Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

Mathe III

Ralf Herbrich

Verteilung von stetigen Zufallsvariablen

Überblick

1. Gleichverteilung
2. Exponentialverteilung
3. Gammaverteilung
4. Normalverteilung
5. χ^2-Verteilung
6. t-Verteilung

Überblick

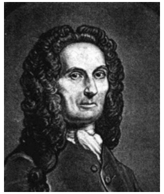
Normalverteilung

- **Definition (Normalverteilung).** Für zwei Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{N}(\cdot; \mu, \sigma^2)$ auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ als Normalverteilung, falls für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, dass

$$\mathcal{N}(A; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \int_A \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx$$

- **Bemerkungen (Normalverteilung)**
  - Die Dichte der Normalverteilung ist symmetrisch und strikt positiv für alle $x \in \mathbb{R}$.
  - Die Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ wird Standardnormalverteilung genannt.
  - Die Normalverteilung wird auch Gauß-Verteilung bzw. Gaußsche Glockenkurve genannt.
  - Die kumulative Verteilungsfunktion einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ wird mit $\Phi(\cdot; \mu, \sigma^2)$ bezeichnet bzw. mit $\Phi(\cdot)$ im Falle der Standardnormalverteilung

$$\Phi(t; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx$$

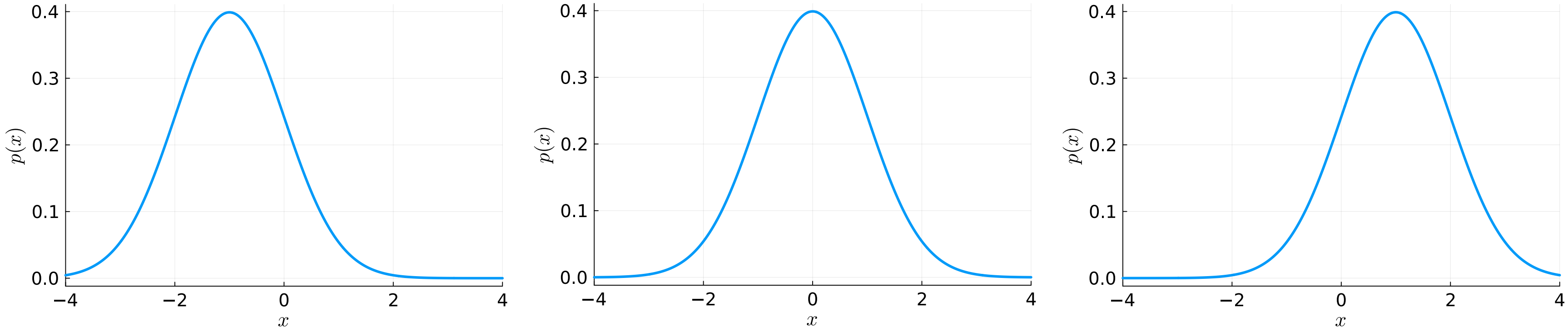


Abraham de Moivre (1667 – 1754)

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Normalverteilung: Dichte und Implementierung in R

$\mathcal{N}(-1,1)$ $\mathcal{N}(0,1)$ $\mathcal{N}(1,1)$



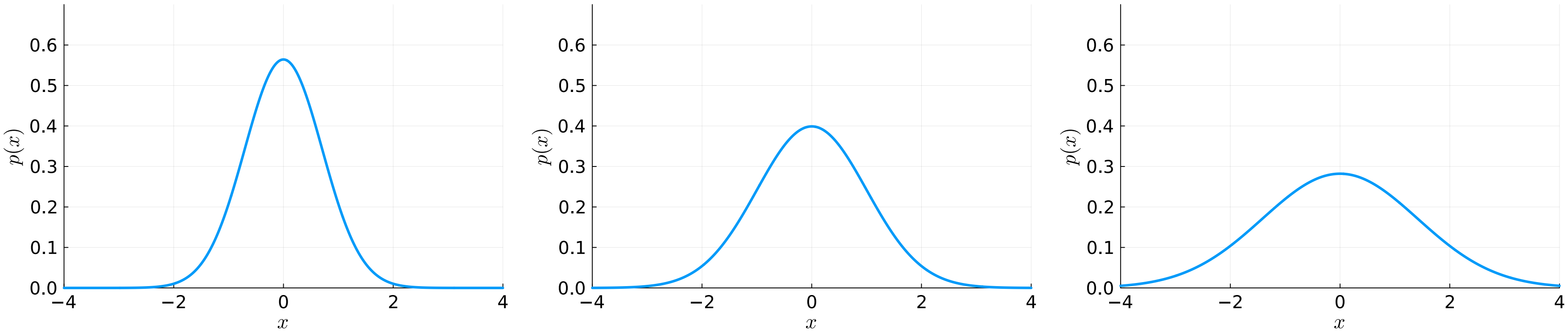
- **Bemerkungen (Normalverteilung)**
  - μ legt die Symmetrieachse der Dichte fest
  - Um μ ist der wahrscheinlichste Ausgang eines Zufallsexperiments

`dnorm(x,m,s)` ← berechnet $p(x)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$

`pnorm(x,m,s)` ← berechnet $P(X \leq x)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(m, s^2)$

Normalverteilung: Dichte

$\mathcal{N}(0,0.5)$ $\mathcal{N}(0,1)$ $\mathcal{N}(0,2)$



- **Bemerkungen (Normalverteilung)**
  - σ legt fest, wie stark die Werte um die Symmetrieachse streuen
  - Größere Werte von σ verkleinern das Maximum der Dichte

Ursprung der Normalverteilung

- Bedeutung der Normalverteilung ist zentral in der Statistik

1. **Exakte Verteilung von physikalischen Größen**
   - Position eines Partikels während der Diffusion
   - Wahrscheinlichkeitsdichte des Basiszustands in einem harmonischen Quantenoszillator
2. **Approximative Verteilung**
   - Summe von vielen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen
   - Zentraler Grenzwertsatz (nächste Vorlesung!)
3. **Beobachtete (empirische) Verteilung**
   - **Biologie**: Logarithmus von physiologischen Größen (z.B. Größe, Gewicht)
   - **Finanzwesen**: Logarithmus von Wechselkursen & Preisindizes
   - **Messtheorie**: Messung von physikalischen Größen (z.B. Temperatur)
   - **Meteorologie**: Monatliche Regenfallmengen

Lineartransformation normalverteilter Zufallsvariablen

- **Satz (Lineartransformation normalverteilter Zufallsvariablen).** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eine reelle Zufallsvariable. Dann gilt
$$a \cdot X + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$
- **Beweis**: Sei $Y = a \cdot X + b$ und F_Y die Verteilungsfunktion von Y. Für $a = 0$ ist der Satz wahr.

Für $a > 0$ gilt

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y)$$
$$= P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right)$$
$$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Für $a < 0$ gilt

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y)$$
$$= P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right)$$
$$= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Für a $<$ 0 ist die Ableitung $-\frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

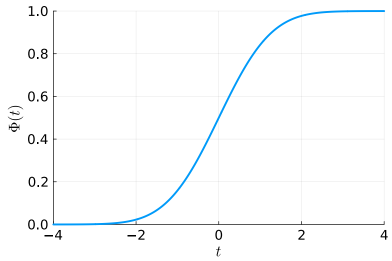
$$p_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

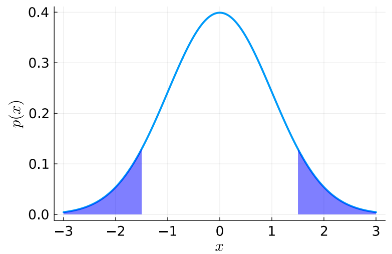
$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} \exp\left(-\frac{\left(y-(a\mu+b)\right)^2}{2\sigma^2 a^2}\right)$$

Dichte von $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Standardnormalverteilung

- **Korollar (Standardnormalverteilung)**. Sei eine reelle Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann ist die Variable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt, wobei
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
- **Beweis**: Folgt direkt aus der Lineartransformation von normalverteilten Zufallsvariablen.
- **Bemerkungen (Standardnormalverteilung)**
  - Zur Berechnung der Verteilungsfunktion $P(X \leq t)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ reicht die Standardverteilungsfunktion
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$
  - Für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt $\Phi(t; \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$
  - Die Funktion $\Phi(t)$ hat die Eigenschaft
$$\underbrace{\Phi(-t)}_{P(X \leq t)} = \underbrace{1 - \Phi(t)}_{P(X > -t)}$$





Erwartungswert der Normalverteilung

- **Satz (Erwartungswert der Normalverteilung)**. Eine reelle Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ hat den Erwartungswert
$$E[X] = 0$$
- **Beweis**: Aus der Definition des Erwartungswertes folgt
$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left[-\sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot [0 - 0] = 0$$
- **Korollar (Erwartungswert der Normalverteilung)**. Eine reelle Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ hat den Erwartungswert
$$E[X] = \mu$$

Varianz der Normalverteilung

- **Satz (Varianz der Normalverteilung).** Eine reelle Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ hat die Varianz
$$V[X] = 1$$
- **Beweis**: Mit Hilfe der partiellen Integration sieht man, dass
$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)}_{v'(x)} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\underbrace{x \cdot \left(-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0-0=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx}_{=\sqrt{2\pi}}\right]$$

Partielle Integration

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

- **Korollar (Varianz der Normalverteilung).** Eine reelle Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ hat die Varianz
$$V[X] = \sigma^2$$

Summe von Normalverteilungen

- **Satz (Summe von normalverteilten Zufallsvariablen).** Seien $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängige reelle Zufallsvariablen. Dann gilt
$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Beispiel (Lineartransformation und Faltung normalverteilter Zufallsvariablen).** Seien $X_1 \sim \mathcal{N}(3,4)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Zufallsvariablen. Wie ist die Verteilung von $3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 5$?
- **Lösung**. Sei $Y = 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 5$. Dann ist Y normalverteilt nach den beiden Parametern
$$\mu = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 5 = 14$$
und
$$\sigma^2 = 3^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 1 = 40$$

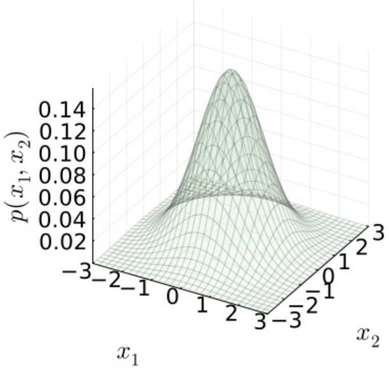
Exkurs: Bivariate Normalverteilung

- Oft unterliegt nicht nur eine, sondern mehrere Größen einer zufälligen Verteilung. Diese können dennoch gemeinsam betrachtet werden.

- **Beispiel (Bivariate Normalverteilung).** Ein Bogenschütze schießt auf die Mitte einer Zielscheibe. Trotz viel Übung trifft er nicht immer ins Gelbe. Die Zufallsvariablen X und Y geben die horizontale bzw. vertikale Abweichung in cm an und werden als unabhängig normalverteilt mit $\mu_X = \mu_Y = 0$ und $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$ angenommen. Wie können wir eine gemeinsame Dichte für X und Y angeben?
  - **Lösung**. Für zwei unkorrelierte normalverteilte Zufallsvariablen X und Y können wir die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ angeben als

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y - \mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right)$$

  - Wir sprechen von einer **bivariaten Normalverteilung** für unabhängige Zufallsvariablen.



Exkurs: Kovarianzmatrix

- **Definition (Kovarianzmatrix).** Für ein $n \in \mathbb{N}_+$ sowie n Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ bezeichnen wir $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Kovarianzmatrix, falls für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass

$$\Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$$

- **Bemerkungen (Kovarianzmatrix)**
  - Die Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix enthält die Varianzen $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ der einzelnen Zufallsvariablen.
  - Eine Kovarianzmatrix ist symmetrisch entlang der Hauptdiagonalen.
- **Beispiel (Kovarianzmatrix)**

	X_1	X_2	X_3
X_1	2	0	1
X_2	0	0.5	2
X_3	1	2	3

	X_1	X_2	X_3
X_1	4	0	0
X_2	0	1	0
X_3	0	0	2

Exkurs: Multivariate Normalverteilung

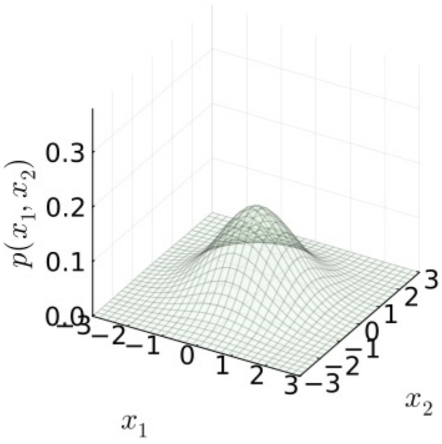
- **Definition (Multivariate Normalverteilung).** Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Kovarianzmatrix sowie $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ als multivariate Normalverteilung, falls für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass

$$\mathcal{N}(A; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \int_A \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi)^n \cdot |\boldsymbol{\Sigma}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) d\boldsymbol{x}$$

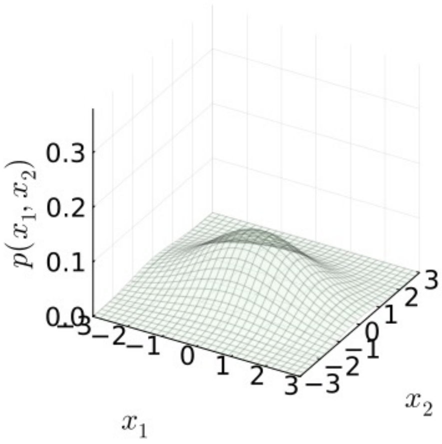
- **Bemerkungen (Multivariate Normalverteilung)**
  - Die Randverteilungen einer multivariaten Normalverteilung sind normalverteilt.
  - Die einzelnen Zufallsvariablen einer multivariaten Normalverteilung sind genau dann unkorreliert, wenn sie unabhängig sind.

Exkurs: Multivariate Normalverteilung in Bildern

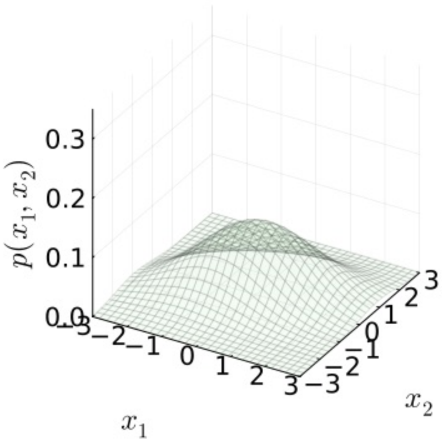
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



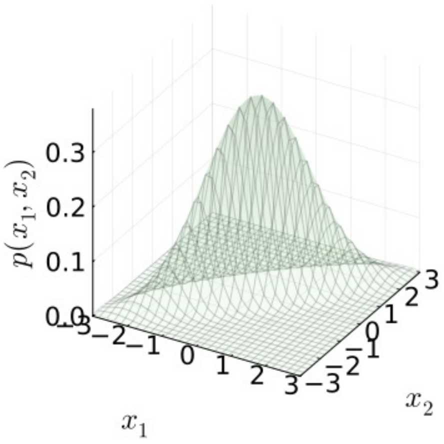
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix}$$



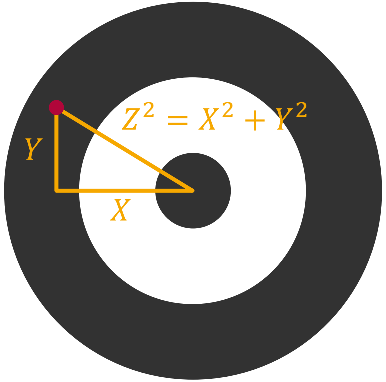
Überblick

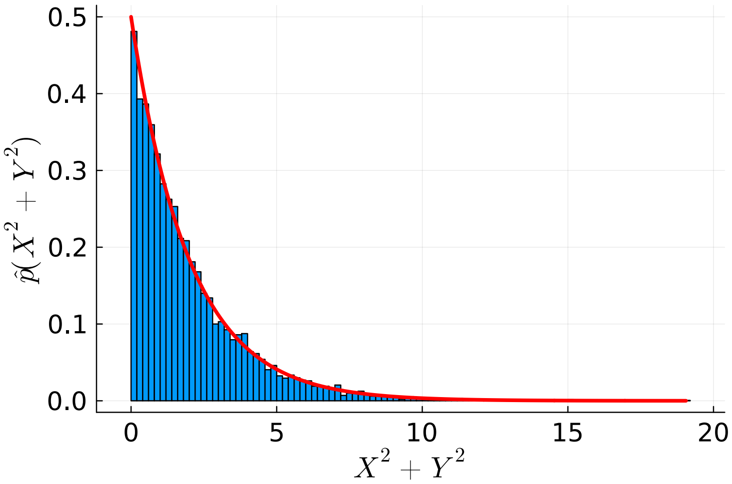
1. Gleichverteilung
2. Exponentialverteilung
3. Gammaverteilung
4. Normalverteilung
5. **χ^2-Verteilung**
6. t-Verteilung

Beispiel: χ^2-Verteilung

- **Beispiel (χ^2-Verteilung).** Ein Bogenschütze schießt auf die Mitte einer Zielscheibe. Trotz viel Übung trifft er nicht immer ins Schwarze. Die Zufallsvariablen X und Y geben die horizontale bzw. vertikale Abweichung in cm an und werden als unabhängig standardnormalverteilt angenommen.

  Wie ist die quadratische Distanz vom Auftreffpunkt zur Mitte der Zielscheibe verteilt?





χ^2-Verteilung

- **Definition (χ^2-Verteilung).** Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann folgt die Zufallsvariable $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ einer χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden, auch als $\chi^2(n)$ bezeichnet. Für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, dass

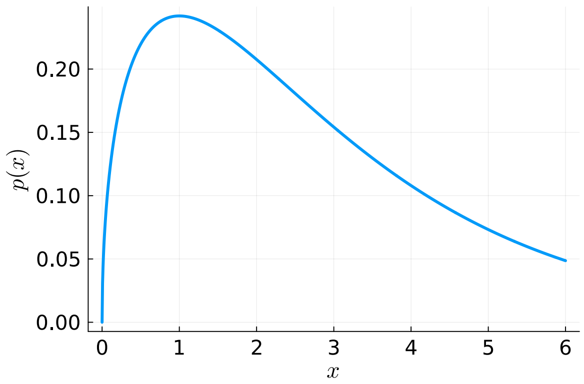
$$\chi^2(A; n) = \int_A \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)\, dx$$

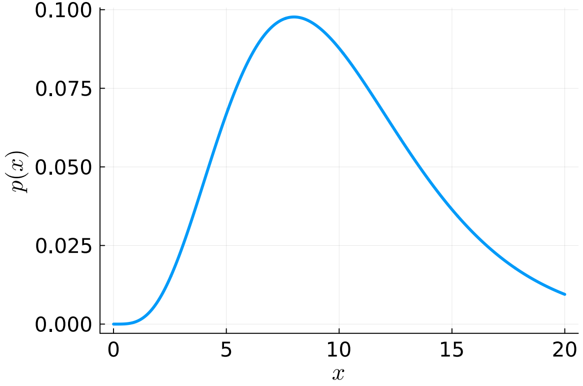
$$\mathrm{Gam}(A; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_A \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\,(\lambda x)^{\alpha-1} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)\ dx$$

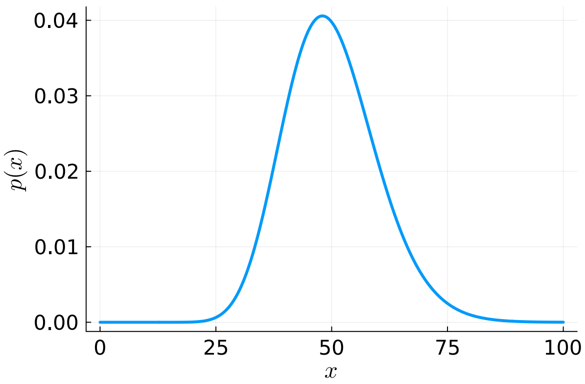
- **Bemerkungen (χ^2-Verteilung)**
  - Die Dichte entspricht dem Spezialfall der Gammaverteilung mit $\alpha = \frac{n}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}$.
  - Intuitiv ziehen wir unabhängig n standardnormalverteilte Zufallsvariablen, quadrieren und addieren diese.
  - Die χ^2-Verteilung wird primär für statistische Tests verwendet. Wir werden die Verteilung in den nächsten Wochen für den Mann-Whitney-Test benötigen.

χ^2-Verteilung: Dichte und Implementierung in R

$\chi^2(3)$ | $\chi^2(10)$ | $\chi^2(50)$







- **Bemerkung (χ^2-Verteilung)**
  - Die Dichte nähert sich einer symmetrischen Verteilung mit steigenden n

`dchisq(x,n)` ← berechnet $p(x)$ wenn $X \sim \chi^2(n)$

`pchisq(x,n)` ← berechnet $P(X \leq x)$ wenn $X \sim \chi^2(n)$

Momente der χ^2-Verteilung

- **Satz (Erwartungswert und Varianz der χ^2-Verteilung).** Sei $X \sim \chi^2(n)$ eine reelle Zufallsvariable. Dann gilt für den Erwartungswert $E[X] = n$ und für die Varianz $V[X] = 2n$.
  - **Beweis**: Folgt direkt aus den Eigenschaften der Gamma-Verteilung: wenn $Y \sim \mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ dann ist $E[Y] = \frac{\alpha}{\lambda}$ und $V[Y] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Mit $\alpha = \frac{n}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ ist der Satz bewiesen.
- **Satz (Summe von χ^2-verteilten Zufallsvariablen).** Seien $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ und $X_2 \sim \chi^2(n_2)$ zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen. Dann gilt
$$X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$
  - **Beweis**: Seien $Y_1, \dots, Y_{n_1}, Y_{n_1+1}, \dots, Y_{n_1+n_2}$ unabhängige standard-normalverteilte Zufallsvariablen, $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i = 1, \dots, n_1 + n_2$. Sei außerdem
$$X_1 = \boxed{Y_1^2 + \dots + Y_{n_1}^2 \sim \chi^2(n_1)}$$
$$X_2 = \boxed{Y_{n_1+1}^2 + \dots + Y_{n_1+n_2}^2 \sim \chi^2(n_2)}$$
Definition der χ^2 Verteilung

    Dann ist aber per Definition
$$X_1 + X_2 = \boxed{Y_1^2 + \dots + Y_{n_1}^2 + Y_{n_1+1}^2 + \dots + Y_{n_1+n_2}^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)}$$

Überblick

1. Gleichverteilung
2. Exponentialverteilung
3. Gammaverteilung
4. Normalverteilung
5. χ^2-Verteilung
6. **t-Verteilung**

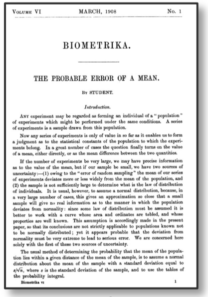
t-Verteilung

- **Definition (t-Verteilung).** Sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \chi^2(n)$. Dann folgt die reelle Zufallsvariable $X = Z/\sqrt{\frac{Y}{n}}$ einer t-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Für eine t-Verteilung mit n Freiheitsgraden gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dass

$$t(A; n) = \int_A \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

- **Bemerkungen (t-Verteilung)**
  - Die t-Verteilung wurde von William Sealy Gosset, der für die Guinness Brauerei arbeitete, entdeckt und unter dem Pseudonym „Student" veröffentlicht (daher nennt man die Verteilung auch „Student t-Verteilung").
  - Die t-Verteilung wird primär für statistische Tests verwendet.
  - Wir werden die Verteilung in den nächsten Wochen für den t-Test benötigen.

William Sealy Gosset
(1876 – 1937)



VOLUME VI MARCH, 1908 No. 1

BIOMETRIKA.

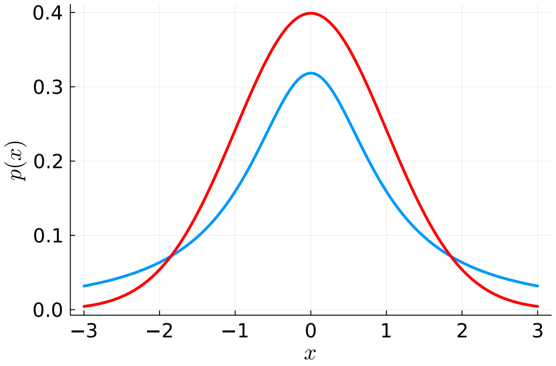
THE PROBABLE ERROR OF A MEAN.

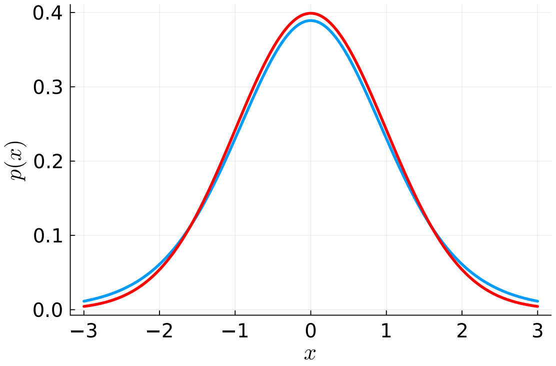
BY STUDENT.

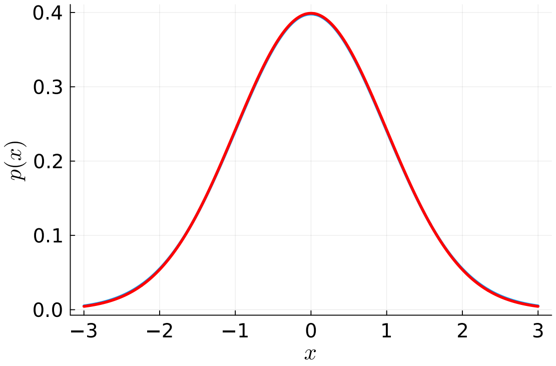
Introduction.

t-Verteilung: Dichte und Implementierung in R

$t(1)$ $t(10)$ $t(100)$







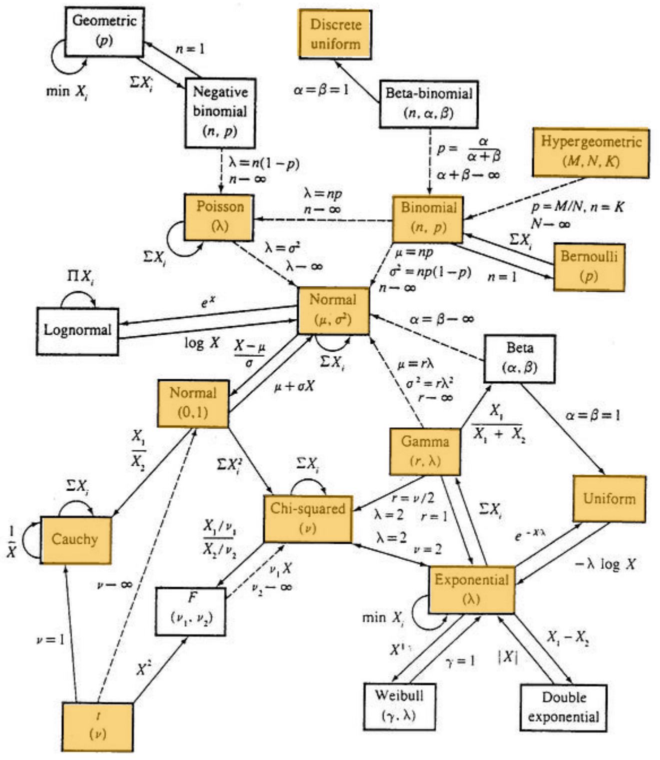
- **Bemerkungen (t-Verteilung)**
  - Für $t = 1$ ist die t-Verteilung die Cauchy-Verteilung und hat keinen Erwartungswert!
  - Mit steigendem n nähert sich die Dichte der Standardnormalverteilung an.

`dt(x,n)` ← berechnet $p(x)$ wenn $X \sim t(n)$

`pt(x,n)` ← berechnet $P(X \leq x)$ wenn $X \sim t(n)$

Beziehung zwischen Verteilungen

- Neben den bereits bekannten Verteilungen existiert noch eine Vielzahl weiterer bekannter Standardmodelle, die in Relation zueinander stehen.
- Für Interessierte: https://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html



Relationships among common distributions. Solid lines represent transformations and speci cases, dashed lines represent limits. Adapted from Leemis (1986).

Grafik: George Casella & Roger L. Berger: Statistical Inference. 2. Auflage. Duxbury, Pacific Grove 2001.

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!