

Mathe III

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ralf Herbrich

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ -Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
 - Numerische Approximation

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ -Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
- 6. Gleichverteilung**
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
 - Numerische Approximation

Zur Erinnerung: Wahrscheinlichkeitsraum

- **Definition (Wahrscheinlichkeitsraum).** Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel (Ω, \mathcal{F}, P) bestehend aus
 - einer Ergebnismenge Ω ,
 - einem Ereignissystem \mathcal{F} und
 - einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P: \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ mit folgenden drei Eigenschaften:
 1. **Nicht-Negativität:** Für alle $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$.
 2. **σ -Additivität:** Für alle $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$
 3. **Normierung:** $P(\Omega) = 1$.

Laplace'sche Gleichverteilung

- **Problem:** Wie definiert man in der Praxis eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- **Idee:** Wähle den Ereignisraum so dass jedes Ergebnis die gleiche Chance hat.
- **Definition (Laplace'sche Gleichverteilung).** Gegeben eine Ergebnismenge Ω ist die Gleichverteilung definiert als die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_{naive} bei der jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{|\Omega|}$ hat.

□ **Bemerkung (Gleichverteilung)**

- Ist nur wohldefiniert für endliche Ergebnismengen Ω .
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \in \mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$P_{\text{naive}}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

□ **Beispiel 1.** Roulette

- $\Omega = \{ 0, 1, \dots, 36 \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{37}$ für alle $\omega \in \Omega$

□ **Beispiel 2.** Doppelwurf eines Spielwürfels

- $\Omega = \{ (1,1), (1,2), \dots, (6,6) \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$



Pierre-Simon Laplace
(1749 – 1827)



Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Gleichverteilung ist nicht gleich Gleichverteilung!

■ Beispiel. Zufällige Bitmuster

□ Ergebnismenge (3-bit):

$$- \Omega = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$

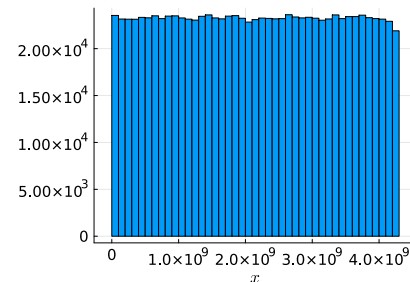
□ Gleichverteilung

$$- P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{8}$$

□ Was ist die Verteilung wenn man ein Ergebnis als Zahl interpretiert?

- **Ganzzahl:** Für $\omega = b_0 b_1 \dots b_{31} \in \Omega$, sei

$$x = \sum_{i=0}^{31} 2^i \cdot b_i$$



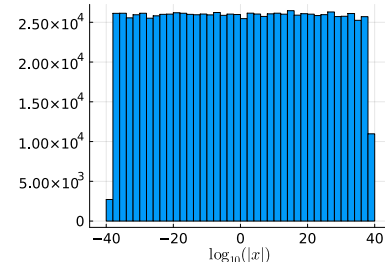
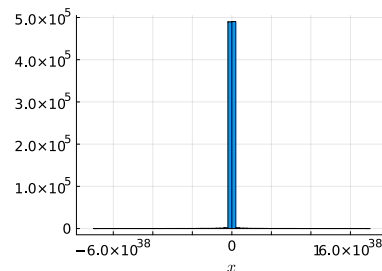
- **Gleitkommazahl:** Für $\omega = b_0 b_1 \dots b_{32} \in \Omega$, sei

$$x = (1 - 2 \cdot b_{31}) \cdot \left(1 + \sum_{j=0}^{22} b_j \cdot 2^{-(j+1)} \right) \cdot 2^{\left(\sum_{j=0}^7 b_{23+j} \cdot 2^j \right) - 127}$$

Vorzeichen

Mantisse

Exponent



Zufallsgeneratoren für gleichverteilte Zahlen

- **Aber:** Wie „berechnet“ man zufällige Zahlen im Computer?
- **Zwei** Lösungen:
 - **Physikalisch:** Wir messen ein physikalisches Phänomen das zufällig ist.
 1. Atmosphärisches Rauschen (Gewitter: ~40 Blitze/Sekunde weltweit)
 2. Thermisches Rauschen (Elektroschaltkreise; temperaturabhängig)
 3. Kosmisches Rauschen
 4. Radioaktive Strahlung
 - **Vorteil:** Echte Zufälligkeit
 - **Nachteil:** Kostspielige Sensorik die auf Quanteneffekten basieren und langsam sind
 - **Algorithmisch:** Pseudo-zufällige Sequenz, die deterministisch ist aber sich erst nach sehr vielen Beispielen wiederholt
 1. Lineare kongruente Generatoren: $x_{n+1} = (a \cdot x_n + c) \bmod m$
 - **Vorteil:** Unabhängig von physikalischer Zufälligkeit
 - **Nachteil:** Energieaufwendig und nur für endliche Folge von Zufallszahlen anwendbar



Karl Guthe Jansky
(1905 – 1950)



John Bertrand Johnson
(1887 – 1970)

Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Pseudozufallszahlen für Gleichverteilungen

■ Beispiel: Lineare Kongruente Generatoren

- Für große Ganzzahlen a, b und m und einen seed x_0

$$x_{n+1} = (a \cdot x_n + c) \bmod m$$

Modulus
Inkrement
Multplikator

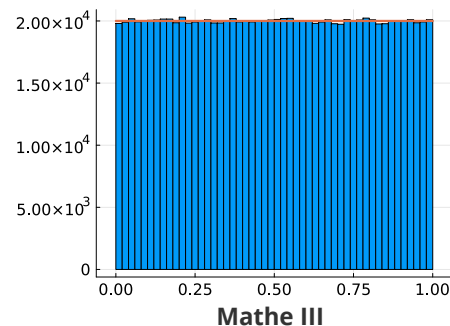
- **Mersenne Primzahl**

– $m = 2^{32} - 1$

System	m	a	c	Ausgabe
ZX81	$2^{16} + 1$	75	74	alle Bits
glibc	2^{31}	1103515245	12345	Bits 0 ... 30
C++ 11	$2^{31} - 1$	16807	0	alle Bits
Java	2^{48}	25214903917	11	Bits 16 ... 47



Marin Mersenne
(1588 – 1648)



Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

- **Achtung:** In einem linearen kongruenten Generator können nur rund $\sqrt[3]{m}$ viele echte Zufallszahlen generiert werden (für $m = 2^{31}$ sind das nur 1290 Zufallszahlen!)

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ -Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. **Counting Prinzip**
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
 - Numerische Approximation

Wiederholte Zufallsexperimente

- In der Praxis führen wir oft mehrere Experimente hintereinander aus.

- **Beispiel 1.** Doppelwurf eines Spielwürfels

- $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{6}$
- $\Omega_2 | \omega_1 = \{1, \dots, 6\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{6}$
- $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{36}$

- **Beispiel 2.** Zweifacher Griff in eine Urne mit 6 Kugeln ohne Zurücklegen

- $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{6}$
- $\Omega_2 | \omega_1 = \{1, \dots, 6\} \setminus \{\omega_1\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{5}$
- $\Omega = \{(1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,3), \dots, (6,5)\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{30}$

6	●	●	●	●	●	●
5	●	●	●	●	●	●
4	●	●	●	●	●	●
3	●	●	●	●	●	●
2	●	●	●	●	●	●
1	●	●	●	●	●	●
	1	2	3	4	5	6

Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

- **Definition (Counting Prinzip).** Wenn r Zufallsexperimente hintereinander ausgeführt werden und das erste Zufallsexperiment $n_1 = |\Omega_1|$ mögliche Ergebnisse hat und für jeden Ausgang des k -ten Zufallsexperiment das $k + 1$ -te Zufallsexperiment immer $n_{k+1} = |\Omega_{k+1}|$ mögliche Ergebnisse hat, dann haben die r Zufallsexperimente $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ mögliche Ergebnisse.
- **Beispiel 1.** Wir haben 400 Bachelorstudierende und 200 Masterstudierende. Der Fachschaftsrat besteht aus 3 Bachelorstudierenden und 2 Masterstudierenden. Wie viele mögliche Fachschaftsräte gibt es?
 - **Lösung:** $400 \cdot 399 \cdot 398 \cdot 200 \cdot 199 = 2\,528\,127\,840\,000$
- **Beispiel 2.** Ein Nummernschild besteht aus 7 Zeichen: die ersten drei sind Buchstaben und die letzten 4 Ziffern. Wie viele verschiedene Nummernschilder gibt es?
 - **Lösung:** $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$
- **Beispiel 3.** Wie viele Nummernschilder ohne sich wiederholende Zeichen gibt es?
 - **Lösung:** $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$



Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- **Beispiel.** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

- Modelliert als n aufeinanderfolgende Zufallsexperimente mit $\Omega_i = \{1, \dots, 365\}$

- Ergebnismenge aller n aufeinanderfolgende Zufallsexperimente:

- $\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$

- Ereignis, dass **keine** zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben:

- $A = \{(i_1, \dots, i_n) | i_j \in \{1, \dots, 365\} \wedge i_j \neq i_k \Leftrightarrow j \neq k\}$

- Besser modelliert als Sequenz von n Zufallsexperimenten

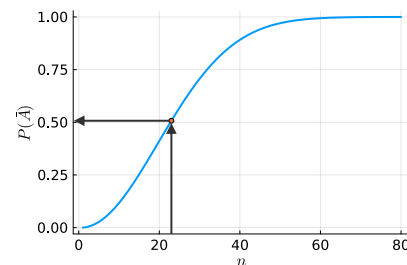
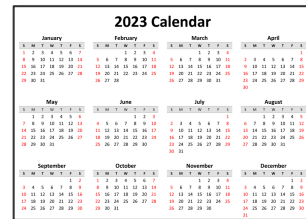
- $n_1 = 365$

- $n_2 = 364$

- $n_3 = 363, \dots$

- Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben

$$P_{\text{naive}}(\bar{A}) = 1 - P_{\text{naive}}(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} = 1 - \prod_{j=1}^n \frac{365 - j + 1}{365}$$



Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ -Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. **Permutationen, Variationen und Kombinationen**
 - Numerische Approximation

- **Problem:** Wir haben n Objekte und n Zufallsexperimente, wo wir jeweils eines der Objekte zufällig auswählen und aus der Menge entfernen. Wieviel verschiedene Ergebnisse gibt es bei den n Zufallsexperimenten?
 - **Bemerkungen**
 - Ist identisch zur Frage „wieviel verschiedene Anordnungen gibt es für n Objekte?“
 - Wurde schon von Jacob Bernoulli untersucht.
 - Kann mit dem *Counting* Prinzip ganz leicht gelöst werden.
- **Definition (Permutationen).** Für n Objekte gibt es genau $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ viele verschiedene Anordnungen die auch Permutation genannt werden.
 - **Beispiel 1.** In einem Seminar sind 6 Studenten und 4 Studentinnen die eine Klausur schreiben. Jeder schreibt eine andere Note. Wie viele Rankings nach Noten gibt es?
 - **Lösung:** $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$
 - **Beispiel 2.** Wenn man die Rankings der Studenten und Studentinnen separat betrachtet, wieviel Rankings gibt es dann (d.h., die Rankings zwischen Studenten und Studentinnen spielen keine Rolle)?
 - **Lösung:** $6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280$

Objekte: a, b, c

1. a, b, c

2. a, c, b

3. b, a, c

4. b, c, a

5. c, a, b

6. c, b, a

Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Variationen

- **Problem:** Wir haben n Objekte und $k < n$ Zufallsexperimente, wo wir jeweils eines der Objekte zufällig auswählen und aus der Menge entfernen. Wieviel verschiedene Ergebnisse gibt es bei den k Zufallsexperimenten?

- **Bemerkungen**

- Ist identisch zur Frage „wieviel verschiedene Variationen von k Objekten aus n Objekten gibt es, wenn die Reihenfolge der Auswahl einen Unterschied macht?“
- Kann mit dem *Counting* Prinzip ganz leicht gelöst werden.

- **Definition (Variationen).** Wenn man k Objekte aus $n > k$ Objekten mit Beachtung der Reihenfolge auswählt, ist die Anzahl der Variationen

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

- **Beispiel.** Wähle k eindeutige Tage aus 365 Tagen aus (Geburtstagsparadoxon)

- **Lösung:** $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1) = \frac{365!}{(365 - k)!}$

Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Kombinationen

- **Problem:** Wir haben n Objekte und $k < n$ Zufallsexperimente, wo wir jeweils eines der Objekte zufällig auswählen und aus der Menge entfernen. Wieviel verschiedene Ergebnisse gibt es bei den k Zufallsexperimenten, wenn es bei der Auswahl der k Objekte nicht darauf ankommt, *wann* sie ausgewählt wurden?

- **Bemerkungen**

- Ist identisch zur Frage „wieviel verschiedene Teilmengen der Größe k aus einer Menge der Größe n gibt es?“
- Kann mit Hilfe von Variationen und Permutationen ganz leicht gelöst werden.

- **Definition (Kombination).** Die Anzahl von eindeutigen Teilmengen der Größe k aus einer Menge der Größe n ist

Auswahl von k Objekten aus n Objekten

Anzahl Permutationen von k Objekten

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Gesprochen: „ n über k “ („ n choose k “)

Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Kombinationen: Beispiele

- **Beispiel 1.** Zur Wahl des Fachschaftsrats aus 5 Personen stehen 6 Studenten und 9 Studentinnen zur Wahl. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Fachschaftsrat aus 2 Studenten und 3 Studentinnen bestehen wird?

- Anzahl von möglichen Fachschaftsräten: $\binom{15}{5}$
- Anzahl von 2 Studenten aus 6 Studenten: $\binom{6}{2}$
- Anzahl von 3 Studentinnen aus 9 Studentinnen: $\binom{9}{3}$

$$P = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{60}{143} = 41.958\%$$

- **Beispiel 2.** Wie viele verschiedene Worte kann man aus STATISTICS formen?

- Ergebnisraum: Positionen der drei „S“, der drei „T“, der zwei „I“, des „A“ („C“ folgt dann)

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 50\,400$$

Positionen von „S“

Positionen von „T“

Positionen von „I“

Positionen von „A“

Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit



James Stirling
(1692 – 1770)

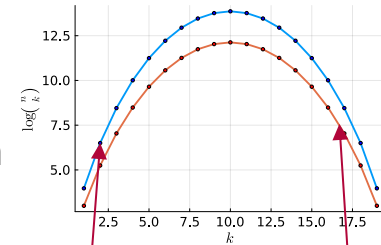
- **Beobachtung:** Fakultätsfunktion wächst sehr schnell durch Produktbildung!
 - **Aber:** Gleitkommadarstellung können aber nur Zahlen bis zu 380 Stellen darstellen!
- **Folge:** In der Praxis wird nur der Logarithmus von Wahrscheinlichkeiten gespeichert!
 - **Bemerkungen**
 - Aus Produkten werden Summen und aus Exponenten werden Produkte
 - Wir benötigen effiziente Approximation vom Logarithmus der Fakultätsfunktion

- **Satz (Stirling's Approximation).** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Approximation
$$\log(n!) = n \cdot \log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n))$$

- **Korollar.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt die folgende Approximation

$$\log\left(\binom{n}{k}\right) \approx n \cdot H\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$H(p) = -[p \cdot \log(p) + (1 - p) \cdot \log(1 - p)]$$



Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Approximation

Wahrer Wert

Stirling's Approximation: Herleitung

- **1. Schritt:** Logarithmus der Fakultät ist Summe der Logarithmen

$$\log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \log(1) + \log(2) + \dots + \log(n)$$

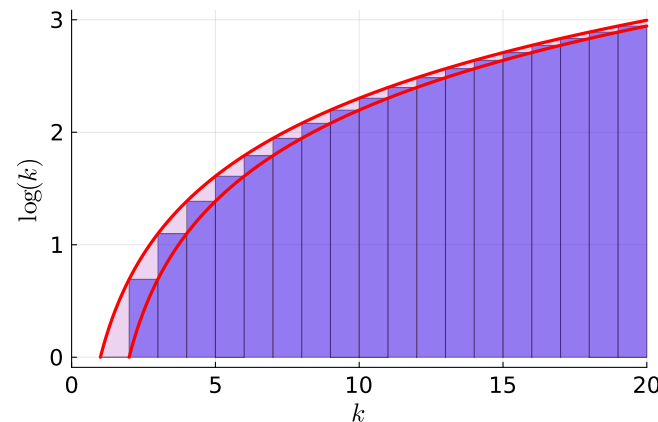
- **2. Schritt:** Rechtecke durch glatte Funktion approximieren

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^n \log(i) \approx \int_1^n \log(x) dx$$

- **3. Schritt:** Bestimmtes Integral berechnen

$$\int_1^n \log(x) dx = x \cdot \log(x) - x \Big|_1^n = n \cdot \log(n) - n + 1$$

- Genauere Approximation durch präzisere Integration



Mathe III

Unit 1b - Wahrscheinlichkeit

Stirling's Approximation

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!