

# Constructing a Competing Risks Model for the Combined Structure with Dependent Relations

Seonghwan Park · Jihyun Park · Kiho Bae · Suneung Ahn<sup>†</sup>

Department of Industrial Management Engineering, Hanyang University

## 종속적 관계를 갖는 혼합구조에 대한 경쟁적 위험모형의 구축

박성환 · 박지현 · 배기호 · 안선웅<sup>†</sup>

한양대학교 산업경영공학과

The rapid growth of engineering technology and the emergence of systemized and large-scale engineering systems have resulted in complexity and uncertainty throughout the lifecycle activities of engineering systems. This complex and large-scale engineering system consists of numerous components, but system failure can be caused by failure of any one of a number of components. There is a real difficulty in managing such a complex and large-scale system as a part. In order to efficiently manage the system and have high reliability, it is necessary to structure a system with a complex structure as a sub-system. Also, in the case of a system in which cause of failures exist at the same time, it is required to identify the correlation of the components lifetime and utilize it for the design policy or maintenance activities of the system. Competitive risk theory has been used as a theory based on this concept. In this study, we apply the competitive risk theory to the models with combined structure of series and parallel which is the basic structure of most complex engineering systems. We construct a competing risks model and propose a mathematical model of net lifetime and crude lifetime for each cause of failure, assuming that the components consisting a parallel system are mutually dependent. In addition, based on the constructed model, the correlation of cause of failure is mathematically analyzed and the hazard function is derived by dividing into net lifetime and crude lifetime.

**Keywords** : Net Lifetime, Crude Lifetime, Competing Risks Model, Bivariate Exponential Lifetime Distribution, Reliability Engineering

### 1. 서 론

공학기술의 급격한 성장과 체계화되고 대형화된 공학시스템의 등장으로 인해 공학시스템의 수명주기활동 전반에 있어서 복잡성과 불확실성이 초래되었다. 이러한 체계화되고 대형화된 공학시스템은 수많은 부품들로 구성되어 있으나, 전체 시스템의 고장은 수많은 부품들 중 어느 특정 부품의 고장에 의해 발생할 수 있다. 그러나 이러

한 체계화되고 대형화된 공학시스템을 부품 단위로 관리하는 데는 현실적인 어려움이 있다. 공학시스템을 효율적으로 관리하고 높은 신뢰도를 가지기 위해서는 복잡한 구조의 시스템을 하위체계로 구조화하여 부품 단위가 아닌 위험원인 단위로 시스템을 관리하는 활동이 필요하다. 또한 여러 위험원인들이 동시에 존재하는 시스템의 경우 부품들의 수명시간에 대한 상관관계를 규명하여 시스템의 설계정책이나 보전활동에 활용하는 것이 요구된다[8, 9]. 이러한 개념을 기반으로 하는 이론으로 경쟁적 위험이론이 사용되고 있다[4]. 본 연구에서는 대부분의 복잡한 공학시스템의 기본 구조가 되는 직렬과 병렬의 혼합 구조를

Received 3 August 2017; Finally Revised 4 September 2017;  
Accepted 5 September 2017

<sup>†</sup> Corresponding Author : sunahn@hanyang.ac.kr

가진 모형을 대상으로 경쟁적 위험이론을 적용하였다. 특히 병렬 체계를 이루는 부품들이 상호 종속인 경우에 대해 net lifetime과 crude lifetime으로 구분하여 경쟁적 위험모형을 제안하였다. 또한 구축된 모형을 바탕으로 위험원인별 상관관계를 수리적으로 해석하고 net lifetime과 crude lifetime에 대한 고장률함수를 유도하였다.

## 2. 기호와 모형설명

본 장에서는 수명이 독립적인 지수분포를 따르는 경우의 경쟁적 위험모형과 이변량 지수분포를 따르는 경우의 경쟁적 위험모형을 구축하기 위해 사용되는 기호를 정의한다. 또한 본 연구에서 제안하는 경쟁적 위험모형의 시스템 구조 모형과 전개 방식을 설명한다.

### 2.1 기호설명

본 절에서는 경쟁적 위험모형을 구축하는데 사용되는 기호를 정의한다.

$i$  : 부품번호를 나타내는 변수  $i = 1, 2, 3$

$j$  : 위험원인을 나타내는 변수  $j = A, B$

$X_i$  : 부품  $i$ 에 대한 net lifetime을 나타내는 확률변수

$X_j$  : 위험원인  $j$ 에 대한 net lifetime의 확률변수

$Y_j$  : 위험원인  $j$ 에 대한 crude lifetime의 확률변수

$S_{X_i}(t)$ : 부품  $i$ 에 대한 net lifetime의 생존함수

$f_{X_i}(t)$ : 위험원인  $i$ 에 대한 net lifetime의 고장확률밀도함수

$h_{X_i}(t)$ : 위험원인  $i$ 에 대한 net lifetime의 고장률함수

$S_{Y_j}(t)$ : 위험원인  $j$ 에 대한 net lifetime의 생존함수

$f_{Y_j}(t)$ : 위험원인  $j$ 에 대한 net lifetime의 고장확률밀도함수

$h_{Y_j}(t)$ : 위험원인  $j$ 에 대한 net lifetime의 고장률함수

$S_{Y_j}(t)$ : 위험원인  $j$ 에 대한 crude lifetime의 생존함수

$f_{Y_j}(t)$ : 위험원인  $j$ 에 대한 crude lifetime의 고장확률밀도함수

$h_{Y_j}(t)$ : 위험원인  $j$ 에 대한 crude lifetime의 고장률함수

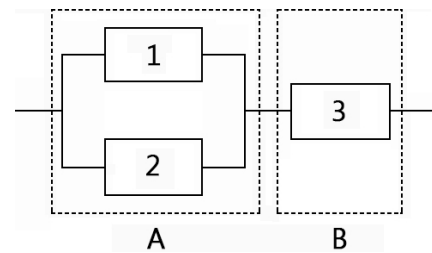
$\lambda$  : 부하분배체계의 두 부품이 모두 작동할 때의 각 부품의 고장률

$\lambda'$  : 부하분배체계의 두 부품 중 하나의 부품이 고장났을 때, 작동 중인 나머지 부품의 고장률

### 2.2 구조모형과 전개 방식

본 연구에서 대상으로 하는 경쟁적 위험모형의 시스템 구조 모형은 <Figure 1>과 같이 세 개의 부품으로 구성

되어 있다. 부품 1과 부품 2는 병렬관계를 이루고 있으며, 병렬 구조와 부품 3은 직렬로 연결되어 있다. 따라서 본 연구에서 대상으로 하는 시스템의 구조 모형은 직렬과 병렬의 혼합 구조라 할 수 있다. 시스템의 고장은 병렬 구조에서 고장이 발생하는 경우와 직렬 부분에서 고장이 발생하는 경우로 구분된다. 본 연구에서는 병렬 부분에서 발생하는 고장원인과 직렬 부분에서 발생하는 고장원인을 각각 위험원인 A와 위험원인 B로 정의한다.



<Figure 1> Structural Model of System

본 연구에서 제안하는 시스템의 구조 모형은 <Figure 1>과 같이 세 개의 부품으로 이루어져 있으며, 위험원인은 두 개로 이루어져 있다. 결국 위험원인 A에서 발생하는 고장과 위험원인 B에서 발생하는 고장이 전체 시스템의 고장의 원인이 되며, 이에 따라 시스템의 전체 수명이 결정되는 경쟁적 위험모형의 구축이 가능하다. 대부분의 체계화되고 복잡화된 공학시스템은 직렬과 병렬의 혼합 구조로 구성되어 있으며[2], 결국 본 연구에서 제시하는 경쟁적 위험모형의 시스템 구조 모형은 직렬과 병렬구조를 포함한 혼합 모형이므로, 대부분의 공학시스템의 기본 구조라고 할 수 있다. 본 연구에서는 병렬구조를 이루고 있는 부품 1과 부품 2의 관계가 서로 종속인 경우에 대하여 경쟁적 위험모형을 구축한다. 각 부품의 고장률은 모수  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 을 따르는 지수분포라고 가정하며, 각 부품들의 고장확률밀도함수, 생존함수, 고장률함수를 계산한 뒤 이를 통해 각 위험원인 A와 위험원인 B에 대한 net lifetime과 crude lifetime의 고장률함수를 유도한다.

## 3. 마샬과 올킨 모형

본 장에서는 각 부품의 수명이 상호 종속적이며 이변량 지수수명분포를 따르는 경우에 대하여 각 부품들의 고장확률밀도함수, 생존함수, 고장률함수를 계산하고 이를 통해 각 위험원인 A와 위험원인 B에 대한 net lifetime과 crude lifetime의 고장률함수를 유도한다. 특히, 이변량 지수수명분포는 가장 널리 사용되고 있는 마샬과 올킨 모형(Marshall and Olkin model)을 대상으로 하였다.

### 3.1 Net Lifetime의 고장률함수

실질적으로 하나의 부품이 고장 나면 하나 또는 그 이상의 부품이 운영상 영향을 받게 된다. 따라서 부품간의 상관관계를 나타낼 수 있는 모형을 구축하여야 한다. 마샬과 올킨 모형은 이변량 지수분포로서 표현된 모형으로 [5], 마샬과 올킨의 이변량 지수분포의 생존함수는 식 (1)과 같다[11].

$$F(x, y) = P(X > x, Y > y) = \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)), \quad x, y \geq 0 \quad (1)$$

식 (1)에서  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 는 부품 1과 부품 2의 단위시간당 고장 발생 횟수를 의미하며,  $\lambda_{12}$ 는 부품 1과 부품 2의 고장이 동시에 발생한 횟수를 의미한다.  $X$ 와  $Y$ 는 부품 1과 부품 2의 수명시간을 나타내는 확률변수를 나타낸다. 따라서  $\lambda_{12}$ 는 고장에 대한 두 부품간의 상관관계를 표현하는 시스템의 모수이다. 시스템 구조 모형은 제 2장의 <Figure 1>과 같다. 먼저 부품 1과 부품 2에 대한 고장확률밀도함수를 식 (2)와 식 (3)과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) &= \int_t^\infty \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-\lambda_1 t - (\lambda_2 + \lambda_{12})y} dy \\ &\quad + \int_0^t \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t - \lambda_2 y} dy \\ &\quad + \lambda_{12}e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_{12})t} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_{X_2}(t) &= \int_0^t \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-\lambda_1 t - (\lambda_2 + \lambda_{12})y} dy \\ &\quad + \int_t^\infty \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t - \lambda_2 y} dy \\ &\quad + \lambda_{12}e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_{12})t} \\ &= (\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t}. \end{aligned} \quad (3)$$

부품 3의 고장확률밀도함수는 식 (4)와 같이 계산할 수 있다.

$$f_{X_3}(t) = \lambda_3 \exp^{-\lambda_3 t}. \quad (4)$$

위험원인 A 즉, 부품 1과 부품 2에 의해 전체 시스템이 고장나는 경우에 대한 생존함수는 식 (5)와 같다.

$$S_A(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})a} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})a} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})a}. \quad (5)$$

위험원인 B에 대한 생존함수는 식 (6)과 같이 계산할 수 있다.

$$S_B(t) = \exp^{-\lambda_3 t}. \quad (6)$$

그래서 전체 시스템에 대한 생존함수는 AND 사상에 의해 식 (7)과 같이 두 생존함수의 곱의 형태로 표현할 수 있다. 이는 두 위험원인이 동시에 존재하며 전체 시스템의 관점에서 볼 때, 위험원인 A와 위험원인 B가 동시에 한 시스템에서 운용됨을 의미한다. 확률변수  $a$ 와  $b$ 는 각각 위험원인 A와 위험원인 B에 대한 수명시간을 의미한다.

$$S_{AB}(a, b) = \{e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})a} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})a} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})a}\} \cdot e^{-\lambda_3 b}. \quad (7)$$

위험원인 A와 위험원인 B에 대한 생존함수를 이용하여 각 위험원인별 고장확률밀도함수를 유도할 수 있으며, 이를 이용하여 각 위험원인별 고장률함수를 유도할 수 있다.

$$h_A(t) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t} + (\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})t}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})t}} \quad (8)$$

$$h_B(t) = \lambda_3. \quad (9)$$

마찬가지로, 시스템 전체의 생존함수를 이용하여 전체 시스템의 고장률함수를 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_{AB}(t) &= \frac{f_{AB}(t)}{S_{AB}(t)} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}} \\ &\quad + \frac{(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}} \\ &\quad - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}} \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2 Crude lifetime의 고장률함수

본 항에서는 위험원인별 crude lifetime에 대한 경쟁적 위험모형을 구축하고 각 위험원인별 고장률함수를 유도한다. Crude lifetime이란 모든 위험원인이 동시에 운용 중인 상태에서, 특정 위험원인에 의해 전체 시스템의 고장이 발생하는 시간을 말한다. 따라서 crude lifetime은 시스템 운용 단계에서 수집된 고장 데이터를 통해 추정될 수 있으며, 이를 통해 각 위험원인에 대한 crude lifetime의 고장률함수를 유도할 수 있다.

식 (11)은 위험원인 A에 대한 생존함수이며, 이는 위험원인 A에 의해 시스템의 고장이 발생하는 조건 하에, 임의의 시점  $t$ 에서 시스템이 정상 작동 중인 확률을 의미

한다. 동일한 방법으로 위험원인  $B$ 에 대한 crude lifetime의 생존함수를 계산할 수 있다.

$$S_{Y_A}(t) = P[T \geq t | J = A] = \frac{P[T \geq t, J = A]}{P[J = A]}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\lambda_1 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{\frac{\lambda_1 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} + \frac{\lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3}} \\ &+ \frac{\frac{\lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{\frac{\lambda_1 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} + \frac{\lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3}} \\ &- \frac{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{\frac{\lambda_1 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} + \frac{\lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3}} \end{aligned}$$

식 (11)과 식 (12)에서 계산한 각 위험원인에 대한 생존함수를 미분하여 위험원인  $A$ 와 위험원인  $B$ 에 대한 고장확률밀도함수를 유도할 수 있으며, 생존함수와 고장확률밀도함수는 식 (13)과 식 (14)에서와 같이 고장률함수를 유도하는데 이용된다.

$$S_{Y_B}(t) = \frac{P(J \geq t, J = B)}{P(J = B)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3}} \\ &+ \frac{\frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3}} \\ &- \frac{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t}}{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{Y_A}(t) = \frac{f_{Y_A}(t)}{S_{Y_A}(t)} &= \frac{\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} \\ &+ (\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} \\ &- (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} \end{aligned}}{\begin{aligned} &\frac{\lambda_1 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} \\ &+ \frac{\lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} \\ &- \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3)t} \end{aligned}} \end{aligned} \quad (13)$$

$$h_{Y_B}(t) = \frac{f_{Y_B}(t)}{S_{Y_B}(t)} = \frac{\begin{aligned} &e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t} + e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t} \\ &- e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})t} \end{aligned}}{\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t} \\ &+ \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t} \\ &- \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_3} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})t} \end{aligned}} \quad (14)$$

따라서 식 (13)과 식 (14)와 같이 위험원인  $A$ 와 위험원인  $B$ 에 대하여 경쟁적 위험모형을 구축하고 각 위험원인에 대한 고장률함수를 유도할 수 있다.

#### 4. 프로인드 모형

본 장에서는 제 2장에서 제시한 시스템의 병렬 구조가 부하분배체계를 이루며, 독립적인 부품군과 직렬 관계로 연결된 시스템에 대하여 net lifetime과 crude lifetime으로 구분하여 경쟁적 위험모형을 구축한다. 공학의 물리적인 성질을 기반으로 하는 대표적인 수명 분포로서 Freund의 부하분배모형이 있다[6]. 대부분의 공학시스템의 고장은 이러한 물리적 성질로부터 기인한다. 그래서 다수의 부품으로 구성된 시스템에서 하나의 고장은 다른 부품의 고장에 영향을 미칠 수 있다. 따라서 부하분배체계를 이루는 부품들의 고장은 상호 종속적이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 부하분배체계를 이루는 두 부품이 동일한 부품인 경우를 가정하였다. 먼저, 부품 단위와 위험원인 단위의 생존함수, 고장확률밀도함수, 고장률함수를 유도하고, 이를 통해 경쟁적 위험모형을 구축한 뒤, 각 위험원인에 대한 생존함수, 고장확률밀도함수, 고장률함수를 유도한다. Freund 부하분배모형은 이변량 지수분포로 표현된 모형이다. Freund 부하분배모형의 결합확률밀도함수는 식 (15)와 같다[3].

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2' \exp[-\lambda_2' x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2') x_1], & \text{if } 0 < x_1 < x_2 \\ \lambda_1 \lambda_2' \exp[-\lambda_1' x_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1') x_2], & \text{if } 0 < x_2 < x_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서  $x_1$ 와  $x_2$ 는 부품 1과 부품 2의 생존시간에 대한 확률변수를 나타낸다. 확률변수  $x_1$ 와  $x_2$ 는 각각 모수가  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 인 지수분포를 따르는 것으로 가정하였다. 시스템 운용 상태에서 부품 1이 고장을 일으키는 경우, 부품 1에 가해지던 부하가 부품 2에 전가되어 부품 2의 고장률이  $\lambda_2$ 에서  $\lambda_2'$ 로 바뀌게 된다. 마찬가지로 부품 2가 고장을 일으키는 경우, 부품 2에 가해지던 부하가 부품 1

에 전가되면서 부품 1의 고장률은  $\lambda_1$ 에서  $\lambda'_1$ 로 바뀌게 된다. 이와 같이 부하분배체계를 이루는 각 부품들은 서로의 고장에 영향을 미치게 되고, 결국 각 부품들은 상호 종속성을 가진다고 할 수 있다[7]. 본 장에서는 병렬 구조를 이루고 있는 부하분배체계와 하나의 독립적인 부품군이 직렬로 연결된 시스템을 대상으로 경쟁적 위험모형을 제안한다. 먼저 각 부품에 대한 생존함수, 고장확률밀도함수, 고장률함수를 계산하고, 이를 이용하여 각 위험원인별 생존함수, 고장확률밀도함수, 고장률함수를 유도한다. 제안하는 경쟁적 위험모형의 시스템 구조 모형은 제 2장의 <Figure 1>과 동일하다. 부하분배체계의 결합확률밀도함수 식 (15)를 이용해 부품 1과 부품 2의 고장확률밀도함수  $f_{X_1}(t)$ ,  $f_{X_2}(t)$ 를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$f_{X_1}(t) = \int_0^t \lambda'_1 \lambda_2 \exp[-\lambda'_1 t - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1)x_2] dx_2 \quad (16)$$

$$+ \int_t^\infty \lambda_1 \lambda'_2 \exp[-\lambda'_2 x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_2)t] dx_2$$

$$= \frac{(\lambda_1 - \lambda'_1)(\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1}$$

$$+ \frac{\lambda'_1 \lambda_2 \exp(-\lambda'_1 t)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1}$$

$$f_{X_2}(t) = \int_0^t \lambda'_1 \lambda_2 \exp[-\lambda'_2 t - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_2)x_1] dx_1 \quad (17)$$

$$+ \int_t^\infty \lambda_1 \lambda'_2 \exp[-\lambda'_1 x_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1)t] dx_1$$

$$= \frac{(\lambda_2 - \lambda'_2)(\lambda_1 + \lambda_2) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_2}$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda'_2 \exp(-\lambda'_2 t)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_2}$$

부품 3의 고장확률밀도함수는 제 3장의 식 (4)와 동일하다.

$$f_{X_3}(t) = \lambda_3 \exp(-\lambda_3 t). \quad (18)$$

부품별 고장확률밀도함수와 생존함수를 이용하여 아래와 같이 각 부품들의 고장률함수를 유도할 수 있다.

$$h_{X_1}(t) \quad (19)$$

$$= \frac{\lambda'_1 \lambda_2 \exp(-\lambda'_1 t) + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda'_1) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}{\lambda_2 \exp(-\lambda'_1 t) + (\lambda_1 - \lambda'_1) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}$$

$$h_{X_2}(t) \quad (20)$$

$$= \frac{\lambda'_1 \lambda_2 \exp(-\lambda'_2 t) + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda'_2) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}{\lambda_1 \exp(-\lambda'_2 t) + (\lambda_2 - \lambda'_2) \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}$$

$$h_{X_3}(t) = \lambda_3. \quad (21)$$

#### 4.1 Net Lifetime의 고장률함수

구축한 경쟁적 위험모형을 기반으로 위험원인별 net lifetime의 고장률함수를 구하기에 앞서 병렬 구조를 가지는 부하분배체계 즉, 위험원인 A에 대한 생존함수를 유도해야 한다. 부하분배체계는 본 연구에서 제안하는 시스템의 구조 모형은 <Figure 1>과 같이 병렬 구조로 이루어져 있다. 그래서 부하분배체계를 이루고 있는 부품들 중 어느 하나의 부품에서 고장이 발생하더라도, 고장 나지 않은 나머지 부품에 의해 부하분배체계는 계속 작동할 수 있다[1]. 부하분배체계의 생존 시간에 대한 확률변수를  $T$ 라 하면  $T = \max(X_1, X_2)$ 로 표현할 수 있고, 이에 따라 위험원인 A에 대한 net lifetime의 생존함수는 식 (22)와 같이 구할 수 있다.

$$S_{X_A}(t) = P[T = \max(X_1, X_2) > t] \quad (22)$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \exp(-\lambda'_2 t) - \lambda'_2 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_2} \right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \exp(-\lambda'_1 t) - \lambda'_1 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda'_1} \right)$$

앞서 밝힌 바와 같이 본 연구에서 제안하는 시스템 구조 모형에서의 부하분배체계는 동일 부품으로 이루어져 있는 것으로 가정하였으므로, 부품 1의 고장률  $\lambda_1$ 과 부품 2의 고장률  $\lambda_2$ 는  $\lambda$ 로 같다고 간주하여 계산하였다. 또한 부하분배체계를 구성하는 두 부품 중 어느 하나의 부품이 고장나는 경우, 작동 중인 잔여 부품의 고장률은  $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'$ 로 표현하였다. 그래서 식 (22)에 이를 대입하여 변형하면 식 (23)을 유도할 수 있다. 변형된 식 (23)을 통해 위험원인별 net lifetime의 생존함수, 고장확률밀도함수를 계산하고 이를 통해 고장률함수를 유도할 수 있다.

$$S_{X_A}(t) = \frac{\lambda' e^{-2\lambda t} - 2\lambda e^{-\lambda' t}}{\lambda' - 2\lambda}, \quad (23)$$

$$f_{X_A}(t) = \frac{2\lambda\lambda'}{\lambda' - 2\lambda} (e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda' t}), \quad (24)$$

$$h_{X_A}(t) = \frac{2\lambda\lambda'}{\lambda'e^{-2\lambda t} - 2\lambda e^{-\lambda' t}}(e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda' t}). \quad (25)$$

부품 3의 고장률  $\lambda_3$ 는 보다 해석적인 수리 모형으로 표현하기 위해  $\mu$ 로 대체하였다. 따라서 위험원인  $B$ 에 대한 생존함수, 고장확률밀도함수, 고장률함수는 아래와 같다. 위험원인  $B$ 는 하나의 부품으로 구성된 부품군이므로, net lifetime의 생존함수, 고장확률밀도함수, 고장률함수와 동일한 결과값을 가지게 됨을 알 수 있다.

$$S_{X_B}(t) = e^{-\mu t}, \quad (26)$$

$$f_{X_B}(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad (27)$$

$$h_{X_B}(t) = \mu. \quad (28)$$

## 4.2 Crude Lifetime의 고장률함수

본 항에서는 위험원인별 crude lifetime에 대한 경쟁적 위험모형을 구축하고, 각 위험원인별 고장률함수를 유도한다. 식 (29)는 병렬 구조를 구성하고 있는 부하분배체제인 위험원인  $A$ 에 대한 생존함수를 의미한다. 이는 위험원인  $A$ 에 의해 시스템의 고장이 발생했을 때, 임의의 시점  $t$ 에서 시스템이 정상 작동 중인 확률을 의미한다.

$$S_{Y_A}(t) = P[T \geq t | J = A] = \frac{P[T \geq t, J = A]}{P[J = A]} \quad (29)$$

$$= \frac{(\lambda' + \mu)e^{-(2\lambda + \mu)t} - (2\lambda + \mu)e^{-(\lambda' + \mu)t}}{\lambda' - 2\lambda}.$$

식 (29)를 미분하여 위험원인  $A$ 에 대한 고장확률밀도함수를 식 (30)과 같이 유도할 수 있다.

$$f_{Y_A}(t) = \frac{(\lambda' + \mu)(2\lambda + \mu)}{\lambda' - 2\lambda} \{e^{-(2\lambda + \mu)t} - e^{-(\lambda' + \mu)t}\} \quad (30)$$

동일한 방식으로 위험원인  $B$ 에 대한 생존함수와 고장확률밀도함수를 각각 식 (31)과 식 (32)로 계산할 수 있다.

$$S_{Y_B}(t) = \frac{P[T \geq t, J = B]}{P[J = B]} \quad (31)$$

$$= \frac{\lambda'(\lambda' + \mu)e^{-(2\lambda + \mu)t} - 2\lambda(2\lambda + \mu)e^{-(\lambda' + \mu)t}}{\lambda'(\lambda' + \mu) - 2\lambda(2\lambda + \mu)},$$

$$f_{Y_B}(t) = \frac{\lambda'(\lambda' + \mu)(2\lambda + \mu)e^{-(2\lambda + \mu)t} - 2\lambda(\lambda' + \mu)(2\lambda + \mu)e^{-(\lambda' + \mu)t}}{\lambda'(\lambda' + \mu) - 2\lambda(2\lambda + \mu)}. \quad (32)$$

각 위험원인에 대한 생존함수와 고장확률밀도함수를 이용하여 위험원인별 crude lifetime에 대한 고장률함수를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$h_{Y_A}(t) = \frac{f_{Y_A}(t)}{S_{Y_A}(t)} \quad (33)$$

$$= \frac{(\lambda' + \mu)(2\lambda + \mu)\{e^{-(2\lambda + \mu)t} - e^{-(\lambda' + \mu)t}\}}{(\lambda' + \mu)e^{-(2\lambda + \mu)t} - (2\lambda + \mu)e^{-(\lambda' + \mu)t}},$$

$$h_{Y_B}(t) = \frac{f_{Y_B}(t)}{S_{Y_B}(t)} \quad (34)$$

$$= \frac{(\lambda' + \mu)(2\lambda + \mu)\{\lambda'e^{-(2\lambda + \mu)t} - 2\lambda e^{-(\lambda' + \mu)t}\}}{\lambda'(\lambda' + \mu)e^{-(2\lambda + \mu)t} - 2\lambda(2\lambda + \mu)e^{-(\lambda' + \mu)t}}.$$

## 5. 결 론

첫째, 본 연구는 직렬과 병렬의 혼합 구조 모형에 대해 부품별과 위험원인별로 구분하여 경쟁적 위험모형을 구축하였으며, 병렬 구조를 이루는 부품들이 상호 종속인 경우를 대상으로 하였다. 특히, 병렬 구조를 이루는 부품들의 수명시간에 대한 모형으로 마살과 올킨 모형, 그리고 프로인드의 부하분배모형을 사용하였다. 먼저, 마살과 올킨 모형을 기반으로 구축한 경쟁적 위험모형에서  $\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}$ 는 두 부품들의 상관관계를 나타낸다. 또한 두 부품 간에 상호 독립인 경우는  $\lambda_{12} = 0$ 가 되며, 이를 경쟁적 위험모형에 대입하면 부품과 위험원인들의 관계가 모두 독립인 지수수명모형을 얻을 수 있다. 프로인드의 부하분배모형을 기반으로 구축한 경쟁적 위험모형에서는 동일한 부품으로 이루어진 이중부품부하분배체제를 대상으로 하였다. 특히 부하분배체제에서 어느 하나의 부품에서 고장이 발생했을 때, 작동중인 잔여 부품의 고장률  $\lambda'$ 와  $\lambda$ 가 동일한 경우는 두 부품이 서로의 고장률에 영향을 미치지 않는다는 것을 의미한다. 그래서  $\lambda'$ 에  $\lambda$ 를 대입하게 되면 동일 부품이 독립적으로 이루어진 지수수명모형과 같은 결과값을 가진다. 둘째, net lifetime과 crude lifetime의 관계를 구분하여 경쟁적 위험모형을 구축하였다. 특히 crude lifetime은 전체 시스템의 운용 단계에서 관찰되어 수집된 수명 데이터로서 이러한 고장 데이터는 위험원인별 고장시간에 대한 정보를 가진다. 이는 crude lifetime의 생존함수를 추정하는데 사용되며, 추정된 crude lifetime의 생존함수는 crude lifetime의 고장률함수를 추정하는데 사용된다. 셋째, 추정된 net lifetime

과 crude lifetime의 고장률함수를 비교할 수 있다. 식 (8)은 위험원인  $A$ 에 대한 고장률함수이다. 식 (8)은 net lifetime에 대한 위험원인  $A$ 의 생존함수와 고장확률밀도함수를 통해 유도되었음을 알 수 있다. 넷째, net lifetime과 crude lifetime에 대한 개념을 수리적이고 직관적으로 해석하였으며, 특히 crude lifetime이 갖는 의미와 그 쓰임을 명확히 나타내었다. 먼저, 시스템 운용 단계에서 net lifetime의 고장률함수에 대한 정보가 있다면, 해당 시스템의 보전정책이나 설비정책에 유용하게 활용할 수 있다. 만약 고장률에 대한 정보를 통해 효율적인 보전정책이나 설비정책에 활용할 수 있다면, 시스템의 가용도 및 보전활동에 소요되는 비용적 측면에 있어서 긍정적인 효과를 가져올 수 있다. 또한 설계 단계에서 시스템의 net lifetime에 대한 고장률함수를 알고 있다면, 해당 시스템의 설계 정책을 수립할 때 이를 반영할 수 있다. 다섯째, 본 연구에서는 시스템을 이루는 부품들의 수명이 지수분포를 따른다고 가정하였으나, 수명이 지수분포가 아닌 다른 분포를 따르는 경우로 확대하여 모형을 구축할 필요가 있다. 그러나 수명이 지수분포 이외의 다른 분포를 갖는 경우에는 계산이 매우 복잡하고 일정한 형태의 수리 모형을 구축하는데 어려움이 있을 수 있다. 또한 본 연구에서는 위험원인들이 상호 독립이라고 가정하였으나, 보다 현실적인 모형을 제시하기 위해서는 위험원인들이 상호 종속인 경우의 경쟁적 위험모형을 구축할 필요가 있다. 더불어 추후 연구 사항으로 본 연구에서 제시한 시스템의 구조 모형에 해당하는 실제 공학시스템을 모색하여 연구 내용을 적용한다면, 해당 공학시스템의 신뢰도를 추정하는 수리 모형을 구축하는데 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

## Acknowledgement

This work was supported by the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Korea government(MEST), (NRF-2016R1A2B1008163).

## References

- [1] Asha, G., Jagathnath Krishna, K.M., and Kundu, D., An Extension of the Freund's Bivariate Distribution to Model Load-Sharing Systems, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 2016, Vol. 35, No. 3, pp. 207-226.
- [2] Franco, M. and María Vivo, J., Reliability properties of series and parallel systems from bivariate exponential models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2002, Vol. 31, No. 12, pp. 2349-2360.
- [3] Freund, J.E., A bivariate extension of the exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 1961, Vol. 56, No. 296, pp. 971-977.
- [4] Gross, A.J., A competing risk model : a one organ subsystem plus a two organ subsystem, *IEEE Transactions on Reliability*, 1973, Vol. 22, No. 1, pp. 24-27.
- [5] Gumbel, E.J., Bivariate exponential distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 1960, Vol. 55, No. 292, pp. 698-707.
- [6] Hong, Y.W., Lee, J.M., and Cha, Y.J., On the estimation of reliability functions for the Freund model, *Journal of the Korean Data and Information Science Society*, 1997, Vol. 8, No. 1, pp. 79-83.
- [7] Kim, H.T., Reliability Modeling with Load-Shared Data and Product-Ordering Decisions Considering Uncertainty in Logistics Operations, Georgia Institute of Technology, 2004.
- [8] Kim, J.J. and Kim, W.J., A method and application on reliability test, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 1997, Vol. 20, No. 44, pp. 393-400.
- [9] Kim, Y.S. and Chung, Y.B., A study on reliability prediction of system with degrading performance parameter, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2015, Vol. 38, No. 4, pp. 142-148.
- [10] Leemis, L.M., Reliability : probabilistic models and statistical methods. Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [11] Marshall, A.W. and Olkin, I., A multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 1967, Vol. 62, No. 317, pp. 30-44.

## ORCID

Seonghwan Park | <http://orcid.org/0000-0003-4856-1547>  
 Jihyun Park | <http://orcid.org/0000-0002-3844-4614>  
 Kiho Bae | <http://orcid.org/0000-0002-6826-9159>  
 Suneung Ahn | <http://orcid.org/0000-0002-8752-0265>