Mathe III

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ralf Herbrich

Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

Überblick

Überblick

1. **Organisatorisches**
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
   - Numerische Approximation

Ziel

- **Mein Ziel**: Begeisterung und Verständnis für das Modellieren von zufälligen Ereignissen (Stochastik) und Entwickeln von Schätz- und Testverfahren (Statistik) zu entwickeln
  - Stochastik & Statistik hat enge Beziehung zu Künstlicher Intelligenz!

- **Lernziele**: Einführung in Grundlagen der Stochastik und Statistik
  1. Sie haben ein intuitives Verständnis für den Begriff der Wahrscheinlichkeit.
  2. Sie können Zufallsereignisse formal beschreiben.
  3. Sie können das Zusammenspiel von Ereignissen modellieren.
  4. Sie wissen, wann man welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen benutzt.
  5. Sie können statistische Tests entwickeln und durchführen.
  6. Sie können Daten praktisch analysieren und Schätzprozesse durchführen.

Format

- Ähnlich zu Mathe III in früheren Semestern
  - **2 Vorlesungen pro Woche**
    - Montag: 13:30 – 15:00 Uhr (HS1)
    - Donnerstag: 13:30 – 15:00 Uhr (HS1)
  - **1 Großübung pro Woche**
    - Mittwoch: 15:15 – 16:45 Uhr (HS1)
  - **1 Übungsblatt pro Woche pro Zweier-Gruppe** [insgesamt 12 Übungsblätter]
    - **Ausgabe**: Montag, 7:00 Uhr (Moodle) [ab 21. Oktober]
    - **Abgabe**: Montag in Folgewoche, 7:00 Uhr (Moodle)
    - **Bewertung**: In 30 Minuten Terminen mit Tutoren in der Folgewoche

- Mehr Details und alle Updates auf Moodle:
  - https://moodle.hpi.de/course/view.php?id=803

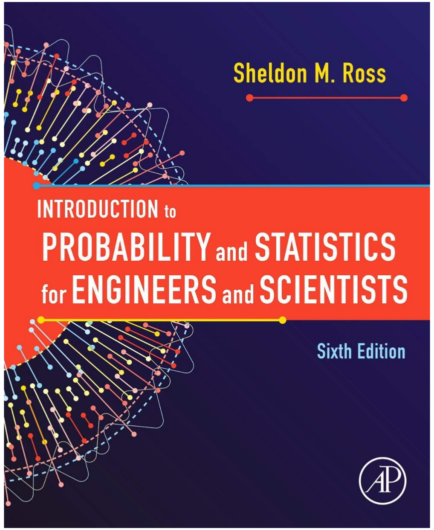
Klausur

- **Klausurzulassung**
  - 70% der Übungsblätter bestanden

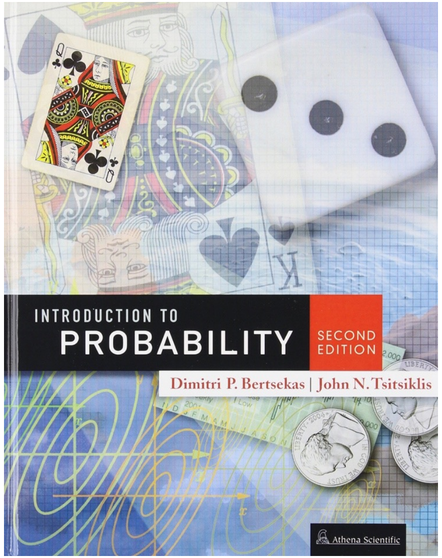
- **Klausurinhalte**
  - Verständnisfragen zu Stochastik & Statistik
  - Kurze/kleine Beweise (aus Vorlesung & Übung)
  - Rechenaufgaben

- **Klausurtermine**
  - Hauptklausur: Montag, **17. Februar 2025, 9:00 Uhr**

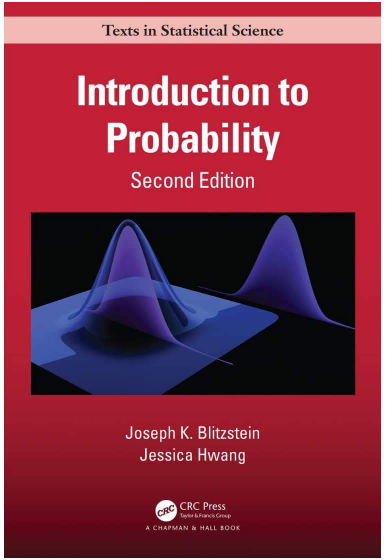
Literatur



Angewandt mit vielen Beispielen (PDF)



Größerer Fokus auf Stochastik mit vielen praktischen Beispielen (PDF)



Einschließlich auf Stochastik mit mathematischer Tiefe


Probability Theory and Statistics

An Introduction for Computer Scientists

Ralf Herbrich, Xiaoshi Liu, Nils Kasper, Bernhard Renard, and Rainer Schlosser

The MIT Press
Cambridge, Massachusetts
London, England

Skript

Überblick

1. Organisatorisches
2. **Wahrscheinlichkeitsbegriff**
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
   - Numerische Approximation

Was ist Wahrscheinlichkeit?

- **Wettervorhersage**: Ein Meteorologe sagt

  „Mit 60% Wahrscheinlichkeit regnet es morgen in Bangalore“

- **Zwei Interpretationen**:
  1. Der Meteorologe hat alle Regionen analysiert, deren Umgebungsbedingungen ähnlich zu der von Bangalore heute waren. Seine (**objektive**) *Schätzung* basierend auf den Daten ist, dass sein Verfahren, welches Regen vorhersagt, in 60% der Fälle korrekt ist.
  2. Der Meteorologe *glaubt*, dass es wahrscheinlicher ist, dass es morgen in Bangalore regnet als, dass es nicht regnet. 60% ist die Quantifizierung des (**subjektiven**) *Glaubens* des Meteorologen.

Frequentistische und Subjektive Interpretation

- **Frequentistische/Objektive Interpretation**
  - Wahrscheinlichkeit ist eine Eigenschaft des Ereignisses („es regnet“)
  - Kann operationalisiert werden durch wiederholtes Experiment
  - Typischerweise von Wissenschaftlern und Ingenieuren verwendet
- **Subjektivistische Interpretation**
  - Wahrscheinlichkeit ist ein Ausdruck des Glaubens (*belief*) der Person, welche die Aussage über das Ereignis macht („ich glaube, es regnet“)
  - Ist subjektiv und personenabhängig: Zwei Personen können bei identischer Datenlage unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten haben!
  - Kann durch Wetten operationalisiert werden
  - Typischerweise von Philosophen und Ökonomen verwendet

1. Wahrscheinlichkeit ist keine physikalische Größe sondern ein **Denkmodell** für Zufall!
2. Die Rechenregeln für Wahrscheinlichkeit sind **identisch** für beide Interpretationen!

Überblick

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. **Geschichte der Wahrscheinlichkeit**
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
   - Numerische Approximation

Geschichte der Wahrscheinlichkeit

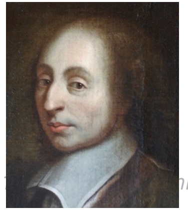
- **v. Chr.**:
  - Glücksspiele waren hochpopulär im alten Griechenland & Rom
  - Keine mathematische Analyse von Zufall (fehlende Algebra)

- **16. Jahrhundert**:
  - Girolamo Cardano veröffentlich erstes Buch über Methoden zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Würfel- und Kartenspielen

- **17. Jahrhundert**:
  - Pierre de Fermat und Blaise Pascal tauschen wichtige Fragen über Wahrscheinlichkeiten aus und motivieren erste wissenschaftliche Studien

Gerolamo Cardano
(1501 – 1575)

Pierre de Fermat
(1607 – 1665)



Blaise Pascal
(1623 – 1662)

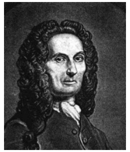
Geschichte der Wahrscheinlichkeit (ctd)

- **18. Jahrhundert**:
  - Jacob Bernoulli untersucht zufällige Münzwürfe und beweist das Gesetz der großen Zahlen
  - Thomas Bayes untersucht bedingte Wahrscheinlichkeiten und formuliert den Satz von Bayes
  - Abraham de Moivre führt die Normalverteilung ein und beweist den Grenzwertsatz

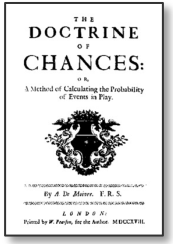
- **19. Jahrhundert**:
  - Carl Friedrich Gauss führt die Methode der kleinsten Quadrate ein und zeigt, dass Fehler normalverteilt sind
  - Pierre-Simon Laplace publiziert die *Théorie analytique des probabilités* in der er Wahrscheinlichkeit und Statistik zusammenführt und Hypothesentests einführt

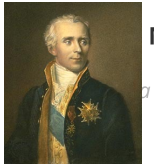
Jacob Bernoulli
(1655 – 1705)

Thomas Bayes
(1701 – 1761)

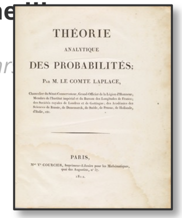


Abraham de Moivre
(1667 – 1754)





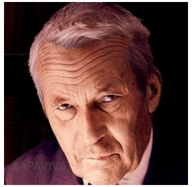
Pierre-Simon Laplace
(1749 – 1827)



Geschichte der Wahrscheinlichkeit (ctd)

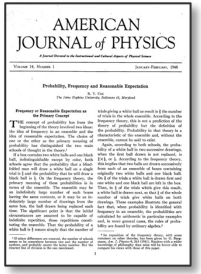
- **20. Jahrhundert**:
  - Andrey Kolmogorov führt Axiome ein, die Wahrscheinlichkeiten unabhängig von relativen Häufigkeiten erklären (Grundlage der frequentistischen Interpretation)
  - Richard Threlkeld Cox führt Axiome ein, die Wahrscheinlichkeiten als Grad des Glaubens (*degree of belief*) erklären (Grundlage der subjektiven Interpretation)

- **21. Jahrhundert**:
  - Vladimir Vapnik führt Wahrscheinlichkeit als die Basis für die Theorie des maschinellen Lernens ein
  - Judea Pearl und Phil Dawid führen graphische Modelle ein, die es erlauben mit Wahrscheinlichkeitstheorie komplexe und kausale Prozesse zu formulieren und zu operationalisieren
  - Wahrscheinlichkeit und Statistik ist nicht mehr aus modernen Wissenschaften wegzudenken



Andrey Kolmogorov
(1903 – 1987)

Richard Threlkeld Cox
(1898 – 1991)



Vladimir Vapnik
(1936 –)

Judea Pearl
(1936–)

Philip Dawid
(1946–)

Überblick

Zufallsexperimente und Ergebnisse (*samples*)

- Wenn wir Zufall mathematisch beschreiben, gehen wir immer von einem **Zufallsexperiment** aus
  - Ist möglicherweise ein fiktives Experiment, welches wir nur zur Modellierung benutzen.
  - Ein Zufallsexperiment hat mehrere mögliche Ergebnisse (*outcomes*).
  - Wir benutzen Mengen(theorie) um Ergebnisse formal zu beschreiben.

- **Definition (Ergebnismenge).** Die Menge aller möglichen Ausgänge $\Omega \neq \emptyset$ eines Zufallsexperiments nennt man Ergebnismenge (*sample space*).

- **Bemerkung (Ergebnismenge)**
  - Die Ergebnismenge Ω wird auch Ergebnisraum oder Stichprobenraum genannt.
  - Die Ergebnisse $\omega \in \Omega$ werden auch Stichproben (*samples*) genannt.
  - Die Ergebnisse eines Zufallsversuchs müssen sich gegenseitig ausschließen.

Ergebnismenge: Beispiele

- **Beispiel 1**. Sichtbare Augenzahl nach Wurf mit einem Würfel
  - $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- **Beispiel 2**. Dauer einer Partie Schach in Sekunden
  - $\Omega = \mathbb{N}$
- **Beispiel 3**. Code eines vierstelligen Zahlenschlosses
  - $\Omega = \{(a, b, c, d) | 0 \leq a \leq 9 \wedge 0 \leq b \leq 9 \wedge 0 \leq c \leq 9 \wedge 0 \leq d \leq 9\} \subset \mathbb{N}^4$
- **Beispiel 4**. Positionen im Ziel beim Rennen von 7 Rennpferden
  - $\Omega = \left\{(i_1, i_2, \dots, i_7) | \forall j \in \{1, \dots, 7\}: \forall k \in \{1, \dots, 7\}: i_j \in \{1, \dots, 7\} \wedge i_j \neq i_k \Leftrightarrow j \neq k\right\}$
- **Beispiel 5**. Wetter in Potsdam Babelsberg
  - $\Omega = \{\text{Sonne}, \text{Wolken}, \text{Regen}\}$
  - **Problem**: Wolken und Regen schließen sich nicht aus, genauso wenig wie Sonne und Wolken, oder Sonne und Regen.

Angemessene Ergebnismenge

- Angemessene (*appropriate*) Ergebnismenge hängt oft von den Fragen ab, die wir modellieren wollen
  - **Bemerkung**. Ergebnismenge sollte immer so klein als möglich gewählt werden
- **Beispiel**. Zehn zufällige Münzwürfe
  - **Szenario 1**: Wir bekommen €1 jedes Mal wenn die Münze Kopf zeigt und wollen wissen, wieviel Profit wir in zehn zufälligen Münzwürfen machen.
    - Die Reihenfolge der Münzwürfe **spielt keine** Rolle für den Ausgang des Experiments und nur die totale Summe der Anzahl Münzen, die Kopf zeigen, ist relevant!
  - **Szenario 2**: Wir bekommen €1 für jeden Münzwurf bis die Münze Kopf zeigt, ab dann €2 für jeden Münzwurf bis die Münze wieder Kopf zeigt, ab dann €4 für jeden Münzwurf bis die Münze Kopf zeigt (und so weiter) und wollen wissen, wieviel Profit wir in zehn zufälligen Münzwürfen machen.
    - Die Reihenfolge der Münzwürfe **spielt** eine Rolle für den Profit nach 10 Münzwürfen!

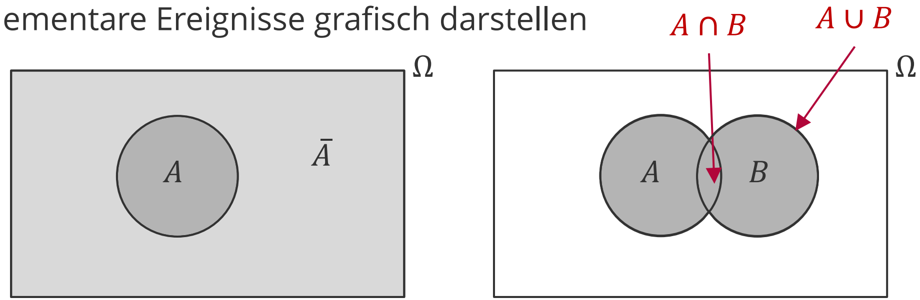
Ereignisse (*events*)

- **Definition (Ereignis).** Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist eine **Teilmenge der Ergebnismenge $\boldsymbol{\Omega}$**, d.h. eine gemeinsame Betrachtung eines oder mehrerer Ergebnisse.

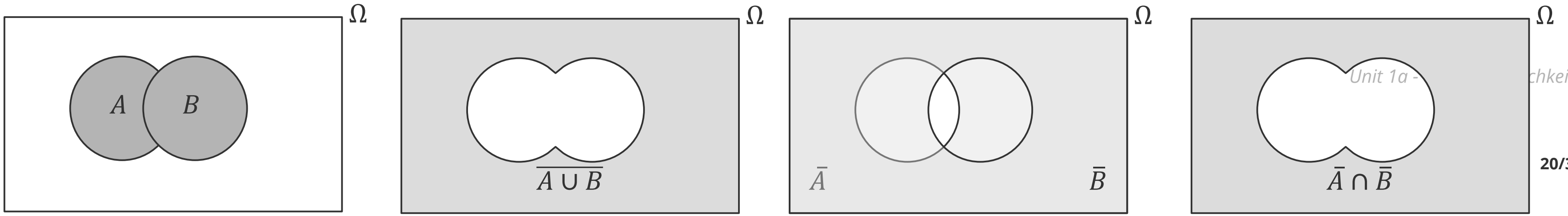
  - **Beispiel 1**. Sichtbare Augenzahl nach Wurf mit einem Würfel ist gerade
    - $A = \{ 2, 4, 6 \} \subset \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
  - **Beispiel 2**. Partie Schach dauert mehr als eine Stunde
    - $A = \{ s \in \mathbb{N} \mid s > 3600 \} \subset \mathbb{N}$
  - **Beispiel 3**. Code eines vierstelligen Zahlenschlosses hat vier gleiche Ziffern
    - $A = \{ (a, b, c, d) \mid 0 \leq a, b, c, d \leq 9 \land a = b = c = d \} \subset \{ (a, b, c, d) \mid 0 \leq a, b, c, d \leq 9 \}$
  - **Beispiel 4**. Positionen im Ziel beim Rennen von 7 Rennpferden wobei Pferd 2 gewinnt
    - $A = \left\{(2, i_2, \ldots, i_7) \middle| \forall j \in \{2, \ldots, 7\}: i_j \in \{1,3,4,5,6,7\} \land i_j \neq i_k \Leftrightarrow j \neq k\right\} \subset$ $\left\{(i_1, i_2, \ldots, i_7) \middle| \forall j \in \{1, \ldots, 7\}: i_j \in \{1, \ldots, 7\} \land i_j \neq i_k \Leftrightarrow j \neq k\right\}$

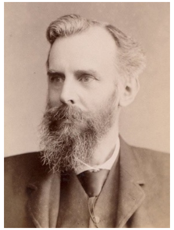
Darstellung von Ereignissen: Venn Diagramme

- **Definition (Venn Diagramm)**. Hilfreiche Weisen, Mengen und die Ergebnisse von Mengenoperationen darzustellen, indem einzelne Mengen als Kreise oder Ellipsen dargestellt werden.
  - **Anwendung**: Elementare Ereignisse grafisch darstellen



  - **Anwendung**: Geometrische Beweise führen (z.B. De-Morgan'sches Gesetz $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$)

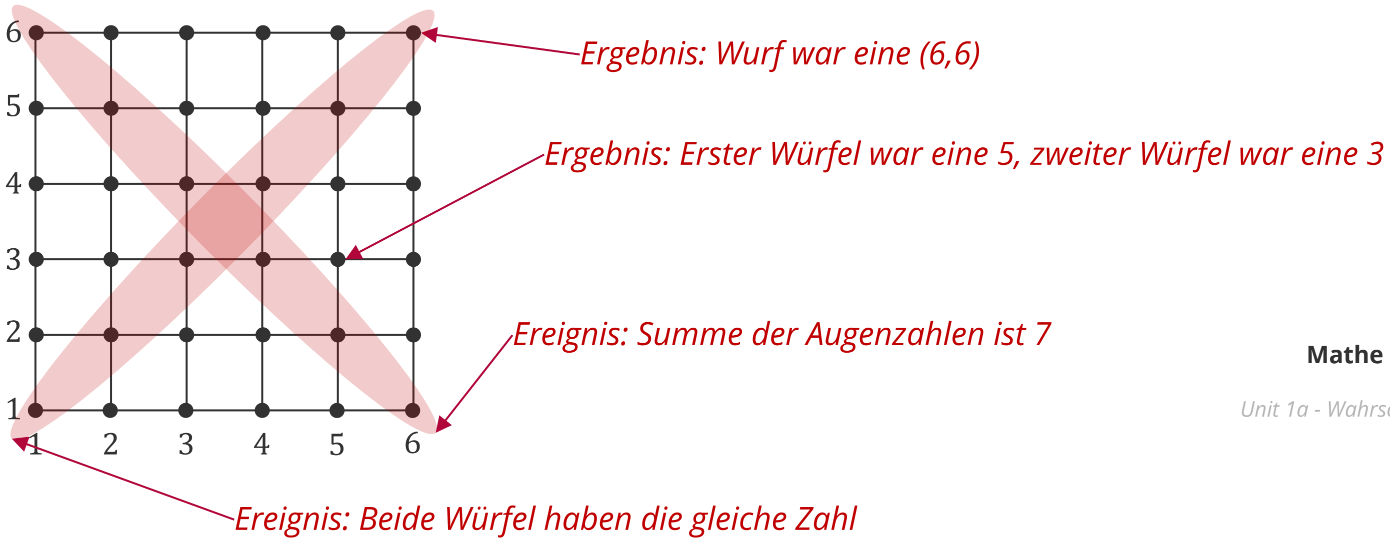




John Venn
(1834 – 1923)

Darstellung von Ereignissen: Punktwolkendiagramme

- **Definition (Punktwolkendiagramm).** Wenn das Zufallsexperiment im $\mathbb{N}^2$ liegt, kann man die Ergebnisse (*samples*) auch als Punkte darstellen und Ereignisse als Punktwolken.
  - **Beispiel.** Sichtbare Augenzahl nach Wurf mit zwei Würfeln



Ereignissystem

- Wir wollen jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.
  - Ist nur möglich wenn wir (maximal) **abzählbar unendlich** viele Ereignisse haben.
  - Aus diesem Grund beschränken wir unsere Ereignisse auf ein **Ereignissystem**.

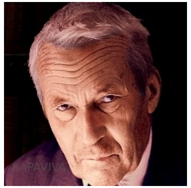
- **Definition (Ereignissystem).** Ein Ereignissystem $\mathcal{F}$ zur Ergebnismenge Ω ist eine Menge von Teilmengen von Ω, wobei gilt:
  1. **Abschluss unter sicherem Ereignis**: $\Omega \in \mathcal{F}$
  2. **Abschluss unter dem Komplement**: $\forall A \in \mathcal{F} : \bar{A} \in \mathcal{F} \; (\bar{A} := \Omega \setminus A)$
  3. **Abschluss unter abzählbarer Vereinigung**: $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{F} : A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

  Wir bezeichnen $\Omega \in \mathcal{F}$ als das **sichere Ereignis** und $\emptyset \in \mathcal{F}$ als **unmögliches Ereignis**.

- **Bemerkung (σ-Algebra).** Ein Ereignissystem wird auch **σ-Algebra** genannt.

Wahrscheinlichkeitsraum

- **Definition (Wahrscheinlichkeitsraum).** Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bestehend aus
  - einer Ergebnismenge Ω,
  - einem Ereignissystem $\mathcal{F}$ und
  - einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P\colon \mathcal{F} \mapsto [0{,}1]$ mit folgenden drei Eigenschaften:
    1. **Nicht-Negativität**: Für alle $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$.
    2. **σ-Additivität**: Für alle $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
    $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$
    3. **Normierung**: $P(\Omega) = 1$.
  - **Bemerkung (Wahrscheinlichkeitsverteilung)**
    - Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird auch als Wahrscheinlichkeitsmaß oder kurz als Verteilung bezeichnet.
    - Die drei Regeln 1. – 3. sind die sogenannten Kolmogorov-Axiome



Andrey Kolmogorov (1903 – 1987)

Beispiel eines Wahrscheinlichkeitsraums

- **Beispiel**. Wahrscheinlichkeitsraum für den Wurf einer fairen Münze
  - **Ergebnismenge**:
    - $\Omega = \{\, \text{Kopf}, \text{Zahl} \,\}$
  - **Mögliches Ereignissystem**:
    - $\mathcal{F} = \{\, \emptyset, \{\, \text{Kopf} \,\}, \{\, \text{Zahl} \,\}, \{\, \text{Kopf}, \text{Zahl} \,\} \,\}$
  - **Wahrscheinlichkeitsverteilung**:
    - $P(\emptyset) = 0$
    - $P(\{\, \text{Kopf} \,\}) = P(\{\, \text{Zahl} \,\}) = 0.5$
    - $P(\{\, \text{Kopf}, \text{Zahl} \,\}) = 1$

Überblick

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. **Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen**
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
   - Numerische Approximation

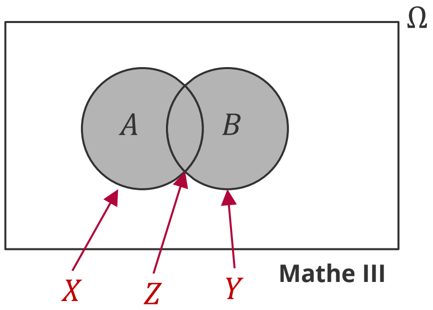
Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- **Satz (Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses).** Für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$
  - **Beweis**: Für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt, $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Nach 2. und 3. folgt
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Kolmogorov Axiome

1. Für alle $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Für alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ gilt
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
3. Es gilt $P(\Omega) = 1$

- **Korollar (Wahrscheinlichkeit der leeren Menge).** Es gilt $P(\emptyset) = 0$.
  - **Beweis**: Benutze $A = \Omega \in \mathcal{F}$ im vorherigen Satz und 3.



- **Satz (Endliche Additivität).** Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
  - **Beweis**: Sei $Z = A \cap B, X = A \setminus Z, Y = B \setminus Z$. Dann gilt $X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ und $A = X \cup Z$ und $B = Y \cup Z$. Daher gilt
$$P(A) = P(X) + P(Z)$$
$$P(B) = P(Y) + P(Z)$$
$$P(A \cup B) = P(X) + P(Y) + P(Z) = P(A) + P(B) - P(Z)$$

Beispiel für endliche Additivität

- **Beispiel**. Raucher in Nevada
  - **Szenario**: 28 Prozent aller Einwohner in Nevada rauchen Zigaretten, 6 Prozent aller Einwohner in Nevada rauchen Zigarre, und 3 Prozent aller Einwohner in Nevada rauchen Zigarre und Zigarette. Wie groß ist der Prozentsatz von Einwohnern in Nevada, die nicht rauchen?
  - **Ergebnismenge**:
    - $\Omega = \{1,2,\ldots,3104614\}$ (eindeutige Zahl für jeden Einwohner in Nevada)
  - **Zwei Ereignisse**:
    - $A = \{i \in \Omega | \text{Person } i \text{ raucht Zigarette}\}$
    - $B = \{i \in \Omega | \text{Person } i \text{ raucht Zigarre}\}$
  - **Lösung**:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - [0.28 + 0.06 - 0.03] = 0.69$$

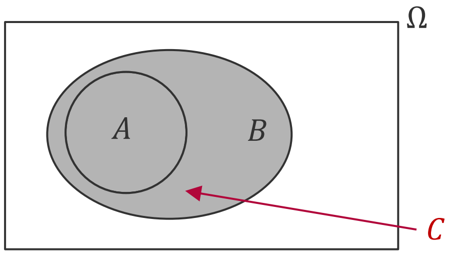
Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten (ctd)

- **Satz (Monotonie)**. Zusätzliche Ergebnisse können die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht mindern, d. h. wenn $A \subseteq B$, dann ist $P(A) \leq P(B)$.
  - **Beweis**: Sei $C = B \setminus A$. Dann gilt $A \cap C = \emptyset$ und $B = A \cup C$. Aus 1. und 2. folgt
$$P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) \geq P(A)$$

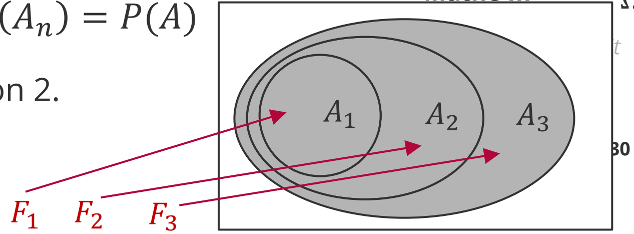
Kolmogorov Axiome

1. Für alle $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ gilt
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
3. Es gilt $P(\Omega) = 1$

- **Satz (*Union Bound*)**. Die Vereinigung zweier Ereignisse tritt höchstens mit der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse ein
$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$
  - **Beweis**: Folgt direkt aus $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ und 1. für $P(A \cap B)$.



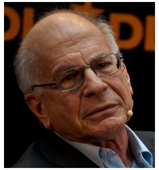
- **Satz (σ-Stetigkeit)**. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen, für die für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A_i \subseteq A_{i+1}$. Sei zudem $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Dann ist $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$
  - **Beweis**: Definiere $F_1 = A_1$ und $F_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$. Dann gilt aufgrund von 2.
$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$



Beispiel: Linda-Problem

- **Szenario**: *Linda is 31 years old, single, outspoken, and very bright. She majored in philosophy. As a student, she was deeply concerned with issues of discrimination and social justice, and also participated in anti-nuclear demonstrations. Which is more probable?*
  - *a) Linda is a bank teller.*
  - *b) Linda is a bank teller and is active in the feminist movement.*

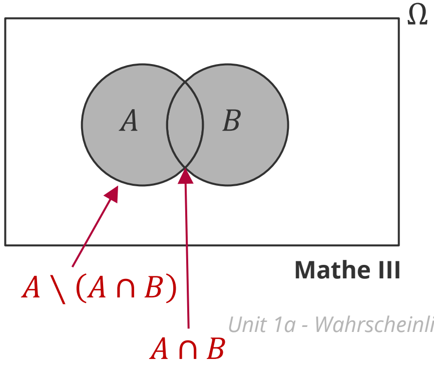
Amos Tversky (1937 – 1996)



Daniel Kahneman (1934 – 2024)

- **Ergebnismenge**:
  - $\Omega = \{\text{alle Singles die 31 Jahre alt sind und Linda heißen}\}$
- **Zwei Ereignisse**:
  - $A = \{i \in \Omega | \text{Person } i \text{ ist Bankangestellte }\}$
  - $B = \{i \in \Omega | \text{Person } i \text{ ist aktiv in der Frauenbewegung }\}$
- **Lösung**:

$$P(A) = P(A \cap B) + P\big(A \setminus (A \cap B)\big) \geq P(A \cap B)$$



Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 84-98). Cambridge: Cambridge University Press.

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!