $x = g^{-1}(y)$ ist.

- **Bemerkungen (Dichte einer transformierten Zufallsvariable)**
  - Dieser Satz wird genutzt, um aus einer gleichverteilten Pseudo-Zufallszahl eine Zufallszahl mit beliebiger (vorgegebener) Dichte zu erzeugen!
  - Wenn $Y = g(x)$ die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ist und strikt monoton steigend, dann hat Y eine Gleichverteilung!

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{1}{p_X(x)} \qquad p_Y(y) = p_X(x) \cdot \frac{1}{p_X(x)} = 1$$

Transformation von Zufallsvariablen

- **Beweis**. Wir unterscheiden zwei Fälle: (1) $\frac{dg}{dx} > 0$, (2) $\frac{dg}{dx} < 0$
  - **Fall 1**: Dann gilt für die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$

    $$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_X(g(X) \leq y) = P_X\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right) = F_X(x)$$

    Wenn man nun die Ableitung links und rechts nimmt erhält man

    $$\underbrace{\frac{dF_Y(y)}{dy}}_{p_Y(y)} = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dy}}_{>0,\text{ weil } \frac{dg}{dx} > 0} = \underbrace{\frac{dF_X(x)}{dx}}_{p_X(x)} \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

  - **Fall 2**: Dann gilt für die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$

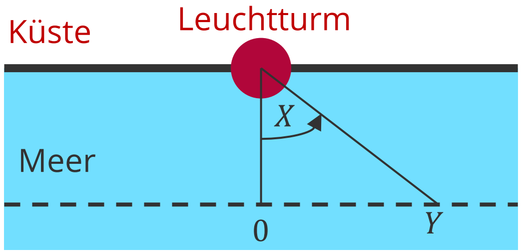
    $$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_X(g(X) \leq y) = P_X\left(X \geq g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right) = 1 - F_X(x)$$

    Wenn man nun die Ableitung links und rechts nimmt erhält man

    $$\underbrace{\frac{dF_Y(y)}{dy}}_{p_Y(y)} = \frac{d\left(1 - F_X(x)\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot -\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{>0,\text{ weil } \frac{dg}{dx} < 0} = \underbrace{\frac{dF_X(x)}{dx}}_{p_X(x)} \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Anwendung der Transformation von Zufallsvariablen

- **Beispiel (Leuchtturm).** Ein Leuchtturm sendet einen Lichtstrahl in einem gleichverteilten Winkel X zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ aus. Der Lichtstrahl trifft auf eine Linie 1km von der Küste entfernt auf. Wie ist die Verteilung des Lichts Y auf dieser Linie?



- **Lösung**. Da der Leuchtturm mit der Position 0 und Y ein rechtwinkliges Dreieck bildet, gilt

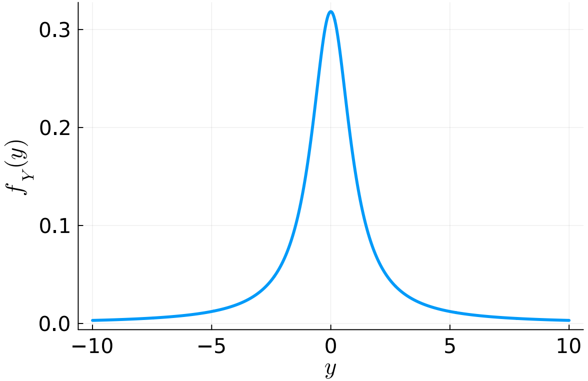
$$Y = \tan(X) \Leftrightarrow X = \operatorname{atan}(Y)$$

Daher gilt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

und $p_X(x) = {}^1/_\pi$ für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ und

$$p_Y(y) = p_X(x) \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$



Simulation von Zufallszahlen

- **Wiederholung**: Wie wir schon in Woche 1 gesehen habe, erzeugen wir mit der linearen Kongruenzmethode Zufallsvariablen der Dichte

$$p(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [0,1]$$

- **Frage**: Wie können wir Zufallszahlen mit einer beliebigen Verteilung simulieren?
- **Antwort**: Dies gelingt mit der Inversionsmethode, welche die Quantiltransformation nutzt.

- **Definition (Quantiltransformation)**. Sei X eine beliebige reelle Zufallsvariable mit kumulativer Verteilungsfunktion F_X. Dann definieren wir die Quantiltransformation von X als Funktion Q_X mit

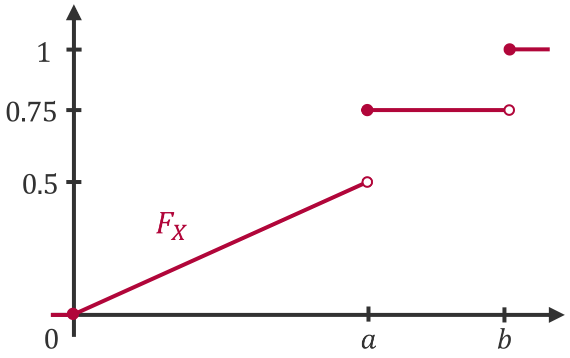
$$Q_X(x) = \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid F_X(c) \geq x \}$$

Entspricht dem Minimum für stetige F_X

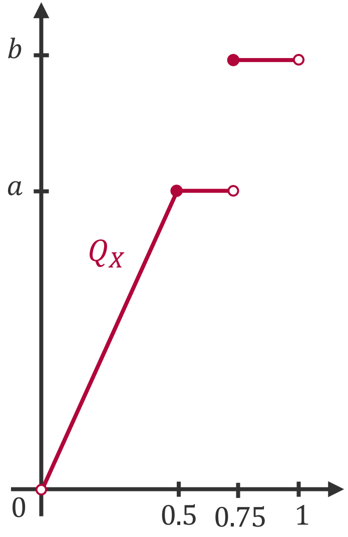
- **Bemerkungen (Quantiltransformation)**. Die Quantiltransformation ist die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion.

Beispiel: Quantiltransformation

Verteilungsfunktion F_X



Quantiltransformation Q_X



$$Q_X(x) = \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid F_X(c) \geq x \}$$

Mathe III

Unit 3b – Eindimensionale Zufallsvariablen

Inversionsmethode

- Mit der Inversionsmethode können wir nun die Werte für eine beliebige reelle Zufallsvariable X simulieren.
  1. Bestimme die kumulative Verteilungsfunktion F_Y von Y.
  2. Ermittle daraus die Quantiltransformation Q_Y von Y.
  3. Simuliere eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Zufallszahlen, verteilt $p(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$.
  4. Die Folge $\left(Q_Y(x_i)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ entspricht dann einer Folge von Zufallszahlen, welche identisch zu Y verteilt sind.
- **Bemerkungen (Inversionsmethode)**.
  - Die Quantiltransformation ist eine monoton wachsende Funktion
  - Für die Transformation der Dichte gilt

$$p_X(x) \cdot \boxed{\left|\frac{dx}{dy}\right|} = 1 \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} = p_Y(y)$$

>0, weil $\frac{dQ_Y(x)}{dx} > 0$

Mathe III

Unit 3b – Eindimensionale Zufallsvariablen

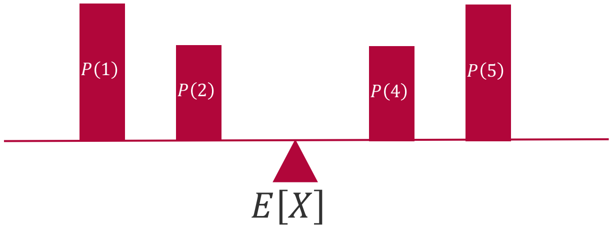
Überblick

Erwartungswert

- Wir wollen Zufallsvariablen mit Kennzahlen beschreiben können.
- Eine dieser Kennzahlen ist der Erwartungswert.
  - Der Erwartungswert einer Zufallsvariable ist der Wert, welchen die Zufallsvariable im Mittel annimmt.
- **Definition (Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen)**. Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, P_X)$. Der Erwartungswert $E[X]$ ist definiert als

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P_X(x)\,,$$

  wenn dieser Wert existiert, d.h., $|E[X]| < \infty$.
- **Bemerkungen (Erwartungswert)**.
  Der Erwartungswert ist der Schwerpunkt wenn man Klötze mit den Gewichten $P_X(x)$ an den Positionen x positioniert.

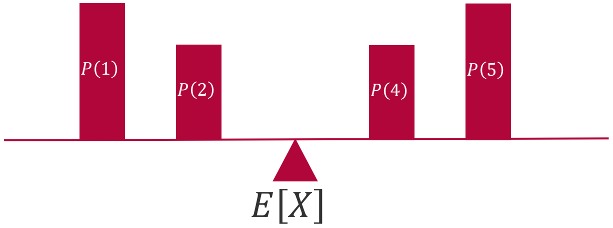


Erwartungswert

- **Beispiel (Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen).** Sei X eine Zufallsvariable, welche die Augenzahl eines fairen Würfels bei einmaligem Wurf angibt. Dann gilt für den Erwartungswert $E[X]$

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P(x) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

- **Bemerkung (Erwartungswert).** Der Erwartungswert gibt nicht den Wert an, der am wahrscheinlichsten ist. Vielmehr kann es sogar unmöglich sein, dass $X = E(X)$ eintritt!



Erwartungswert

- **Definition (Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen mit Dichte).** Sei X eine stetige reelle Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, P_X)$ mit Dichte $p_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Der Erwartungswert $E[X]$ ist definiert als

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p_X(x)\, dx\,,$$

wenn dieser Wert existiert, d.h., $|E[X]| < \infty$.

- **Beispiel (Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen).** Sei Y eine stetige Zufallsvariable, deren Verteilung durch die Dichte $p_Y: y \mapsto \frac{y}{2} \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y)$ angegeben wird. Dann gilt für den Erwartungswert $E[Y]$

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{y}{2} \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y)\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \left.\frac{y^3}{6}\right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Erwartungswert einer Funktion

- Oft wollen wir den Erwartungswert einer Funktion g einer Zufallsvariablen X berechnen.
- **Naiver Ansatz**: Wir definieren $Y \coloneqq g(X)$ und leiten die (Zähl)dichte von Y her.
  - **Beispiel (Erwartungswert einer Funktion)**. Die Reparaturdauer einer Maschine ist eine zufällige Variable mit der Dichte $p_X: x \mapsto \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$. Die Kosten Y der Reparatur sind $Y = x^3$. Dann gilt für die Verteilungsfunktion der erwarteten Kosten für alle $y \in [0,1]$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq \sqrt[3]{y}) = \int_0^{\sqrt[3]{y}} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, dx = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ y^{\frac{1}{3}} & y \in [0,1] \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Damit gilt für die Dichte $p_Y(y) = \frac{d}{dy} F(y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$ und

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\, dy = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 y^{\frac{1}{3}}\, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Erwartungswert einer Funktion

- **Satz (Erwartungswert transformierter Zufallsvariablen).** Sei X eine reelle Zufallsvariable in den Raum $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, P_X)$ und Y eine reelle Zufallsvariable, welche aus X über die Transformation $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hervorgeht. Dann gilt für den Erwartungswert $E[Y]$ im diskreten Fall, dass
$$E[Y] = \sum_{x \in \Omega_X} g(x) \cdot P_X(X = x)$$
und im stetigen Fall, insofern p_X eine Dichte von P_X ist, dass
$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot p_X(x)\, dx$$
  - **Beispiel (Erwartungswert einer Funktion).** Die Kosten Y der Reparatur sind $Y = x^3$.
$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot p_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$
- **Bemerkung (Erwartungswert transformierter Zufallsvariablen)**
  - Vorteil: Wir können den Erwartungswert von Y bestimmen, ohne zuerst die Verteilung von Y oder eine Dichte p_Y dieser bestimmen zu müssen!

Erwartungswert einer Funktion

- **Definition (Indikatorfunktion).** Für eine Menge A ist die Indikatorfunktion $\mathbb{I}_A : \mathbb{R} \to \{ 0, 1 \}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert als

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- **Beispiel (Wahrscheinlichkeit als Erwartungswert).** Sei X der Wert der Indikatorfunktion $\mathbb{I}_A$. Dann gilt für den Erwartungswert $E[X]$

$$E[X] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = P(A)$$

- **Bemerkung (Erwartungswert).** Mithilfe der Indikatorfunktion kann man jede Wahrscheinlichkeit als Erwartungswert darstellen.
- **Beispiel (St. Petersburg Paradox).** Ein Casino bietet ein Spiel an, bei dem ein initialer Betrag von 2€ verdoppelt wird, wenn eine zufällig geworfene Münze nicht Kopf zeigt und der finale Betrag beim ersten Erscheinen von Kopf ausgezahlt wird. Wieviel Geld kann man bei diesem Spiel erwarten?

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot P(i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Nicolaus Bernoulli
(1687 – 1759)

Eigenschaften des Erwartungswertes

- **Satz (Linearität des Erwartungswertes)**. Sei X eine reelle Zufallsvariable mit einem existierenden Erwartungswert. Seien außerdem $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$$
- **Beweis**: Im diskreten Fall gilt
$$E[a \cdot X + b] = \sum_{x \in \Omega_X} (a \cdot x + b) \cdot P_X(x) = a \cdot \underbrace{\sum_{x \in \Omega_X} x \cdot P_X(x)}_{E[X]} + b \cdot \underbrace{\sum_{x \in \Omega_X} P_X(x)}_{1}$$

  Im stetigen Fall gilt
$$E[a \cdot X + b] = \int_{\mathbb{R}} (a \cdot x + b) \cdot p_X(x)\, dx = a \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \cdot p_X(x)\, dx}_{E[X]} + b \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} p_X(x)\, dx}_{1}$$

Erwartungswert und Vorhersagen

- **Frage**: Wenn wir die Verteilung einer Zufallsvariable kennen und sollen die Zahl c vorhersagen, bei welcher der erwartete quadratische Fehler minimiert wird, welche Zahl c ist das?
- **Lösung**: Wir benutzen die Eigenschaften des Erwartungswertes

$$
\begin{aligned}
E[(X-c)^2] &= E[(X \overbrace{- E[X] + E[X]}^{0} - c)^2] \\
&= E[(X-E[X])^2 + 2\cdot(E[X]-c)\cdot(X-E[X]) + (E[X]-c)^2] \\
&= E[(X-E[X])^2] + 2\cdot(E[X]-c)\cdot \underbrace{E\left[X-E[X]\right]}_{0} + (E[X]-c)^2 \\
&= E[(X-E[X])^2] + \underbrace{(E[X]-c)^2}_{0 \text{ genau wenn } c\,=\,E[X]} \\
&\geq E[(X-E[X])^2]
\end{aligned}
$$

- **Bemerkung (Erwartungswert)**
  - Der Erwartungswert von X ist die Vorhersage, die den erwarteten quadratischen Vorhersagefehler minimiert!

Überblick

1. Zufallsvariable
2. Dichte und Zähldichte
3. Verteilungsfunktion
4. Transformation und Simulation von Zufallsvariablen
5. Erwartungswert
6. **Varianz**
7. Ungleichungen von Markov und Tschebyscheff

Varianz

- Der Erwartungswert gibt uns an, welchen Wert eine Zufallsvariable im Mittel angibt, jedoch nicht, wie oft und wie nah wir an diesem Wert liegen.
- Hierfür führen wir eine neue Kenngröße einer Zufallsvariable ein. Sie gibt an, wie stark die Werte einer Zufallsvariable um den Erwartungswert streuen.
- **Definition (Varianz und Standardabweichung)**. Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[X]$. Dann definieren wir die Varianz $V[X]$ dieser Zufallsvariable als

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]$$

  Ferner definieren wir $\sqrt{V[X]}$ als die Standardabweichung von X.

- **Bemerkung (Varianz)**
  - Die Varianz von X ist der kleinste erwartete quadratische Vorhersagefehler von X und das Minimum wird erreicht bei $E[X]$!

Eigenschaften der Varianz

- **Satz (Varianzzerlegungssatz).** Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[X]$ und Varianz $V[X]$. Dann gilt
$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
- **Beweis**: Wir benutzen die Eigenschaften des Erwartungswerts

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2 \cdot X \cdot E[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2 \cdot E[X] \cdot E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

- **Bemerkung (Varianzzerlegungssatz)**
  - Der Varianzzerlegungssatz erlaubt es, die Varianz einer empirischen Verteilung („Daten“) online („*streaming*“) zu schätzen!

Eigenschaften der Varianz

- **Beispiel (Varianz)** . Sei X eine Zufallsvariable, welche die Augenzahl eines fairen Würfels bei einmaligem Wurf angibt. Ermittle die Varianz!
- **Lösung**. Es gibt zwei Wege, die Varianz zu berechnen.
  - **Aufwendig**: Für den Erwartungswert $E[X]$ gilt $E[X] = 3.5$. Damit gilt für die Varianz von X, dass

$$V[X] = \frac{1}{6}(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}(2-3.5)^2 + \frac{1}{6}(3-3.5)^2 + \frac{1}{6}(4-3.5)^2 + \frac{1}{6}(5-3.5)^2 + \frac{1}{6}(6-3.5)^2$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (2.5^2 + 1.5^2 + 0.5^2) = \frac{35}{12}$$

  - **Einfacher**: Für den Erwartungswert $E[X]$ gilt $E[X] = 3.5$. Für $E[X^2]$ gilt

$$E[X^2] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 25 + \frac{1}{6} \cdot 36 = \frac{91}{6}$$

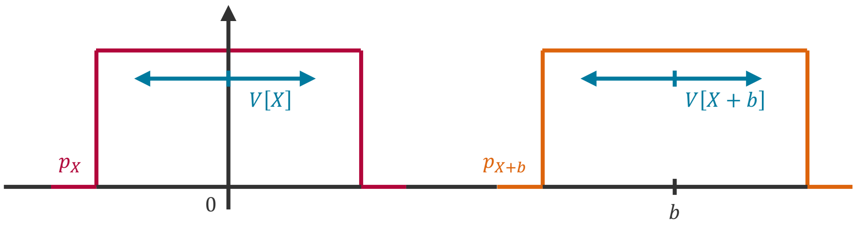
womit für die Varianz gilt, dass

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$$

Rechenregel der Varianz

- **Satz (Rechenregel für die Varianz).** Sei X eine Zufallsvariable mit Varianz $V[X]$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$V[a \cdot X + b] = a^2 \cdot V[X]$$

- **Bemerkungen (Rechenregel für die Varianz).**
  - Werden alle Werte einer Zufallsvariable um einen konstanten Offset verschoben, so verschiebt sich auch der Erwartungswert um diesen Betrag.
  - Aber damit hat der Offset keine Auswirkung darauf, wie stark die Werte um ihren Erwartungswert streuen!



Rechenregel der Varianz: Beweis

- **Satz (Rechenregel für die Varianz).** Sei X eine Zufallsvariable mit Varianz $V[X]$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$V[a \cdot X + b] = a^2 \cdot V[X]$$

- **Beweis**: Wir benutzen die Eigenschaften des Erwartungswerts und der Varianz

$$\begin{aligned}
V[a \cdot X + b] &= E[(a \cdot X + b)^2] - (E[a \cdot X + b])^2 \\
&= E[a^2 \cdot X^2 + 2ab \cdot X + b^2] - (a \cdot E[X] + b)^2 \\
&= a^2 \cdot E[X^2] + 2ab \cdot E[X] + b^2 - a^2 \cdot (E[X])^2 - 2ab \cdot E[X] - b^2 \\
&= a^2 \cdot E[X^2] - a^2 \cdot (E[X])^2 \\
&= a^2 \cdot V[X]
\end{aligned}$$

Standardisierung

- In der Statistik wollen wir oft Zufallsvariablen miteinander vergleichen, auch wenn diese nicht unbedingt die gleiche Verteilung haben. Dafür ist es notwendig, sie in einigen Metriken anzugleichen.
- Mit der Standardisierung können wir Zufallsvariablen auf einen einheitlichen Erwartungswert und eine einheitliche Varianz normen.

- **Definition (Standardisierung)**. Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E[X]$ und Varianz $V[X]$. Dann beschreibt die Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}}$$

die standardisierte Form von X. Dabei gilt $E[Z] = 0$ und $V[Z] = 1$.

Überblick

Ungleichungen

- Das Berechnen einer konkreten Wahrscheinlichkeit kann unter Umständen sehr aufwendig sein.
- In vielen Fällen ist eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit jedoch ausreichend. Hierfür können wir Erwartungswert und Varianz nutzen, welche oft leichter zu ermitteln sind.
- **Beispiel (Bäckerei).** In einer Bäckerei werden im Erwartungswert jeden Tag 300 Brötchen verkauft, wobei dieser Wert von Tag zu Tag mit einer Standardabweichung von 30 Brötchen schwankt.
  1. Wie wahrscheinlich ist es *höchstens*, dass an einem Tag *mehr als* 400 Brötchen gekauft werden?
  2. Wie wahrscheinlich ist es *höchstens*, dass an einem Tag *weniger als* 200 oder *mehr als* 400 Brötchen verkauft werden?

Markov-Ungleichung

- **Satz (Markov-Ungleichung)**. Sei X eine Zufallsvariable, welche nur positive Werte annehmen kann (d.h., $P(X \geq 0) = 1$). Dann gilt für alle $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

- **Beweis**: Wir beweisen den Fall für stetige Zufallsvariablen

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot p(x)\, dx = \overbrace{\int_0^a x \cdot p(x)\, dx}^{\geq 0} + \overbrace{\int_a^\infty x \cdot p(x)\, dx}^{\geq 0}$$

$$\geq \int_a^\infty x \cdot p(x)\, dx$$

$$\geq \int_a^\infty a \cdot p(x)\, dx = a \cdot \overbrace{\int_a^\infty p(x)\, dx}^{= P(X \geq a)}$$

$$= a \cdot P(X \geq a)$$

Andrey Markov
(1856 – 1922)

Tschebyscheff-Ungleichung

- **Satz (Tschebyscheff-Ungleichung)**. Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Erwartungswert und Varianz. Dann gilt für alle $k > 0$

$$P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{V[X]}{k^2}$$

- **Beweis**: Wir beweisen dies direkt mit der Markov'schen Ungleichung indem wir die folgende Variable $Y = (X - E[X])^2$ wählen.

  Per Konstruktion ist diese Variable nicht-negativ. Wir wählen $a = k^2$

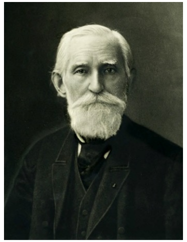
$$P(Y \geq a) \leq \frac{E[Y]}{a}$$

Äquivalent zu $|X - E[X]| \geq k$

$= V[X]$

$$P\left(\boxed{(X - E[X])^2 \geq k^2}\right) \leq \frac{\boxed{E[(X - E[X])^2]}}{k^2}$$

$$P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{V[X]}{k^2}$$



Pafnuty Chebyshev
(1821 – 1894)

Beispiel: Markov und Tschebyscheff Ungleichung

- **Beispiel (Bäckerei).** In einer Bäckerei werden im Erwartungswert jeden Tag 300 Brötchen verkauft, wobei dieser Wert von Tag zu Tag mit einer Standardabweichung von 30 Brötchen schwankt.
  1. Wie wahrscheinlich ist es *höchstens*, dass an einem Tag *mehr als* 400 Brötchen gekauft werden?
  2. Wie wahrscheinlich ist es *höchstens*, dass an einem Tag *weniger als* 200 oder *mehr als* 400 Brötchen verkauft werden?

- **Lösung**. Für den ersten Teil benutzen wir die Markov'sche Ungleichung

$$P(X \geq 400) \leq \frac{E[X]}{400} = \frac{300}{400} = 0.75 = 75\%$$

Für den zweiten Teil benutzen wir die Tschebyscheffsche Ungleichung

$$P(|X - E[X]| \geq 100) \leq \frac{V[X]}{100^2} = \frac{30^2}{100^2} = 0.09 = 9\%$$

- **Bemerkungen (Ungleichungen)**
  - Die Ungleichungen sind für unterschiedliche Fälle unterschiedlich präzise.
  - Die Tschebyscheff'sche Ungleichung ist äquivalent zu $P\left(|X - E[X]| \geq k \cdot \sqrt{V[X]}\right) \leq \frac{1}{k^2}$

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!