Mathe III

Ralf Herbrich

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Überblick

1. Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen
2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
3. Summen und andere Funktionen von Zufallsvariablen
4. Erwartungswert
5. Kovarianz und Korrelation

Überblick

1. **Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen**
2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
3. Summen und andere Funktionen von Zufallsvariablen
4. Erwartungswert
5. Kovarianz und Korrelation

Gemeinsame Verteilung

- Häufig betrachten wir für einen Zufallsversuch im Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verschiedene Zufallsvariablen, welche in verschiedene Bildräume abbilden und damit im Allgemeinen auch verschiedene Verteilungen besitzen.
- Wir wollen nun eine Möglichkeit kennenlernen, eine gemeinsame Verteilung für mehrere Zufallsvariablen gleichzeitig anzugeben.

- **Definition (Gemeinsame Verteilung).** Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei X in den Raum $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, P_X)$ und Y in den Raum $(\Omega_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y)$ abbildet. Dann ergibt sich eine eindeutige gemeinsame Verteilung $P_{X,Y}$ von X und Y, wobei für beliebige $A_X \in \mathcal{F}_X$ und $A_Y \in \mathcal{F}_Y$ gilt, dass

$$P_{X,Y}(\underbrace{A_X \times A_Y}_{\text{Kartesisches Produkt}}) = P(\underbrace{X \in A_X \wedge Y \in A_Y}_{\text{Logische Konjunktion}})$$

Dichte und Verteilungsfunktion

- **Definition (Dichte und kumulative Verteilungsfunktion).** Im diskreten Fall gilt für die gemeinsame Zähldichte $p_{X,Y}: \Omega_X \times \Omega_Y \to [0,1]$ und zwei Ergebnisse $\omega_X \in \Omega_X$ und $\omega_Y \in \Omega_Y$, dass
$$p_{X,Y}(\omega_X, \omega_Y) = P(X = \omega_X \wedge Y = \omega_Y)$$
Im stetigen Fall ist eine Funktion $p_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ die gemeinsame Dichte, wenn für beliebige $A_X \in \mathcal{F}_X$ und $A_Y \in \mathcal{F}_Y$ gilt, dass
$$P_{X,Y}(A_X \times A_Y) = \int_{A_X} \int_{A_Y} p_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$
Für Zufallsvariablen gilt für die gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ sowie alle $(c_X, c_Y) \in \mathbb{R}^2$, dass
$$F_{X,Y}(c_X, c_Y) = P(X \leq c_X \wedge Y \leq c_Y)$$

Beispiel: Zähldichte

- **Beispiel (Gemeinsame Verteilung).** 3 Batterien werden zufällig aus einer Kiste mit 3 neuen, 4 benutzten und 5 kaputten Batterien genommen. Sei X die Anzahl der neuen Batterien und Y die Anzahl der benutzen Batterien, die gezogen werden. Wie sieht die Zähldichte von $P_{X,Y}$ aus?

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=0$	$\binom{5}{3}/\binom{12}{3}$	$\binom{4}{1}\binom{5}{2}/\binom{12}{3}$	$\binom{4}{2}\binom{5}{1}/\binom{12}{3}$	$\binom{4}{3}/\binom{12}{3}$
$X=1$	$\binom{3}{1}\binom{5}{2}/\binom{12}{3}$	$\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}/\binom{12}{3}$	$\binom{3}{1}\binom{4}{2}/\binom{12}{3}$	0
$X=2$	$\binom{3}{2}\binom{5}{1}/\binom{12}{3}$	$\binom{3}{2}\binom{4}{1}/\binom{12}{3}$	0	0
$X=3$	$\binom{3}{3}/\binom{12}{3}$	0	0	0

Anzahl Möglichkeiten, i neue Batterien aus 3 neuen Batterien auszuwählen

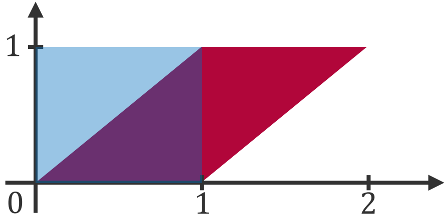
Anzahl Möglichkeiten, j benutzte Batterien aus 4 benutzen Batterien auszuwählen

$$p_{X,Y}(i,j) = \frac{\boxed{\binom{3}{i}} \cdot \boxed{\binom{4}{j}} \cdot \boxed{\binom{5}{3-i-j}}}{\boxed{\binom{12}{3}}}$$

Anzahl Möglichkeiten, 3 Batterien aus 12 Batterien auszuwählen

Beispiel: Dichte & Verteilungsfunktion

- **Beispiel (Gemeinsame Dichte)**. Gegeben das abgebildete Parallelogramm mit Fläche 1. Von einem zufällig gewählten Punkt auf dessen Oberfläche sei X dessen Abszisse und Y seine Ordinate. Wie ist die Dichte unter Gleichverteilung und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in $[0,1]^2$ liegt?



- **Lösung**:
  - Die gemeinsame Dichte für X und Y für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le 1 \land y \le x \le y+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in $[0,1]^2$ liegt, gilt

$$P(X \le 1 \land Y \le 1) = \int_0^1 \int_y^1 1 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 x \Big|_y^1 dy = \int_0^1 (1-y) \, dy$$

$$= y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Randverteilung

- **Definition (Randverteilung).** Gegeben eine gemeinsame Verteilung $P_{X,Y}$ für zwei Zufallsvariablen X und Y. Projiziert man $P_{X,Y}$ auf eine der beiden Zufallsvariablen, so erhält man die Randverteilungen P_X bzw. P_Y. Diese errechnen sich für beliebige Ereignisse $A_X \in \mathcal{F}_X$ und $A_Y \in \mathcal{F}_Y$ als

$$P_X(A_X) = P(X \in A_X) = P_{X,Y}(A_X \times \Omega_Y)$$

$$P_Y(A_Y) = P(Y \in A_Y) = P_{X,Y}(\Omega_X \times A_Y)$$

- **Bemerkungen (Randverteilung)**
  - Im stetigen Fall können die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y der Randverteilungen direkt aus der Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$ der gemeinsamen Verteilung bestimmt werden

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$$

  - Im diskreten Fall kann die Zähldichte $p_X(x)$ der Randverteilung direkt aus der Zähldichte $p_{X,Y}$ der gemeinsamen Verteilung bestimmt werden

$$p_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} p_{X,Y}(x, y)$$

Beispiel: Randverteilung

- **Beispiel (Randverteilung).** 3 Batterien werden zufällig aus einer Kiste mit 3 neuen, 4 benutzten und 5 kaputten Batterien genommen. Sei X die Anzahl der neuen Batterien und Y die Anzahl der benutzen Batterien, die gezogen werden. Wie sehen die Randverteilungen von $P_{X,Y}$ aus?

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$P(X=i)$
$X=0$	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\mathbf{\frac{84}{220}}$
$X=1$	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\mathbf{\frac{108}{220}}$
$X=2$	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\mathbf{\frac{27}{220}}$
$X=3$	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\mathbf{\frac{1}{220}}$
$P(Y=j)$	$\mathbf{\frac{56}{220}}$	$\mathbf{\frac{112}{220}}$	$\mathbf{\frac{48}{220}}$	$\mathbf{\frac{4}{220}}$	

Anzahl Möglichkeiten, i neue Batterien aus 3 neuen Batterien auszuwählen

Anzahl Möglichkeiten, $3-i$ andere Batterien aus 9 anderen Batterien auszuwählen

$$p_X(i) = \frac{\binom{3}{i}\cdot\binom{9}{3-i}}{\binom{12}{3}}$$

Anzahl Möglichkeiten, 3 Batterien aus 12 Batterien auszuwählen

Überblick

1. Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen
2. **Unabhängigkeit von Zufallsvariablen**
3. Summen und andere Funktionen von Zufallsvariablen
4. Erwartungswert
5. Kovarianz und Korrelation

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

- **Für zwei Ereignisse A und B gilt**: Wir nennen zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig bezüglich P genau dann, wenn
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
- Wir können das Konzept der Unabhängigkeit von Ereignissen auch auf Zufallsvariablen erweitern, wenn wir **alle** Ereignispaare betrachten!
- **Definition (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)**. Seien X und Y Zufallsvariablen mit zugehörigen Bildräumen $(\Omega_X, \mathcal{F}_X)$ und $(\Omega_Y, \mathcal{F}_Y)$. Wir nennen X und Y unabhängig genau dann, wenn für alle $A_X \in \mathcal{F}_X$ und $A_Y \in \mathcal{F}_Y$ gilt, dass
$$P(X \in A_X \wedge Y \in A_Y) = P(X \in A_X) \cdot P(Y \in A_Y)$$
- **Bemerkungen**. Der Test auf Unabhängigkeit ist sehr aufwendig, weil die Definition über exponentiell viele *Ereignispaare* getestet werden muss!

Geht es auch einfacher?

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

- **Satz (Kriterium für Unabhängigkeit von Zufallsvariablen).** Seien X und Y Zufallsvariablen mit zugehörigen Bildräumen $(\Omega_X, \mathcal{F}_X)$ und $(\Omega_Y, \mathcal{F}_Y)$.
  - Für diskrete Räume sind X und Y genau dann unabhängig, wenn für alle $\omega_X \in \Omega_X$ und alle $\omega_Y \in \Omega_Y$ gilt, dass
  $$P(X = \omega_X \wedge Y = \omega_Y) = P(X = \omega_X) \cdot P(Y = \omega_Y)$$
  - Für stetige reelle Räume sind X und Y genau dann unabhängig, wenn für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$ gilt, dass
  $$P(X \leq c_X \wedge Y \leq c_Y) = P(X \leq c_X) \cdot P(Y \leq c_Y)$$
- **Beispiel (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen).** Betrachte den Wurf zweier Münzen und drei Zufallsvariablen X, Y, Z. Hierbei ist X genau dann 1, wenn die erste Münze Zahl zeigt und sonst 0. Analog ist Y für die zweite Münze definiert. Außerdem gibt Z die Anzahl der Münzen an, die Zahl zeigen. Sind X und Z unabhängig?
  - **Lösung**. Nein, denn zum Beispiel gilt
  $$P(X = 1 \wedge Z = 0) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 1) \cdot P(Z = 0)$$

Beispiel: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

- **Beispiel (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen).** Betrachte den Wurf zweier Münzen und drei Zufallsvariablen X, Y, Z. Hierbei ist X genau dann 1, wenn die erste Münze Zahl zeigt und sonst 0. Analog ist Y für die zweite Münze definiert. Außerdem gibt Z die Anzahl der Münzen an, die Zahl zeigen. Sind X und Y unabhängig?
- **Lösung**: Mit dem Kriterium für die Unabhängigkeit müssen wir nur noch 4 Fälle prüfen:

$$P(X = 0 \land Y = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$$
$$P(X = 0 \land Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 0) \cdot P(Y = 1)$$
$$P(X = 1 \land Y = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$$
$$P(X = 1 \land Y = 1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$$

Damit haben wir hinreichend gezeigt, dass X und Y unabhängig sind.

Produktverteilung

- **Satz (Gemeinsame Verteilung unabhängiger Zufallsvariablen).** Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Randverteilungen P_X und P_Y. Dann ergibt sich die gemeinsame Verteilung $P_{X,Y}$ für alle $A_X \in \mathcal{F}_X$ und $A_Y \in \mathcal{F}_Y$ aus den Randverteilungen P_X und P_Y als

$$P_{X,Y}(A_X \times A_Y) = P_X(A_X) \cdot P_Y(A_Y)$$

  Wir nennen $P_{X,Y}$ die **Produktverteilung** $P_X \otimes P_Y$ von P_X und P_Y.
  - Im diskreten Fall entspricht die gemeinsame Zähldichte $p_{X,Y}$ für alle $(\omega_X, \omega_Y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$

$$p_{X,Y}(\omega_X, \omega_Y) = p_X(\omega_X) \cdot p_Y(\omega_Y)$$

  - Sind p_X und p_Y Dichten von X bzw. Y, so existiert eine gemeinsame Dichte $p_{X,Y}$, so dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

- **Bemerkungen (Produktverteilung).** Die Produktverteilung ist speichereffizient.
  - Zähldichte allgemein: $|\Omega_X| \cdot |\Omega_Y| - 1$ freie Variablen, welche die Dichte beschreiben
  - Zähldichte Produkt: $|\Omega_X| + |\Omega_Y| - 2$ freie Variablen, welche die Dichte beschreiben!

Überblick

1. Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen
2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
3. **Summen und andere Funktionen von Zufallsvariablen**
4. Erwartungswert
5. Kovarianz und Korrelation

Summme zweier Zufallsvariablen

- Wir wissen bereits, wie sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable nach Transformation verhält.
- Was uns noch fehlt: Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn wir zwei Zufallsvariablen miteinander addieren?

- **Definition (Summe zweier Zufallsvariablen)**. Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen mit zugehörigen Bildräumen $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_Y)$. Sei $Z = X + Y$ eine reelle Zufallsvariable vom Raum $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P_{X,Y})$ in den Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_Z)$. Wir bezeichnen P_Z dann als die Faltung von P_X und P_Y, geschrieben $P_Z = P_X * P_Y$ definiert für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ als
$$(P_X * P_Y)(A) = P_{X,Y}(\{\, (x, y) \mid x + y \in A \,\})$$

Beispiel: Faltung

- **Beispiel (Summe)**. Betrachte den dreifachen Wurf einer Münze. Sei X eine Zufallsvariable, welche 1 ist, falls beim ersten Wurf Zahl aufliegt und 0 sonst. Sei Y eine Zufallsvariable, welche zählt, wie oft Zahl auflag. Sei $Z = X + Y$.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 0$	$P(\{KKK\}) = 0.125$	$P(\{KZK \cup KKZ\}) = 0.25$	$P(\{KZZ\}) = 0.125$	0
$X = 1$	0	$P(\{ZKK\}) = 0.125$	$P(\{ZZK \cup ZKZ\}) = 0.25$	$P(\{ZZZ\}) = 0.125$

Damit gilt für P_Z

- $P_Z(\{0\}) = P(X = 0 \wedge Y = 0) = \mathbf{0.125}$
- $P_Z(\{1\}) = P(X = 0 \wedge Y = 1) = \mathbf{0.25}$
- $P_Z(\{2\}) = P\big((X = 0 \wedge Y = 2) \vee (X = 1 \wedge Y = 1)\big) = 0.125 + 0.125 = \mathbf{0.25}$
- $P_Z(\{3\}) = P\big((X = 0 \wedge Y = 3) \vee (X = 1 \wedge Y = 2)\big) = 0 + 0.25 = \mathbf{0.25}$
- $P_Z(\{4\}) = P(X = 1 \wedge Y = 3) = \mathbf{0.125}$

Summe als Faltung

- **Frage**: Können wir die Verteilung der Summe noch einfacher ausrechnen, als alle Kombination von Summanden aufzuzählen?
- **Antwort**: Ja! Indem der eine Summand variiert wird, während sich der zweite aus der Summe und dem ersten ergibt.
- **Satz (Zähldichte und Dichte bei Faltung)**. Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen und sei $Z = X + Y$. Ist $p_{X,Y}$ die gemeinsame Zähldichte von X und Y, dann ergibt sich die gefaltete Zähldichte p_Z von Z für alle $z \in \mathbb{R}$ als

$$p_Z(z) = \sum_{x \in \Omega_X} p_{X,Y}(x, z - x)$$

Ist $p_{X,Y}$ eine gemeinsame Dichte von X und Y, dann ist p_Z eine Dichte von Z, wobei für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt, dass

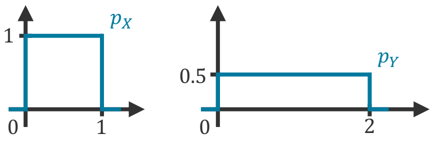
$$p_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x, z - x)\, dx$$

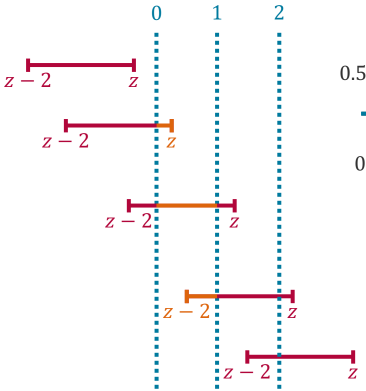
- **Bemerkungen**. Die Formel vereinfacht sich, sobald zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y addiert werden, da $p_{X,Y} = p_X \cdot p_Y$.

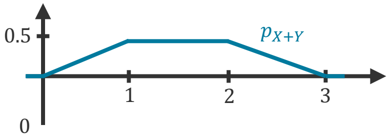
Beispiel: Summe

- **Beispiel (Faltung von zwei Dichten).** Gegeben zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen X und Y mit jeweiligen Dichten $p_X(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ und $p_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(y)$. Dann ergibt sich eine gefaltete Dichte p_{X+Y} für alle $z \in \mathbb{R}$ als

$$
\begin{aligned}
p_{X+Y}(z) &= \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} p_X(x) \cdot p_Y(z-x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{I}_{[0,2]}(z-x)\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \mathbb{I}_{[z-2,\,z]}(x)\,dx \\
&= \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \int_0^z \frac{1}{2}\,dx = \frac{z}{2} & 0 \le z < 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} & 1 \le z < 2 \\ \int_{z-2}^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{3-z}{2} & 2 \le z < 3 \\ 0 & z \ge 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$







Rechnen mit Zufallsvariablen

- Wenn wir von der Faltung sprechen, meinen wir im Allgemeinen die Summe zweier reeller Zufallsvariablen.
- **Aber**: Grundsätzlich sind auch andere Rechenoperationen möglich.
- **Satz (Rechnen mit Zufallsvariablen)**. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Sei $\oplus: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine binäre Operation und sei $\ominus: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Umkehroperation, sodass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$x \oplus y = z \Leftrightarrow z \ominus x = y$$

  - Ist $p_{X,Y}$ die gemeinsame Zähldichte von X und Y, dann ergibt sich die Zähldichte $p_{X \oplus Y}$ von $X \oplus Y$ für alle $z \in \mathbb{R}$ als

$$p_{X \oplus Y}(z) = \sum_{x \in \Omega_X} p_{X,Y}(x, z \ominus x)$$

  - Ist $p_{X,Y}$ eine gemeinsame Dichte von X und Y, dann ist $p_{X \oplus Y}$ eine Dichte von $X \oplus Y$, wobei für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$p_{X \oplus Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x, z \ominus x) \cdot \left| \frac{d}{dz}(z \ominus x) \right| dx.$$

Rechnen mit Zufallsvariablen

- **Bemerkungen (Dichten verrechneter Zufallsvariablen)**
  - Die Multiplikation mit dem Betrag der Ableitung bei der Berechnung der neuen Dichte dient der Normierung.
  - Bei der Faltung wird dieser Faktor nicht mitgeschrieben, da er dort konstant 1 ist.
- **Beispiel ((Zähl-)Dichten verrechneter Zufallsvariablen).** Seien X und Y reelle Zufallsvariablen. Ist $p_{X,Y}$ die gemeinsame Zähldichte von X und Y, dann ergibt sich die Zähldichte $p_{X \cdot Y}$ von $X \cdot Y$ für alle $z \in \mathbb{R}$ als

$$p_{X \cdot Y}(z) = \sum_{x \in \Omega_X} p_{X,Y}\left(x, \frac{z}{x}\right)$$

  Ist $p_{X,Y}$ eine gemeinsame Dichte von X und Y, dann ist p_{X^Y} eine Dichte von $Z = X^Y$, wobei für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$p_{X^Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x, \log_x(z)) \cdot \left|\frac{1}{\ln(x) \cdot z}\right| dx$$

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!