Mathe III

Ralf Herbrich

Testtheorie

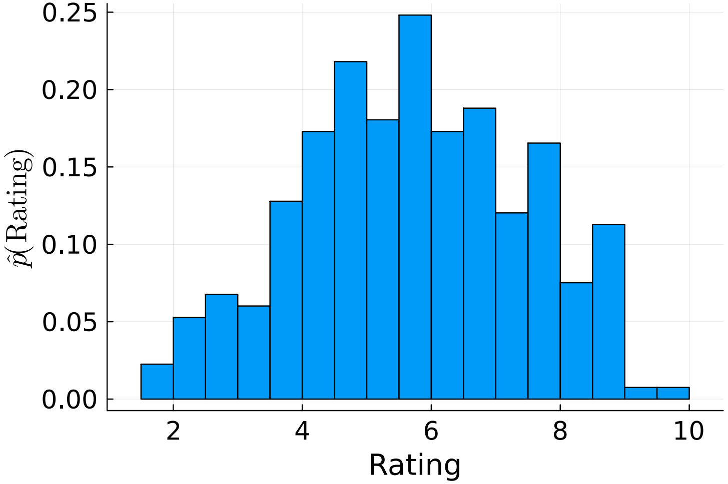
Hasso Plattner Institut
Digital Engineering · Universität Potsdam

Überblick

1. Konzept der Hypothesentests
2. Hypothesentests für den Erwartungswert
   - Gauss-Test
   - t-Tests
3. Hypothesentests für Modelle
   - *Mann-Whitney-Wilcoxon*-Test
   - *Likelihood Ratio*-Test
4. Irrtumswahrscheinlichkeit und p-Wert
5. Multiples Testen

Motivation: Filmbewertungen

- **Beispiel (Filmbewertungen)**. Wenn wir alle Science-Fiction Filme in Betracht ziehen, hat der Film *Jurassic World Dominion* ein durchschnittliches Rating?
- **Ansatz**: Wir benutzen die Datenbank von IMDb auf https://datasets.imdbws.com/, welche insgesamt 1,380,162 Filme und TV-Serien enthält. Als Stichprobe benutzen wir die insgesamt 266 Science-Fiction Filme, die 2022 veröffentlicht wurden.



Rating: 5.6
(basierend auf 196,057 Bewertungen)

Motivation: Filmbewertungen

- **Beispiel (Filmbewertungen)**. Wenn wir alle Science-Fiction Filme in Betracht ziehen, hat der Film *Jurassic World Dominion* ein durchschnittliches Rating?
- **Alternative Frage**: Ist die durchschnittliche Bewertung von Science-Fiction Filmen 5.6?
- **Mathematische Formulierung**:
  - Sei X_i eine Zufallsvariable, welche die Bewertung des i-ten Science-Fiction Films ist.
  - Wir nehmen an, dass die $X_1, \dots, X_n$ identisch und unabhängig verteilt sind mit $\mu = E[X_i]$.
  - Dann ist die mathematische Frage, welche wir beantworten wollen:

$$\text{Ist } \mu = 5.6 \text{ ?}$$

- **Bemerkungen (Filmbewertungen)**
  - Diese Frage kann niemals exakt beantwortet werden, da wir maximal alle Science-Fiction Filme der Vergangenheit in Betracht ziehen können (aber nicht alle Science-Fiction Filme der Zukunft), d.h., wir werden μ niemals exakt kennen!
  - Um solche Fragen zu beantworten, müssen wir uns überlegen, welche Fehler wir bei solchen Entscheidungen machen können und welche wir beschränken wollen.

Rating: 5.6
(basierend auf 196,057 Bewertungen)

Überblick

1. **Konzept der Hypothesentests**
2. Hypothesentests für den Erwartungswert
   - Gauss-Test
   - t-Test
3. Hypothesentests für Modelle
   - *Mann-Whitney-Wilcoxon*-Test
   - *Likelihood Ratio*-Test
4. Irrtumswahrscheinlichkeit und p-Wert
5. Multiples Testen

Hypothesentest

1. **Festlegen eines parametrischen Modells** $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\})$
   - Parameterraum so klein wie sinnvoll möglich wählen.
2. **Formulierung von Hypothesen**
   - Null-Hypothese H_0 gibt eine Aussage an, die durch den Test widerlegt werden soll.
   - H_0 und H_1 (Alternativhypothese) korrespondieren mit einer Aufspaltung des Parameterraums Θ
3. **Wahl eines Irrtumsniveaus α**
   - Zwei Fehler: Entscheidung für H_1 obwohl H_0 wahr ist (Typ-I) oder andersherum (Typ II)
   - Wir begrenzen immer den Typ-I Fehler!
4. **Festlegen einer Entscheidungsregel**
   - Verteilung einer Teststatistik muss bekannt sein

1. **Festlegen eines parametrischen Modells**

$$\left([1,10]^{266}, \mathcal{P}([1,10]^{266}), \left\{\boldsymbol{X} \to \prod_{i=1}^{266} P_X(X_i) \text{ mit } V[X] = 3 \mid E[X] \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

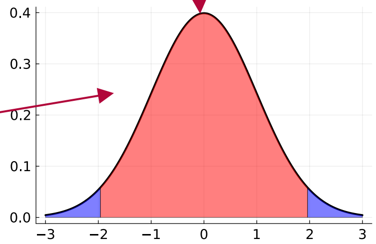
2. **Formulierung von Hypothesen**
   - Nullhypothese $H_0: E[X] = 5.6$
   - Alternativhypothese $H_1: E[X] \neq 5.6$
3. **Wahl eines Irrtumsniveaus α** $\quad P\left(\frac{\frac{1}{266}\sum_{i=1}^{266} X_i - 5.6}{\sqrt{3/266}} \in [-1.96, 1.96]\right) = 0.95$

$$P(\text{Typ I Fehler}) \leq \alpha = 0.05$$

4. **Festlegen einer Entscheidungsregel unter H_0**

$$\frac{1}{266}\sum_{i=1}^{266} X_i \sim^d \mathcal{N}\left(5.6, \frac{3}{266}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{266}\sum_{i=1}^{266} X_i - 5.6}{\sqrt{3/266}} \sim^d \mathcal{N}(0,1)$$



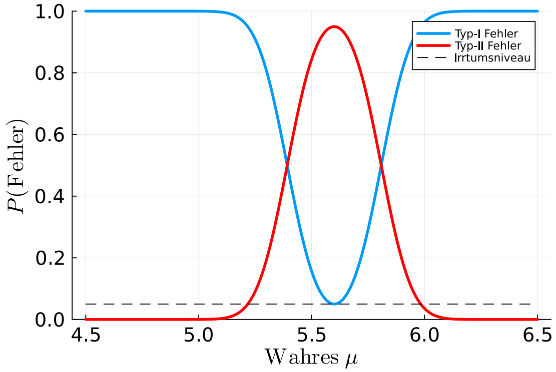
$0.54 \in [-1.96, 1.96] \Rightarrow$ "H_0"

"H_1" "H_0" "H_1"

Hypothesentests: Typ-I und Typ-II Fehler

- **Frage**: Wenn der Test auf einem Irrtumsniveau α von 5% die Nullhypothese annimmt, haben wir dann irgendeine Garantie, dass der mögliche Fehler bei der Aussage beschränkt ist?
  - **Antwort**: Nein, denn das ist der Typ-II Fehler (der **nicht** beschränkt ist)!

	Wahrheit H_0	**Wahrheit H_1**
Entscheidung für H_0	Korrekt (Spezifität) $(1-\alpha)$	Typ II Fehler (β)
Entscheidung für H_1	Typ I Fehler (α)	Korrekt (Sensitivität) $(1-\beta)$



- **Beispiel (Filmbewertungen)**. Da wir die Entscheidungsregel konstruiert haben, können wir die beiden Fehler (ohne Daten) für alle Wahrheiten berechnen!
  - Zwischen 5.2 und 6.0 ist der Test „blind": Außer bei $\mu = 5.6$ verursachen wir einen Typ-II Fehler der größer als 5% ist!

Hypothesentests: Signifikanz

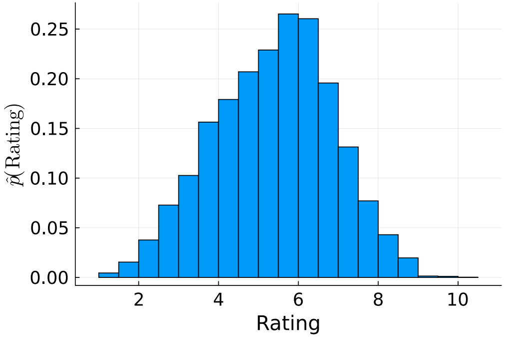
- **Frage**: Was können wir machen, um doch statistisch sicher zu erkennen, dass *Jurassic World Dominion* nicht eine durchschnittliche Bewertung hat?
- **Idee 1**: Wir erhöhen die Irrtumswahrscheinlichkeit α!
  - **Beispiel (Filmbewertungen)**. Wenn wir die Irrtumswahrscheinlichkeit auf α=0.7 (70%) erhöhen, dann wird die Entscheidungsregel für H_0 zu

$$\underbrace{\frac{1}{266}\sum_{i=1}^{266} X_i}_{5.64} \notin \left[5.6 - \underbrace{0.38}_{z_{0.35}} \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}, 5.6 + 0.38 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}\right] = [5.57, 5.63]$$

- **Idee 2**: Wir besorgen uns mehr Daten und erhöhen die Stichprobengröße (z.B. alle 7111 Science-Fiction Filme in IMDb)

$$\underbrace{\frac{1}{7111}\sum_{i=1}^{7111} X_i}_{5.33} \notin \left[5.6 - \underbrace{1.96}_{z_{0.025}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7111}}, 5.6 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{7111}}\right] = [5.56, 5.64]$$

Rating: 5.6
(basierend auf 196,057 Bewertungen)



Hypothesentests: Konstruktion der Entscheidungsregel

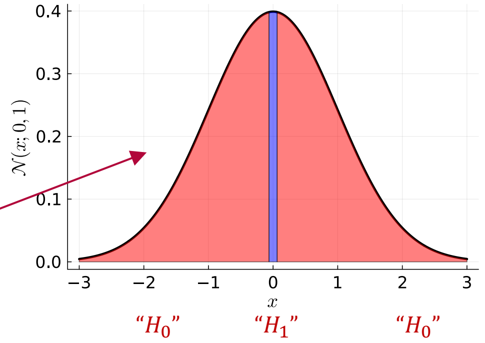
- **Frage**: Gibt es Einschränkungen bei der Konstruktion der Entscheidungsregel über die Verteilung der Teststatistik?
  - **Antwort**: Nein, solange $P(\text{Typ I Fehler}) \leq \alpha$!
  - **Aber**: Gute Tests haben auch einen kleinen Typ-II Fehler
- **Beispiel (Filmbewertungen)**. Wir bauen einen “schwachen“ Test, indem wir die unwahrscheinlichen Stichproben um den Mittelwert anordnen.

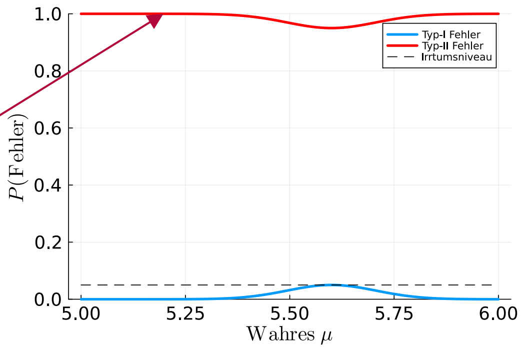
$$\frac{\frac{1}{266}\sum_{i=1}^{266} X_i - 5.6}{\sqrt{3/266}} \sim^d \mathcal{N}(0,1)$$

Dann lehnt der Test die Nullhypothese $\mu = 5.6$ ab, wenn

$$\frac{1}{266}\sum_{i=1}^{266} X_i \in \left[5.6 - 0.062 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}, 5.6 + 0.062 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}\right] = [5.59, 5.61]$$

Dieser Test hält zwar sein Irrtumsniveau α für $\mu = 5.6$ aber hat ansonsten einen Typ-II Fehler von mehr als 95%!





Hypothesentests: Zusammenfassung

- **Design: Konstruktion in 4 Schritten**
  1. Festlegen eines parametrischen Modells $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\})$
  2. Formulierung von Null- und Alternativhypothese
  3. Wahl eines Irrtumsniveaus α
  4. Konstruktion einer Ablehnungsregion (*rejection region*) unter Nullhypothese

1. **Durchführung** des Tests immer erst nach der Konstruktion!

- **Bemerkungen (Hypothesentests)**
  - Die Wahrscheinlichkeit bei Hypothesentests ist immer über die zufällige Stichprobe.
  - Ähnlich zu Konfidenzintervallen ist das Irrtumsniveau eine Aussage, wie wahrscheinlich ein Typ-I Fehler über die mehrfache Anwendung eines Hypothesentests eintritt.
  - Das Irrtumsniveau α sagt nichts über die Wahrscheinlichkeit aus, dass ein einzelner Test korrekt beantwortet ist, sondern nur über den wiederholten Prozess von Hypothesentests.
  - Die Testtheorie wurde von Karl und Egon Pearson, William Gosset und Sir Ronald Fisher entwickelt.

Karl Pearson (1857 – 1936)

Egon Pearson (1895 – 1980)

William Gosset (1876 – 1937)

Sir Ronald Fisher (1890 – 1962)

Überblick

1. Konzept der Hypothesentests
2. Hypothesentests für den Erwartungswert
   - **Gauss-Test**
   - t-Test
3. Hypothesentests für Modelle
   - *Mann-Whitney-Wilcoxon*-Test
   - *Likelihood Ratio*-Test
4. Irrtumswahrscheinlichkeit und p-Wert
5. Multiples Testen

Gauss-Tests mit einer Stichprobe

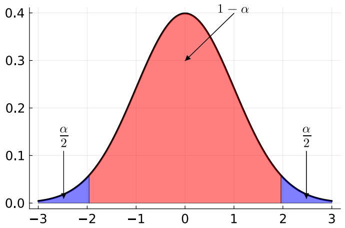
- **Daten**: Eine Stichprobe von n identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit unbekanntem Erwartungswert $E[X]$ aber bekannter Varianz $V[X] = \sigma^2$
- **Nullhypothese** H_0: $E[X] = \mu_0$
- **Teststatistik**: Wir betrachten den Mittelwert $\bar{X}$, weil unter H_0

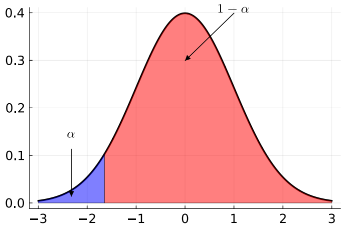
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim^d \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim^d \mathcal{N}(0,1)$$

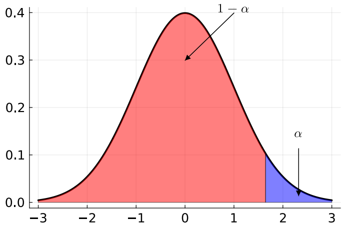
- **Annahmeregion (rotes Intervall)**:

  1. $|\bar{X} - \mu_0| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad \Leftrightarrow \bar{X} \geq \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und $\bar{X} \leq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  2. $\bar{X} - \mu_0 \geq z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad \Leftrightarrow \bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  3. $\bar{X} - \mu_0 \leq z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad \Leftrightarrow \bar{X} \leq \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- **Bemerkung (Gauss-Tests mit einer Stichprobe)**
  - Wir können die Nullhypothese auch abschwächen in $E[X] \geq \mu_0$ und $E[X] \leq \mu_0$.







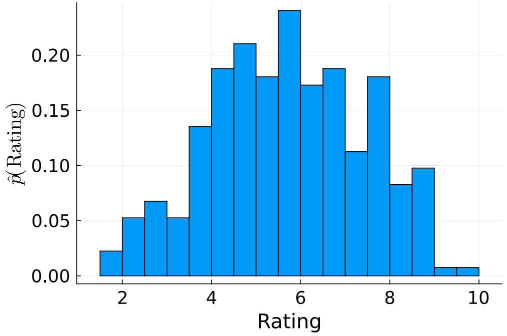
Gauss-Test mit einer Stichprobe: Beispiel

- **Beispiel (Filmbewertungen).** Wenn wir alle Science-Fiction Filme in Betracht ziehen:
  1. Hat der Film *Jurassic World Dominion* ein durchschnittliches Rating?
  2. Ist der Film *Jurassic World Dominion* besser bewertet als der Durchschnitt?
  3. Ist der Film *Jurassic World Dominion* schlechter bewertet als der Durchschnitt?
- **Lösung**: Wir benutzen die Datenbank von IMDb mit insgesamt 266 Science-Fiction Filmen, die 2022 veröffentlicht wurden (bei einer bekannten Varianz von 3) auf einem Irrtumsniveau α von 5%.

  1. $5.64 \in \left[5.6 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}, 5.6 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}\right] = [5.4{,}5.8]$ $\Rightarrow$ "H_0"
  2. $5.64 \in \left[5.6 - 1.64 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}, +\infty\right) = [5.43, +\infty)$ $\Rightarrow$ "H_0"
  3. $5.64 \in \left(-\infty, 5.6 + 1.64 \cdot \sqrt{\frac{3}{266}}\right] = (-\infty, 5.77]$ $\Rightarrow$ "H_0"

- **Bemerkung (Gauss-Tests mit einer Stichprobe).** In der statistischen Testtheorie können alle drei Aussagen angenommen werden!

Rating: 5.6
(basierend auf 196,057 Bewertungen)

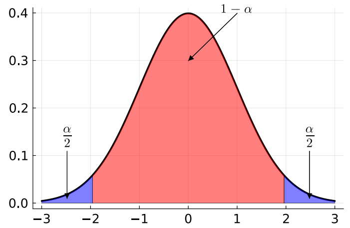


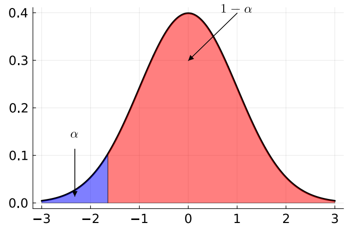
Gauss-Tests mit zwei Stichproben

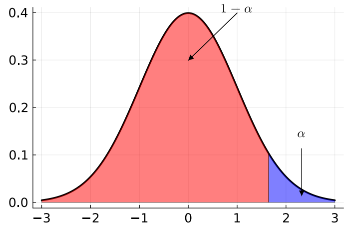
- **Daten**: Zwei Stichproben von n und m identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ mit unbekanntem Erwartungswert $E[X]$ und $E[Y]$ aber bekannter Varianz $V[X] = \sigma_X^2$ und $V[Y] = \sigma_Y^2$
- **Nullhypothese** H_0: $E[X] = E[Y]$
- **Teststatistik**: Wir betrachten den Mittelwert $\bar{X}$, weil unter H_0

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim^d \mathcal{N}\left(\underbrace{E[X] - E[Y]}_{=0 \text{ unter } H_0}, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim^d \mathcal{N}(0,1)$$

- **Annahmeregion (rotes Intervall)**:
  1. $|\bar{X} - \bar{Y}| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}$
  2. $\bar{X} - \bar{Y} \geq z_\alpha \cdot \sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}$
  3. $\bar{X} - \bar{Y} \leq z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}$
- **Bemerkung (Gauss-Tests mit zwei Stichproben)**
  - Wir können die Nullhypothese auch abschwächen in $E[X] \geq E[Y]$ und $E[X] \leq E[Y]$.







Gauss-Test mit zwei Stichproben: Beispiel

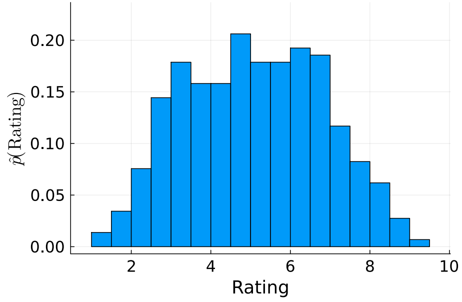
- **Beispiel (Filmbewertungen)**. Wenn wir alle Science-Fiction Filme in Betracht ziehen:
  1. Ist das durchschnittliche Rating von 2021 und 2022 gleich?
  2. Ist das durchschnittliche Rating von 2022 besser als in 2021?
  3. Ist das durchschnittliche Rating von 2021 besser als in 2022?
- **Lösung**: Wir benutzen die Datenbank von IMDb mit $\bar{X}_{2021} = 5.04$ und $\bar{X}_{2022} = 5.64$ und einer bekannten Varianz von 3 auf einem Irrtumsniveau α von 5%.

1. $5.64 - 5.04 \notin \left[-1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{266} + \frac{3}{291}}, +1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{266} + \frac{3}{291}}\right] = [-0.28, +0.28]$ $\Rightarrow$ "H_1"

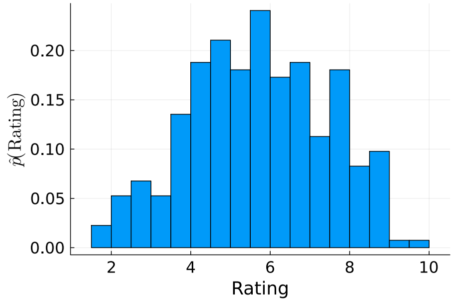
2. $5.64 - 5.04 \in \left[-1.64 \cdot \sqrt{\frac{3}{266} + \frac{3}{291}}, +\infty\right) = [-0.24, +\infty)$ $\Rightarrow$ "H_0"

3. $5.64 - 5.04 \notin \left(-\infty, 1.64 \cdot \sqrt{\frac{3}{266} + \frac{3}{291}}\right] = (-\infty, 0.24]$ $\Rightarrow$ "H_1"

2021 (291 Filme)



2022 (266 Filme)



Übersicht von Gauss-Tests

Daten	Annahme	Nullhypothese	Statistik	Annahmeregion
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} P_X$	$V[X] = \sigma_X^2 = \text{const}$	$E[X] = \mu_0$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\left[\mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} P_X$	$V[X] = \sigma_X^2 = \text{const}$	$E[X] \geq \mu_0$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\left[\mu_0 + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} P_X$	$V[X] = \sigma_X^2 = \text{const}$	$E[X] \leq \mu_0$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\left(-\infty, \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} P_X$ $Y_1, \dots, Y_m \sim_{\text{iid}} P_Y$	$V[X] = \sigma_X^2 = \text{const}$ $V[Y] = \sigma_Y^2 = \text{const}$	$E[X] = E[Y]$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right]$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} P_X$ $Y_1, \dots, Y_m \sim_{\text{iid}} P_Y$	$V[X] = \sigma_X^2 = \text{const}$ $V[Y] = \sigma_Y^2 = \text{const}$	$E[X] \geq E[Y]$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$	$\left[z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, +\infty\right)$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} P_X$ $Y_1, \dots, Y_m \sim_{\text{iid}} P_Y$	$V[X] = \sigma_X^2 = \text{const}$ $V[Y] = \sigma_Y^2 = \text{const}$	$E[X] \leq E[Y]$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$	$\left(-\infty, z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right]$

Überblick

1. Konzept der Hypothesentests
2. Hypothesentests für den Erwartungswert
   - Gauss-Test
   - **t-Test**
3. Hypothesentests für Modelle
   - *Mann-Whitney-Wilcoxon*-Test
   - *Likelihood Ratio*-Test
4. Irrtumswahrscheinlichkeit und p-Wert
5. Multiples Testen

t-Tests mit einer Stichprobe

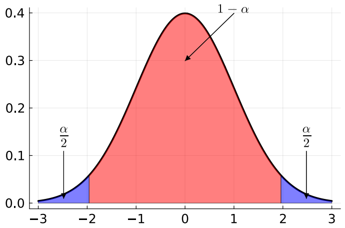
- **Daten**: Eine Stichprobe von n unabhängig normal-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2.
- **Nullhypothese** H_0: $\mu = \mu_0$
- **Teststatistik**: Wir betrachten den Mittelwert $\bar{X}$, weil unter H_0

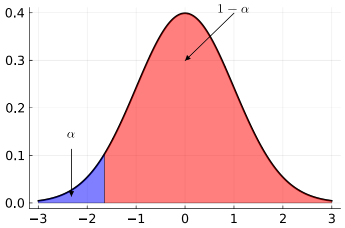
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\underbrace{\hat{V}[X_1, \ldots, X_n]}_{\hat{\sigma}^2}}{n}}} \sim t(n-1)$$

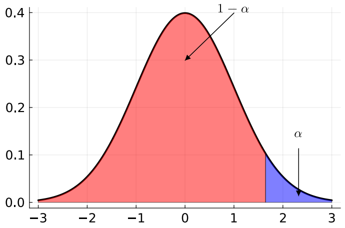
- **Annahmeregion (rotes Intervall)**:

1. $|\bar{X} - \mu_0| \le \tau_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \bar{X} \ge \mu_0 - \tau_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ und $\bar{X} \le \mu_0 + \tau_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
2. $\bar{X} - \mu_0 \ge \tau_\alpha \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \bar{X} \ge \mu_0 + \tau_\alpha \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
3. $\bar{X} - \mu_0 \le \tau_{1-\alpha} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \bar{X} \le \mu_0 + \tau_{1-\alpha} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$

- **Bemerkung (t-Tests mit einer Stichprobe)**
  - Wir können die Nullhypothese auch abschwächen in $\mu \ge \mu_0$ und $\mu \le \mu_0$.







t-Test mit einer Stichprobe: Beispiel

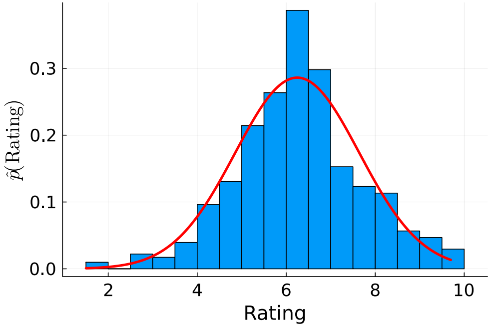
- **Beispiel (Filmbewertungen)**. Wenn wir alle Romantik Filme in 2022 in Betracht ziehen:
  1. Hat der Film *Marry Me* ein durchschnittliches Rating?
  2. Ist der Film *Marry Me* schlechter bewertet als der Durchschnitt?
  3. Ist der Film *Marry Me* besser bewertet als der Durchschnitt?
- **Lösung**: Wir benutzen die Datenbank von IMDb mit insgesamt 812 Romantik Filmen, die 2022 veröffentlicht wurden auf einem Irrtumsniveau α von 5%.

1. $\frac{(6.25-6.1)}{\sqrt{\frac{1.94}{812}}} = 3.02 \notin [-1.96, +1.96]$ $\Rightarrow$ "H_1"

2. $\frac{(6.25-6.1)}{\sqrt{\frac{1.94}{812}}} = 3.02 \in [-1.65, +\infty)$ $\Rightarrow$ "H_0"

3. $\frac{(6.25-6.1)}{\sqrt{\frac{1.94}{812}}} = 3.02 \notin (-\infty, +1.65]$ $\Rightarrow$ "H_1"

Rating: 6.1
(basierend auf 39.149 Bewertungen)



Übersicht von t-Tests mit einer Stichprobe

Daten	Nullhypothese	Statistik	Annahmeregion
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu = \mu_0$	$\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2}{n}}}$	$\left[\tau_{\frac{\alpha}{2}}, \tau_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu \geq \mu_0$	$\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2}{n}}}$	$[\tau_\alpha, +\infty)$
$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{iid}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu \leq \mu_0$	$\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2}{n}}}$	$(-\infty, \tau_{1-\alpha}]$

Viel Spaß bis zur nächsten Vorlesung!