Mathe III

Ralf Herbrich

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen

Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

Überblick

Überblick

Stochastische Unabhängigkeit von 2 Ereignissen

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit**: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A, wenn das Eintreten des Ereignisses B bekannt ist,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Stochastische Unabhängigkeit**: Falls diese bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist, bevor wir vom Eintreten von B wussten, dann ist A stochastisch unabhängig von B (und umgekehrt).

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

mit $P(B)$ auf beiden Seiten multiplizieren

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Satz (Symmetrie)**: Falls $P(A|B) = P(A)$ dann ist auch $P(B|A) = P(B)$.
  - **Beweis**. Für alle A so dass $P(A) > 0$ gilt

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\underbrace{\frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}}_{P(B|A)} = P(B)$$

Stochastische Unabhängigkeit von 2 Ereignissen

- **Definition (Stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse).** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Wir nennen A und B stochastisch unabhängig bezüglich P genau dann, wenn
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
- **Beispiel (Stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse).** Wir werfen zwei faire Würfel. Betrachte das Ereignis $A =$ "Der erste Würfel zeigt eine 6" und das Ereignis $B =$ "Der zweite Würfel zeigt eine 6". Sind A und B stochastisch unabhängig?
  - Für $P(A \cap B)$ gilt:
$$P(A \cap B) = P_{\text{naive}}(\{\,(6,6)\,\}) = \frac{1}{36}$$
  - Für $P(A)$ und $P(B)$ gilt:
$$P(A) = P_{\text{naive}}(\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\,\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = P_{\text{naive}}(\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\,\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
  - Also gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$!

Stochastische Unabhängigkeit von 2 Ereignissen

- **Beispiel (Stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse)**. Wir werfen zwei faire Würfel. Betrachte das Ereignis $A =$ "Der erste Würfel zeigt eine 6" und das Ereignis $C =$ "Die Würfel zeigen eine Summe von 7". Sind A und C stochastisch unabhängig?
  - Für $P(A)$ und $P(C)$ gilt:

$$P(A) = P_{\text{naive}}(\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = P_{\text{naive}}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

  - Für $P(A \cap C)$ gilt:

$$P(A \cap C) = P_{\text{naive}}(\{(6,1)\}) = \frac{1}{36}$$

  - Also gilt $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$!

Stochastische Unabhängigkeit von 2 Ereignissen

- **Beispiel (Stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse)**. Wir werfen zwei faire Würfel. Betrachte das Ereignis $B =$ "Der zweite Würfel zeigt eine 6" und das Ereignis $C =$ "Die Würfel zeigen eine Summe von 7". Sind B und C stochastisch unabhängig?
  - Für $P(B)$ und $P(C)$ gilt:

$$P(B) = P_{\text{naive}}(\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = P_{\text{naive}}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

  - Für $P(B \cap C)$ gilt:

$$P(B \cap C) = P_{\text{naive}}(\{(1,6)\}) = \frac{1}{36}$$

  - Also gilt $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$!

Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

- **Definition (Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse)**. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $F \subseteq \mathcal{F}$ eine Familie von Ereignissen mit $F \neq \emptyset$. Wir nennen F stochastisch unabhängig bezüglich P genau dann, wenn für jede endliche Teilfamilie $E \subseteq F$ mit $E \neq \emptyset$ gilt, dass

$$P\left(\bigcap_{M \in E} M\right) = \prod_{M \in E} P(M)$$

- **Bemerkung (Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse)**
  - Wenn die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stochastisch unabhängig sind, dann ist A_1 auch unabhängig von allen Mengen, die man aus $A_2, \ldots, A_n$ bilden kann!
  - Im Besonderen gilt: Wenn A stochastisch unabhängig von B ist, dann ist A auch stochastisch unabhängig von $\bar{B}$.
  - Wenn zwei Ereignisse A und B mit je positiver Wahrscheinlichkeit eine leere Schnittmenge haben, dann sind A und B stochastisch abhängig, da

$$0 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

- **Beispiel (Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse).** Wir werfen zwei faire Würfel und betrachten nun die drei Ereignisse

$$A = \text{“Der erste Würfel zeigt eine 6”}$$
$$B = \text{“Der zweite Würfel zeigt eine 6”}$$
$$C = \text{“Die Würfel zeigen eine Summe von 7”}$$

- Sind die drei Ereignisse $F = \{A, B, C\}$ unabhängig?
  - Wir wissen aus den vorherigen Beispielen dass

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

  - Aber

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

  - **Wir sehen**: Auch wenn A, B und C paarweise unabhängig sind, so ist die Ereignisfamilie F dennoch nicht stochastisch unabhängig!

Simpson Paradox

- **Beispiel (Simpson Paradox)**. Zwei Chirurgen (Dr. Hibbert und Dr. Nick) nehmen 100 Operationen (OPs) mit zwei Typen von OPs an Patienten vor (Herz-OP und Platzwunden nähen). Für beide OPs hat Dr. Hibbert die höhere Erfolgsquote.
- Wenn man allerdings die Form der Operation ignoriert, dann zeigt sich ein anderes Bild!

$$P(\text{Erfolg}|\text{Dr. Nick}) = \frac{83}{100} > \frac{80}{100} = P(\text{Erfolg}|\text{Dr. Hibbert})$$

- **Was passiert hier** und **wie ist das möglich**?

$A = \text{“OP erfolgreich”}, \qquad B = \text{“Dr. Nick operiert”}, \qquad C = \text{“Die OP ist eine Herz} - \text{OP”}$

$$\boxed{P(A|B)} = \boxed{P(A|B,C)} \cdot P(C|B) + \boxed{P(A|B,\bar{C})} \cdot P(\bar{C}|B)$$
$$\vee \qquad\qquad \wedge \qquad\qquad \wedge$$
$$\boxed{P(A|\bar{B})} = \boxed{P(A|\bar{B},C)} \cdot P(C|\bar{B}) + \boxed{P(A|\bar{B},\bar{C})} \cdot P(\bar{C}|\bar{B})$$

Variieren stark!
$P(\bar{C}|B) = 10\%$
$P(\bar{C}|\bar{B}) = 90\%$

$P(A|\bar{B},C) = \frac{7}{9} \approx 77.8\%,$ $\quad P(A|\bar{B},\bar{C}) = 100\%$

	Herz-OP	Platzwunde
Erfolg	70	10
Misserfolg	20	0

Dr. Hibbert

	Herz-OP	Platzwunde
Erfolg	2	81
Misserfolg	8	9

Dr. Nick

Simpson Paradox in der Praxis

- **Gender Diskriminierung an US Colleges**. Zulassungen 1973 Berkley

Männer		Frauen		Total	
Bewerber	Zugelassen	Bewerber	Zugelassen	Bewerber	Zugelassen
8442	44%	4321	35%	12763	41%

- Aufgliederung nach Fakultäten A, B und C zeigte umgekehrtes Bild!

	Männer		Frauen		Total	
	Bewerber	Zugelassen	Bewerber	Zugelassen	Bewerber	Zugelassen
A	825	62%	108	82%	933	64%
B	560	63%	25	68%	585	63%
C	417	33%	375	35%	792	34%

Frauen haben sich an Fakultäten beworben bei denen es schwerer war, angenommen zu werden!

Prosecutors Fallacy: Sally Clark

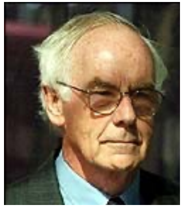
- 1998 wurde Sally Clark des Mordes an ihren beiden Babies angeklagt, die beide am "plötzlichen Kindstod" (*sudden infant death syndrom*) in den beiden Jahren zuvor gestorben waren.
- Ein Kinderarzt, Sir Samuel Roy Meadow, war Zeuge und argumentierte, dass die Wahrscheinlichkeit für einen plötzlichen Kindstod ${}^{1}/_{8500}$ ist und daher die Wahrscheinlichkeit, das zwei Kinder am plötzlichen Kindstod sterben ${}^{1}/_{8500^2} = {}^{1}/_{72\,250\,000}$ ist. Daraufhin wurde Sally Clark des Mordes verurteilt.
- **Was sind die Fehler?**
  1. Plötzlicher Kindstod kann genetisch bedingt sein und damit sind die Ereignisse "erstes Baby stirbt" und "zweites Baby stirbt" nicht unabhängig!
  2. Der Satz von Bayes wurde falsch angewandt

$$P(\text{unschuldig}|\text{Kindstod}) = \frac{P(\text{Kindstod}|\text{unschuldig}) \cdot P(\text{unschuldig})}{P(\text{Kindstod}|\text{unschuldig}) \cdot P(\text{unschuldig}) + \boxed{P(\text{Kindstod}|\text{schuldig}) \cdot P(\text{schuldig})}}$$

≈ 0

- **Ausgang**:
  - Sally Clark wurde nach 3 Jahren freigesprochen aber begang 4 Jahre später Selbstmord
  - Über 100 Fälle, in denen Roy Meadow Zeuge war, wurden neu bewertet.

Sally Clark



Sir Roy Meadows

Überblick

1. Bedingte Wahrscheinlichkeit
2. Satz von Bayes
3. Stochastische Unabhängigkeit
4. **Mehrstufige Modelle**

Beispiel für ein mehrstufiges Zufallsexperiment

- **Beispiel (Mehrstufiges Zufallsexperiment).** Für die 3 Erstplatzierten eines Radrennens werden Fahrradklingeln verschenkt. Hierfür dürfen die Gewinner eine Fahrradklingel verdeckt aus einer Urne ziehen. Es gibt eine schwarze, eine rote und eine goldene Klingel in der Urne. Der Erstplatzierte darf als erstes ziehen, darauf folgt der Zweit- und schließlich der Drittplatzierte.

  Wer erhält am Ende welche Farbe?
  - **Wie können wir dieses Experiment formal abbilden?**
    - Als Ergebnismenge für jedes Teilexperiment gilt $\Omega_k = \{\mathrm{blau}, \mathrm{rot}, \mathrm{gold}\}$ für $1 \leq k \leq 3$.
    - Als Ergebnismenge für das gesamte Experiment ergibt sich $\Omega = \{\mathrm{blau}, \mathrm{rot}, \mathrm{gold}\}^3$.
  - **Wie berechnen wir hier Wahrscheinlichkeiten?**
    - Wir bezeichnen $P_{k|\omega_1,\ldots,\omega_{k-1}}: \Omega_k \to [0,1]$ als die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das k-te Teilexperiment, wobei die Ergebnisse $\omega_1 \ldots \omega_{k-1}$ bereits bekannt sind.
    - Dann gilt: $P(\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_{2|\omega_1}(\{\omega_2\}) \cdot P_{3|\omega_1,\omega_2}(\{\omega_3\})$

Wahrscheinlichkeitsverteilung im mehrstufigen Modell

- **Satz (Gesamtwahrscheinlichkeit in mehrstufigen Modellen).** Gegeben ein mehrstufiges Modell aus n Teilexperimenten mit Ergebnismenge Ω und Ereignissystem $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P für das Gesamtexperiment eindeutig beschrieben werden kann, für alle $1 \leq k \leq n$, für jedes Ergebnis $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, mit:

$$P(\{\,\omega\,\}) = \prod_{k=1}^{n} P_{k|\omega_1,\ldots,\omega_{k-1}}(\{\,\omega_k\,\}) = P_1(\{\,\omega_1\,\}) \cdot P_{2|\omega_1}(\{\,\omega_2\,\}) \cdot \ldots \cdot P_{n|\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}}(\{\,\omega_n\,\})$$

- **Beispiel (Mehrstufiges Zufallsexperiment)**
  - $P_1 \colon \{\,\text{blau}\,\} \mapsto \frac{1}{3}, \{\,\text{rot}\,\} \mapsto \frac{1}{3}, \{\,\text{gold}\,\} \mapsto \frac{1}{3}$
  - $P_{2|\text{blau}} \colon \{\,\text{blau}\,\} \mapsto 0, \{\,\text{rot}\,\} \mapsto \frac{1}{2}, \{\,\text{gold}\,\} \mapsto \frac{1}{2}$
  - $P_{2|\text{rot}} \colon \{\,\text{blau}\,\} \mapsto \frac{1}{2}, \{\,\text{rot}\,\} \mapsto 0, \{\,\text{gold}\,\} \mapsto \frac{1}{2}$
  - $P_{2|\text{gold}} \colon \{\,\text{blau}\} \mapsto \frac{1}{2}, \{\,\text{rot}\,\} \mapsto \frac{1}{2}, \{\,\text{gold}\,\} \mapsto 0$
  - $P_{3|\text{blau,rot}} \colon \{\,\text{blau}\,\} \mapsto 0, \{\,\text{rot}\,\} \mapsto 0, \{\,\text{gold}\,\} \mapsto 1$

Multiplikationsformel

- **Satz (Multiplikationsformel).** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ Ereignisse. Dann gilt

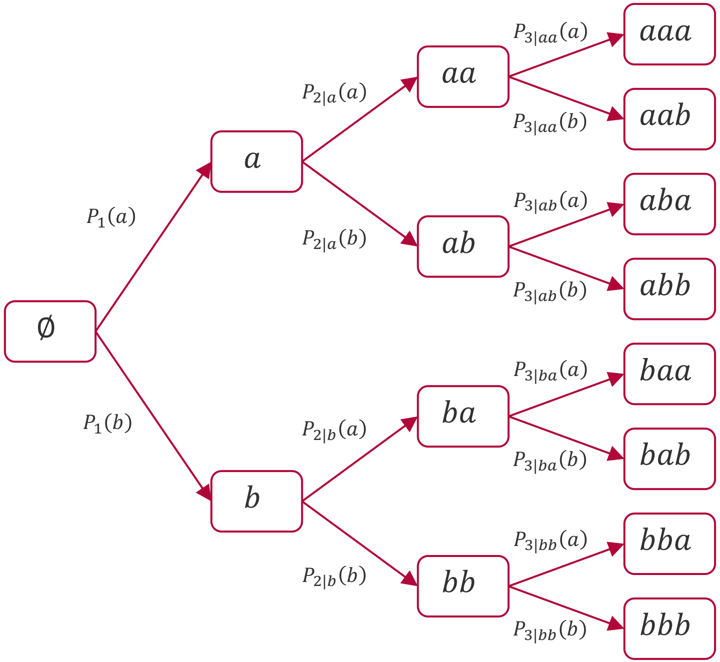
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \middle| \cap_{l=1}^{k-1} A_l\right)$$

- **Beispiel (Mehrstufiges Zufallsexperiment).** Wie wahrscheinlich ist es, dass der Erstplatzierte die rote, der Zweitplatzierte die blaue und der Drittplatzierte die goldene Klingel zieht?

$$P(\{\,(\mathrm{rot}, \mathrm{blau}, \mathrm{gold})\,\}) = P_1(\{\,\mathrm{rot}\,\}) \cdot P_{2|\mathrm{rot}}(\{\,\mathrm{blau}\,\}) \cdot P_{3|\mathrm{rot,blau}}(\{\,\mathrm{gold}\,\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Mehrstufige Modelle als Baumdiagramm

- Mehrstufige Modelle lassen sich anschaulich als Baumdiagramm darstellen.



Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Produkt entlang der Kanten des Baumdiagramms.

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!