Mathe III

Ralf Herbrich

Verteilung von diskreten Zufallsvariablen

Überblick

1. Bernoulliverteilung
2. Binomialverteilung
3. Hypergeometrische Verteilung
4. Poissonverteilung

Überblick

1. **Bernoulliverteilung**
2. Binomialverteilung
3. Hypergeometrische Verteilung
4. Poissonverteilung

Bernoulliverteilung

- **Setup**: Wir führen ein Experiment durch, bei dem es nur zwei Ausgänge gibt
  - Erfolg: $X = 1$
  - Misserfolg: $X = 0$
- **Beobachtung**: Kleinste mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, wo die Zähldichte nur einen freien Parameter hat (da $\Omega = \{0,1\}$ und $P_X(\Omega) = 1$)
- **Definition (Bernoulliverteilung)**. Für die Ergebnismenge $\Omega = \{\, 0, 1 \,\}$ und einen Parameter $p \in [0, 1]$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{Bern}(\cdot; p)$ als Bernoulliverteilung, falls gilt, dass
$$\mathrm{Bern}(1; p) = p$$
Der Parameter p wird als **Erfolgswahrscheinlichkeit** bezeichnet.
- **Bemerkungen (Bernoulliverteilung)**
  - Im weitesten Sinne bezeichnet man auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen für andere binäre Ergebnismengen als Bernoulli-Verteilungen.
  - Wir schreiben auch $X \sim \mathrm{Bern}(p)$ um anzudeuten, dass $\mathrm{Bern}(\cdot; p)$ die Zähldichte ist.

Jacob Bernoulli **(1655 – 1705)**

Bernoulli-Verteilung

- **Satz (Erwartungswert und Varianz Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen).** Sei $X \sim \mathrm{Bern}(p)$ eine Zufallsvariable. Dann gilt für Erwartungswert und Varianz
$$E[X] = p$$
$$V[X] = p \cdot (1 - p)$$
- **Beispiel (Bernoulliverteilung).** Betrachte eine Zufallsvariable X, welche das Ergebnis eines fairen Münzwurfes auf $\{0, 1\}$ abbildet. Wie ist deren Erwartungswert und Varianz?
  - **Lösung**: Per Definition ist $X \sim \mathrm{Bern}(0.5)$. Also gilt
$$E[X] = 0.5 \text{ und } V[X] = 0.25$$
- **Beispiel (Bernoulliverteilung).** Betrachte eine Zufallsvariable X, welche das Würfeln einer 6 mit einem fairen Würfel als Erfolg betrachtet. Wie ist deren Erwartungswert und Varianz?
  - **Lösung**: Per Definition ist $X \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{6}\right)$. Also gilt
$$E[X] = \frac{1}{6} \text{ und } V[X] = \frac{5}{36}$$

Überblick

1. Bernoulliverteilung
2. **Binomialverteilung**
3. Hypergeometrische Verteilung
4. Poissonverteilung

Binomialverteilung

- **Konzept**: Oft wird nicht nur ein Bernoulli-Experiment durchgeführt, sondern unabhängig mehrfach hintereinander, wobei man sich nur für die Anzahl der Erfolge über alle Experimente hinweg interessiert (unabhängig von Reihenfolge).
- **Definition (Binomialverteilung)**. Für zwei Parameter $n \in \mathbb{N}_+$ und $p \in [0,1]$ sowie die Ergebnismenge $\Omega = \{0, \ldots, n\}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{Bin}(\cdot; n, p)$ als Binomialverteilung, falls für alle $k \in \Omega$ gilt, dass

Anzahl Möglichkeiten, dass k Erfolge aus n Versuchen ausgesucht werden können

$$\mathrm{Bin}(k; n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Wahrscheinlichkeit von $n-k$ unabhängigen Fehlern

Wahrscheinlichkeit von k unabhängigen Erfolgen

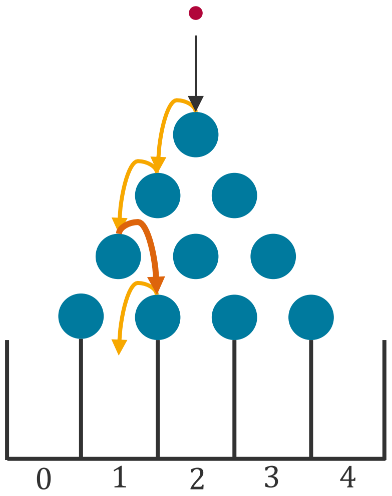
- **Bemerkungen (Binomialverteilung)**
  - Intuitiv gibt $\mathrm{Bin}(\cdot; n, p)$ an, wie wahrscheinlich eine Erfolgsanzahl bei Durchführung von n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist.
  - Formal können wir eine Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ auch als die Summe von n Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ansehen:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

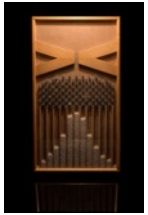
Binomialverteilung: Galton-Brett

- **Beispiel (Galton-Brett).** Eine Kugel fällt durch ein Galton-Brett. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet sie im Behälter mit der Nummer 1?
  - Die Wegfindung an jeder Kreuzung entspricht einem Bernoulli-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.5$.
  - Wir können „nach rechts abbiegen“ als Erfolg betrachten.
  - Die Nummern der Behälter zählen die Erfolge.
  - Für genau einen Erfolg müssen wir einmal rechts und dreimal links abbiegen.
  - Es gibt $\binom{4}{1}$ Möglichkeiten die Kreuzungen zu wählen, an der wir rechts abbiegen und somit $\binom{4}{1}$ verschiedene Pfade zum Ziel.
- Folglich ergibt sich

$$\mathrm{Bin}(1; 4{,}0.5) = \binom{4}{1} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^3 = 0.25$$

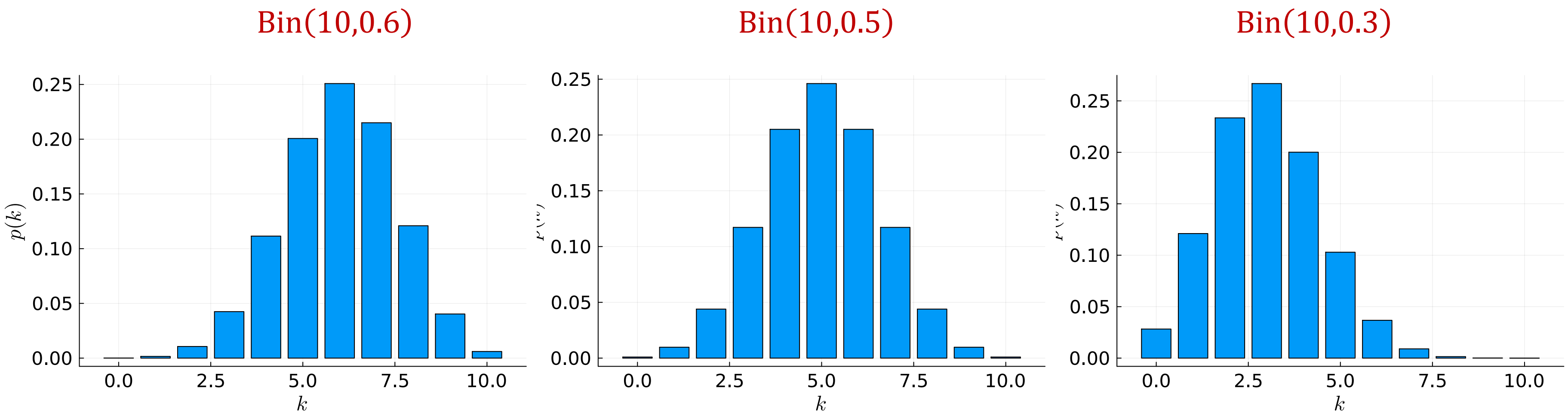


Sir Francis Galton (1822 – 1911)



Galton-Brett

Binomialverteilung: Zähldichte und Implementierung in R



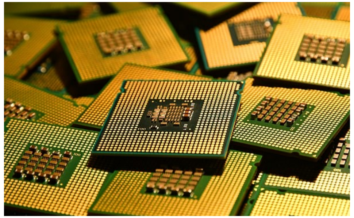
`dbinom(i,n,p)` ← berechnet $P(X = i)$ wenn $X \sim \text{Bin}(n,p)$

`pbinom(i,n,p)` ← berechnet $P(X \leq i)$ wenn $X \sim \text{Bin}(n,p)$

`plot(seq(0,10,1), dbinom(seq(0,10,1),10,0.5)` ← plottet die Zähldichte von $\text{Bin}(10,0.5)$

Beispiele Binomialverteilung

- **Beispiel (Produktionsfehler)**. Eine Chipfabrik produziert Speicherchips, wobei die Fehlerrate unabhängig voneinander 1% ist. Die Firma verkauft Speicher in 10-er Packs und gibt eine Geld-zurück-Garantie, wenn mehr als ein Speicher defekt ist. Wie wahrscheinlich ist es, dass ein 10-er Pack zurückkommt?



- **Lösung**: Sei X die Anzahl der defekten Speicher in einem 10-er Pack. Dann gilt

$$X \sim \mathrm{Bin}(10{,}0.01)$$

Daher ist die Rückgabewahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^9 \\ &\approx 0.0043 = 0.43\% \end{aligned}$$

Momente der Binomialverteilung

- **Satz (Momente binomialverteilter Zufallsvariablen).** Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable nach den Parametern n und p. Dann gilt für den Erwartungswert und die Varianz

$$E[X] = n \cdot p$$
$$V[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

- **Beweis**: Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Menge von n unabhängigen bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit $E[X_i] = p$ und $V[X_i] = p \cdot (1 - p)$. Dann gilt

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Linearität des Erwartungswertes

$$E[X] = \boxed{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]} = n \cdot p$$

$$V[X] = \boxed{V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]} = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Unabhängigkeit der X_i

Summe von Binomialverteilungen

- **Satz (Summe binomialverteilter Zufallsvariablen)**. Seien X und Y zwei binomialverteilte Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$. Dann ist
$$X + Y \sim \mathrm{Bin}(n + m, p)$$
- **Beweis**: Sei $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ eine Menge von $n + m$ unabhängigen bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit $E[X_i] = p$ und $V[X_i] = p \cdot (1 - p)$. Dann gilt

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Y = \sum_{j=1}^{m} X_{n+j}$$

Definition einer $\mathrm{Bin}(n + m, p)$

$$X + Y = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} X_{n+j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n+m} X_i}$$

Beispiel: Momente der Binomialverteilung

- **Beispiel (Erwartungswert einer Binomialverteilung)**. Wir werfen hundertmal einen fairen Würfel, wobei die Zufallsvariable X die Anzahl der Sechsen zählt. Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Sechsen?
  - **Lösung**. Offensichtlich ist $X \sim \mathrm{Bin}\left(100, \frac{1}{6}\right)$. Daher gilt für den Erwartungswert:

$$E[X] = 100 \cdot \frac{1}{6} \approx 16.7$$

- **Beispiel (Varianz einer Binomialverteilung)**. Wir werfen hundertmal einen fairen Würfel, wobei die Zufallsvariable X die Anzahl der Sechsen zählt. Um wieviel streut die Anzahl der Sechsen um $\frac{100}{6}$?
  - **Lösung**. Es gilt immer noch, dass $X \sim \mathrm{Bin}\left(100, \frac{1}{6}\right)$. Daher gilt für die Varianz:

$$V[X] = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 13.9$$

Beispiel: Lostopf

- **Beispiel (Lostopf)**. In einem Lostopf befinden sich 1000 Lose. Davon sind 100 Preise und 900 Nieten. Du ziehst 10 Lose aus dem Topf. Wie viele Preise erwarten wir zu erhalten?
- **Lösung**. Unter Annahme einer Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = \frac{100}{1000} = 0.1$ ergibt sich eine erwartete Anzahl von $n \cdot p = 1$.

- **Bemerkungen (Binomialverteilung für Ziehen ohne Zurücklegen)**
  - Diese Modellierung kann problematisch sein.
  - Mit Ziehen des ersten Loses ändert sich das Verhältnis zwischen Preisen und Nieten, und damit auch die Erfolgswahrscheinlichkeit.
  - Wir dürfen eine Binomialverteilung annehmen, wenn die Anzahl aller Lose (Population) **sehr groß** ist und die Anzahl der Ziehungen (Stichprobe) **sehr klein**, da die Auswirkungen auf die Erfolgswahrscheinlichkeit dann minimal sind.

Überblick

1. Bernoulliverteilung
2. Binomialverteilung
3. **Hypergeometrische Verteilung**
4. Poissonverteilung

Hypergeometrische Verteilung

- **Definition (Hypergeometrische Verteilung)**. Gegeben eine Population, in welcher sich M Erfolgselemente und N Fehlelemente befinden und wir eine Stichprobe der Größe n ziehen. Für die Ergebnismenge $\Omega = \{0, \ldots, \min(M, n)\}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{Hyp}(\cdot; M, N, n)$ als hypergeometrische Verteilung, falls für alle $k \in \Omega$ gilt, dass

Anzahl Möglichkeiten, dass k Erfolgselemente aus M Erfolgselementen ausgesucht werden können

$$\mathrm{Hyp}(k; M, N, n) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}$$

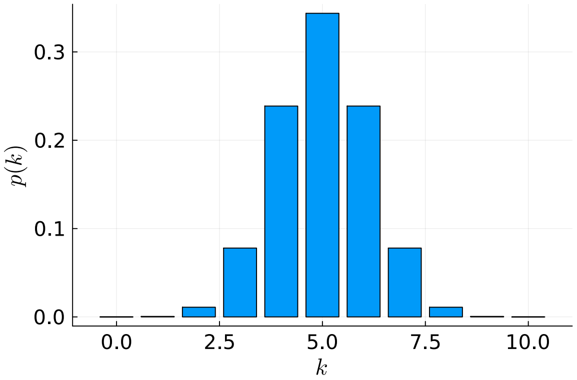
Anzahl Möglichkeiten, dass $n - k$ Fehlelemente aus N Fehlelementen ausgewählt werden können

Anzahl Möglichkeiten, dass n Elemente aus $M + N$ Elementen ausgewählt werden können

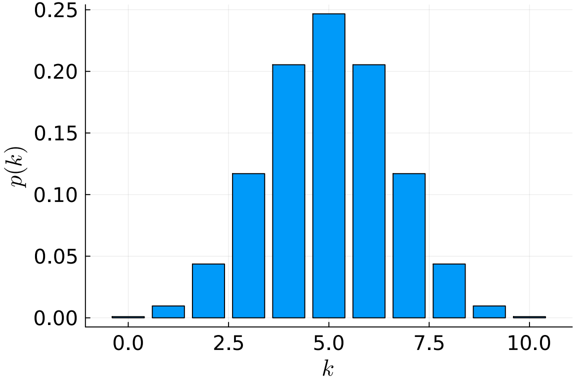
- **Bemerkungen (Hypergeometrische Verteilung)**
  - Im Prinzip ist es nur eine besondere Form der Gleichverteilung, denn auch hier teilen wir die Anzahl günstiger Ergebnisse durch die Anzahl möglicher Ergebnisse (*counting* Prinzip)

Hypergeometrische Verteilung: Zähldichte und **R**

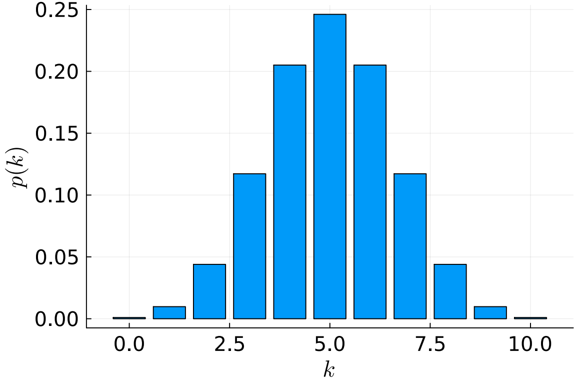
Hyp(10,10,10)



Hyp(1000,1000,10)



Bin(10,0.5)



`dhyper(i,M,N,n)` ← berechnet $P(X = i)$ wenn $X \sim \mathrm{Hyp}(M,N,n)$

`phyper(i,M,N,n)` ← berechnet $P(X \leq i)$ wenn $X \sim \mathrm{Hyp}(M,N,n)$

Erwartungswert der Hypergeometrischen Verteilung

- **Satz (Erwartungswert)**. Sei X eine hypergeometrisch-verteilte Zufallsvariable nach den Parametern M, N und n. Dann hat X den Erwartungswert

$$E[X] = n \cdot \frac{M}{M+N}$$

- **Beweis**: Dieser Satz kann bewiesen werden mit Hilfe dieser beiden Identitäten

$$k \cdot \binom{M}{k} = \frac{M!}{(k-1)!\,(M-k)!} = \frac{M \cdot (M-1)!}{(k-1)!\,\big(\underbrace{(M-1)-(k-1)}_{=M-k-1+1}\big)!} = M \cdot \binom{M-1}{k-1}$$

$$\binom{M+N}{n} = \frac{(M+N)!}{n!\,(M+N-n)!} = \frac{(M+N)\cdot(M+N-1)!}{n \cdot (n-1)!\,\big(\underbrace{M+N-1-(n-1)}_{=M+N-n-1+1}\big)!} = \frac{M+N}{n} \cdot \binom{M+N-1}{n-1}$$

Dann gilt nach Definition des Erwartungswertes

$$E[X] = \sum_k k \cdot \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}} = \sum_k M \cdot \frac{\binom{M-1}{k-1} \cdot \binom{N}{(n-1)-(k-1)}}{\frac{M+N}{n} \cdot \binom{M+N-1}{n-1}} = n \cdot \frac{M}{M+N} \underbrace{\sum_k \frac{\binom{M-1}{k-1} \cdot \binom{N}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{M+N-1}{n-1}}}_{=1}$$

Mathe III

Unit 5 – Verteilung von diskreten Zufallsvariablen

Varianz der Hypergeometrischen Verteilung

- **Satz (Varianz)**. Sei X eine hypergeometrisch-verteilte Zufallsvariable nach den Parametern M, N und n. Dann hat X die Varianz

$$V[X] = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$$

  wobei p definiert ist als $p = \frac{M}{M+N}$.

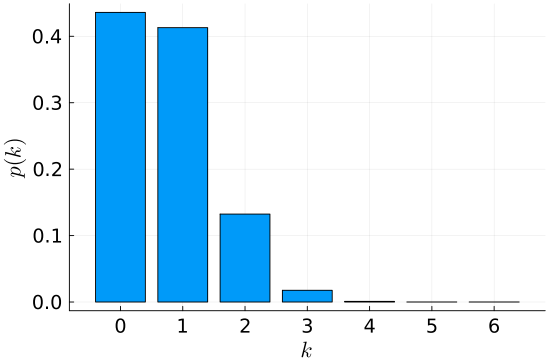
- **Beweis**: Dieser Satz kann mit ähnlichen Identitäten bewiesen werden (wird in der Übung gemacht).

- **Bemerkungen (Varianz)**
  - Wenn $\frac{M}{M+N}$ konstant bleibt aber $N+M$ steigt, dann konvergiert die Varianz der hypergeometrischen Verteilung gegen die Varianz der Binomialverteilung.
  - Im allgemeinen ist die Varianz der hypergeometrischen Verteilung aber kleiner als die Varianz der Binomialverteilung.

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

- **Beispiel (6 aus 49)**. Wie wahrscheinlich ist es, beim Lotto-Tippspiel „6 aus 49“ genau drei Richtige zu erzielen?
- **Lösung**. Die Anzahl der richtigen Zahlen ist hypergeometrisch verteilt mit
  - $M = 6$ richtigen Zahlen
  - $N = 49 - 6 = 43$ falschen Zahlen („Nieten“)
  - $n = 6$ sequentiell gezogenen Zahlen

  Daher ist die Wahrscheinlichkeit genau $\mathrm{Hyp}(3; 6,43,6) = 1.76504\%$.



Hypergeometrische und Binomial-Verteilung

- **Satz (Bedingte Binomialverteilung).** Seien $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ zwei unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen mit den Parametern n, m und p. Dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit von X gegeben, dass die Summe von X und Y eine feste Zahl $k \in \{0, \dots, n+m\}$ ist

$$P(X = i | X + Y = k) = \mathrm{Hyp}(i; n, m, k)$$

- **Beweis**: Für alle $i \in \{0, \dots, k\}$

äquivalent zu $Y = k - X = k - i$

$$P(X = i | X + Y = k) = \frac{P\big((X = i) \wedge (X + Y = k)\big)}{P(X + Y = k)}$$

$$= \frac{\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \cdot \binom{m}{k-i} \cdot p^{k-i} \cdot (1-p)^{m-(k-i)}}{\binom{m+n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m+n-k}}$$

$$= \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}}{\binom{m+n}{k}} = \mathrm{Hyp}(i; n, m, k)$$

Überblick

1. Bernoulliverteilung
2. Binomialverteilung
3. Hypergeometrische Verteilung
4. **Poissonverteilung**

Binomialverteilung im Limit

Siméon Denis Poisson
(1781 – 1840)

- Die Binomialverteilung modelliert die Anzahl von Erfolgen bei n unabhängigen Bernoulliexperimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.
- Was passiert aber, wenn die Anzahl n immer größer wird, p immer kleiner aber $n \cdot p = \lambda$ konstant?
  - **Beispiel**. Wir wissen, dass ein Transistor in 3 Jahren Betrieb einmal ausfällt (im Erwartungswert). Je nach Modellierungsgranularität heißt das
    - **Pro Tag**: $n = 1095,\ p = \frac{1}{1095}$
    - **Pro Stunde**: $n = 26280,\ p = \frac{1}{26280}$
    - **Pro Sekunde**: $n = 94608000,\ p = \frac{1}{94608000}$
- **Definition (Poissonverteilung)**. Für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und die Ergebnismenge $\Omega = \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\operatorname{Pois}(\cdot;\lambda)$ als Poissonverteilung, falls für alle $k \in \Omega$ gilt, dass

$$\operatorname{Pois}(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$$

Poissonverteilung: Binomialverteilung im Limit

- **Herleitung** erfolgt durch Anwendung der Grenzwertsätze und der Definition der Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

folgt aus $n \cdot p = \lambda$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Bin}\big(k; n, p(n)\big) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot [p(n)]^k \cdot \big(1-p(n)\big)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} \cdot \lambda^k \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right] \cdot \left[\lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}\right] \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)
\end{aligned}$$

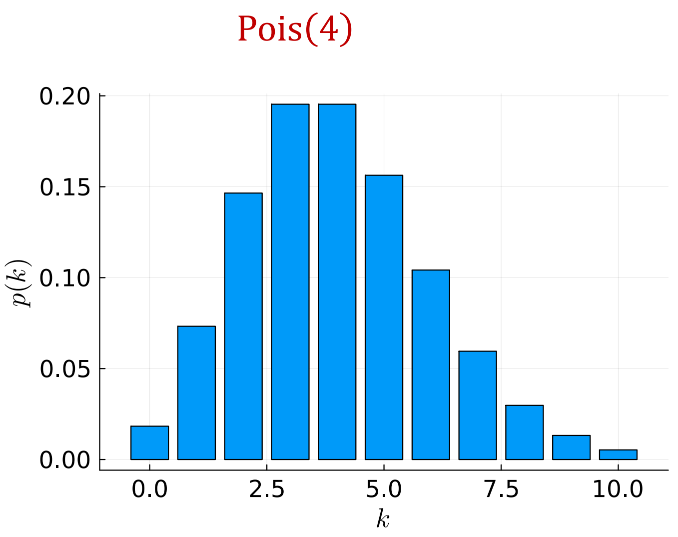
$= 1$

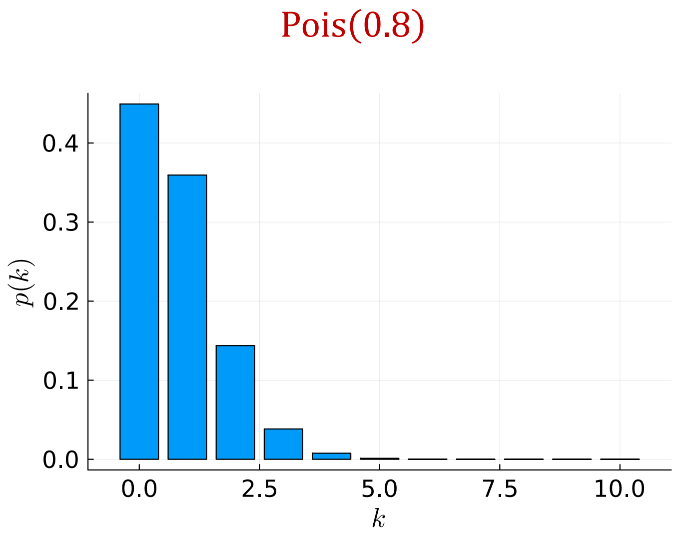
Leonhard Euler (1707 – 1783)

Mathe III

Unit 5 – Verteilung von diskreten Zufallsvariablen

Poissonverteilung: Zähldichte und `R`





`dpois(i,lambda)` ← berechnet $P(X = i)$ wenn $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

`ppois(i,lambda)` ← berechnet $P(X \leq i)$ wenn $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

Momente der Poissonverteilung

- **Satz (Momente poissonverteilter Zufallsvariablen)**. Sei X eine poissonverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ. Dann hat X den Erwartungswert und Varianz
$$E[X] = V[X] = \lambda$$
- **Beweis**: Da X der Grenzwert einer binomialverteilten Zufallsvariablen $Y_n \sim \text{Bin}\big(n, p(n)\big)$ mit $n \to \infty$ und $n \cdot p(n) = \lambda$ ist, können wir einfach die Grenzwerte von Y_∞ betrachten.

$$E[X] = E[Y_\infty] = \lim_{n\to\infty} n \cdot p(n) = \lambda$$

$$\begin{aligned} V[X] = V[Y_\infty] &= \lim_{n\to\infty} n \cdot p(n) \cdot \big(1 - p(n)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \cdot p(n) - \lim_{n\to\infty} \boxed{n \cdot p(n) \cdot p(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda - \lim_{n\to\infty} \lambda \cdot \boxed{\frac{\lambda}{n}} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$= \lambda \cdot \frac{\lambda}{n}$, da $n \cdot p = \lambda$

Konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$

Beispiel Poissonverteilung

- **Beispiel (Poissonverteilung).** In einem Handballspiel werden durchschnittlich 60 Punkte erzielt. Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Spiel 80 Punkte vergeben werden?

- **Lösung**: Wir nehmen eine Poissonverteilung $\mathrm{Pois}(60)$ und erhalten

$$\mathrm{Pois}(80; 60) = \frac{60^{80}}{80!} \cdot \exp(-60) \approx 0.22\ \%.$$

- **Beispiel (Poissonverteilung).** Auf dem Autobahnabschnitt der A24 zwischen Fehrbellin und Neuruppin beträgt die durchschnittliche Anzahl an wöchentlichen Unfällen 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es diese Woche mindestens einen Unfall gibt?

- **Lösung**: Wir modellieren die Anzahl X wöchentlicher Unfälle als Poissonverteilung, d.h., $X \sim \mathrm{Pois}(3)$. Dann gilt

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{3^0}{0!} \cdot \exp(-3) \approx 95.02\%$$

Summe von poissonverteilten Zufallsvariablen

- **Satz (Summe von poissonverteilten Zufallsvariablen).** Seien $X_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$ zwei unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt
$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$$
- **Beweis**: Anwendung des binomischen Satzes
$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot a^i \cdot b^{k-i}$$
$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \exp(-\lambda_1) \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \exp(-\lambda_2) \\
&= \exp\big(-(\lambda_1+\lambda_2)\big) \cdot \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \cdot \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-i} \\
&= \exp\big(-(\lambda_1+\lambda_2)\big) \cdot \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-i}}_{= (\lambda_1+\lambda_2)^k} = \mathrm{Pois}(k; \lambda_1 + \lambda_2)
\end{aligned}$$

Beispiel: Summe zweier poissonverteilter Zufallsvariablen

- **Beispiel (Summe von poissonverteilten Zufallsvariablen).** Auf den Ziegeln einer Ziegelmauer befinden sich Löcher und Flecken. Man geht davon aus, dass die Anzahl von Löchern bzw. Flecken bei Auswahl eines zufälligen Ziegels im Erwartungswert 10 Löcher und 20 Flecken ist. Du wählst zweimal einen zufälligen Ziegel aus und addierst die Anzahl der Löcher des ersten mit der Anzahl der Flecken des zweiten Ziegels. Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei insgesamt nicht mehr als 15 Flecken oder Löcher gezählt werden?
- **Lösung**: Sei X die Anzahl der Löcher auf einem zufällig ausgewählten Ziegel und Y die Anzahl der Flecken auf einem zufällig ausgewählten Ziegel. Dann gilt $X \sim \text{Pois}(10)$ und $Y \sim \text{Pois}(20)$.

  Dann suchen wir die Wahrscheinlichkeit dass $P(X + Y \leq 15)$. Da X und Y unabhängig sind, gilt

$$P(X + Y \leq 15) = \sum_{i=0}^{15} \text{Pois}(i; 10 + 20) \approx 0.19\%$$

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!