Mathe III

Ralf Herbrich

Verteilung von stetigen Zufallsvariablen

HPI Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

Überblick

Überblick

1. **Gleichverteilung**
2. Exponentialverteilung
3. Gammaverteilung
4. Normalverteilung
5. χ^2-Verteilung
6. t-Verteilung

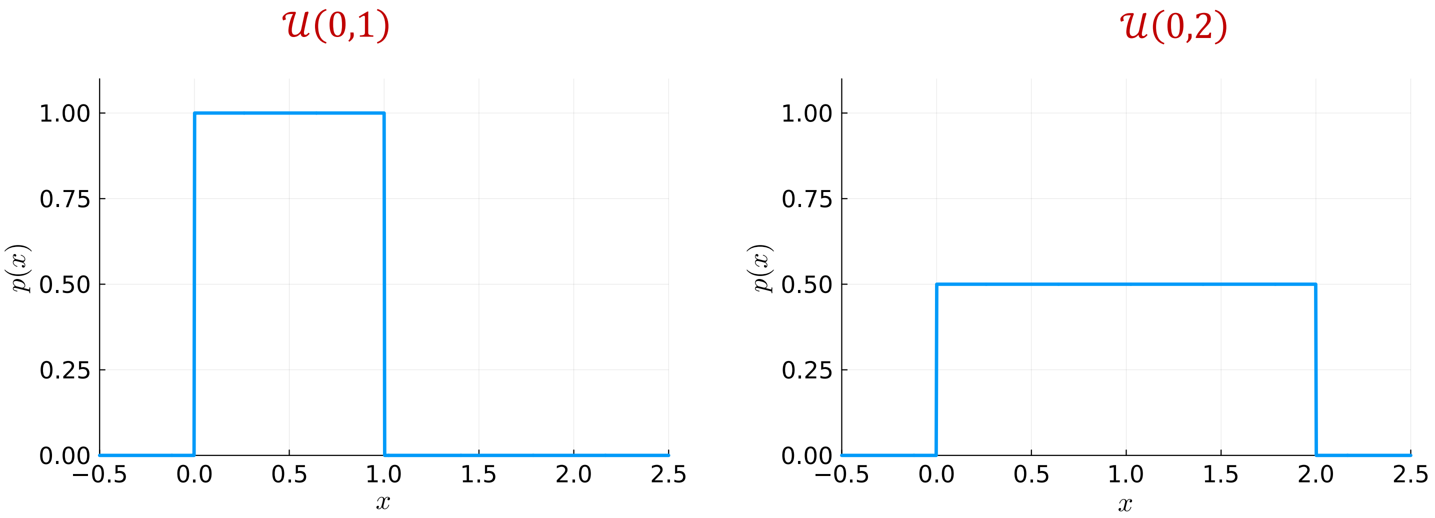
Stetige Gleichverteilung

- Liegen die Ergebnisse eines Zufallsexperiments in einem fixierten, reellen Intervall, treten jedoch in keinem Teilbereich des Intervalls vermehrt auf, so lässt sich für dieses Intervall eine stetige Gleichverteilung annehmen.

- **Definition (Stetige Gleichverteilung)**. Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{U}(\cdot; a, b)$ auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ als stetige Gleichverteilung, falls hierbei für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, dass
$$\mathcal{U}(A; a, b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_A \mathbb{I}_{[a,b]}(x)\, dx$$

- **Bemerkungen (Stetige Gleichverteilung)**
  - Die Dichte der stetigen Gleichverteilung ist $p(x) = \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$.
  - Wir teilen die Länge der Intervalle der **günstigen** Ergebnisse durch die Länge des Intervalls aller **möglichen** Ergebnisse.

Gleichverteilung: Dichte und Implementierung in R



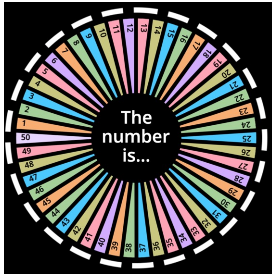
`dunif(x,a,b)` ← berechnet $p(x)$ wenn $X \sim \mathcal{U}(a,b)$

`punif(x,a,b)` ← berechnet $P(X \leq x)$ wenn $X \sim \mathcal{U}(a,b)$

Beispiele: Stetige Gleichverteilung

- **Beispiel (Glücksrad).** Betrachte den sich einstellenden Drehwinkel beim Drehen eines Glücksrades von 1 bis 50. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad auf den Zahlen 1 bis 25 landet?
  - **Lösung**: Die Ergebnisse sind stetig gleichverteilt im Intervall $[0, 2\pi]$, $X \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$

$$P(0 \leq X \leq \pi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \mathbb{I}_{[0,2\pi]}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$



- **Beispiel (Rundungsfehler).** Du misst das Gewicht eines Briefes. Das Ergebnis lautet 20 g, wobei die Anzeige deiner Waage jedoch nur auf das Gramm genau ist. Bei der Post fallen bei Briefen über $20\ g$ höhere Portokosten an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, die günstigere Briefmarke nutzen zu können?
  - **Lösung**: Das Gewicht ist stetig gleichverteilt im Intervall $[19.5, 20.5]$, $X \sim \mathcal{U}(19.5,20.5)$

$$P(X \leq 20) = \int_{-\infty}^{20} \mathbb{I}_{[19.5,20.5]}(x)\, dx = \int_{19.5}^{20} dx = \frac{1}{2}$$

Beispiele: Stetige Gleichverteilung

- **Beispiel (Wartezeiten).** Ein Bus hält alle 15 Minuten an einer Haltestelle, d.h. 7:00 Uhr, 7;15 Uhr, 7:30 Uhr, und so weiter. Wenn ein Passagier zufällig zwischen 7:00 Uhr und 7:30 Uhr an der Haltestelle ankommt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
  - A. weniger als 5 Minuten auf den Bus warten muss
  - B. mindestens 12 Minuten auf den Bus warten muss?
  - **Lösung**: Wir wissen, dass die Anzahl X Minuten nach 7:00 Uhr, in welcher der Passagier an der Haltestelle ankommt, gleichverteilt ist, $X \sim \mathcal{U}(0{,}30)$. Dann gilt für die Ereignisse
    1. $A = \{x \mid (10 < x < 15) \vee (25 < x < 30)\}$
    2. $B = \{x \mid (0 < x < 3) \vee (15 < x < 18)\}$

    Daher gilt
    1. $P(A) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 33.3\%$
    2. $P(B) = \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\%$

Erwartungswert der stetigen Gleichverteilung

- **Satz (Erwartungswert der Gleichverteilungen).** Sei $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ eine reelle Zufallsvariable. Dann hat X den Erwartungswert

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

- **Beweis**: Per Definition des Erwartungswertes wissen wir

$$E[X] = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \bigg|_a^b \right]$$

$$= \frac{\underbrace{b^2 - a^2}_{= (b+a) \cdot (b-a)}}{2 \cdot (b-a)}$$

$$= \frac{(b+a) \cdot (b-a)}{2 \cdot (b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

- **Bemerkung (Erwartungswert).** Der Erwartungswert ist genau der Mittelpunkt des Intervalls (warum?)

Varianz der stetigen Gleichverteilung

- **Satz (Varianz der Gleichverteilungen).** Sei $X \sim \mathcal{U}(a,b)$eine reelle Zufallsvariable. Dann hat X die Varianz

$$V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- **Beweis**: Das zweite Moment der Verteilung ist definiert als

$$E[X^2] = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \Big|_a^b \right]$$

$= (b^2 + ab + a^2) \cdot (b-a)$

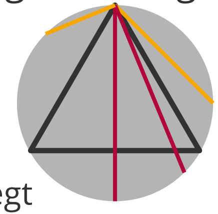
$$= \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

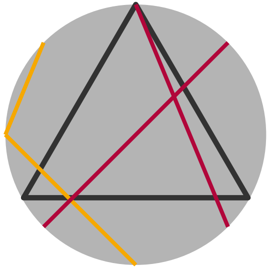
$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2}{12} - \frac{3b^2 + 6ab + 3a^2}{12}$$

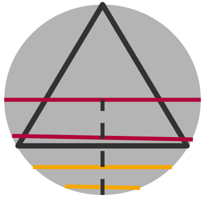
Exkurs: Bertrandsch‘es Paradoxon

- **Bertrandsch‘es Paradoxon**. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine zufällig gewählte Sehne eines Kreises länger ist als eine Seite eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?
  - **Methode 1: Zufällige Endpunkte**
    - Wähle zwei beliebige Punkte auf dem Kreis
    - Rotiere die Sehne, so dass ein Endpunkt auf einem Dreieckseckpunkt liegt
    - Nur Sehnen innerhalb des Dreiecks sind länger als eine Dreiecksseite
    - Dies betrifft $\frac{1}{3}$ des Kreisumfangs
  - **Methode 2: Zufälliger Radius**
    - Wähle einen beliebigen Radius
    - Wähle einen beliebigen Punkt auf dem Radius und betrachte diesen Sehnenmittelpunkt
    - Rotiere das Dreieck, so dass eine Dreiecksseite parallel zur Sehne liegt
    - Jene Dreiecksseite schneidet den Radius in der Mitte
    - Insofern sind $\frac{1}{2}$ der gewählten Sehnen länger als die Dreiecksseite



Joseph Louis François Bertrand (1822 – 1900)

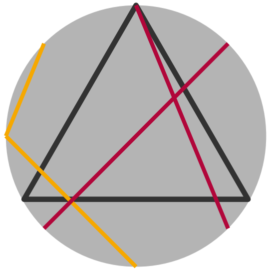




Exkurs: Bertrandsch'es Paradoxon

- **Beispiel (Bertrandsch'es Paradoxon)**
  - Offensichtlich gilt $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.
  - Weitere Methoden zur Sehnenbestimmung liefern sogar noch weitere Ergebnisse!
  - Die kontinuierliche Gleichverteilung war eine Zeitlang verpönt, weil man sich die Effekte nicht erklären konnte.
  - Die Erklärung liegt aber nicht in der Gleichverteilung (die ist in beiden Methoden korrekt angewandt), sondern in der **unklaren Definition von „zufällig gewählt".**

- Für Interessierte: Wikipedia Artikel



Überblick

Exponentialverteilung: Einführendes Beispiel

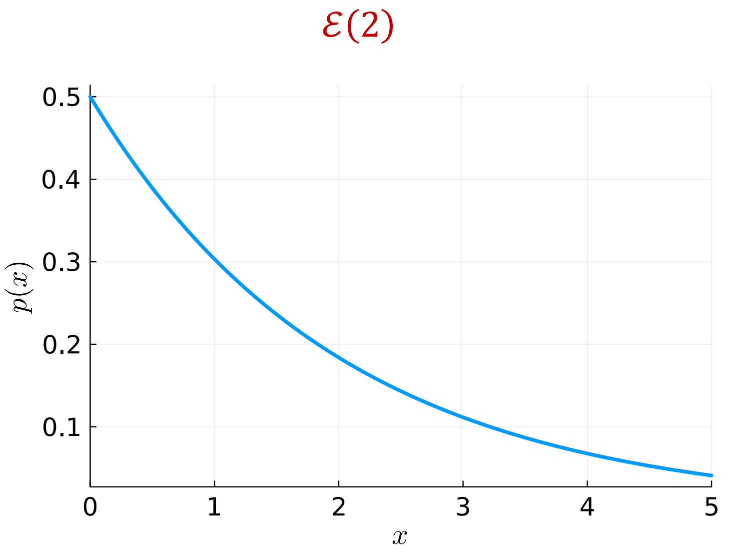
- Stetige Gleichverteilungen erfordern ein fixiertes Intervall und erlauben keine Häufungen von Ergebnisauftritten in einem Bereich. Anders ist dies bei der Exponentialverteilung.

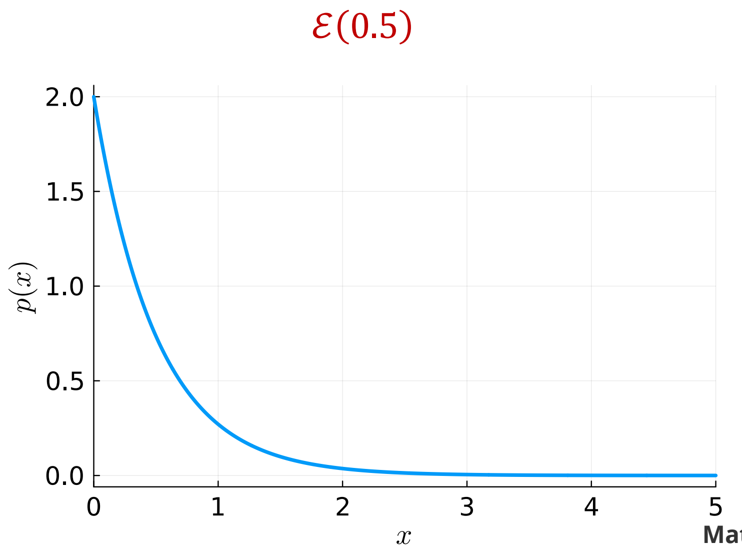
- **Beispiel (Exponentialverteilung)**. Ein Labor stellt ein radioaktives Element her und analysiert, wie lange die Atome für den Zerfall brauchen. Die meisten Atome zerfallen nach sehr kurzer Zeit, nur wenige Atome überdauern auch für längere Zeit.
  - Für ein zufällig gewähltes Atom liegt die Zeit bis zum Zerfall in $\mathbb{R}_+$.
  - Die Zeit bis zum Zerfall ist nach oben nicht begrenzt.
  - Die Zeit bis zum Zerfall liegt wahrscheinlicher in einem niedrigen Bereich als in einem hohen Bereich.

Exponentialverteilung

- **Definition (Exponentialverteilung)**. Für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{E}(\cdot;\lambda)$ auf dem Ereignisraum $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ als Exponentialverteilung, falls für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, dass
$$\mathcal{E}(A;\lambda) = \int_A \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)\ dx$$
- **Bemerkung (Exponentialverteilung)**. Intuitiv sind alle nicht-negativen reellen Zahlen als Ergebnis möglich, wobei niedrige Ergebnisse vermehrt auftreten.
- **Satz (Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung)**. Sei $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt für die Verteilungsfunktion
$$F(c) = P(X \leq c) = 1 - \exp(-\lambda \cdot c)$$
  - **Beweis**: Per Definition der Verteilungsfunktion
$$F(c) = \int_0^c \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)\ dx = -\exp(-\lambda \cdot x)\Big|_0^c$$
$$= -\exp(-\lambda \cdot c) + 1$$

Exponentialverteilung: Dichte und Implementierung in **R**





`dexp(x,l)` ← berechnet $p(x)$ wenn $X \sim \mathcal{E}(l)$

`pexp(x,l)` ← berechnet $P(X \leq x)$ wenn $X \sim \mathcal{E}(l)$

Erwartungswert der Exponentialverteilung

- **Satz (Erwartungswert der Exponentialverteilung).** Sei $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ eine reelle Zufallsvariable. Dann hat X den Erwartungswert

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- **Beweis**: Per Definition des Erwartungswertes wissen wir

Ableitung ist $x \cdot \exp(-\lambda x)$

$$E[X] = \lambda \cdot \int_0^\infty x \cdot \exp(-\lambda x)\, dx = \lambda \cdot \left[-\frac{(1+\lambda x) \cdot \exp(-\lambda x)}{\lambda^2} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

- **Bemerkung (Erwartungswert).** Der Erwartungswert ist der Kehrwert von λ.

Varianz der Exponentialverteilung

- **Satz (Varianz der Exponentialverteilung)**. Sei $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ eine reelle Zufallsvariable. Dann hat X die Varianz

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **Beweis**: Per Definition des zweiten Moments wissen wir

Ableitung ist $x^2 \cdot \exp(-\lambda x)$

$$E[X^2] = \lambda \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \exp(-\lambda x)\, dx = \lambda \cdot \left[\boxed{-\frac{(2 + 2\lambda x + \lambda^2 x^2) \cdot \exp(-\lambda x)}{\lambda^3}} \Bigg|_0^\infty \right]$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{2}{\lambda^3}\right) = \boxed{\frac{2}{\lambda^2}}$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \boxed{\frac{2}{\lambda^2}} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **Bemerkung (Varianz)**
  - Bei der Exponentialverteilung sind Erwartungswert und Standardabweichung gleich!

Exponentialverteilung: Gedächtnislosigkeit (*memoryless*)

- Die Exponentialverteilung findet häufige Anwendung in der Warteschlangentheorie.
  - Hier erfüllt sie insbesondere das Kriterium der Gedächtnislosigkeit!
- **Definition (Gedächtnislosigkeit)**. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P einer reellen Zufallsvariablen X ist gedächtnislos, falls für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

  Wenn $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ dann ist die Zufallsvariable gedächtnislos für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
  - **Beweis**: Per Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit wissen wir, dass

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = P(X > t)$$

  Also muss gelten, dass

$$\underbrace{P(X > s + t)}_{\exp(-\lambda(s+t))} = \underbrace{P(X > s)}_{\exp(-\lambda s)} \cdot \underbrace{P(X > t)}_{\exp(-\lambda t)}$$

- **Bemerkung (Gedächtnislosigkeit)**
  - Intuitiv: Die Verteilung „merkt" sich nicht, dass wir schon t Sekunden gewartet haben.

Beispiel: Exponentialverteilung

- **Beispiel (Exponentialverteilung)**. Ein Labor stellt ein radioaktives Element her und analysiert, wie lange die Atome für den Zerfall brauchen. Im Mittel dauert es eine halbe Sekunde, dass ein Atom zerfällt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zerfällt ein zufälliges Atom in der ersten Sekunde?
  - **Lösung**: Wir nehmen eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 2$ an, $X \sim \mathcal{E}(2)$, da $E[X] = \frac{1}{2}$

$$P(X \leq 1) = 1 - \exp(-2) \approx 86.5\ \%$$

- **Beispiel (Gedächtnislosigkeit)**. Die Lebenszeit der Batterie eines E-Autos sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 100 000 Kilometern. Eine Familie plant einen 5000-Kilometer Urlaubstrip. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass während des Urlaubs die Batterie **nicht** ausfällt?
  - **Lösung**: Wir modellieren die Lebenszeit der Batterie in Tausend-Kilometern. Da $E[X] = 100$, nehmen eine Exponentialverteilung mit $\lambda = \frac{1}{100}$ an

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = \exp(-5 \cdot \lambda) = \exp\left(-\frac{1}{20}\right) \approx 95.1\%$$

Eigenschaft der Exponentialverteilung

- **Satz (Verteilung des Minimums).** Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reelle exponentialverteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$. Dann ist die Verteilung des Minimums von $X_1, \dots, X_n$ auch exponentialverteilt mit $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

$$P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq c) = \mathcal{E}\left(c; \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

- **Beweis**: Wir betrachten das Gegenereignis

Definition des Minimums

$$P(\min(X_1, \dots, X_n) > c) = P\big((X_1 > c) \land (X_2 > c) \land \dots \land (X_n > c)\big)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i > c)$$

Per Annahme der Unabhängigkeit

$$= \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i \cdot x)$$

1-Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung

$$= \exp\left(-x \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

Überblick

1. Gleichverteilung
2. Exponentialverteilung
3. **Gammaverteilung**
4. Normalverteilung
5. χ^2-Verteilung
6. t-Verteilung

Gammaverteilung

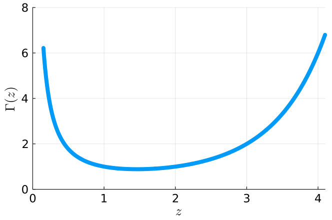
- Die Exponentialverteilung ist durch ihre Einparametrigkeit nur wenig flexibel. Eine Verallgemeinerung mit zwei Parametern stellt die Gammaverteilung dar.
- **Definition (Gammaverteilung)**. Für zwei Parameter $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{Gam}(\cdot; \alpha, \lambda)$ auf dem Ereignisraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ als Gammaverteilung, falls für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, dass

$$\mathrm{Gam}(A; \alpha, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_A \boxed{\lambda \cdot \exp(-\lambda x)}\, (\lambda x)^{\alpha-1} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)\ dx$$

wobei $\Gamma(\cdot)$ die Eulersche Gammafunktion ist, welche die Fakultät erweitert.

- **Bemerkungen (Gammaverteilung)**
  - Die Gammaverteilung $\mathrm{Gam}(1, \lambda)$ entspricht der Exponentialverteilung $\mathcal{E}(\lambda)$.
  - α ist ein Formparameter. Für $\alpha > 1$ nimmt die Dichte eine deutlich andere Form an als für $\alpha \leq 1$ (ähnlich wie bei der Poissonverteilung).
  - λ ist ein Skalenparameter, welcher steuert, wie stark die Ergebnisse von 0 abweichen (ähnlich wie bei der Exponentialverteilung).

Eulersche Gammafunktion



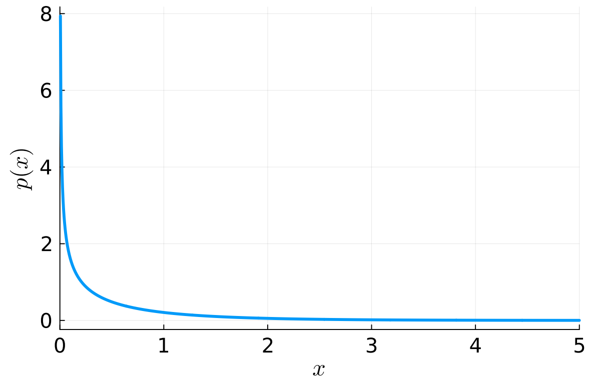
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \cdot \exp(-x)\, dx$$

$$\forall z \in \mathbb{R}_+: \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

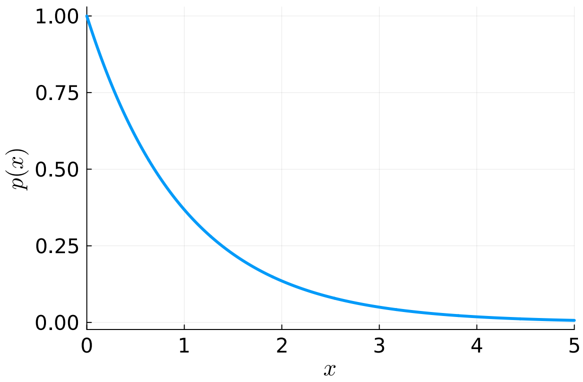
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Gammaverteilung: Dichte und Implementierung in **R**

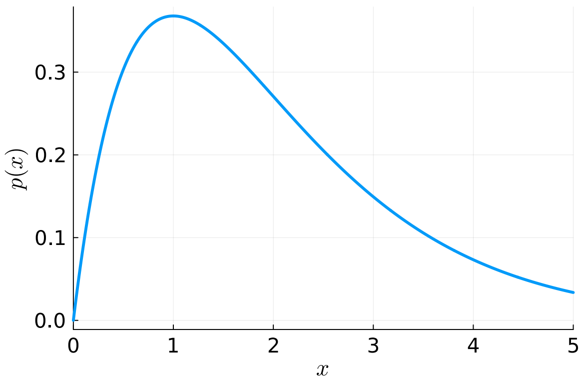
$\mathrm{Gam}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



$\mathrm{Gam}(1,1)$



$\mathrm{Gam}(2,1)$



- **Bemerkungen (Gammaverteilung)**
  - $\alpha < 1$: Werte stärker in Richtung des Ursprungs verteilt
  - $\alpha > 1$: Globales Maximum der Dichte mehr im positiven Bereich

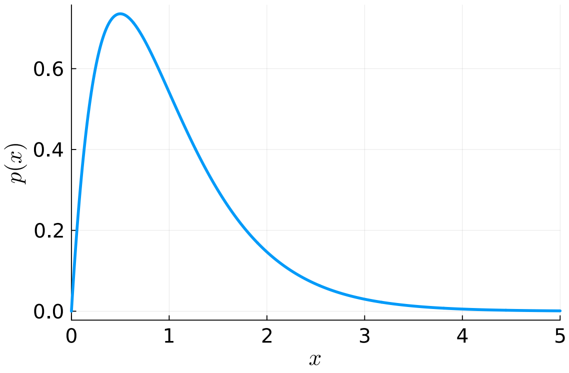
`dgamma(x,a,b)` ← berechnet $p(x)$ wenn $X \sim \mathrm{Gam}(a, b)$

`pgamma(x,a,b)` ← berechnet $P(X \leq x)$ wenn $X \sim \mathrm{Gam}(a, b)$

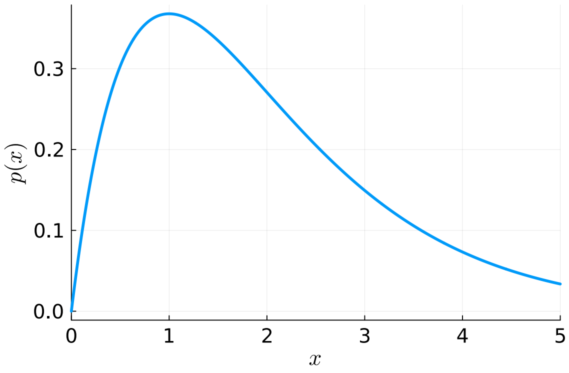
Gammaverteilung: Dichte

HPI Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

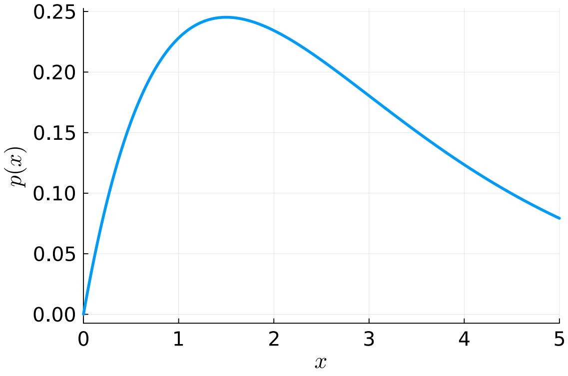
$\mathrm{Gam}\left(2, \frac{1}{2}\right)$



$\mathrm{Gam}(2,1)$



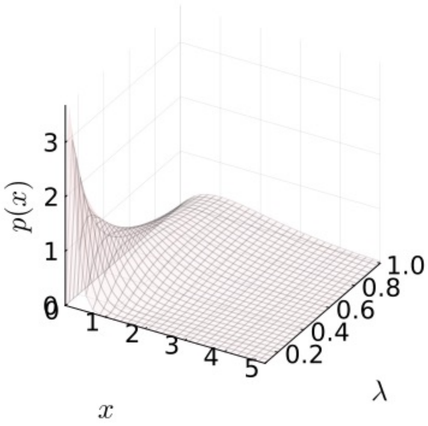
$\mathrm{Gam}\left(2, \frac{3}{2}\right)$



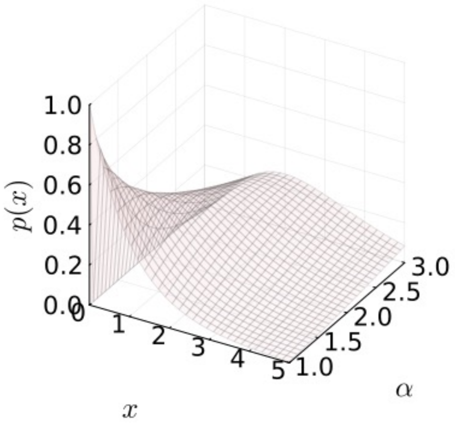
- **Bemerkungen (Gammaverteilung)**
  - $\lambda < 1$: Werte stärker in Richtung des Ursprungs verteilt
  - $\lambda > 1$: Werte weiter vom Ursprung entfernt verteilt

Gammaverteilung: Rechtschief und Linkssteile Dichte

$\mathrm{Gam}(2, \lambda)$



$\mathrm{Gam}(\alpha, 1)$



- **Bemerkungen (Gammaverteilung)**
  - Die Gammaverteilung ist ein häufig genutztes Werkzeug zur Modellierung rechtsschiefer Verteilungen.
  - Eine rechtsschiefe/linkssteile Verteilung besitzt eine nach links geneigte Verteilung.

Erwartungswert der Gammaverteilung

- **Satz (Erwartungswert und Varianz der Gammaverteilung).** Eine reelle Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ hat den Erwartungswert und die Varianz

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$V[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

- **Bemerkung (Erwartungswert).** Der Erwartungswert und die Varianz der Exponentialverteilung folgt als Spezialfall für $\alpha = 1$.

- **Beispiel (Erwartungswert der Gammaverteilung).** Ein Car-Sharing-Anbieter wertet aus, wie weit ein Auto pro Miete gefahren wir und modelliert dies als Gammaverteilung mit $\alpha = 4$ und $\beta = 0.2$.

  Für die Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Gam}(4{,}0.2)$, welche die gefahrene Strecke einer zufällig gewählten Miete angibt, gilt folglich $E[X] = \frac{4}{0.2} = 20$.

Beispiel: Gammaverteilung

- **Beispiel (Gammaverteilung)**. Ein Car-Sharing-Anbieter wertet aus, wie weit ein Auto pro Miete gefahren wird. Die meisten Fahrten bewegen sich um die $20\ \mathrm{km}$. Ausgesprochen kurze oder lange Fahrten sind eher seltener. Der Anbieter modelliert die Verteilung der pro Miete gefahrenen Kilometer als Gammaverteilung mit $\alpha = 4$ und $\lambda = 0.2$. Wie wahrscheinlich ist es, dass während einer zufällig gewählten Miete weniger als $10\ \mathrm{km}$ zurückgelegt wurden?

- **Lösung**: Wir können dies direkt mit R und der Verteilungsfunktion der Gammaverteilung lösen

```
pgamma(10,4,0.2)
```

$$P(X \leq 10) = \mathrm{Gam}([0,10]; 4,0.2) = \int_0^{10} \frac{0.2^4}{\Gamma(4)} \cdot x^{4-1} \cdot \exp(-0.2 \cdot x)\, dx \approx 14.3\ \%$$

Summe von gammaverteilten Zufallsvariablen

- **Satz (Summe von gammaverteilten Zufallsvariablen).** Seien $X_1 \sim \mathrm{Gam}(\alpha_1, \lambda)$ und $X_2 \sim \mathrm{Gam}(\alpha_2, \lambda)$ zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen. Dann gilt
$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Gam}(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

- **Korollar (Summe von exponentialverteilten Zufallsvariablen).** Seien $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ und $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen. Dann gilt
$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Gam}(2, \lambda)$$

- **Bemerkungen (Einsatzgebiete der Gammaverteilung)**
  - Wie auch die Exponentialverteilung wird die Gammaverteilung in der Warteschlangentheorie eingesetzt.
  - Ferner nutzen Versicherungen diese Verteilung zur Modellierung von Schadenshöhen.

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!