Mathe III

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ralf Herbrich

Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

Überblick

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
   - Numerische Approximation

Überblick

Zur Erinnerung: Wahrscheinlichkeitsraum

- **Definition (Wahrscheinlichkeitsraum).** Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bestehend aus
  - einer Ergebnismenge Ω,
  - einem Ereignissystem $\mathcal{F}$ und
  - einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $P: \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ mit folgenden drei Eigenschaften:
    1. **Nicht-Negativität**: Für alle $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$.
    2. **σ-Additivität**: Für alle $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
    $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$
    3. **Normierung**: $P(\Omega) = 1$.

Laplace'sche Gleichverteilung

- **Problem**: Wie definiert man in der Praxis eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- **Idee**: Wähle den Ereignisraum so dass jedes Ergebnis die gleiche Chance hat.
- **Definition (Laplace'sche Gleichverteilung)**. Gegeben eine Ergebnismenge Ω ist die Gleichverteilung definiert als die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_{naive} bei der jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{|\Omega|}$ hat.
  - **Bemerkung (Gleichverteilung)**
    - Ist nur wohldefiniert für endliche Ergebnismengen Ω.
    - Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \in \mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{P}_{\mathrm{naive}}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

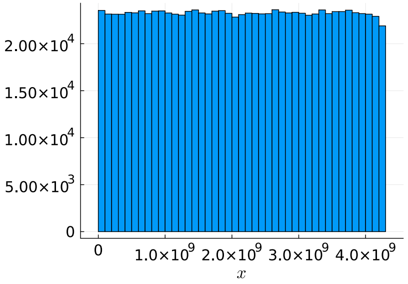
  - **Beispiel 1**. Roulette
    - $\Omega = \{\, 0,1, \dots, 36 \,\}, P_{\mathrm{naive}}(\omega) = \frac{1}{37}$ für alle $\omega \in \Omega$
  - **Beispiel 2**. Doppelwurf eines Spielwürfels
    - $\Omega = \{\, (1,1), (1,2), \dots, (6,6) \,\}, P_{\mathrm{naive}}(\omega) = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$

Pierre-Simon Laplace
(1749 – 1827)

Gleichverteilung ist nicht gleich Gleichverteilung!

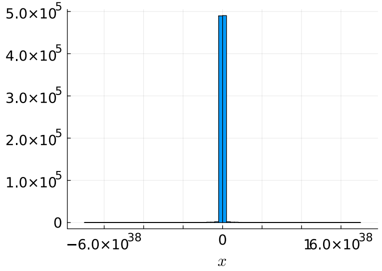
- **Beispiel**. Zufällige Bitmuster
  - **Ergebnismenge (3-bit)**:
    - $\Omega = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$
  - **Gleichverteilung**
    - $P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{8}$
  - Was ist die Verteilung wenn man ein Ergebnis als Zahl interpretiert?
    - **Ganzzahl**: Für $\omega = b_0 b_1 \cdots b_{31} \in \Omega$, sei

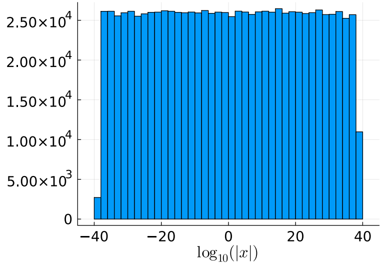
$$x = \sum_{i=0}^{31} 2^i \cdot b_i$$



    - **Gleitkommazahl**: Für $\omega = b_0 b_1 \cdots b_{32} \in \Omega$, sei

$$x = \underbrace{(1 - 2 \cdot b_{31})}_{\text{Vorzeichen}} \cdot \underbrace{\left(1 + \sum_{j=0}^{22} b_j \cdot 2^{-(j+1)}\right)}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{2^{\left(\sum_{j=0}^{7} b_{23+j} \cdot 2^j\right) - 127}}_{\text{Exponent}}$$





Zufallsgeneratoren für gleichverteilte Zahlen

- **Aber**: Wie „berechnet“ man zufällige Zahlen im Computer?
- **Zwei** Lösungen:
  - **Physikalisch**: Wir messen ein physikalisches Phänomen das zufällig ist.
    1. Atmosphärisches Rauschen (Gewitter: ~40 Blitze/Sekunde weltweit)
    2. Thermisches Rauschen (Elektroschaltkreise; temperaturabhängig)
    3. Kosmisches Rauschen
    4. Radioaktive Strahlung
    - **Vorteil**: Echte Zufälligkeit
    - **Nachteil**: Kostspielige Sensorik die auf Quanteneffekten basieren und langsam sind
  - **Algorithmisch**: Pseudo-zufällige Sequenz, die deterministisch ist aber sich erst nach sehr vielen Beispielen wiederholt
    1. Lineare kongruente Generatoren: $x_{n+1} = (a \cdot x_n + c) \bmod m$
    - **Vorteil**: Unabhängig von physikalischer Zufälligkeit
    - **Nachteil**: Energieaufwendig und nur für endliche Folge von Zufallszahlen anwendbar

Karl Guthe Jansky (1905 – 1950)

John Bertrand Johnson (1887 – 1970)

Pseudozufallszahlen für Gleichverteilungen

- **Beispiel: Lineare Kongruente Generatoren**
  - Für große Ganzzahlen a, b und m und einen *seed* x_0

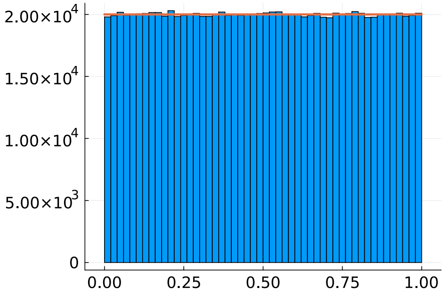
$$x_{n+1} = (\underbrace{a}_{\text{Mulitplikator}} \cdot x_n + \underbrace{c}_{\text{Inkrement}}) \bmod \underbrace{m}_{\text{Modulus}}$$

  - **Mersenne Primzahl**
    - $m = 2^{32} - 1$

System	m	a	c	Ausgabe
ZX81	$2^{16}+1$	75	74	alle Bits
glibc	2^{31}	1103515245	12345	Bits 0 … 30
C++ 11	$2^{31}-1$	16807	0	alle Bits
Java	2^{48}	25214903917	11	Bits 16 … 47

  - **Achtung**: In einem linearen kongruenten Generator können nur rund $\sqrt[3]{m}$ viele echte Zufallszahlen generiert werden (für $m = 2^{31}$ sind das nur 1290 Zufallszahlen!)

Marin Mersenne
(1588 – 1648)

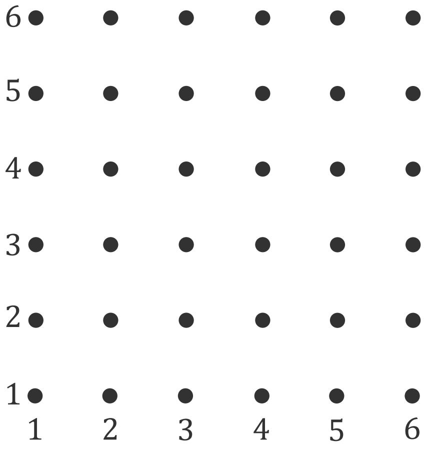


Überblick

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. ***Counting* Prinzip**
8. Permutationen, Variationen und Kombinationen
   - Numerische Approximation

Wiederholte Zufallsexperimente

- In der Praxis führen wir oft mehrere Experimente hintereinander aus.
  - **Beispiel 1**. Doppelwurf eines Spielwürfels
    - $\Omega_1 = \{ 1, \dots, 6 \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{6}$
    - $\Omega_2 | \omega_1 = \{ 1, \dots, 6 \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{6}$
    - $\Omega = \{ (1,1), (1,2), \dots, (6,6) \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{36}$
  - **Beispiel 2**. Zweifacher Griff in eine Urne mit 6 Kugeln ohne Zurücklegen
    - $\Omega_1 = \{ 1, \dots, 6 \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{6}$
    - $\Omega_2 | \omega_1 = \{ 1, \dots, 6 \} \setminus \{\omega_1\}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{5}$
    - $\Omega = \{ (1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,3), \cdots, (6,5) \}, P_{\text{naive}}(\omega) = \frac{1}{30}$



Counting Prinzip

- **Definition (*Counting* Prinzip)**. Wenn r Zufallsexperimente hintereinander ausgeführt werden und das erste Zufallsexperiment $n_1 = |\Omega_1|$ mögliche Ergebnisse hat und für jeden Ausgang des k-ten Zufallsexperiment das $k+1$-te Zufallsexperiment immer $n_{k+1} = |\Omega_{k+1}|$ mögliche Ergebnisse hat, dann haben die r Zufallsexperimente $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ mögliche Ergebnisse.
  - **Beispiel 1**. Wir haben 400 Bachelorstudierende und 200 Masterstudierende. Der Fachschaftsrat besteht aus 3 Bachelorstudierenden und 2 Masterstudierenden. Wie viele mögliche Fachschaftsräte gibt es?
    - **Lösung**: $400 \cdot 399 \cdot 398 \cdot 200 \cdot 199 = 2\,528\,127\,840\,000$
  - **Beispiel 2**. Ein Nummernschild besteht aus 7 Zeichen: die ersten drei sind Buchstaben und die letzten 4 Ziffern. Wie viele verschiede Nummernschilder gibt es?
    - **Lösung**: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$
  - **Beispiel 3**. Wie viele Nummernschilder ohne sich wiederholende Zeichen gibt es?
    - **Lösung**: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$

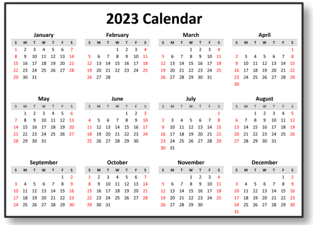
Counting Prinzip

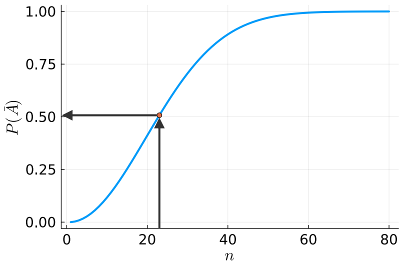
- **Definition (*Counting* Prinzip)**. Wenn r Zufallsexperimente hintereinander ausgeführt werden und das erste Zufallsexperiment $n_1 = |\Omega_1|$ mögliche Ergebnisse hat und für jeden Ausgang des k-ten Zufallsexperiment das $k+1$-te Zufallsexperiment immer $n_{k+1} = |\Omega_{k+1}|$ mögliche Ergebnisse hat, dann haben die r Zufallsexperimente $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ mögliche Ergebnisse.
  - **Beispiel 1**. Wir haben 400 Bachelorstudierende und 200 Masterstudierende. Der Fachschaftsrat besteht aus 3 Bachelorstudierenden und 2 Masterstudierenden. Wie viele mögliche Fachschaftsräte gibt es?
    - **Lösung**: $400 \cdot 399 \cdot 398 \cdot 200 \cdot 199 = 2\,528\,127\,840\,000$
  - **Beispiel 2**. Ein Nummernschild besteht aus 7 Zeichen: die ersten drei sind Buchstaben und die letzten 4 Ziffern. Wie viele verschiede Nummernschilder gibt es?
    - **Lösung**: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$
  - **Beispiel 3**. Wie viele Nummernschilder ohne sich wiederholende Zeichen gibt es?
    - **Lösung**: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- **Beispiel**. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?
  - Modelliert als n aufeinanderfolgende Zufallsexperimente mit $\Omega_i = \{1, \dots, 365\}$
  - Ergebnismenge aller n aufeinanderfolgende Zufallsexperimente:
    - $\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$
  - Ereignis, dass **keine** zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben:
    - $A = \left\{(i_1, \dots, i_n) | i_j \in \{1, \dots, 365\} \land i_j \neq i_k \Leftrightarrow j \neq k\right\}$
  - Besser modelliert als Sequenz von n Zufallsexperimenten
    - $n_1 = 365$
    - $n_2 = 364$
    - $n_3 = 363, \dots$
  - Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben

$$P_{\text{naive}}(\bar{A}) = 1 - P_{\text{naive}}(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \frac{365 - j + 1}{365}$$





Überblick

1. Organisatorisches
2. Wahrscheinlichkeitsbegriff
3. Geschichte der Wahrscheinlichkeit
4. Wahrscheinlichkeitsräume und σ-Algebra
5. Rechenregeln von Wahrscheinlichkeitsräumen
6. Gleichverteilung
7. *Counting* Prinzip
8. **Permutationen, Variationen und Kombinationen**
   - Numerische Approximation

Permutationen

- **Problem**: Wir haben n Objekte und n Zufallsexperimente, wo wir jeweils eines der Objekte zufällig auswählen und aus der Menge entfernen. Wieviel verschiedene Ergebnisse gibt es bei den n Zufallsexperimenten?
  - **Bemerkungen**
    - Ist identisch zur Frage „wieviel verschiedene Anordnungen gibt es für n Objekte?"
    - Wurde schon von Jacob Bernoulli untersucht.
    - Kann mit dem *Counting* Prinzip ganz leicht gelöst werden.
- **Definition (Permutationen)**. Für n Objekte gibt es genau $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ viele verschiedene Anordnungen die auch Permutation genannt werden.
  - **Beispiel 1**. In einem Seminar sind 6 Studenten und 4 Studentinnen die eine Klausur schreiben. Jeder schreibt eine andere Note. Wie viele Rankings nach Noten gibt es?
    - **Lösung**: $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$
  - **Beispiel 2**. Wenn man die Rankings der Studenten und Studentinnen separat betrachtet, wieviel Rankings gibt es dann (d.h., die Rankings zwischen Studenten und Studentinnen spielen keine Rolle)?
    - **Lösung**: $6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280$

Objekte: a, b, c

1. a, b, c
2. a, c, b
3. b, a, c
4. b, c, a
5. c, a, b
6. c, b, a

Variationen

- **Problem**: Wir haben n Objekte und $k < n$ Zufallsexperimente, wo wir jeweils eines der Objekte zufällig auswählen und aus der Menge entfernen. Wieviel verschiedene Ergebnisse gibt es bei den k Zufallsexperimenten?
  - **Bemerkungen**
    - Ist identisch zur Frage „wieviel verschiedene Variationen von k Objekten aus n Objekten gibt es, wenn die Reihenfolge der Auswahl einen Unterschied macht?"
    - Kann mit dem *Counting* Prinzip ganz leicht gelöst werden.
- **Definition (Variationen)**. Wenn man k Objekte aus $n > k$ Objekten mit Beachtung der Reihenfolge auswählt, ist die Anzahl der Variationen

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  - **Beispiel**. Wähle k eindeutige Tage aus 365 Tagen aus (Geburtstagsparadoxon)
    - **Lösung**: $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-k+1) = \frac{365!}{(365-k)!}$

Kombinationen

- **Problem**: Wir haben n Objekte und $k < n$ Zufallsexperimente, wo wir jeweils eines der Objekte zufällig auswählen und aus der Menge entfernen. Wieviel verschiedene Ergebnisse gibt es bei den k Zufallsexperimenten, wenn es bei der Auswahl der k Objekte nicht darauf ankommt, *wann* sie ausgewählt wurden?
  - **Bemerkungen**
    - Ist identisch zur Frage „wieviel verschiedene Teilmengen der Größe k aus einer Menge der Größe n gibt es?“
    - Kann mit Hilfe von Variationen und Permutationen ganz leicht gelöst werden.
- **Definition (Kombination)**. Die Anzahl von eindeutigen Teilmengen der Größe k aus einer Menge der Größe n ist

Auswahl von k Objekten aus n Objekten

Anzahl Permutationen von k Objekten

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Gesprochen: „n über k“ („n choose k“)

Kombinationen: Beispiele

- **Beispiel 1**. Zur Wahl des Fachschaftsrats aus 5 Personen stehen 6 Studenten und 9 Studentinnen zur Wahl. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Fachschaftsrat aus 2 Studenten und 3 Studentinnen bestehen wird?
  - Anzahl von möglichen Fachschaftsräten: $\binom{15}{5}$
  - Anzahl von 2 Studenten aus 6 Studenten: $\binom{6}{2}$
  - Anzahl von 3 Studentinnen aus 9 Studentinnen: $\binom{9}{3}$

$$P = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} = \frac{60}{143} = 41.958\%$$

- **Beispiel 2**. Wie viele verschiedene Worte kann man aus STATISTICS formen?
  - Ergebnisraum: Positionen der drei „S“, der drei „T“, der zwei „I“, des „A“ („C“ folgt dann)

$$\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1} = \frac{10!}{3!\cdot\quad}\cdot\frac{\quad}{3!\cdot\quad}\cdot\frac{\quad}{2!\cdot\quad}\cdot\frac{\quad}{\cdot} = \frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = 50\,400$$

Positionen von “S”
Positionen von “T”
Positionen von “I”
Positionen von “A”

Numerische Approximation

- **Beobachtung**: Fakultätsfunktion wächst sehr schnell durch Produktbildung!
  - **Aber**: Gleitkommadarstellung können aber nur Zahlen bis zu 380 Stellen darstellen!
- **Folge**: In der Praxis wird nur der Logarithmus von Wahrscheinlichkeiten gespeichert!
  - **Bemerkungen**
    - Aus Produkten werden Summen und aus Exponenten werden Produkte
    - Wir benötigen effiziente Approximation vom Logarithmus der Fakultätsfunktion

James Stirling
(1692 – 1770)

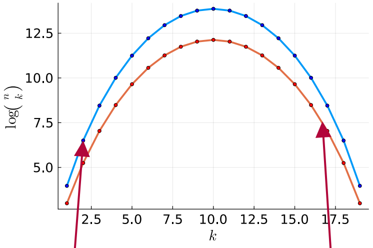
- **Satz (Stirling's Approximation).** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Approximation

$$\log(n!) = n \cdot \log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n))$$

- **Korollar.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt die folgende Approximation

$$\log\left(\binom{n}{k}\right) \approx n \cdot H\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$H(p) = -[p \cdot \log(p) + (1-p) \cdot \log(1-p)]$$



Stirling's Approximation: Herleitung

- **1. Schritt**: Logarithmus der Fakultät ist Summe der Logarithmen

$$\log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n) = \log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n)$$

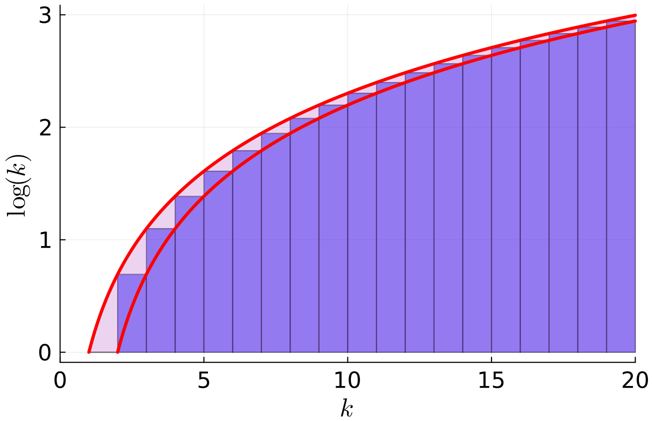
- **2. Schritt**: Rechtecke durch glatte Funktion approximieren

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log(i) \approx \int_1^n \log(x)\,\mathrm{d}x$$

- **3. Schritt**: Bestimmtes Integral berechnen

$$\int_1^n \log(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \log(x) - x\Big|_1^n = \boxed{n \cdot \log(n) - n} + 1$$

- Genauere Approximation durch präzisere Integration



Stirling's Approximation

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!