Volume 3: List of Multi-run Quadratizations

Nike Dattani and Andreas Soteriou
(Dated: 16th March 2020)

DECOMPOSITION OF A MONOMIAL

$$b_1b_2b_3\dots b_k = \min\left(b_1b_2\dots b_{k_1},b_{k_1+1}b_{k_1+2}\dots b_{k_2},b_{k_2+1}b_{k_2+2}\dots b_{k_3},...,b_{k_n+1}b_{k_n+2}...b_k\right) \quad (1)$$

$$b_1b_2b_3\dots b_k = \min\left(b_1,b_2,b_3,\dots,b_k\right) \quad \text{(Example of Eq. 1: Linearization of a degree-}k\text{ monomial).} \quad (2)$$

$$b_1b_2b_3b_4 = \min\left(b_1b_2,b_3b_4\right) \quad \text{(Example of Eq. 1: Quadratization of a degree-4 monomial).} \quad (3)$$

$$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8: \quad (4)$$
$$\longrightarrow 3b_a + b_1b_2 + b_1b_3 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_2b_4 + b_3b_4 - 2b_a(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \quad (5)$$
$$\longrightarrow 3b_a + b_5b_6 + b_5b_7 + b_5b_8 + b_6b_7 + b_6b_8 + b_7b_8 - 2b_a(b_5 + b_6 + b_7 + b_8) \quad (6)$$

Quantum envelopes:

$$A_1B_2C_3: \quad (7)$$
$$\longrightarrow 1 + (A_1 - B_2C_3) \quad (8)$$
$$\longrightarrow 1 - (A_1 - B_2C_3) \quad (9)$$

where A, B and C can be any of the Pauli matrices X, Y or Z. For example:

$$Z_1Y_2Y_3: \quad (10)$$
$$\longrightarrow 1 + (Z_1 - Y_2Y_3) \quad (11)$$
$$\longrightarrow 1 - (Z_1 - Y_2Y_3) \quad (12)$$

r

DECOMPOSITION OF BINOMIALS OF DEGREE-k TERMS

$$b_1b_2b_3b_4 + b_3b_4b_5b_6 = \min\left(2b_3b_4, b_1b_2 + b_5b_6\right) \quad (k,n) = (4,6). \quad (13)$$

$$b_1b_2b_3b_4 + b_3b_4b_5b_6 = \min_{b_a}\left(b_2b_3 + b_a(1 - b_2 - b_3 + 2b_4) + b_3b_4, b_1b_2 + b_5b_6 + b_5b_a\right) \quad (k,n) = (4,6). \quad (14)$$

$$b_1b_2b_3b_4 + b_4b_5b_6b_7: \quad (k,n) = (4,7). \quad (15)$$
$$\longrightarrow b_2b_3 + b_5b_6 + b_a(1 - b_5 - b_6 + b_7) \quad (16)$$
$$\longrightarrow b_1b_4 + b_4 + b_a \quad (17)$$
$$\longrightarrow b_5b_6 + b_1 + b_a(1 - b_5 - b_6 + b_7) \quad (18)$$

$b_1b_2b_3b_4 + b_4b_5b_6b_7$: $(k,n) = (4,7)$. (19)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_4b_6$ 89/128 (70%) (20)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_6b_7$ 118/128 (92%) (21)
$\longrightarrow\ b_2b_3 - b_5b_6 + b_5b_7 + b_5$ 127/128 (99%) (22)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + 2b_5 - b_7 + 1$ 128/128(100%) (23)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_3b_4b_5b_6b_7$: $(k,n) = (5,7)$. (24)
$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_5b_6 + b_5b_7 + b_6b_7 + b_a(b_5 + b_6 + b_7 - 1) - b_5 - b_6 - b_7 + 1$ (25)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_3b_7 + b_a(1 + b_5 - b_7) - b_5 + 1$ (26)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_6 - b_5b_6 + b_5b_a - b_5 + b_6 + 1$ (27)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_3b_4b_5b_6b_7$: $(k,n) = (5,7)$. (28)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_7$ 85/128 (66%) (29)
$\longrightarrow\ 2b_4b_5$ 121/128 (95%) (30)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_6b_7 - b_5 + 1$ 128/128(100%) (31)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7$: $(k,n) = (6,7)$. (32)
$\longrightarrow\ 2b_3b_6$ (33)
$\longrightarrow\ 2b_4b_5 - b_5b_6 + b_5$ (34)
$\longrightarrow\ b_1b_4 - b_2b_5 + b_2b_6 + b_2b_7 + b_5b_7 - b_6b_7 - b_5 - b_6 + 2$ (35)
$\longrightarrow\ b_1b_2 - b_1b_5 + b_1b_7 + b_2b_3 + b_3b_6 - b_3b_7 - b_4b_5 - b_5b_6 - b_3 + b_5 + 2$ (36)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7$: $(k,n) = (6,7)$. (37)
$\longrightarrow\ 2b_5b_6$ 97/128 (76%) (38)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_7$ 119/128 (93%) (39)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_1b_7 + b_2b_3 - b_3b_6 + b_3b_7 - b_4b_5 - b_1 - b_7 + 2$ 127/128 (99%) (40)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_2b_6$ 128/128(100%) (41)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7$: $(k,n) = (6,7)$. (42)
$\longrightarrow\ b_5b_6 + b_5b_7 - b_5b_8 + b_6b_8 - b_7b_8 + b_8$ (43)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_a(b_4 - b_7) + b_7$ (44)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_2b_7 - b_5b_6 - b_7b_a + b_5 + b_7$ (45)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_7b_a + b_3$ (46)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (5,8)$. (47)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_6b_8 + b_a\,(1 - b_6 + b_7 - b_8)$ (48)
$\longrightarrow\ b_3b_5 + b_8b_a + b_5$ (49)
$\longrightarrow\ b_4b_7 + b_4$ (50)
$\longrightarrow\ b_7b_8 + b_a(1 + b_6 - b_7 - b_8) + b_3$ (51)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (5,8)$. (52)
$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_5b_8$ 169/256 (66%) (53)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_7 - b_5b_8 + b_8$ 233/256 (91%) (54)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_6b_7 + b_6b_8 + b_7b_8 - b_6 - b_7 - b_8 + 1$ 252/256 (98%) (55)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_6b_7$ 256/256(100%) (56)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (6,8)$. (57)
$\longrightarrow\ b_1b_6 + b_6b_8 + b_a\,(1 - b_6 + b_7 - b_8)$ (58)
$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_4b_5 + b_4b_a$ (59)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_3b_7 - b_a + 1$ (60)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_7b_8$ (61)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_4$ (62)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (6,8)$. (63)
$\longrightarrow\ 2b_5b_6$ 193/256 (75%) (64)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_8$ 237/256 (93%) (65)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_7 - b_4b_6 + b_4b_8 - b_5b_7 - b_5b_8 + b_6b_8 - b_6 + b_7 - b_8 + 2$ 254/256 (99%) (66)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_7b_8$ 256/256(100%) (67)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (7,8)$. (68)
$\longrightarrow\ b_6b_7 + b_6b_8 + b_a\,(1 - b_6 + b_7 - b_8)$ (69)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_4$ (70)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_8 - b_6b_a + b_6$ (71)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_2$ (72)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_3b_5 + b_6b_a$ (73)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (7,8)$. (74)
$\longrightarrow\ 2b_5b_6$ 193/256 (75%) (75)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_8$ 235/256 (92%) (76)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_2b_7 - b_5b_6 + b_6b_8 + b_5 - b_6 - b_8 + 1$ 250/256 (98%) (77)
$\longrightarrow\ b_3b_7 + b_7b_8$ 254/256 (99%) (78)
$\longrightarrow\ b_3b_8 + b_3$ 256/256(100%) (79)

$b_1b_2b_3b_4 + b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (4,8)$. (80)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_6b_8 + b_a\,(1 - b_6 + b_7 - b_8)$ (81)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_6b_8 + 2b_8b_a$ (82)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_5b_7 + b_a\,(1 - b_6 + b_7)$ (83)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_5b_7 - b_6b_8 + b_7b_a + b_6$ (84)

$b_1b_2b_3b_4 + b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (4,8)$. (85)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_6b_7$ 169/256 (66%) (86)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_5b_8$ 238/256 (93%) (87)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_5b_6 + b_5b_7 + b_6b_7 - b_5 - b_6 - b_7 + 1$ 248/256 (97%) (88)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_6b_7 + b_6b_8 + b_7b_8 - b_6 - b_7 - b_8 + 1$ 254/256 (99%) (89)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_5b_8$ 256/256(100%) (90)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (5,10)$. (91)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_6b_9 + b_9b_a$ (92)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_8b_{10} + b_9b_a$ (93)
$\longrightarrow\ b_3b_5 + b_7b_{10} + b_1b_a + b_9b_a$ (94)
$\longrightarrow\ b_4b_5 + b_6b_9 + b_9b_a$ (95)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_7b_9 + b_9b_a$ (96)
$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_6b_8 + b_9b_a$ (97)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_8b_{10} + b_9b_a$ (98)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_6b_7 + b_9b_a$ (99)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (5,10)$. (100)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_9b_{10}$ 625/1024 (61%) (101)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_7b_{10}$ 851/1024 (83%) (102)
$\longrightarrow\ b_3b_5 + b_5b_{10} + b_8b_9$ 924/1024 (90%) (103)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_6$ 972/1024 (95%) (104)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_8b_9$ 997/1024 (97%) (105)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_7b_{10}$ 1010/1024 (99%) (106)
$\longrightarrow\ -b_1b_7 - b_1b_{10} + b_2b_3 - b_2b_8 - b_2b_{10} + b_3b_5$ (107)
$\quad + b_6b_9 + b_7b_{10} - b_8b_9 + b_9b_{10} - b_3 - b_7 + b_8 + 3$ 1016/1024 (99%) (108)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_7b_8$ 1020/1024 (99%) (109)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_2b_6 - b_2b_9 - b_3b_{10} - b_5b_7 + b_7b_{10} + b_9b_{10} - b_{10} + 2$ 1023/1024 (99%) (110)
$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_2b_9 + b_6b_8$ 1024/1024(100%) (111)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (6,10)$. (112)
$\longrightarrow\ b_5b_6 + b_5b_7 + b_a(1 - b_{10})$ (113)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_8b_9 - b_a(b_9 + b_{10}) + b_9 + b_{10}$ (114)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_a(1 + b_7 - b_9 - b_{10}) + b_{10}$ (115)
$\longrightarrow\ b_3b_6 - b_5b_{10} + b_6b_7 + b_a(1 - b_9) + b_{10}$ (116)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_7b_{10} + b_a(1 - b_9 - b_{10}) + b_{10}$ (117)
$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_8b_9 + b_a(1 - b_9 - b_{10} - b_2) - b_2 + b_9 + b_{10} + 1$ (118)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (6,10)$. (119)
$\longrightarrow\ 2b_5b_6$ 769/1024 (75%) (120)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_8b_9$ 934/1024 (92%) (121)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_7b_{10} + b_8b_9 - b_8 - b_9 + 1$ 997/1024 (97%) (122)
$\longrightarrow\ -b_1b_3 + b_1b_9 + b_2b_4 + b_4b_9 + b_5b_8 + b_8b_9 - b_5 - b_8 - b_9 + 2$ 769/1024 (99%) (123)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_7b_{10} - b_8 - b_9 + 2$ 1014/1024 (99%) (124)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_8b_9$ 1024/1024(100%) (125)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (7,10)$. (126)
$\longrightarrow\ b_4b_7 + b_6b_7 + b_a(1 - b_4 - b_7 + b_{10})$ (127)
$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_5b_9 + b_a$ (128)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_8 + b_a$ (129)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_6b_{10}$ (130)
$\longrightarrow\ b_3b_6 + b_6b_9 + b_a$ (131)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_8b_{10}$ (132)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_9$ (133)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (7,10)$. (134)
$\longrightarrow\ b_3b_7 + b_7b_{10}$ 649/1024 (63%) (135)
$\longrightarrow\ 2b_4b_6$ 937/1024 (92%) (136)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_5b_8$ 1001/1024 (98%) (137)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_9b_{10}$ 1019/1024 (99%) (138)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_8$ 1023/1024 (99%) (139)
$\longrightarrow\ b_3b_7 + b_9b_{10}$ 1024/1024(100%) (140)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (8,10)$. (141)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_4b_9 - b_a(b_9 + b_{10}) + b_9 + b_{10}$ (142)
$\longrightarrow\ b_1b_7 + b_7b_{10} - b_a(b_9 + b_{10}) + b_9 + b_{10}$ (143)
$\longrightarrow\ b_5b_8 + b_6b_8 - b_a(b_9 + b_{10}) + b_9 + b_{10}$ (144)
$\longrightarrow\ b_3b_6 + b_a(b_3 - b_{10}) + b_{10}$ (145)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_5b_9 - b_a(b_9 + b_{10}) + b_9 + b_{10}$ (146)
$\longrightarrow\ b_6b_9 - b_a(b_9 + b_{10}) + b_6 + b_9 + 1$ (147)
$\longrightarrow\ b_1b_2 - b_9b_a + b_{10} + 1$ (148)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (8,10)$. (149)
$\longrightarrow\ 4b_3b_7$ 768/1024 (75%) (150)
$\longrightarrow\ b_2b_8 + b_8b_9$ 933/1024 (91%) (151)
$\longrightarrow\ 2b_4b_6 + b_8b_9 - b_8 - b_9 + 1$ 1005/1024 (98%) (152)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_5b_{10} + b_8b_9 - b_8 - b_9 + 1$ 1022/1024 (99%) (153)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_8b_9 + b_9b_{10} - b_8 - b_9 + 1$ 1024/1024(100%) (154)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (9,10)$. (155)
$\longrightarrow\ b_1b_6 + b_6b_{10} + b_9b_a$ (156)
$\longrightarrow\ b_4b_7 + b_7b_8$ (157)
$\longrightarrow\ b_4b_9 + b_a(b_9 - b_4) + b_4$ (158)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_8 + b_9b_a$ (159)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_2b_5 + b_9b_a$ (160)
$\longrightarrow\ b_2b_8 - b_6b_7 + b_8b_{10} + b_9b_a + 1$ (161)
$\longrightarrow\ b_2b_{10} + b_2$ (162)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (9,10)$. (163)
$\longrightarrow\ 2b_2b_3 - b_8b_9 + b_9$ 577/1024 (56%) (164)
$\longrightarrow\ 3b_8b_9$ 961/1024 (94%) (165)
$\longrightarrow\ 2b_4b_6 - b_8b_9 - b_8b_{10} + b_{10} + 1$ 1009/1024 (99%) (166)
$\longrightarrow\ 2b_5b_7 - b_8b_{10} + b_{10}$ 1021/1024 (99%) (167)
$\longrightarrow\ b_1b_6 + b_{10}$ 1024/1024(100%) (168)

DECOMPOSITION OF DEGREE-k, EXACT-k-OF-n TRINOMIALS

$b_1b_2b_3b_4 + b_2b_3b_4b_5 + b_3b_4b_5b_6$: $(k,n) = (4,6)$. (169)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + 2b_4b_5$ 43/64 (67%) (170)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_2b_3 + b_2b_5 + b_3b_6 - b_4b_5 - b_2 + 1$ 60/64 (94%) (171)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_2b_5 + b_5b_6$ 64/64(100%) (172)

$b_1b_2b_3b_4 + b_3b_4b_5b_6 + b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (4,8)$. (173)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + 2b_5b_6$ 159/256 (62%) (174)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_5 + b_7b_8$ 225/256 (88%) (175)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_3b_4 - b_5b_7 + b_6b_7 + b_7b_8 - b_6 + 1$ 244/256 (95.3%) (176)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_6b_8 + b_6$ 253/256 (98.8%) (177)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_5b_7 + b_5$ 256/256 (100%) (178)

$b_1b_2b_3b_4 + b_3b_4b_5b_6 + b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (4,8)$. (179)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + 2b_5b_6$ 159/256 (62%) (180)
$\longrightarrow\ b_3b_6 + b_7b_8 + b_3$ 212/256 (83%) (181)
$\longrightarrow\ b_2b_4 - b_5b_7 + b_7b_8 + b_4 + b_7$ 234/256 (91%) (182)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + 2b_5b_6$ 253/256 (99%) (183)
$\longrightarrow\ b_7b_8 + b_1 + b_6$ 256/256(100%) (184)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_2b_3b_4b_5b_6 + b_3b_4b_5b_6b_7 :$ $(k,n) = (5,7).$ (185)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + 2b_5b_6$ (186)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_2b_7 + b_3b_4 + b_6b_7 + b_a(b_6 + b_7 - 1) - b_6 - b_7 + 1$ (187)
$\longrightarrow\ b_1b_3 - b_2b_3 - b_2b_4 - b_2b_6 + b_a(-b_2 + b_4 - b_5 + b_6 - 1)$ (188)
$\quad + b_3b_5 + b_3b_7 + b_4b_5 + b_5b_7 + b_6b_7 + b_3 - b_4 - b_5 - b_6 - 2b_7 + 5$ (189)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_2b_6 - b_4b_5 + b_5b_6 + b_6b_7 + b_a(2b_6 + b_7) - b_6 + 1$ (190)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_5 - b_5b_7 + b_a(b_5 - 2b_6 - 1) - b_2 + b_4 + 2b_6 + 2$ (191)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_2b_3b_4b_5b_6 + b_3b_4b_5b_6b_7 :$ $(k,n) = (5,7).$ (192)
$\longrightarrow\ 2b_4b_5 + b_4b_6$ $81/128\ (63\%)$ (193)
$\longrightarrow$ $111/128\ (87\%)$ (194)
$\longrightarrow$ $122/128\ (95\%)$ (195)
$\longrightarrow$ $128/128(100\%)$ (196)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8 :$ $(k,n) = (6,8).$ (197)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_3b_5 + b_3b_8 + b_a\,(1 + b_6 - b_7)$ (198)
$\longrightarrow\ b_2b_6 + b_6b_7 + b_a\,(-b_6 + b_7) + b_6$ (199)
$\longrightarrow\ b_1b_5 - b_3b_4 + b_4b_5 + b_5b_6 + b_4$ (200)
$\longrightarrow\ -b_1b_3 + b_1b_6 - b_1b_7 + b_2b_4 - b_3b_7 - b_3b_8 + b_4b_5 + b_4b_6 - b_4b_7 + b_4b_8$ (201)
$\quad + b_5b_8 - b_6b_8 + b_7b_8 + b_a(b_2 - b_4 + b_7 + b_8) + b_1 - b_5 - b_6 + 3$ (202)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_6b_7 + b_7b_8$ (203)
$\longrightarrow\ b_2b_7 + b_7b_8 + b_8b_a + b_2$ (204)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8 :$ $(k,n) = (6,8).$ (205)
$\longrightarrow\ b_1b_6 + 2b_6b_7$ $164/256\ (64\%)$ (206)
$\longrightarrow\ b_1b_5 + b_2b_5 - b_3b_6 + b_5b_8 + b_3$ $219/256\ (86\%)$ (207)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_4b_7 + b_4b_8 - b_6 + 1$ $243/256\ (95\%)$ (208)
$\longrightarrow$ $253/256\ (99\%)$ (209)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_2b_6 + b_5b_7 - b_6b_7 + b_7b_8 - b_5 + 1$ $256/256(100\%)$ (210)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10} :$ $(k,n) = (8,10).$ (211)
$\longrightarrow\ b_3b_5 + b_5b_9 + b_5b_{10}$ (212)
$\longrightarrow\ b_1b_4 + b_4b_7 + b_4b_9$ (213)
$\longrightarrow\ b_1b_6 + b_2b_6 - b_5b_6 + b_6b_{10} + b_6$ (214)
$\longrightarrow\ b_4b_8 + 2b_8$ (215)
$\longrightarrow\ b_1b_7 + b_2b_7 - b_a(b_4 + b_6) + b_7b_9 + b_4 + 1$ (216)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_5 + b_3$ (217)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_2b_9 - b_5b_6 - b_5b_a + b_6b_9 + 2$ (218)
$\longrightarrow\ b_2b_7 + b_2 + b_{10}$ (219)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (8,10)$. (220)

$\longrightarrow\ 3b_5b_8$ 769/1024 (75%) (221)

$\longrightarrow\ 2b_2b_6 + b_4b_6$ 931/1024 (91%) (222)

$\longrightarrow\ b_1b_7 - b_5b_{10} + b_7b_9 + b_9b_{10} - b_6 + b_{10} + 1$ 984/1024 (96%) (223)

$\longrightarrow\ 3b_2b_3 + b_3b_{10} - b_6b_8 + 1$ 1011/1024 (99%) (224)

$\longrightarrow\ b_4b_7 + b_4b_8 - b_3 + b_4 - b_8 + 2$ 1019/1024 (99%) (225)

$\longrightarrow\ b_2b_3 - b_2b_4 - b_3b_4 - b_3b_8 - b_5b_{10} - b_6b_9 + b_7b_8 + b_7b_9 + b_8b_9 + b_7 + 3$ 1023/1024 (99%) (226)

$\longrightarrow\ b_2b_8 + 2b_8b_9$ 1024/1024(100%) (227)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8 + b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (6,10)$. (228)

$\longrightarrow\ 2b_3b_4 + b_7b_{10}$ 591/1024 (58%) (229)

$\longrightarrow\ 2b_3b_5 + b_5b_6$ 847/1024 (83%) (230)

$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_7b_8 + b_8b_9$ 951/1024 (93%) (231)

$\longrightarrow\ 3b_5b_6$ 995/1024 (97%) (232)

$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_3b_4 + b_9b_{10}$ 1009/1024 (99%) (233)

$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_5b_7 + b_7b_{10}$ 1018/1024 (99%) (234)

$\longrightarrow\ 2b_1b_4 - b_1b_{10} + b_2b_4 + b_4b_5 + b_4b_{10} + b_5b_8 - b_6b_8 + b_8b_9 + b_7(b_{10} - b_6 - b_5 - b_1) + 3$ 1023/1024 (99%) (235)

$\longrightarrow\ b_2b_8 + b_3b_6 + b_6b_8$ 1024/1024(100%) (236)

$b_1b_2b_3b_4 + b_4b_5b_6b_7 + b_7b_8b_9b_{10}$: $(k,n) = (4,10)$. (237)

$\longrightarrow\ b_3b_4 + b_4b_6 + b_9b_{10}$ 581/1024 (57%) (238)

$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_5b_7 - b_8b_9 + b_9b_{10} + b_9$ 759/1024 (74%) (239)

$\longrightarrow\ b_5b_6 + b_8b_9 + b_1 + b_8$ 842/1024 (82%) (240)

$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_7b_{10} - b_8b_9 + b_7 + b_8$ 935/1024 (91%) (241)

$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_4b_6 - b_8b_9 + b_8b_{10} - b_7 + b_8 + 1$ 969/1024 (95%) (242)

$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_3b_4 + b_5b_7 + b_7b_9 - b_8b_9 + b_9$ 992/1024 (97%) (243)

$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_5 + b_3b_{10} + b_4b_8 + b_5b_6 - b_4 + 1$ 1004/1024 (98%) (244)

$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_6b_7 + b_9b_{10}$ 1013/1024 (99%) (245)

$\longrightarrow\ b_1b_9 + b_7b_8 - b_8b_9 - b_9b_{10} + b_1 + b_7 + b_8 + b_9$ 1019/1024 (99%) (246)

$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_5b_6 - b_8b_9 + b_9b_{10} + b_9$ 1022/1024 (99%) (247)

$\longrightarrow\ -b_1b_5 + b_1b_8 + b_3b_7 + b_3 + b_7 + 1$ 1023/1024 (99%) (248)

$\longrightarrow\ b_1b_5 - b_1b_{10} + b_2 + b_8 - b_{10} + 2$ 1024/1024(100%) (249)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_3b_4b_5b_6 + b_4b_5b_6b_7b_8$: $(k,n) = (5,8)$. (250)

$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_4b_6 + b_4b_7 + b_a(b_7 + b_8)$ (251)

$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_3b_6 + b_6b_7$ (252)

$\longrightarrow\ b_3b_5 + b_4b_5 - b_6b_8 + b_5 + b_8 + b_9(1 + b_7)$ (253)

$\longrightarrow\ b_2b_5 + b_6b_8 + b_6$ (254)

$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_3 + b_8$ (255)

$b_1b_2b_3b_4b_5 + b_3b_4b_5b_6 + b_4b_5b_6b_7b_8 :$ $(k,n) = (5,8).$ (256)
$\longrightarrow\ b_4b_5 + 2b_5b_6$ 165/256 (64%) (257)
$\longrightarrow\ b_2b_4 + b_3b_4 + b_4b_8 - b_5b_7 + b_7$ 215/256 (84%) (258)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_6 - b_4b_5 - b_5b_7 + b_7b_8 + b_5 + b_7$ 242/256 (95%) (259)
$\longrightarrow\ b_1b_3 + b_5b_6 + b_6b_7$ 254/256 (99%) (260)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_5b_6 + b_6b_8$ 256/256(100%) (261)

DECOMPOSITION OF DEGREE-k, EXACT-k-OF-n QUADRINOMIALS

$b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 + b_2b_3b_4 :$ $(k,n) = (3,4).$ (262)
$\longrightarrow\ 2b_1b_2 + b_1b_3 + 2b_1b_4 + b_2b_3 + 2b_2b_4 + b_3b_4 - 2b_1 - 2b_2 - b_3 - 2b_4 + 3$ 13/16 (81%) (263)
$\longrightarrow\ 2b_1b_3 + b_2b_3 + b_2$ 16/16(100%) (264)

$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 + b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 + b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9 + b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10} :$ $(k,n) = (7,10).$ (265)
$\longrightarrow\ 4b_4b_5$ 769/1024 (75%) (266)
$\longrightarrow\ b_2b_6 + 2b_3b_6 + b_6b_9$ 915/1024 (89%) (267)
$\longrightarrow\ b_1b_7 + b_5b_7 + b_6b_7 + b_7b_{10}$ 974/1024 (95%) (268)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_2b_8 + b_7b_8 + b_9b_{10}$ 995/1024 (97%) (269)
$\longrightarrow\ b_2b_3 + b_3b_4 + b_3b_6 + b_9b_{10}$ 1008/1024 (98%) (270)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_2b_4 + b_9b_{10} + b_9$ 1016/1024 (99%) (271)
$\longrightarrow\ b_1b_3 - b_2b_8 + b_7b_8 + b_8b_9 + b_8b_{10} + 2b_8$ 1023/1024 (99%) (272)
$\longrightarrow\ b_1b_8 + b_2b_7 - b_5b_{10} + b_7b_8 + b_8b_9 - b_5 + 2$ 1024/1024(100%) (273)

DECOMPOSITION OF DEGREE-k, NOT EXACT-k-OF-n QUADRINOMIALS

$b_1b_2b_3b_4 + 2b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 + b_2b_3b_4 :$ $(k,n) = (4,4).$ (274)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + 4b_1b_3 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_2b_4 + b_3b_4 - b_1 - b_2 - b_3 - b_4 + 1$ 12/16 (75%) (275)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + b_1b_3 + 4b_1b_4 + b_2b_4$ 16/16(100%) (276)

$b_1b_2b_3b_4 + 2b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 + b_2b_3b_4 :$ $(k,n) = (4,4).$ (277)
$\longrightarrow\ b_1b_2 + 4b_1b_3 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_2b_4 + b_3b_4 - b_1 - b_2 - b_3 - b_4 + 1$ 12/16 (75%) (278)
$\longrightarrow\ 2b_2b_3 + 3b_2b_4 + b_3b_4$ 16/16(100%) (279)

$b_1b_2b_3b_4 + 2b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + 3b_1b_3b_4 + b_2b_3b_4 :$ $(k,n) = (4,4).$ (280)
$\longrightarrow\ 2b_1b_2 + 5b_1b_4 + b_3b_4$ (281)
$\longrightarrow\ -b_1b_2 + 3b_1b_3 + 4b_2b_3 + 2b_2b_4 - 4b_3b_4 + 4b_3 - b_4 + 1$ (282)

$b_1b_2b_3b_4 + 2b_1b_2b_3 + b_1b_3b_4 :$ $(k,n) = (4,4).$ (283)
$\longrightarrow\ 4b_1b_3$ (284)
$\longrightarrow\ 2b_1b_2 + b_1b_4 + b_2b_4$ (285)

$b_1b_2b_3b_4 + 2b_1b_2b_3 + b_1b_3b_4 :$ $(k, n) = (4, 4).$ (286)

$\longrightarrow\ 2b_1b_3 + 2b_3b_4$ $12/16\ (75\%)$ (287)

$\longrightarrow\ 3b_1b_2 + b_1b_4$ $16/16(100\%)$ (288)