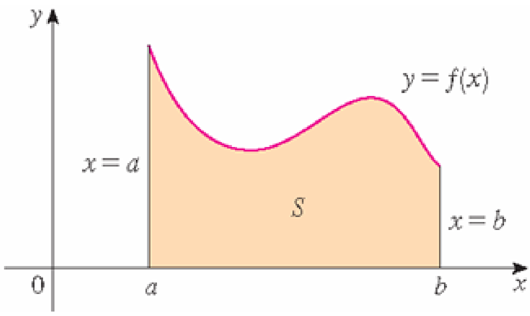
Chương 2: TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN VÀ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN (INTEGRALS AND APPLICATIONS OF INTEGRATION)

2.1 DIỆN TÍCH VÀ QUÃNG ĐƯỜNG (AREAS AND DISTANCES):

♦ BÀI TOÁN DIỆN TÍCH (THE AREA PROBLEM):

Tìm diện tích của một miền S nằm bên dưới đường cong liên tục $y = f(x)$, với $f(x) \geq 0$ và x từ a đến b:

$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$



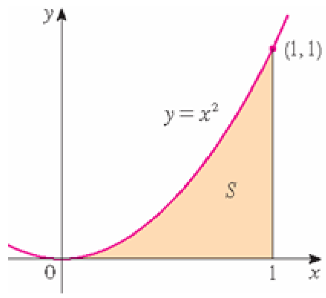
Giải:

Tương tự như ý tưởng giải bài toán tiếp tuyến, để tìm hệ số góc của đường tiếp tuyến, ta xấp xỉ hệ số góc của tiếp tuyến với hệ số góc của cát tuyến rồi lấy giới hạn

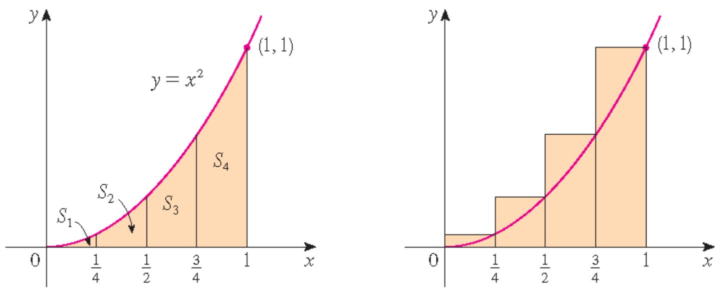
Với bài toán này, ta sẽ xấp xỉ miền S bởi các hình chữ nhật rồi lấy giới hạn của diện tích của các hình chữ nhật này khi cho số các hình chữ nhật tăng lên. Ví dụ sau sẽ minh họa cho quá trình đó.

Example 1: Use rectangles to estimate the area under the parabola $y = x^2$ from 0 to 1.

Giải:



Giả sử ta chia S thành 4 dải S_1, S_2, S_3, và S_4 bằng cách vẽ những đường thẳng đứng $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, và $x = \frac{3}{4}$ rồi dựng các hình chữ nhật như trong hình (b)



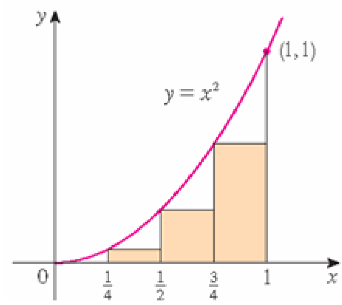
(a) (b)

Ta xấp xỉ mỗi dải bởi một hình chữ nhật có đáy giống dải và chiều cao là cạnh bên phải của dải. Vậy chiều cao của hình chữ nhật là giá trị của hàm $y = x^2$ tại các điểm $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ và 1. Đặt R_4 là tổng diện tích của những hình chữ nhật xấp xỉ (bên phải), ta được

$$R_4 = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

Từ hình (b) ta thấy rằng diện tích A của S nhỏ hơn R_4, vậy $A < 0.46875$

Nếu ta xấp xỉ mỗi dải bởi một hình chữ nhật có đáy giống dải và chiều cao là cạnh bên trái của dải, khi đó tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ (bên trái) là:



$$L_4 = \frac{1}{4}.0^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Ta có diện tích A của S lớn hơn L_4,

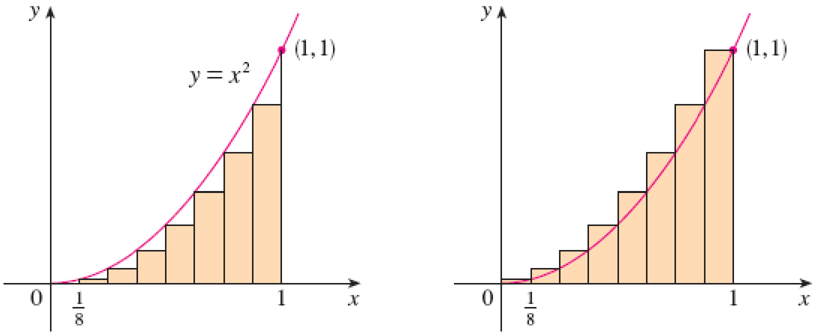
vậy: $0.21875 < A < 0.46875$

Lập lại quá trình trên với một số lớn hơn các dải, ví dụ khi S chia thành 8 dải có chiều rộng bằng nhau, tính toán tương tự ta có:

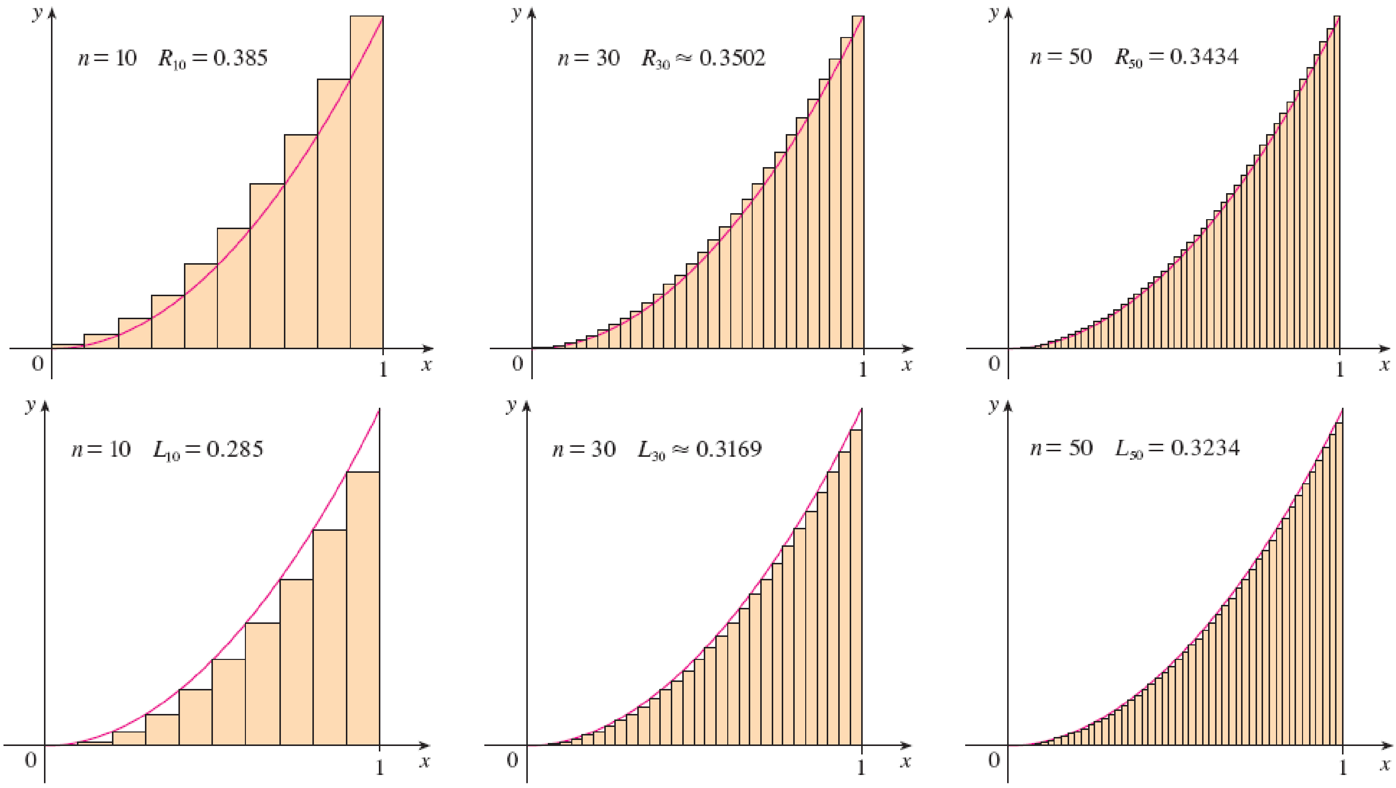
$R_8 = 0.3984375$, $L_8 = 0.2734375$ và

$0.2734375 < A < 0.3984375$

Ta có thể đạt được các ước lượng A tốt hơn khi tăng số dải (xem các hình vẽ dưới)



(a) Using left endpoints (b) Using right endpoints



Xem bảng tính kết quả của L_n và R_n khi n tăng

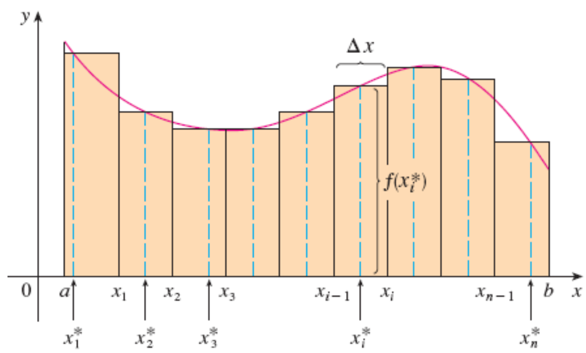
n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Nhận xét: Ta có $L_n < A < R_n$, và khi n tăng, sai khác giữa diện tích các hình chữ nhật trái và phải càng nhỏ, vì vậy ta sẽ tìm được A gần đúng với giá trị thực

Khi $n = 1000$ (chia S thành 1000 dải) thì diện tích A của S xấp xỉ $(L_{1000} + R_{1000})/2 \approx 0.3333335$.

DEFINITION: Diện tích A của miền S nằm bên dưới đồ thị của hàm liên tục f là giới hạn của tổng các diện tích những hình chữ nhật xấp xỉ:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + ... + f(x_n^*)\Delta x\right]$$



Lưu ý:

- Khi chia miền S thành n dải có chiều rộng bằng nhau, ký hiệu là $S_1, S_2, ..., S_n$, chiều rộng mỗi dải là: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. n dải này chia $[a,b]$ thành n đoạn con:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]\,(x_0 = a, x_n = b)$$

Ta có: $x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ x_3 = a + 3\Delta x,\ ...$

- Xấp xỉ dải thứ i bởi hình chữ nhật có chiều rộng là Δx và chiều cao là $f(x_i)$. Khi đó:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\right]$$

- Xấp xỉ dải thứ i bởi hình chữ nhật có chiều rộng là Δx và chiều cao là $f(x_{i-1})$. Khi đó:

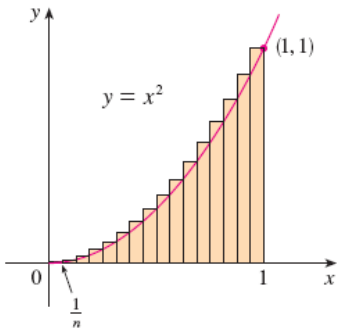
$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x\right]$$

- Xấp xỉ dải thứ i bởi hình chữ nhật có chiều rộng là Δx và chiều cao là $f(x_i^*)$, với điểm mẫu (*the sample point*) x_i^* lấy bất kỳ thuộc khoảng $[x_{i-1}, x_i]$. Khi đó:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + ... + f(x_n^*)\Delta x\right]$$

Example 2: For the region S in Example 1, show that the sum of the areas of the upper approximating rectangles approaches $\dfrac{1}{3}$, that is,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$



Giải: Chia miền S thành n dải có chiều rộng bằng nhau, mỗi hình chữ nhật bên phải có chiều rộng là $\dfrac{1}{n}$ và chiều cao là giá trị của hàm $y = x^2$ tại các điểm $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}, ..., \dfrac{n}{n} = 1$. Khi đó:

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Diện tích A của miền S đã cho là:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Example 3: Let A be the area of the region that lies under the graph of $f(x) = e^{-x}$, between $x = 0$ and $x = 2$.

(a) Using right endpoints, find an expression for A as a limit. Do not evaluate the limit.

(b) Estimate the area by taking the sample points to be midpoints and using four subintervals and then ten subintervals.

Giải:

a. Với $a = 0$ và $b = 2$, chiều rộng của một khoảng con là $\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$

Vậy $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$, và $x_n = 2n/n$.

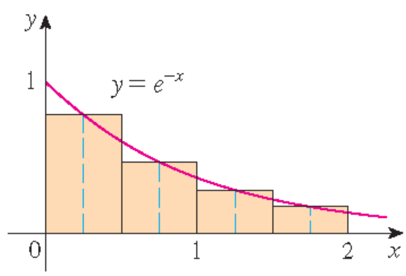
Tổng diện tích của những hình chữ nhật xấp xỉ là

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x$$
$$= e^{-x_1}\Delta x + e^{-x_2}\Delta x + ... + e^{-x_n}\Delta x = e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + ... + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right)$$

Theo định nghĩa, diện tích A là:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + ... + e^{-2n/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

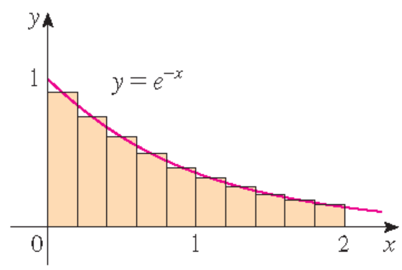
b. Với $n = 4$, các khoảng con có chiều rộng $\Delta x = 0.5$ là $[0,0.5]$, $[0.5,1]$, $[1,1.5]$, và $[1.5,2]$. Trung điểm của những khoảng này là $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$, và $x_4^* = 1.75$, và tổng các diện tích của 4 hình chữ nhật xấp xỉ:



$$M_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)$$
$$= f(0.25)\Delta x + f(0.75)\Delta x + f(1.25)\Delta x + f(1.75)\Delta x$$
$$= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}\right) \approx 0.8557$$

Vậy ta có một ước lượng cho diện tích: $A \approx 0.8557$

Với $n = 10$, các khoảng con có chiều rộng $\Delta x = 0.2$ là $[0,0.2],[0.2,0.4],...,[1.8,2]$ và các trung điểm là $x_1^* = 0.1, x_2^* = 0.3, x_3^* = 0.5, ..., x_{10}^* = 1.9$. Khi đó



$$A \approx M_{10} = f(0.1)\Delta x + f(0.3)\Delta x + f(0.5)\Delta x + ... + f(1.9)\Delta x$$
$$= 0.2\left(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + ... + e^{-1.9}\right) \approx 0.8632$$

♦ BÀI TOÁN QUÃNG ĐƯỜNG (DISTANCE PROBLEM):

Tìm quãng đường đi được của một vật trong suốt một khoảng thời gian nào đó nếu vận tốc của vật biết được ở mọi thời điểm.

Nếu vận tốc là không đổi, khi đó bài toán dễ dàng giải quyết theo công thức

quãng đường = vận tốc * thời gian

Nhưng nếu vận tốc thay đổi, thật không dễ để tìm quãng đường đi được. Chúng ta nghiên cứu bài toán trong ví dụ dưới đây.

Example 4: Suppose the odometer on our car is broken and we want to estimate the distance driven over a 30-second time interval. We take speedometer readings every five seconds and record them in the following table:

Thời gian (s)	0	5	10	15	20	25	30
Vận tốc (ft/s)	25	31	35	43	47	46	41

Trong 5 giây đầu tiên, nếu ta lấy vận tốc trong suốt khoảng đó là vận tốc ban đầu (*25ft/s*), ta có xấp xỉ quãng đường đi được trong 5 giây đầu tiên: $25\, ft/s * 5s = 125\, ft$

Tương tự, trong khoảng thời gian 5 giây thứ 2, và những khoảng thời gian sau đó ta cũng chọn vận tốc không đổi và lấy giá trị tại thời điểm bắt đầu của mỗi 5 giây, khi đó tổng quãng đường đã đi được:

$$(25*5)+(31*5)+(35*5)+(43*5)+(47*5)+(46*5)=1135\,\text{ft}$$

Nếu ta sử dụng vận tốc không đổi và lấy giá trị ở cuối mỗi 5 giây thay cho vận tốc bắt đầu mỗi 5 giây, khi đó quãng đường đã đi được là:

$$(31*5)+(35*5)+(43*5)+(47*5)+(46*5)+(41*5)=1215\,\text{ft}$$

Để có thể tính được quãng đường chính xác hơn, ta ghi lại vận tốc của xe trong các khoảng thời gian nhỏ hơn.

Tổng quát, giả sử một vật di chuyển với vận tốc $v = f(t)$, với $a \le t \le b$ và $f(t) \ge 0$ (vật luôn chuyển động theo hướng dương). Ta lấy vận tốc tại những thời điểm $t_0(=a), t_1, t_2, \ldots, t_n(=b)$ làm vận tốc xấp xỉ không đổi trên từng khoảng. Nếu những khoảng thời gian này bằng nhau thì thời gian trên từng khoảng là $\Delta t = (b-a)/n$. Trong suốt khoảng thời gian đầu tiên nếu lấy vận tốc không đổi $f(t_0)$ thì quãng đường đi được xấp xỉ $f(t_0)\Delta t$. Tương tự, quãng đường đi được trong suốt khoảng thời gian thứ hai xấp xỉ $f(t_1)\Delta t$,…, và quãng đường đi được trong suốt khoảng thời gian $[a,b]$ xấp xỉ là:

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \ldots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

Nếu chúng ta sử dụng vận tốc ở điểm biên bên phải thay cho điểm biên bên trái, ta có xấp xỉ quãng đường đi được là:

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \ldots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Tần số đo vận tốc càng nhiều, ước lượng của chúng ta càng chính xác, vì vậy, để có chính xác quãng đường d đã đi được ta tính giới hạn:

$$d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

2.2 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (THE DEFINITE INTEGRAL):

DEFINITION OF A DEFINITE INTEGRAL: Nếu f là một hàm số xác định với $a \le x \le b$, chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn con bằng nhau, có chiều rộng: $\Delta x = (b-a)/n$. Giả sử $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ là các điểm biên của những đoạn con này và $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ là các *điểm mẫu* bất kì trong những đoạn con $\left(x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]\right)$. Khi đó tích phân xác định của f từ a đến b là: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$, nếu giới hạn này tồn tại, và ta nói f khả tích (integrable) trên $[a,b]$

Lưu ý:

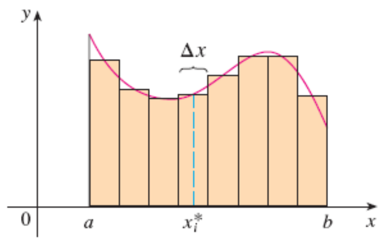
- "∫": dấu tích phân (integral sign), $f(x)$: hàm lấy tích phân (integrand), a, b là các cận lấy tích phân (limits of integration), a: cận dưới (lower limit), b: cận trên (upper limit), dx: chỉ biến độc lập là x

- Tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ là một số, nó không phụ thuộc vào x. Chúng ta có thể sử dụng bất kì ký tự nào để thay thế x mà không thay đổi giá trị của tích phân:

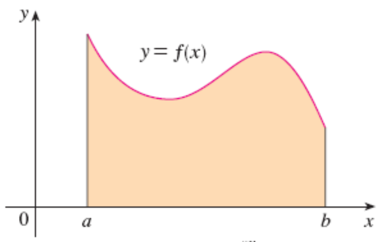
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

- Tổng $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ gọi là tổng Riemann (*Riemann sum*).

- Nếu $f \ge 0$, tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ có thể hiểu như là diện tích miền dưới đường cong $y = f(x)$ từ a đến b

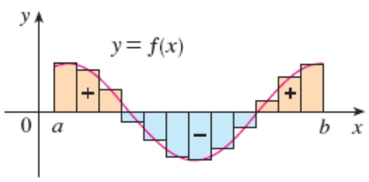


If $f(x) \geqslant 0$, the Riemann sum $\Sigma f(x_i^*)\Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

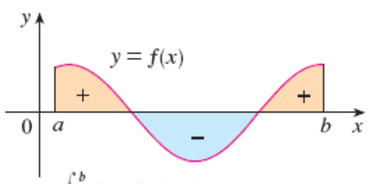


If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b

- Nếu f nhận cả giá trị dương và âm, tích phân xác định là hiệu của các diện tích: $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$, với A_1 là diện tích của miền nằm trên trục hoành và bên dưới đồ thị của hàm f, và A_2 là diện tích của miền nằm dưới trục hoành và bên trên đồ thị của hàm số f.



$\Sigma f(x_i^*)\Delta x$ is an approximation to the net area



$\int_a^b f(x)dx$ is the net area

THEOREM: Nếu f là hàm liên tục trên $[a,b]$, hoặc nếu f chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn bước nhảy thì f khả tích trên $[a,b]$; tức là tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại.

THEOREM: Nếu f khả tích trên $[a,b]$ thì:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \text{ với } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

Example 1: Express $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 + x_i\sin x_i\right)\Delta x$ as an integral on the interval $[0,\pi]$.

Giải: Xét $f(x) = x^3 + x\sin x$, theo định lí trên, ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 + x_i\sin x_i\right)\Delta x = \int_0^{\pi}\left(x^3 + x\sin x\right)dx$$

Example 2:

a. Evaluate the Riemann sum for $f(x) = x^3 - 6x$, taking the sample points to be right endpoints and $a = 0,\ b = 3$, và $n = 6$.

b. Evaluate $\int_0^3\left(x^3 - 6x\right)dx$

Giải:

a. Với $n = 6$ chiều rộng của những khoảng con: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-0}{6} = \dfrac{1}{2}$

Và các điểm biên phải là $x_1 = 0.5, x_2 = 1.0, x_3 = 1.5, x_4 = 2.0, x_5 = 2.5$, và $x_6 = 3.0$. Vậy tổng Riemann:

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i) = f(0.5)\Delta x + f(1.0)\Delta x + f(1.5)\Delta x + f(2.0)\Delta x + f(2.5)\Delta x + f(3.0)\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) = -3.9375$$

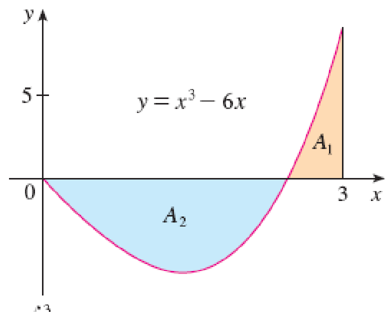
b. Với n khoảng con, ta có: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$ và $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{3}{n}, \dots, x_i = \dfrac{3i}{n}$. Sử dụng điểm biên bên phải, ta có:

$$\int_0^3\left(x^3 - 6x\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27}{n^3}i^3 - \frac{18}{n}i\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{81}{4} - 27 = -6.75$$



$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Example 3:

(a) Set up an expression for $\int_1^3 e^x dx$ as a limit of sums.

(b) Use a computer algebra system to evaluate the expression.

Giải:

(a) Ta có: $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ và $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2}{n}$, nên:

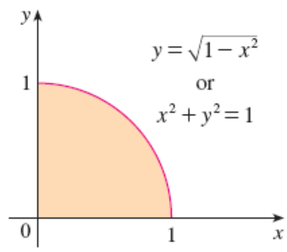
$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{2}{n},\ x_2 = 1 + \frac{4}{n},\ \ldots,\ x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

Do đó, $\displaystyle\int_1^3 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}$.

(b) Sử dụng máy tính ta tính được $\int_1^3 e^x dx = e^3 - e$.

Example 4: Evaluate the following integrals by interpreting each in terms of areas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^3 (x-1)\,dx$

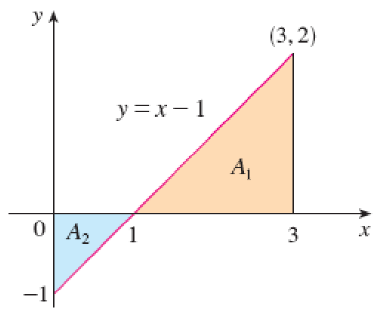


Giải:

a. Vì $f(x) = \sqrt{1-x^2} \ge 0$, ta có thể xem tích phân $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ là diện tích miền bên dưới đường cong $y = \sqrt{1-x^2}$ từ 0 đến 1

Ta có: $y^2 = 1 - x^2 \to x^2 + y^2 = 1$ nên đồ thị của f là một phần tư đường tròn bán kính 1 . Do đó: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$

b. Xem đồ thị của hàm số $y = x - 1$.



Ta tính tích phân $\int_0^3 (x-1)\,dx$ như hiệu của diện tích 2 tam giác

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2.2) - \frac{1}{2}(1.1) = 1.5$$

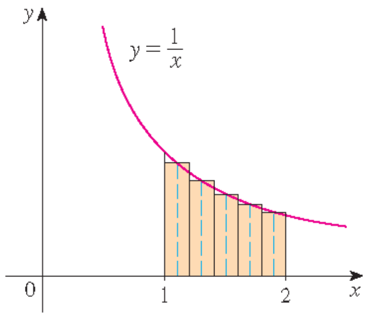
♦ QUY TẮC TRUNG ĐIỂM (THE MIDPOINT RULE)

Khi tính tích phân, ta thường chọn điểm mẫu x_i^* là điểm biên phải của mỗi đoạn con thứ *i* vì nó thuận lợi cho việc tính giới hạn. Nhưng nếu mục đích là đi tìm xấp xỉ của tích phân thì việc chọn x_i^* là trung điểm của mỗi đoạn con sẽ tốt hơn, điểm đó thường kí hiệu là $\overline{x_i}$

MIDPOINT RULE: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x = \Delta x\left[f(\overline{x_1}) + \ldots + f(\overline{x_n})\right]$

với $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $\overline{x_i} = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ là trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$

Example 5: Use the Midpoint Rule with $n=5$ to approximate $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.



Giải: Điểm biên của 5 đoạn con là 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, và 2.0 vì vậy các trung điểm là 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, và 1.9.

Chiều rộng của các đoạn con: $\Delta x=\frac{2-1}{5}=\frac{1}{5}$. Theo quy tắc trung điểm:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \Delta x\left[f(1.1)+f(1.3)+f(1.5)+f(1.7)+f(1.9)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right)\approx 0.691908$$

♦ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (PROPERTIES OF THE DEFINITE INTEGRAL)

Giả sử f và g là những *hàm liên tục*. Ta có:

1. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx=0$
3. $\int_a^b cdx=c(b-a)$, c là hằng số tùy ý
4. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$
7. $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

Example 6: Use the properties of integrals to evaluate $\int_0^1 (4+3x^2)dx$.

Giải: $\int_0^1 (4+3x^2)dx=\int_0^1 4dx+\int_0^1 3x^2dx=\int_0^1 4dx+3\int_0^1 x^2dx=4(1-0)+3\frac{1}{3}=5$

Example 7: If it is known that $\int_0^{10} f(x)dx=17$ and $\int_0^8 f(x)dx=12$, find $\int_8^{10} f(x)dx$.

Giải: Ta có $\int_8^{10} f(x)dx=\int_8^0 f(x)dx+\int_0^{10} f(x)dx=-\int_0^8 f(x)dx+\int_0^{10} f(x)dx=-12+17=5$

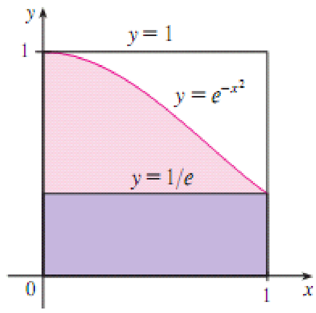
• CÁC TÍNH CHẤT SO SÁNH CỦA TÍCH PHÂN (COMPARISON PROPERTIES OF THE INTEGRAL):

1. Nếu $f(x)\ge 0$ với $a\le x\le b$ thì $\int_a^b f(x)\ge 0$

2. Nếu $f(x)\ge g(x)$ với $a\le x\le b$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

3. Nếu $m\le f(x)\le M$ với $a\le x\le b$ thì $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

Example 8: Use Property 3 to estimate $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.



Giải: Ta có hàm $y=e^{-x^2}$ giảm trên [0,1]

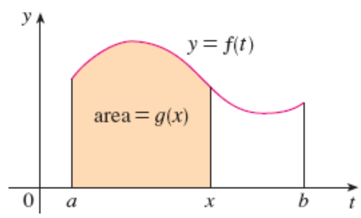
$\rightarrow e^{-1}\le e^{-x^2}\le e^0=1\rightarrow e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$

Vậy $e^{-1}\approx 0.367\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$.

2.3 ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH (THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS):

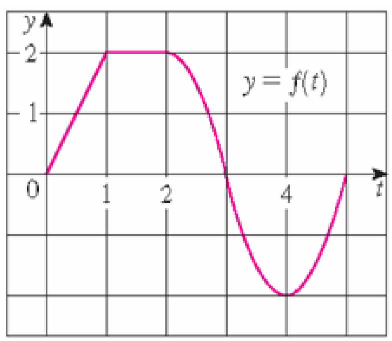
Định lý thiết lập mối liên hệ giữa hai nhánh của giải tích: phép tính vi phân và phép tính tích phân. Phép tính vi phân nảy sinh từ bài toán tiếp tuyến, trong khi phép tính tích phân xuất hiện từ một vấn đề dường như không có gì liên quan là bài toán diện tích. Newton, Issac Barrow (1630-1677) đã khám phá ra rằng hai vấn đề này thực sự có mối liên hệ gần gũi. Thực ra, ông nhận ra rằng đạo hàm và tích phân là hai quá trình ngược nhau. Định lý cơ bản của giải tích cho chính xác mối quan hệ ngược giữa đạo hàm và tích phân.

Phần đầu của định lí cơ bản đề cập đến những hàm được định nghĩa bởi phương trình có dạng $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ với f là một *hàm liên tục* trên $[a,b]$ và x biến đổi giữa *a* và *b*. Quan sát ta thấy rằng g chỉ phụ thuộc vào x, đóng vai trò là cận trên của tích phân. Nếu cố định x thì tích phân $\int_a^x f(t)dt$ là một số xác định. Nếu chúng ta cho x thay đổi thì số $\int_a^x f(t)dt$ cũng thay đổi và định nghĩa là một hàm số của biến x và kí hiệu là $g(x)$.

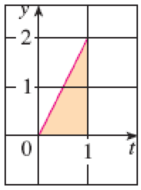


Nếu f là một hàm số dương thì $g(x)$ được hiểu như là diện tích miền nằm bên dưới đồ thị của hàm f từ a đến x, với x có thể thay đổi từ a đến b

Example 1: If is the function whose graph is shown in Figure and $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, find the values of $g(0), g(1), g(2), g(3), g(4)$, and $g(5)$. Then sketch a rough graph of g.



Giải: Ta có: $g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$.



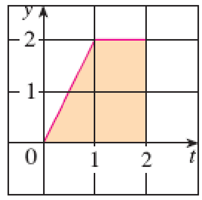
$g(1) = 1$

$g(1)$ là diện tích của tam giác

$$g(1)=\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}(1.2)=1$$

Để tìm $g(2)$ ta cộng vào $g(1)$ diện tích của hình chữ nhật:

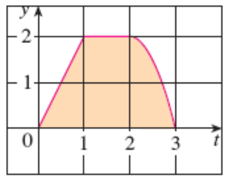
$$g(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt=1+(1.2)=3$$



$g(2) = 3$

Ước lượng diện tích của miền nằm bên dưới đồ thị của hàm số f từ 2 đến 3 khoảng 1.3, vì thế

$$g(3)=g(2)+\int_2^3 f(t)\,dt\approx 3+1.3=4.3$$

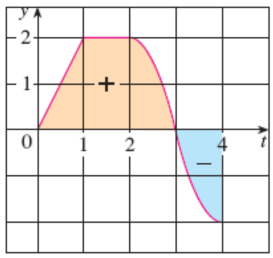


$g(3) \approx 4.3$

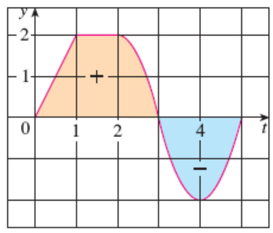
Với $t>3$, ta có $f(t)<0$:

$$g(4)=g(3)+\int_3^4 f(t)\,dt\approx 4.3+(-1.3)=3.0$$

$$g(5)=g(4)+\int_4^5 f(t)\,dt\approx 3+(-1.3)=1.7$$



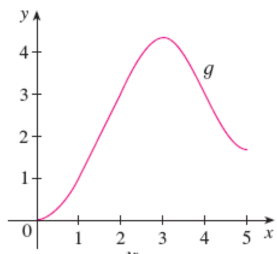
$g(4) \approx 3$



$g(5) \approx 1.7$

Phát họa đồ thị của hàm g:

Vì $f(t)$ dương với $t<3$ nên g tăng cho tới $x=3$ và đạt giá trị cực đại tại đó. Với $x>3$, g giảm vì $f(t)$ âm.



$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

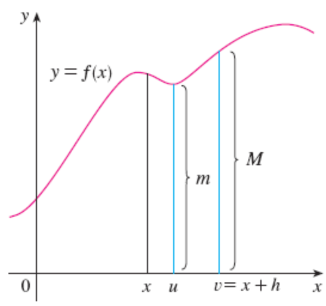
THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS, PART 1: Nếu f liên tục trên $[a,b]$, khi đó hàm g được định nghĩa bởi $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ a\le x\le b$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b) và $g'(x)=f(x)$

Chứng minh: Nếu x và $x+h$ thuộc khoảng (a,b), khi đó:

$$g(x+h)-g(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\left(\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right)-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Với $h\neq 0$, ta có

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$



Giả sử $h>0$, vì f liên tục trên $[x,x+h]$, theo định lí giá trị cực trị, tồn tại các số u và v trong $[x,x+h]$ sao cho $f(u)=m$ và $f(v)=M$

với m và M là giá trị cực tiểu và cực đại tuyệt đối của hàm f trên $[x, x+h]$:

$$m \le f(t) \le M, \quad x \le t \le x+h$$

$$\to mh \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le Mh \to f(u)h \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le f(v)h \to f(u) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(v)$$

Hay $$f(u) \le \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \le f(v)$$

[chứng minh tương tự bất đẳng thức trên cho trường hợp $h<0$]

Cho $h \to 0$, thì $u \to x$, $v \to x$ (vì u, v nằm giữa x và x+h). Ngoài ra

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

Và $$\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$ (vì f liên tục tại x)

Theo định lí kẹp: $$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x) \qquad (*)$$

Nếu $x=a$ hoặc b, đẳng thức (*) có thể hiểu như giới hạn một phía. Vậy g liên tục trên $[a,b]$.

Example 2: Find the derivative of the function $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

Giải: Vì $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ liên tục, theo định lí trên, ta có: $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Example 3: Find $\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t dt$.

Giải: Đặt $u = x^4$, ta có:

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t dt = \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} \sec t dt\right)\frac{du}{dx} = \sec u \frac{du}{dx} = \sec\left(x^4\right).4x^3$$

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS, PART 2:

Nếu f liên tục trên $[a,b]$, khi đó $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, với F là một nguyên hàm bất kì của f, có nghĩa $F' = f$

Chứng minh: Đặt $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Vì $g'(x) = f(x)$ nên g là một nguyên hàm của f

Nếu F là một nguyên hàm khác của f trên $[a,b]$, thì $F(x) = g(x) + C$, $C = const$

Khi $x = a$: $$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Vậy $$F(b) - F(a) = \left[g(b)+C\right] - \left[g(a)+C\right] = g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Example 4: Evaluate the integral $\int_1^3 e^x dx$.

Giải: Hàm $f(x)=e^x$ liên tục trên R và có một nguyên hàm là $F(x)=e^x$, vậy:

$$\int_1^3 e^x dx = F(3)-F(1)=e^3-e$$

Example 5: Find the area under the parabola $y=x^2$ from 0 to 1

Giải: Một nguyên hàm của $f(x)=x^2$ là $F(x)=\frac{1}{3}x^3$. Diện tích cần tìm là

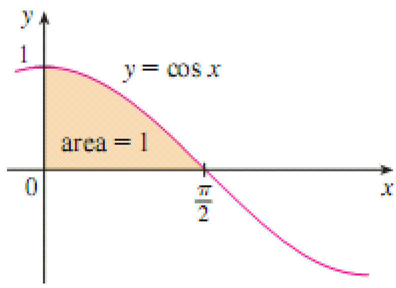
$$A=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Example 6: Evaluate $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

Giải: Hàm $f(x)=1/x$ có nguyên hàm là $F(x)=\ln|x|$ nên:

$$\int_3^6 \frac{1}{x}dx=\ln x\Big]_3^6=\ln 6-\ln 3=\ln 2$$

Example 7: Find the area under the cosine curve from 0 to b, where $0\le b\le \pi/2$.



Giải: Nguyên hàm của $f(x)=\cos x$ là $F(x)=\sin x$, nên:

$$A=\int_0^b \cos x dx=\sin x\Big]_0^b=\sin b-\sin 0=\sin b$$

Example 8: What is wrong with the following calculation?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}dx=\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^3=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$$

Giải: Kết quả trên không đúng vì $f(x)=\frac{1}{x^2}>0\rightarrow\int_a^b f(x)dx>0$.

Thực ra vì hàm f không liên tục trên $[-1,3]$ (có một điểm gián đoạn vô cùng tại $x=0$) nên không ứng dụng được định lý cơ bản của giải tích.

2.4 TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (INDEFINITE INTEGRALS):

Hàm $F(x)$ là tích phân bất định của hàm $f(x)$, ký hiệu $\int f(x)dx$ nếu $F'(x)=f(x)$

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)\ \text{ có nghĩa }\ F'(x)=f(x)}$$

Ví dụ, ta có thể viết $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$ vì $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=x^2$. Kết hợp công thức trên với định lí *the fundamental theorem of calculus, part 2* ta có thể viết: $\int_a^b f(x)dx=\int f(x)dx\Big]_a^b$

TABLE OF INDEFINITE INTEGRALS:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + C$$

♦ **Quy ước**: Ta chấp nhận một công thức tích phân bất định tổng quát có thể chỉ hợp lệ trên một khoảng nào đó mà thôi. Chẳng hạn, ta viết $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$ được hiểu công thức hợp lệ trên khoảng $(0,\infty)$ hoặc $(-\infty,0)$

Example 1: Find the general indefinite integral $\int \left(10x^4 - 2\sec^2 x\right)dx$

Giải: Sử dụng bảng tích phân bất định, ta có

$$\int \left(10x^4 - 2\sec^2 x\right)dx = 10\int x^4 dx - 2\int \sec^2 x\,dx = 10\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

Example 2: Evaluate $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$.

Giải: $$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

Example 3: Evaluate $\int_0^3 \left(x^3 - 6x\right)dx$.

Giải: $$\int_0^3 \left(x^3 - 6x\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = -6.75$$

Example 4: Find $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ and interpret the result in terms of areas.

Giải: Theo định lí cơ bản:

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = \left.2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1} x\right]_0^2 = -4 + 3\tan^{-1} 2$$

Dùng máy tính, ta xấp xỉ được giá trị chính xác này là: $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$

Example 5: Evaluate $\int_1^9 \left(\frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\right)dt$.

Giải: $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt = \int_1^9 \left(2 + t^{1/2} - t^{-2}\right)dt = \left(2t + \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\right)\Big|_1^9 = 32\frac{4}{9}$

2.5 QUY TẮC THẾ (THE SUBSTITUTION RULE):

THE SUBSTITUTION RULE: Nếu $u = g(x)$ là một hàm khả vi có miền giá trị là khoảng I và f liên tục trên I thì $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

Example 1: Find $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$

Giải: Ta thay thế $u = x^4 + 2$, vi phân của u là $du = 4x^3dx$. Do đó, $x^3dx = du/4$, khi đó

$$\int x^3 \cos(x^4+2)dx = \int \cos u.\frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

Example 2: Evaluate $\int \sqrt{2x+1}dx$

Giải: Đặt $u = 2x+1 \to du = 2dx \to dx = du/2$

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Example 3: Find $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Giải: Đặt $u = 1 - 4x^2 \to du = -8xdx \to xdx = -\frac{1}{8}du$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Example 4: Calculate $\int e^{5x}dx$.

Giải: Đặt $u = 5x \to du = 5dx \to dx = \frac{1}{5}du$

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

Example 5: Find $\int \sqrt{1+x^2}x^5dx$.

Giải: Đặt $u = 1 + x^2 \to du = 2xdx \to xdx = du/2$

$$\int \sqrt{1+x^2}x^5dx = \int \sqrt{1+x^2}x^4.xdx = \int \sqrt{u}(u-1)^2\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - 2.\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$=\frac{1}{7}\left(1+x^2\right)^{7/2}-\frac{2}{5}\left(1+x^2\right)^{5/2}+\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}+C$$

Example 6: Calculate $\int \tan x dx$

Giải: Ta có $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.

Đặt $u=\cos x \rightarrow du=-\sin x dx$. Vậy:

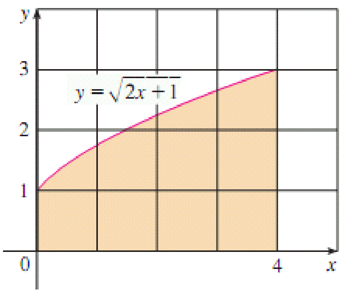
$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

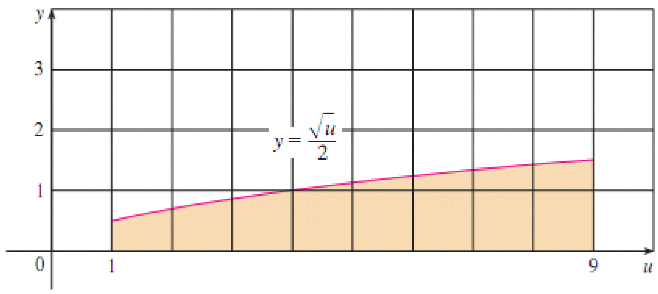
> THE SUBSTITUTION RULE FOR DEFINITE INTEGRALS: Nếu g' liên tục trên $[a,b]$ và f liên tục trên miền giá trị của $u=g(x)$ thì $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

Example 7: Evaluate $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

Giải: Đặt $u=2x+1 \rightarrow dx=du/2$, $u(0)=1$, và $u(4)=9$

Khi đó $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{3}\left(9^{3/2}-1^{3/2}\right) = \frac{26}{3}$



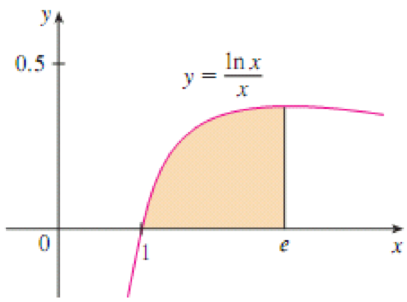


Example 8: Evaluate $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

Giải: Đặt $u=3-5x \rightarrow du=-5dx \rightarrow dx=-du/5$, $u(1)=-2, u(2)=-7$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7} = \frac{1}{14}$$

Example 9: Calculate $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.



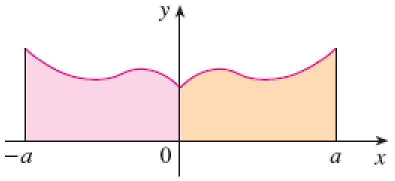
Giải: $u=\ln x \rightarrow du=dx/x$, $u(1)=0, u(e)=1$. Do đó

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 udu = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

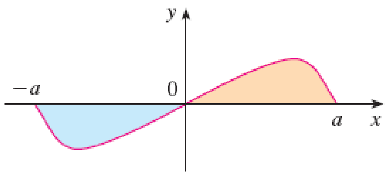
INTEGRALS OF SYMMETRIC FUNCTIONS: Cho f liên tục trên $[-a,a]$

a. Nếu f là hàm chẵn $[f(-x)=f(x)]$, khi đó $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

b. Nếu f là hàm lẻ $[f(-x)=-f(x)]$, khi đó $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$



f even, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



f odd, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Example 10: Calculate $\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx$.

Giải: Vì $f(x)=x^6+1$ là hàm chẵn, vậy:

$$\int_{-2}^{2}(x^6+1)dx = 2\int_{0}^{2}(x^6+1)dx = 2\left(\frac{1}{7}x^7+x\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(\frac{128}{7}+2\right) = \frac{284}{7}$$

Example 11: Tính $\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx$

Giải: Hàm $f(x)=\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}$ là hàm lẻ nên $\int_{-1}^{1}\frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx = 0$

2.6 TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN (INTEGRATION BY PARTS):

Ta đã biết quy tắc đạo hàm của tích hai hàm khả vi f và g là:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$\to \int[f(x)g'(x)+g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x).$$

Hay: $\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx}$

Đặt $u=f(x)$, $x=g(x)$ thì $du=f'(x)dx$, $dv=g'(x)dx$. Thay vào công thức trên ta có công thức tích phân từng phần: $\boxed{\int udv = uv-\int vdu}$

Công thức tích phân từng phần đối với tích phân xác định: $\boxed{\int_a^b udv = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu}$

Example 1: Find $\int x\sin xdx$

Giải: Đặt: $u=x$, $dv=\sin xdx$. Ta có: $du=dx$, $v=-\cos x$.

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$\int x\sin xdx = -x\cos x+\int\cos xdx = -x\cos x+\sin x+C$$

Example 2: Evaluate $\int \ln x dx$

Giải: Đặt: $u = \ln x$, $dv = dx$. Ta có: $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$.

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$$

Example 3: find $\int t^2 e^t dt$

Giải: Đặt: $u = t^2$, $dv = e^t dt$. Ta có: $du = 2tdt$, $v = e^t$.

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta được: $\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int te^t dt$.

Sử dụng tiếp một lần nữa tích phân từng phần:

Đặt: $u = t$, $dv = e^t dt$. Ta có: $du = dt$, $v = e^t \to \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$.

Vậy: $\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\left(te^t - e^t + C\right) = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \quad \left(C_1 = -2C\right)$

♦ **Lưu ý:** Khi tính tích phân từng phần, ta thường ưu tiên đặt u là hàm theo thứ tự sau: Lượng giác ngược, Logarithm, Lũy thừa, Mũ, Lượng giác

Example 4: Evaluate $\int e^x \sin x dx$

Giải: Đặt: $u = e^x$, $dv = \sin x dx$, suy ra: $du = e^x dx$, $v = -\cos x$, ta có:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần:

Đặt: $u = e^x$, $dv = \cos x dx$, suy ra: $du = e^x dx$, $v = \sin x$, ta có:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Vậy $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \longrightarrow 2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$

Hay : $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x\left(\cos x - \sin x\right) + C$

Example 5: Calculate $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$

Giải: Đặt: $u = \tan^{-1} x$, $dv = dx$. Ta có: $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$

$$\to \int_0^1 \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

Xét tích phân: $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$. Vậy: $\int_0^1 \tan^{-1} x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

Example 6: Prove the reduction formula: $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$

Giải: Đặt: $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$. Ta có: $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = -\cos x$

Theo công thức tích phân từng phần ta được:

$$\int \sin^n xdx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int \sin^n xdx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int \sin^n xdx$$

$$\rightarrow n\int \sin^n xdx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx$$

Vậy: $\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} xdx$

♦ TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC (TRIGONOMETRIC INTEGRALS)

Phương pháp để tính tích phân: $\int \sin^m x\cos^n xdx$

a. Nếu số mũ của cosine là lẻ ($n = 2k+1$), ta lấy ra một nhân tử cosine và dùng công thức: $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ để biểu diễn các nhân tử còn lại:

$$\int \sin^m x\cos^{2k+1} xdx = \int \sin^m x\cos^{2k} x\cos xdx = \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos xdx$$

rồi sử dụng phép thế $u = \sin x$ để giải.

b. Nếu số mũ của sine là lẻ ($m = 2k+1$), ta lấy ra một nhân tử sine và dùng công thức: $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ để biểu diễn các nhân tử còn lại

$$\int \sin^{2k+1} x\cos^n xdx = \int \sin^{2k} x\sin x\cos^n xdx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x\sin xdx$$

rồi sử dụng phép thế $u = \cos x$ để giải

c. Nếu số mũ của sine và cosine là chẵn, ta sử dụng công thức góc nhân đôi:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \qquad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Example 1: Evaluate $\int \cos^3 xdx$

Giải: Ta có: $\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x\cos xdx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cos xdx$

Sử dụng phép thế: Đặt $u = \sin x \rightarrow du = \cos xdx$, ta được:

$$\int \cos^3 xdx = \int \left(1-u^2\right)du = u - \frac{1}{3}u^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Example 2: Find $\int \sin^5 x\cos^2 xdx$

Giải: Ta có: $\int \sin^5 x\cos^2 xdx = \int \sin^4 x\cos^2 x\sin xdx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 x\cos^2 x\sin xdx$

Đặt $u = \cos x \rightarrow du = -\sin xdx$, ta được:

$$\int \sin^5 x\cos^2 xdx = \int \left(1-u^2\right)^2 u^2(-du) = -\int \left(u^2 - 2u^4 + u^6\right)du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

Example 3: Evaluate $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$

Giải: Ta có: $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_o^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Example 4: Find $\int \sin^4 x dx$

Giải: $\int \sin^4 x dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

Phương pháp để tính tích phân: $\int \tan^m x \sec^n x dx$

a. Nếu số mũ của secant là chẵn ($n = 2k, k \geq 2$), ta lấy ra một nhân tử $\sec^2 x$ và dùng công thức $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ để biểu diễn các nhân tử còn lại:

$$\int \tan^m x \sec^{2k} x dx = \int \tan^m x\left(\sec^2 x\right)^{k-1} \sec^2 x dx = \int \tan^m x\left(1+\tan^2 x\right)^{k-1} \sec^2 x dx$$

rồi sử dụng phép thế $u = \tan x$ để giải.

b. Nếu số mũ của tangent là lẻ ($m = 2k+1$), ta lấy ra một nhân tử sec*x*tan*x* và dùng công thức $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ để biểu diễn các nhân tử còn lại:

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^n x dx = \int\left(\tan^2 x\right)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx = \int\left(\sec^2 x - 1\right)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx$$

rồi sử dụng phép thế $u = \sec x$ để giải.

Example 5: Evaluate $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$

Giải: Ta có: $\int \tan^6 x \sec^4 x dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^6 x\left(1+\tan^2 x\right)\sec^2 x dx$

Sử dụng phép thế: Đặt $u = \tan x \rightarrow du = \sec^2 x dx$, ta được:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x dx = \int u^6\left(1+u^2\right)du = \int\left(u^6+u^8\right)du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

Example 6: Find $\int \tan^5 \theta \sec^7 \theta d\theta$

Giải: $\int \tan^5 \theta \sec^7 \theta d\theta = \int \tan^4 \theta \sec^6 \theta \sec\theta \tan\theta d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta d\theta$

Đặt $u = \sec\theta \rightarrow du = \sec\theta \tan\theta d\theta$, ta có:

$$\int \tan^5 \theta \sec^7 \theta d\theta = \int (u^2-1)^2 u^6 du \int (u^{10} - 2u^8 + u^6)du = \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{1}{11}\sec^{11}\theta - \frac{2}{9}\sec^9\theta + \frac{1}{7}\sec^7\theta + C$$

Công thức: $\boxed{\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C}$

Chứng minh:

$$\int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Example 6: Find $\int \tan^3 x dx$

Giải: Ta có $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

suy ra: $\int \tan^3 x dx = \int \tan x \tan^2 x dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1) dx$

$$= \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

Example 8: Find $\int \sec^3 x dx$

Giải: Đặt $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x dx \rightarrow du = \sec x \tan x dx$, $v = \tan x$, dùng công thức tích phân từng phần: $\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1) dx$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

Áp dụng công thức trên: $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

Để tính các tích phân: $(a)\ \int \sin mx \cos nx dx$, $(b)\ \int \sin mx \sin nx dx$, $(c)\ \int \cos mx \cos nx dx$ ta sử dụng các đẳng thức tương ứng:

$$(a)\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$(b)\ \sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(c)\ \cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Example 9: Evaluate $\int \sin 4x \cos 5x dx$

Giải: Ta có:

$$\int \sin 4x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2}(\sin(-x) + \sin 9x) dx = \frac{1}{2}\int(-\sin x + \sin 9x) dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{9}\cos x\right) + C$$

♦ **ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC (TRIGONOMETRIC SUBSTITUTION):**

Để tính tích phân hàm có chứa căn thức, ta thường đổi biến sang các hàm lượng giác. Dạng và cách đổi biến được thể hiện ở bảng sau:

Expression	Subtitution	Identity
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2 t=\cos^2 t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t,\ -\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2 t=\sec^2 t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t,\ 0\le t<\frac{\pi}{2}$ or $\pi\le t<\frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 t-1=\tan^2 t$

Example 1: Evaluate $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

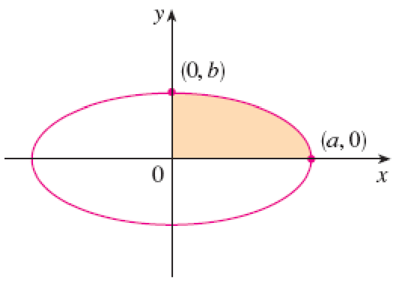
Giải: Đặt: $x=\sin 3t$, điều kiện: $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ (để $\sin t$ có hàm ngược)

$$\to dx=3\cos t dt \to \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=\sqrt{9\cos^2 t}=3\left|\cos t\right|=3\cos t$$

Vậy: $$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{3\cos t}{9\sin^2 t}3\cos t dt=\int\cot^2 t dt=\int\left(\csc^2 t-1\right)dt=-\cot t-t+C$$

Example 2: Find the area enclosed by the ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Giải: Ta có: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\to y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$



Do tính đối xứng của ellipse, diện tích A cần tìm là:

$$A=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (0\le x\le a)$$

Đặt: $x=a\sin t$, điều kiện: $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\to dx=a\cos t dt$

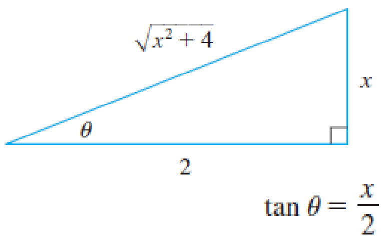
Đổi cận tích phân: $x=0\to t=0$; $x=a\to t=\frac{\pi}{2}$. Vậy:

$$A=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\left(a\cos t\right)dt=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt$$

$$=2ab\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=2ab\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}=\pi ab$$

Nếu $a=b=r$, ta có công thức tính diện tích hình tròn là πr^2

Example 3: Find $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$



Giải: Đặt $x=2\tan t$, điều kiện: $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\to dx=2\sec^2 t dt$

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4(\tan^2 t+1)}=\sqrt{4\sec^2 t}=2\left|\sec t\right|=2\sec t$$

Ta có: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{2\sec^2 t dt}{4\tan^2 t.2\sec t} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}dt$

Mà: $\frac{\sec t}{\tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}.\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$

Đặt $u = \sin t$, ta có: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{\csc t}{4} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

Example 4: Find $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Giải: Với bài toán này ta có thể đặt $x = 2\tan t$, nhưng để đơn giản hơn ta đặt $u = x^2+4$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

Example 5: Find $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$

Giải: Đặt : $x = a\sec t$, điều kiện: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ hoặc $\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$

$$\rightarrow dx = a\sec t\tan t dt \rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2 t - 1\right)} = \sqrt{a^2\tan^2 t} = a\left|\tan t\right| = a\tan t$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}dt = \int \sec t dt = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1, \quad C_1 = C - \ln a$$

Vậy: $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C}$

Example 6: Find $\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

Giải: $\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4x^2+9}\right)^3$

Đặt $x = \frac{3}{2}\tan t \rightarrow dx = \frac{3}{2}\sec^2 t dt$, $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\tan^2 t + 9} = 3\sec t$

Đổi cận: khi $x = 0 \rightarrow \tan t = 0 \rightarrow t = 0$, khi $x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \tan t = \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{27}{8}\tan^3 t}{27\sec^3 t}\frac{3}{2}\sec^2 t dt = \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 t}{\sec t}dt = \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt = \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\sin t dt$$

Đặt $u=\cos t \to du=-\sin t dt$, đổi cận: $t=0\to u=1$, $t=\dfrac{\pi}{3}\to u=\dfrac{1}{2}$, do đó:

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^2}{u^2}du = \frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}}\left(1-u^{-2}\right)du = \frac{3}{16}\left[u+\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{32}$$

Example 7: Evaluate $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

Giải: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx$, đặt $u=x+1\to du=dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}du$$, đặt $u=2\sin t\to du=2\cos t dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{2\sin t-1}{2\cos t}2\cos t dt = \int\left(2\sin t-1\right)dt = -2\cos t - t + C$$

Vậy $$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

♦ TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ (INTEGRATION OF RATIONAL FUNCTIONS):

Xét hàm hữu tỷ $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức.

Nếu $\deg(P(x)) \ge \deg(Q(x))$ (degree: bậc), chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$, $S(x)$ là đa thức, $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$

Trường hợp 1: Nếu mẫu số $Q(x)$ là một tích các nhân tử tuyến tính rời nhau dạng:

$$Q(x)=\left(a_1x+b_1\right)\left(a_2x+b_2\right)\ldots\left(a_kx+b_k\right)$$

Ta biểu diễn: $$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\ldots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Example 1: Find $\displaystyle\int \frac{\left(x^3+x\right)}{x-1}dx$

Giải: Ta có: $$\int \frac{\left(x^3+x\right)}{x-1}dx = \int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

Example 2: Evaluate $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Giải: Phân tích: $$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Quy đồng mẫu số rồi cân bằng hệ số ta được: $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{5}$, $C=-\dfrac{1}{10}$. Vậy:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{5(2x-1)}-\frac{1}{10(x+2)}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+C$$

Example 3: Find $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $(a \neq 0)$

Giải: Ta có: $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$

Quy đồng mẫu số rồi cân bằng hệ số ta được: $A = \frac{1}{2a}$, $B = -\frac{1}{2a}$

Vậy: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

Trường hợp 2: Nếu mẫu số *Q(x)* là một tích các nhân tử tuyến tính, trong đó có nhân tử được lặp lại, ví dụ nhân tử tuyến tính đầu tiên (a_1x+b_1) lặp lại *r* lần dạng $(a_1x+b_1)^{r_1}$. Khi đó ta viết:

$\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$ thay cho $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$ trong biểu diễn $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ở trường hợp 1.

Example 4: Tính tích phân: $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

Giải: Chia tử cho mẫu ta được:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Viết lại phân thức: $\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$

Quy đồng mẫu số và cân bằng hệ số, ta được: $A=1$, $B=2$, $C=-1$. Vậy:

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \int\left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+C$$

$$= \frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Trường hợp 3: Nếu mẫu số *Q*(*x*) có chứa nhân tử bậc hai dạng: ax^2+bx+c, với $b^2-4ac<0$, khi đó trong biểu diễn $\frac{R(x)}{Q(x)}$ sẽ có số hạng dạng: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

Example 5: Evaluate $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$

Giải: Viết lại biểu thức dưới dấu tích phân như sau: $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$

Quy đồng mẫu số và cân bằng hệ số, ta được: $A=1$, $B=1$, $C=-1$. Vậy:

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx = \int\left[\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right]dx = \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x-1}{x^2+4}dx$$

Xét tích phân: $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x/2\right)}{\left(x/2\right)^2+1}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Vậy: $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x-1}{x^2+4}dx = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + K$

Lưu ý: Trong ví dụ trên, ta có công thức tích phân: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{\text{a}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$

Example 6: Evaluate $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx$

Giải: Ta có: $\displaystyle\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}$

$\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx = \int\left(1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right)dx = x + \int \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}dx$, đặt $u = 2x-1 \rightarrow du = 2dx$

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx = x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1)-1}{u^2+2}du = x + \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}du = x + \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}du$$

$$= x + \frac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C = x + \frac{1}{8}\ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-2}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Trường hợp 4: Nếu mẫu số $Q(x)$ có chứa nhân tử bậc hai lặp lại dạng: $\left(ax^2+bx+c\right)^r$, với $b^2-4ac<0$. Khi đó trong biểu diễn $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ sẽ có số hạng dạng:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$$

Example 7: Write out the form of the partial fraction decomposition of the function:

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

Giải: $$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Ix+J}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Example 8: Evaluate $\displaystyle\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$

Giải: Viết lại biểu thức dưới dấu tích phân như sau:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Quy đồng mẫu số và cân bằng hệ số, ta được: $A=1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=1$, $E=0$. Vậy:

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right]dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\tan^{-1}x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C$$

♦ **Lưu ý:** Khi gặp biểu thức tích phân có chứa dạng $\sqrt[n]{g(x)}$, ta sử dụng phép thế $u=\sqrt[n]{g(x)}$ để chuyển tích phân đã cho về dạng tích phân hàm hữu tỷ

Example 9: Evaluate $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

Giải: Đặt $u=\sqrt{x+4}\to u^2=x+4\to x=u^2-4\to dx=2udu$

Vậy: $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\int\frac{u}{u^2-4}2udu=\int\frac{2u^2du}{u^2-4}=2\int\left(1+\frac{4}{u^2-4}\right)du=2\int du-2\int\frac{du}{u+2}+2\int\frac{du}{u-2}$

$$=2u-2\ln|u+2|+\ln|u-2|=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$$

2.7 KỸ THUẬT CHO VIỆC TÍNH TÍCH PHÂN (STRATEGY FOR INTEGRATION):

Giải bài toán tích phân nhiều thách thức hơn bài toán đạo hàm. Khi gặp bài toán tích phân có dạng hỗn hợp, khó khăn chính là nhận ra sẽ sử dụng kỹ thuật và công thức nào để có thể giải quyết được bài toán. Trước tiên, chúng ta cần nắm vững bảng công thức tích phân cơ bản sau:

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad(n\neq-1)$	2. $\int\frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$
3. $\int e^x dx=e^x+C$	4. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
5. $\int\sin xdx=-\cos x+C$	6. $\int\cos xdx=\sin x+C$
7. $\int\sec^2 xdx=\tan x+C$	8. $\int\csc^2 xdx=-\cot x+C$
9. $\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$	10. $\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$
11. $\int\sec xdx=\ln\|\sec x+\tan x\|+C$	12. $\int\csc xdx=\ln\|\csc x-\cot x\|+C$
13. $\int\tan xdx=\ln\|\sec x\|+C$	14. $\int\cot xdx=\ln\|\sin x\|+C$
15. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$	16. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
17. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$	18. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$

1. Đơn giản hóa hàm dưới dấu tích phân nếu có thể:

Dùng các phép biến đổi đại số hoặc đẳng thức lượng giác để làm đơn giản hóa hàm được tích phân. Ví dụ: $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int \left(\sqrt{x}+x\right)dx$

$$\int \frac{\tan x}{\sec^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x dx = \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$

2. Tìm một sự thay thế:

Tìm một hàm nào đó $u = g(x)$ trong hàm được tích phân mà vi phân của nó $du = g'(x)dx$ (sai khác hằng số) cũng xuất hiện. Ví dụ:

$\int \frac{x}{x^2+1}dx$. Xét $u = g(x) = x^2 + 1$ thì $du = 2xdx$. Do đó:

$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$ hoặc có thể viết: $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$

3. Phân loại hàm dưới dấu tích phân theo một trong các dạng đã học:

Nếu các bước 1 và 2 không giải quyết được bài toán, chúng ta để ý đến dạng của hàm dưới dấu tích phân $f(x)$

a. Hàm lượng giác: nếu $f(x)$ là tích của hàm lũy thừa của sin$x$ và cos$x$, của tan$x$ và sec$x$, của cot$x$ và csc$x$ thì ta dùng phép thế được hướng dẫn trong mục 6.2.

b. Hàm hữu tỷ: Nếu f là hàm hữu tỷ, ta sử dụng các thủ tục trong mục 6.4 để giải quyết.

c. Tích phân từng phần: Nếu $f(x)$ là tích của một lũy thừa của x (hoặc đa thức) và một hàm siêu việt (lượng giác, mũ, logarithm) ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần để giải.

d. Hàm có chứa căn: sử dụng phép thế

- Nếu xuất hiện căn dạng $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ ta dùng phép thế hàm lượng giác như trong mục 6.3

- Nếu xuất hiện căn dạng $\sqrt[n]{ax+b}$ ta dùng phép thế $u = \sqrt[n]{ax+b}$ để chuyển tích phân về hàm hữu tỷ

4. Cố gắng lại

Nếu ba bước trên không dẫn đến câu trả lời, hãy nhớ rằng chỉ có hai phương pháp cơ bản để tính tích phân là phép thế (đổi biến) và tích phân từng phần. Hãy tìm một cách khác để vận dụng các phương pháp này một lần nữa, hoặc có thể kết hợp các phương pháp để giải quyết bài toán

Example 1: $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$

Sử dụng bước 1 để viết lại tích phân: $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx = \int \tan^3 x \sec^3 x dx$. Tích phân này có dạng $\int \tan^m x \sec^n x dx$ với m lẻ. Bài toán này đã có cách giải quyết.

Example 2: $\int e^{\sqrt{x}}dx$

Theo mục d trong bước 3, ta sẽ thực hiện phép thế $u = \sqrt{x} \rightarrow x = u^2 \rightarrow dx = 2udu$ và tích phân được viết lại: $\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int ue^u du$. Biểu thức dưới dấu tích phân là tích của u và hàm siêu việt e^u, ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần để giải.

Example 3: $\int \frac{x^5+1}{x^3-3x^2-10x}dx$

Đây là tích phân hàm hữu tỷ, trước hết thực hiện phép chia tử cho mẫu (vì bậc của tử lớn hơn), rồi sử dụng phương pháp giải như đã hướng dẫn trong mục 6.4

Example 4: $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Nhận xét: hàm $\frac{1}{x}$ là đạo hàm của ln*x*. Do vậy bước 2 là cần thiết ở bài toán này.

Example 5: $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

Ta có thể dùng phép thế $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ như trong hướng dẫn ở bước 3, mục d. Tuy nhiên, chúng ta sẽ đưa tích phân về một hàm hữu tỷ khá phức tạp. Phương pháp dễ hơn, ta dùng các phép biến đổi đại số, nhân cả tử và mẫu cho $u=\sqrt{1-x}$ ta được:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$. Đây là 2 tích phân dễ dàng giải quyết

♦ **Lưu ý:** Các hàm số chúng ta xét trong chương trình này là các hàm cơ bản. Nếu f là hàm cơ bản thì đạo hàm f' là hàm cơ bản. Tuy nhiên, $\int f(x)dx$ chưa chắc là hàm cơ bản.

Xét hàm $f(x)=e^{x^2}$, đây là hàm liên tục, tích phân của nó tồn tại và nếu chúng ta định nghĩa hàm F: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ thì theo định lý cơ bản của giải tích, ta có: $F'(x)=e^{x^2}$.

Vậy $f(x)=e^{x^2}$ có một nguyên hàm *F*.

Tuy nhiên hàm *F* đã được chứng minh không phải là hàm cơ bản. Vậy, chúng ta không tính được $\int e^{x^2}dx$ dưới dạng một hàm mà chúng ta đã biết.

Một vài tích phân sau cũng vậy:

$$\int \frac{e^x}{x}dx,\ \int \sin(x^2)dx,\ \int \cos(e^x)dx,\ \int \sqrt{x^3+1}dx,\ \int \frac{1}{\ln x}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx$$

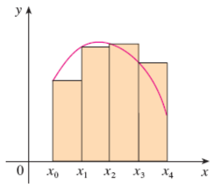
2.8 XẤP XỈ TÍCH PHÂN (APPROXIMATE INTEGRATION):

Ta đã biết tích phân xác định được định nghĩa như là giới hạn của tổng Reimann. Vì vậy, bất kỳ tổng Reimann nào đều có thể được sử dụng như là một xấp xỉ với tích phân: Nếu ta chia [*a*,*b*] thành *n* đoạn nhỏ có độ dài là $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ thì chúng ta có: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$, với x_i^* là điểm bất kỳ trong khoảng con thứ *i* $[x_{i-1},x_i]$.

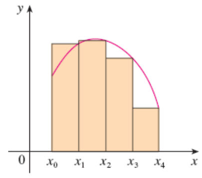
- Nếu x_i^* được chọn là điểm cuối bên trái của khoảng thì $\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$.

- Nếu x_i^* được chọn là điểm cuối bên phải của khoảng thì $\int_a^b f(x)dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$

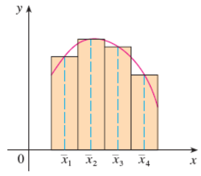
Trong các hình vẽ dưới đây, xấp xỉ điểm giữa M_n tốt hơn cả hai xấp xỉ L_n và R_n.



(a) Left endpoint approximation



(b) Right endpoint approximation



(c) Midpoint approximation

MIDPOINT RULE (QUY TẮC ĐIỂM GIỮA):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\left[f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + \ldots + f(\overline{x_n})\right]$$

với $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $\overline{x_i} = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{midpoint of } [x_{i-1}, x_i]$

Một cách tính xấp xỉ khác là quy tắc hình thang, đây là kết quả từ việc lấy trung bình của hai xấp xỉ bên phải và bên trái:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right]$$

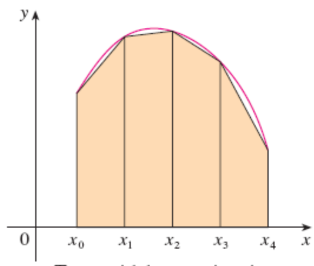
$$= \frac{\Delta x}{2}\left[\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \ldots + \left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

TRAPEZOIDAL RULE (QUY TẮC HÌNH THANG):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

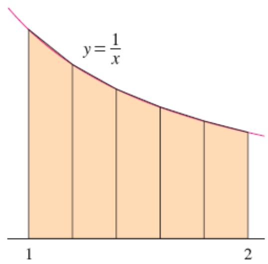
với $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$



Trapezoidal approximation

Example 1: Use (a) the Trapezoidal Rule and (b) the Midpoint Rule with $n = 5$ to approximate the integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

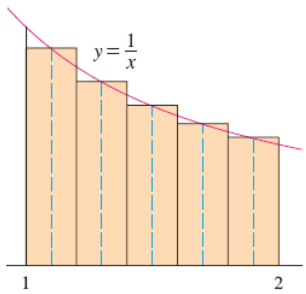
Giải:



(a) Với $n = 5$, $a = 1$, $b = 2$ ta có: $\Delta x = 0.2$. Sử dụng quy tắc hình thang:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}\left[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)\right]$$

$$= 0.1\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right] \approx 0.695635$$



(b) Điểm giữa của 5 khoảng con là: 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 và 1.9. Sử dụng quy tắc điểm giữa

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx M_5 = \Delta x\left[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right] \approx 0.691908$$

Lưu ý: Nếu sử dụng định lý cơ bản của giải tích, ta tính được:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0.693147$$

Sai số (error) trong việc tính xấp xỉ được xác định là một lượng nếu cộng thêm vào xấp xỉ cho ta kết quả chính xác. Từ các kết quả trong ví dụ trên, ta có sai số trong xấp xỉ hình thang và xấp xỉ điểm giữa với $n=5$ là: $E_T \approx -0.002488$ và $E_M \approx 0.001239$ (sai số trong tính xấp xỉ điểm giữa nhỏ hơn sai số trong tính xấp xỉ hình thang). Tổng quát, ta có:

$$E_T \approx \int_a^b f(x)dx - T_n, \quad E_M \approx \int_a^b f(x)dx - M_n$$

CẬN SAI SỐ (ERROR BOUNDS): Giả sử $|f''(x)| \le K$, $a \le x \le b$. Nếu E_T và E_M là các sai số trong quy tắc hình thang và quy tắc điểm giữa thì:

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \quad \text{và} \quad |E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Sử dụng công thức cận sai số vào ví dụ 1 ở trên, ta có:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Vì $1 \le x \le 2 \rightarrow \frac{1}{x} \le 1$. Vậy $|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \le \frac{2}{1^3} = 2$

Với $K=2$, $a=1$, $b=2$, $n=5$ ta có: $|E_T| \le \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$

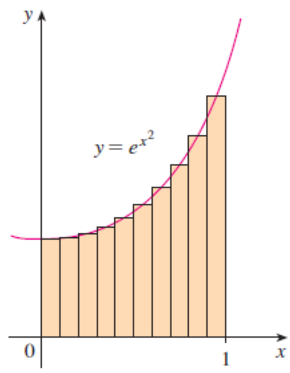
Example 2: How large should we take n in order to guarantee that the Trapezoidal and Midpoint Rule approximations for $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ are accurate to within 0.0001?

Giải: Sử dụng công thức cận sai số với $K=2$, $a=1$, $b=2$, để sai số hình thang nhỏ hơn 0.0001, ta có: $\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001 \rightarrow n^2 > \frac{2}{12(0.0001)} \rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$. Vậy chọn $n=41$.

Tương tự với quy tắc điểm giữa, chọn n để: $\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001 \rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$

Example 3: (a) Use the Midpoint Rule with $n=10$ to approximate the integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

(b) Give an upper bound for the error involved in this approximation.



Giải: (a) $a=0$, $b=1$, $n=10$, quy tắc điểm giữa cho ta:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \Delta x\left[f(0.05)+f(0.15)+\ldots+f(0.85)+f(0.95)\right]$$

$$= 0.1\left[e^{0.0025}+e^{0.0225}+e^{0.0625}+e^{0.1225}+e^{0.2025}+e^{0.3025}+e^{0.4225}+e^{0.5625}+e^{0.7225}+e^{0.9025}\right] \approx 1.460393$$

(b) $f(x)=e^{x^2} \to f'(x)=2xe^{x^2}$, $f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}$, vì $0\le x\le 1$ nên $x^2\le 1$, do đó:

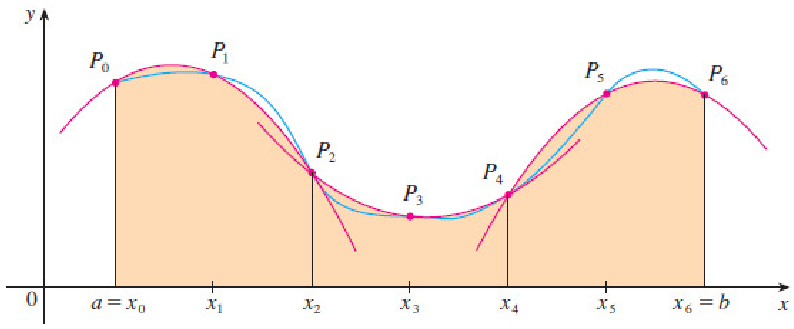
$$0\le f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}\le 6e$$

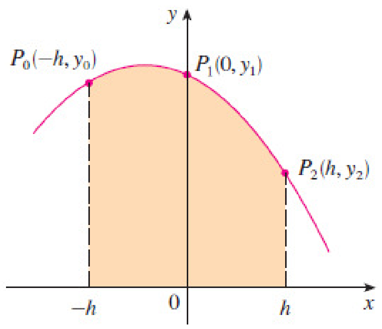
Chọn $K=6e$, $a=0$, $b=1$, $n=10$, sử dụng công thức cận sai số cho ta cận trên của sai số là:

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2}=\frac{e}{400}\approx 0.007$$

♦ QUY TẮC SIMPSON (SIMPSON'S RULE):

Ta có thể tính xấp xỉ tích phân bằng một cách khác bằng cách dùng parabola thay vì dùng đường thẳng xấp xỉ đường cong: chia $[a,b]$ thành n đoạn con có độ dài $h=\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ (n chẵn). Trên mỗi cặp khoảng liên tiếp nhau, ta xấp xỉ đường cong $y=f(x)\ge 0$ bởi một parabola (xem hình vẽ). Nếu $y_i=f(x_i)$ thì parabola xấp xỉ với đường cong đi qua 3 điểm liên tiếp nằm trên đường cong là P_i, P_{i+1} và P_{i+2}.





Để đơn giản, xét $x_0=-h$, $x_1=0$ và $x_2=-h$. Phương trình parabola đi qua 3 điểm P_0, P_1 và P_2 có dạng $y=Ax^2+Bx+C$, ta có: $y_0=Ah^2-Bh+C$, $y_1=C$, $y_2=Ah^2+Bh+C$.

Vậy diện tích bên dưới parabola từ $x=-h$ đến $x=h$ là:

$$\int_{-h}^{h}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=2\int_{0}^{h}\left(Ax^2+C\right)dx=2\left[\frac{Ax^3}{3}+Cx\right]_0^h=\frac{h}{3}\left(2Ah^2+6C\right)=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

Tương tự, diện tích miền bên dưới parabola đi qua 3 điểm P_2, P_3 và P_4 từ $x=x_2$ đến $x=x_4$ là

$$\frac{h}{3}\left(y_2+4y_3+y_4\right)$$

Tiếp tục với cách tính như vậy rồi cộng các kết quả lại, ta được:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)+\frac{h}{3}\left(y_2+4y_3+y_4\right)+...+\frac{h}{3}\left(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)$$

$$=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+...+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)$$

SIMPSON'S RULE:

$$\int_a^b f(x)dx\approx S_n=\frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+...+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

với n chẵn và $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$.

Example 4: Use Simpson's Rule with $n=10$ to approximate $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

Giải: Xét $f(x)=\frac{1}{x}$, $n=10$, $\Delta x=0.1$, sử dụng công thức Simpson, ta có:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx S_{10}=\frac{\Delta x}{3}\left[f(1)+4f(1.1)+2f(1.2)+4f(1.3)+...+2f(1.8)+4f(1.9)+f(2)\right]$$

$$=\frac{0.1}{3}\left[\frac{1}{1}+\frac{4}{1.1}+\frac{2}{1.2}+\frac{4}{1.3}+\frac{2}{1.4}+\frac{4}{1.5}+\frac{2}{1.6}+\frac{4}{1.7}+\frac{2}{1.8}+\frac{4}{1.9}+\frac{1}{2}\right]\approx 0.693150$$

Quy tắc Simpson $S_{10}\approx 0.693150$ cho ta xấp xỉ tốt hơn với giá trị thực $\ln 2\approx 0.693147$ của tích phân so với quy tắc hình thang $T_{10}\approx 0.693771$ hoặc quy tắc điểm giữa $M_{10}\approx 0.692835$

> ERROR BOUND FOR SIMPSON'S RULE: Giả sử $\left|f^{(4)}(x)\right|\le K,\ \ a\le x\le b$. Nếu E_S là sai số trong việc sử dụng quy tắc Simpson thì: $\left|E_S\right|\le\frac{K(b-a)^5}{180n^4}$

Example 5: How large should we take n in order to guarantee that the Simpson's Rule approximation for $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ is accurate to within 0.0001?

Giải: $f(x)=\frac{1}{x}\to f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}$, vì $x\ge 1$ nên $\frac{1}{x}\le 1$, do đó: $\left|f^{(4)}(x)\right|=\left|\frac{24}{x^5}\right|\le 24$

Chọn $K=24$ theo công thức trên để sai số nhỏ hơn 0.0001 ta chọn n sao cho:

$$\frac{24(1)^5}{180n^4}<0.0001\to n^4>\frac{24}{180(0.0001)}\to n>\frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}}\approx 6.04$$

Vậy chọn $n=8$ (n phải là số chẵn).

Example 6: (a) Use Simpson's Rule with $n=10$ to approximate the integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

(b) Estimate the error involved in this approximation.

Giải: (a) Khi $n=10$ thì $\Delta x=0.1$, sử dụng quy tắc Simpson ta được

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\approx\frac{\Delta x}{3}\left[f(0)+4f(0.1)+2f(0.2)+...+2f(0.8)+4f(0.9)+f(1)\right]$$

$$=\frac{0.1}{3}\left[e^0+4e^{0.01}+2e^{0.04}+4e^{0.09}+2e^{0.16}+4e^{0.25}+2e^{0.36}+4e^{0.49}+2e^{0.64}+4e^{0.81}+e^1\right]\approx 1.462681$$

(b) Đạo hàm cấp 4 của hàm $f(x)=e^{x^2}$ là $f^{(4)}(x)=\left(12+48x^2+16x^4\right)e^{x^2}$. Vì $0\le x\le 1$, ta có:

$$0\le f^{(4)}(x)\le(12+48+16)e^1=76e$$

Đặt $K=76e$, $a=0$, $b=1$ và $n=10$, ta có sai số lớn nhất là $\frac{76e(1)^5}{180(10)^4}\approx 0.000115$. Vậy, đúng đến 3 chữ số thập phân, ta có: $\int_0^1 e^{x^2}dx\approx 1.463$

2.9 TÍCH PHÂN SUY RỘNG (IMPROPER INTEGRALS):

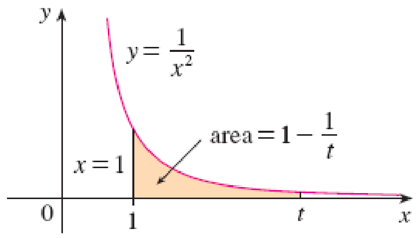
Trong định nghĩa tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$, chúng ta xét hàm f xác định trên một khoảng hữu hạn $[a,b]$ và chúng ta giả sử f không có điểm gián đoạn vô cùng. Trong mục này, chúng ta mở rộng khái niệm tích phân xác định trong trường hợp khoảng vô hạn và trường hợp hàm f có gián đoạn vô cùng trong $[a,b]$.

♦ LOẠI 1: KHOẢNG VÔ HẠN (INFINITE INTERVALS)

Tìm diện tích miền *S:* nằm dưới đường cong $y = \dfrac{1}{x^2}$, trên trục O*x* và bên phải đường $x = 1$

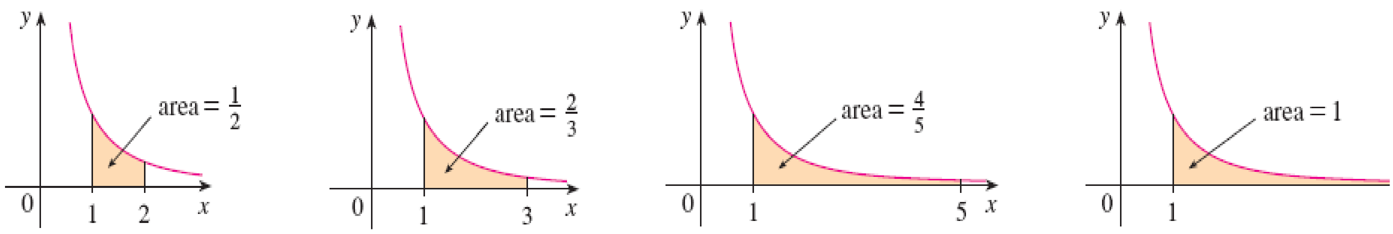
Ta thấy miền *S* có một biên vô hạn, liệu diện tích của nó có phải là một đại lượng vô hạn?

Trước hết, ta xét diện tích của một phần của miền *S* nằm bên trái đường thẳng $x = t$ (xem hình vẽ), ta có diện tích:



$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t} \qquad (A(t) < 1)$$

Quan sát các hình vẽ dưới đây khi cho *t* tăng dần:



Khi t → ∞, diện tích của miền *S* là: $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right) = 1$

DEFINITION OF AN IMPROPER INTEGRAL OF TYPE 1:

(a) Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mỗi số $t \geq a$ thì: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ (nếu ghạn tồn tại hữu hạn)

(b) Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mỗi số $t \leq b$ thì: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ (nếu ghạn tồn tại hữu hạn)

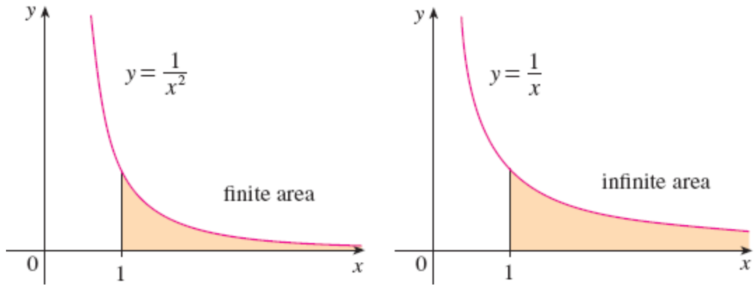
Tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ gọi là hội tụ (convergent) nếu giới hạn tương ứng tồn tại hữu hạn và phân kỳ (divergent) nếu giới hạn không tồn tại

(c) Nếu cả hai $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ thì $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx \qquad (a \in \mathbb{R})$

Example 1: Determine whether the integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ is convergent or divergent.

Giải: Ta có: $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\ln|x|\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \infty$. Vậy tích phân đã cho phân kỳ

Nhận xét: Hai hàm $y=\frac{1}{x}$ và $y=\frac{1}{x^2}$ đều dần về 0 khi $x\to\infty$. Tuy nhiên hàm $y=\frac{1}{x^2}$ dần về 0 nhanh hơn hàm $y=\frac{1}{x}$, các giá trị của $y=\frac{1}{x}$ không giảm nhanh đủ để tích phân của nó hữu hạn

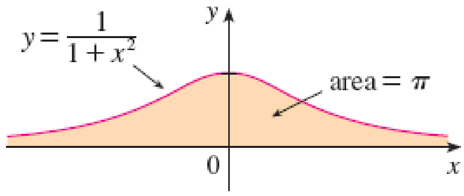


Example 2: Evaluate $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

Giải: Ta có $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}(te^t - 1 + e^t)$. Áp dụng quy tắc L'hospital:

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = 0.\ \text{Vậy: } \int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}(te^t - 1 + e^t) = -1$$

Example 3: Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$



Giải: Theo định nghĩa: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

Tính: $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \tan^{-1}0\right) = \frac{\pi}{2}$

$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t\right) = \frac{\pi}{2}$ Vậy: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$

Example 4: For what values of p is the integral: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ convergent?

Giải: Với $p=1$, ta đã biết $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$ phân kỳ

Xét $p\neq 1$, ta có: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}x^{-p}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{x=1}^{x=t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right)$

Nếu $p>1$ thì $p-1>0$. Khi $t\to\infty$ thì $t^{p-1}\to\infty$, do đó: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$: tích phân hội tụ

Nếu $p<1$ thì $p-1<0$ do đó $\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p}\to\infty$ *khi* $t\to\infty$, do đó: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \infty$: tích phân phân kỳ

$\boxed{\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^p}dx \text{ is convergent if } p>1 \text{ and divergent if } p\le 1}$

♦ LOẠI 2: HÀM TÍCH LẤY PHÂN BỊ GIÁN ĐOẠN (DISCONTINUOUS INTEGRANDS):

DEFINITION OF AN IMPROPER INTEGRAL OF TYPE 2:

(a) Nếu f liên tục trên $[a,b)$ và gián đoạn tại b thì

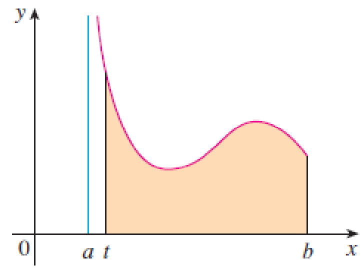
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx \text{ (nếu giới hạn tồn tại hữu hạn)}$$

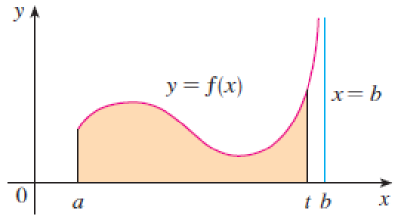
(b) Nếu f liên tục trên $(a,b]$ và gián đoạn tại a thì

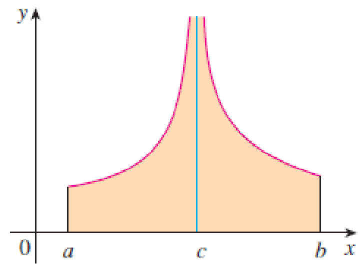
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx \text{ (nếu giới hạn tồn tại hữu hạn)}$$

Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ gọi là hội tụ nếu giới hạn tương ứng tồn tại hữu hạn và phân kỳ nếu giới hạn không tồn tại

(c) Nếu f gián đoạn tại c, với $a<c<b$ và cả hai $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ hội tụ thì: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



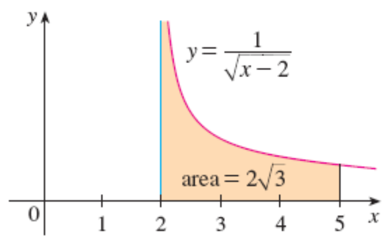




Example 5: Find $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

Giải: Lưu ý hàm dưới dấu tích phân có tiệm cận đứng tại $x=2$. Đây là tích phân suy rộng:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+}\int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_t^5 = \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}$$



Lưu ý: Vì hàm dưới dấu tích phân dương, ta có thể hiểu giá trị của tích phân như là diện tích miền nằm dưới đường cong có phương trình $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, trên trục O$x$ và trong khoảng giữa các đường thẳng $x=2$ và $x=5$ (xem hình vẽ).

Example 6: Determine whether $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\,dx$ converges or diverges.

Giải: Vì $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sec x = \infty$, đây là tích phân suy rộng. Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\ln|\sec t+\tan t|-\ln 1\right] = \infty$$

(vì sec$t \to \infty$ và tan$t \to \infty$ khi $t \to \pi/2$). Vậy tích phân đã cho phân kỳ.

Example 7: Evaluate $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ if possible.

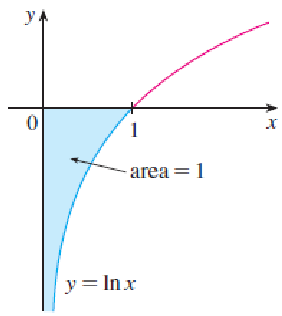
Giải: Hàm $y=\frac{1}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, giá trị này nằm trong khoảng tính tích phân.

Vậy:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

Xét $\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^t = \lim_{t\to 1^-}\left[\ln|t-1| - \ln|-1|\right] = -\infty$: tích phân này phân kỳ. Do đó tích phân $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ.

Lưu ý: Nếu ta không để ý đến giá trị $x=1$ làm cho hàm dưới dấu tích phân không xác định, ta có thể sẽ dẫn đến một kết quả không đúng sau: $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$



Example 8: Evaluate $\int_0^1 \ln x dx$

Giải: Hàm $f(x) = \ln x$ có tiệm cận đứng tại 0 do đó tích phân đã cho là tích phân suy rộng và: $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t)$

Áp dụng quy tắc L'hospital: $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = 0$

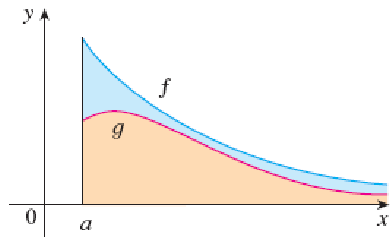
Vậy: $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t) = -1$

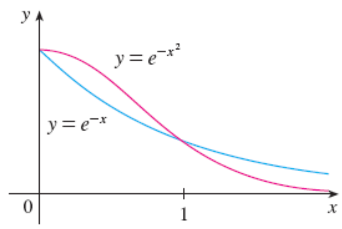
♦ TIÊU CHUẨN SO SÁNH (A COMPARISION TEST FOR IMPROPER INTEGRALS):

COMPARISION THEOREM: Giả sử f và g là các hàm liên tục và $f(x) \ge g(x) \ge 0$ với $x \ge a$

(a) Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ

(b) Nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ





Example 9: Show that $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ is convergent.

Giải: Ta không thể tính trực tiếp tích phân trên vì nguyên hàm của hàm e^{-x^2} không phải là hàm cơ bản. Ta có:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

Nhận xét: - Tích phân $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ là tích phân xác định.

- Xét tích phân bất định $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$: với $x \ge 1$, ta có: $x^2 \ge x \to -x^2 \le -x \to e^{-x^2} \le e^{-x}$

$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(e^{-1}-e^{-t}\right) = e^{-1}$: tích phân này hội tụ do đó $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ

Vậy $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ

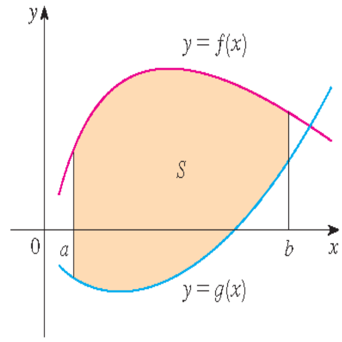
Example 10: Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_1^{\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$

Giải: Ta có $\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$ và $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ phân kỳ nên $\int_1^{\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$ phân kỳ.

2.10 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN (APPLICATIONS OF INTEGRATION):

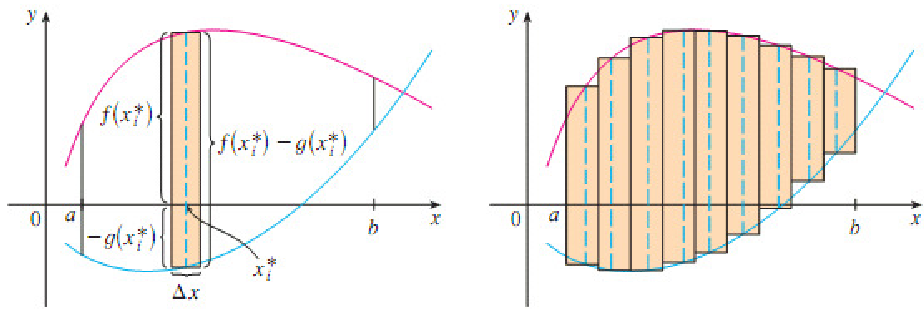
2.10.1 DIỆN TÍCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG CONG (AREAS BETWEEN CURVES):

Xét miền S nằm giữa đồ thị của hai đường cong $y = f(x)$, $y = g(x)$ và giữa hai đường thẳng đứng $x = a, x = b$, với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm liên tục và $f(x) \ge g(x)$ với mọi x thuộc $[a,b]$.



Để tìm diện tích miền S, tương tự như phần 5.1, ta chia miền S thành n dải có chiều rộng bằng nhau, rồi xấp xỉ dải thứ i bởi hình chữ nhật với đáy là Δx và chiều cao là $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Ta có tổng Riemann:

$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right]\Delta x$ là một xấp xỉ diện tích của miền S



(a) Typical rectangle (b) Approximating rectangles

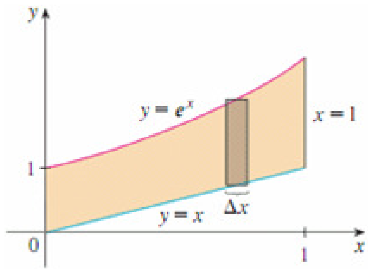
Xấp xỉ này càng tốt khi n càng lớn. Nói cách khác diện tích xấp xỉ của miền S tiến dần về diện tích thực A của miền S, khi $n \to \infty$.

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right]\Delta x}$$

Diện tích A của một miền bị chặn bởi các đường cong $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, với f và g là các hàm liên tục và $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$ là:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

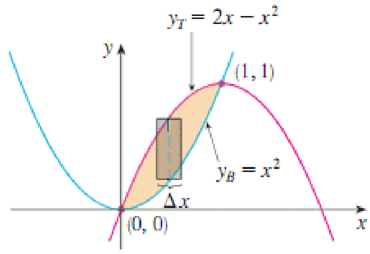
Example 1: Find the area of the region bounded above by $y = e^x$, bounded below by $y = x$, and bounded on the sides by $x = 0$, and $x = 1$.



Giải: Diện tích miền cần tìm:

$$A = \int_0^1 \left(e^x - x\right)dx = \left(e^x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$

Example 2: Find the area of the region enclosed by the parabolas $y = x^2$ and $y = 2x - x^2$.



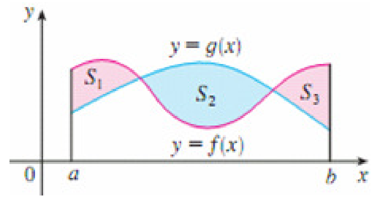
Giải: Hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$x^2 = 2x - x^2 \leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1.$$

Diện tích cần tìm:

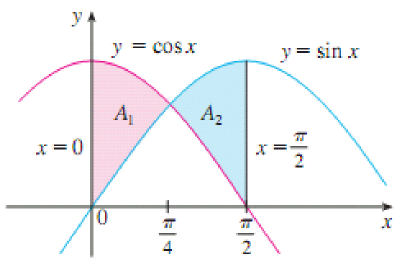
$$A = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^2\right)dx = 2\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

> Diện tích của miền nằm giữa các đường cong $y = f(x)$, $y = g(x)$ và giữa các đường thẳng $x = a$, $x = b$ là: $A = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx$



Example 3: Find the area of the region bounded by the curves $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, and $x = \pi/2$.

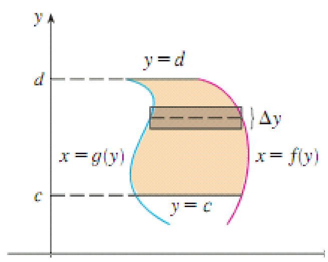
Giải: Ta nhận thấy rằng $\cos x \ge \sin x$, khi $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, và $\sin x \ge \cos x$, khi $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Diện tích cần tìm:



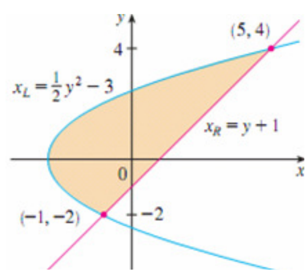
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \sin x\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos x - \sin x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \cos x\right)dx$$

$$= \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2.$$

> Diện tích của một miền được giới hạn bởi những đường cong có phương trình $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$, và $y = d$, với f, g là các hàm liên tục và $f(y) \ge g(y), \forall y \in [c, d]$ là:
>
> $$A = \int_c^d \left[f(y) - g(y)\right]dy$$



Example 4: Find the area enclosed by the line $y = x - 1$ and the parabola $y^2 = 2x + 6$.



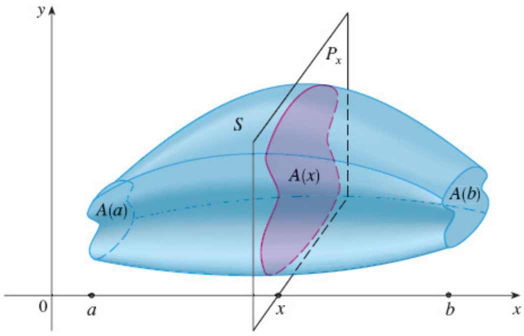
Giải: Giao điểm của hai đường cong đã cho có tọa độ: (-1,-2) và (5,4)

Diện tích cần tìm giới hạn bởi các đường cong $x=\frac{1}{2}y^2-3$ và $x=y+1$, và hai đường thẳng $y=-2$, $y=4$. Do đó:

$$A=\int_{-2}^{4}\left[(y+1)-\left(\frac{1}{2}y^2-3\right)\right]dy=\int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}y^2+y+4\right)dy$$

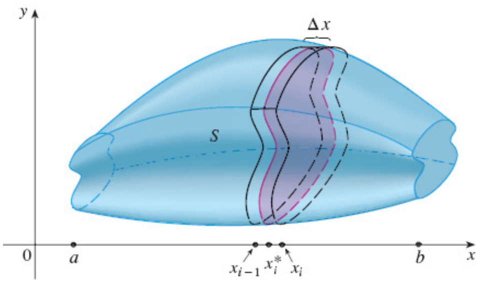
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right)+\frac{y^2}{2}+4y\Big]_{-2}^{4}=-\frac{1}{6}(64)+8+16-\left(\frac{4}{3}+2-8\right)=18.$$

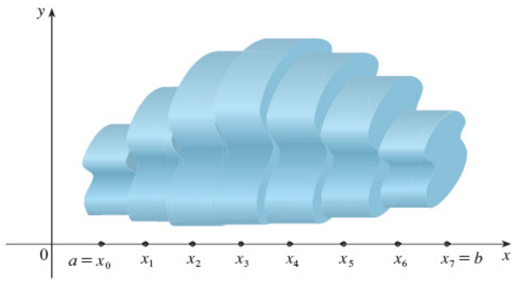
2.10.2 THỂ TÍCH (VOLUMES)



Với khối S bất kì, ta cắt khối S bởi một mặt phẳng, sẽ thu được một miền phẳng được gọi là mặt cắt ngang (cross-section) của S. Gọi $A(x)$ là diện tích của mặt cắt ngang S nằm trong mặt phẳng P_x vuông góc với trục Ox và đi qua điểm x, với $a\le x\le b$.

Ta chia S thành n miếng (slabs) có chiều rộng bằng nhau Δx nhờ sử dụng các mặt phẳng $P_{x_1}, P_{x_2},...$ để cắt. Nếu chúng ta chọn các điểm mẫu x_i^* thuộc $[x_{i-1},x_i]$, chúng ta có thể xấp xỉ slab thứ i là S_i bởi một hình trụ có diện tích đáy $A(x_i^*)$ và chiều cao Δx. Thể tích của hình trụ này là $V(S_i)\approx A(x_i^*)\Delta x$. Thể tích của khối S là $V\approx\sum_{i=1}^{n}A(x_i^*)\Delta x$



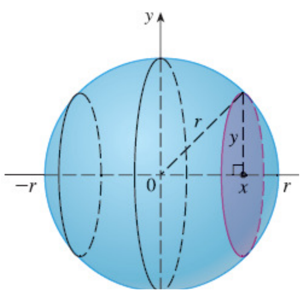


DEFINITION OF VOLUME: Cho S là một khối nằm giữa các đường thẳng $x=a$ và $x=b$. Nếu diện tích mặt cắt ngang của S trong mặt phẳng P_x qua x và vuông góc với trục Ox là $A(x)$, với A là hàm liên tục thì thể tích của S là: $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x_i^*)\Delta x=\int_a^b A(x)\,dx$

Example 5: Show that the volume of a sphere of radius r is $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

Giải: Mặt cắt ngang S trong mặt phẳng P_x là một đường tròn có bán kính là $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (sử dụng định lí Pithagorean). Nên diện tích của mặt cắt ngang là

$$A(x)=\pi y^2=\pi\left(r^2-x^2\right).$$

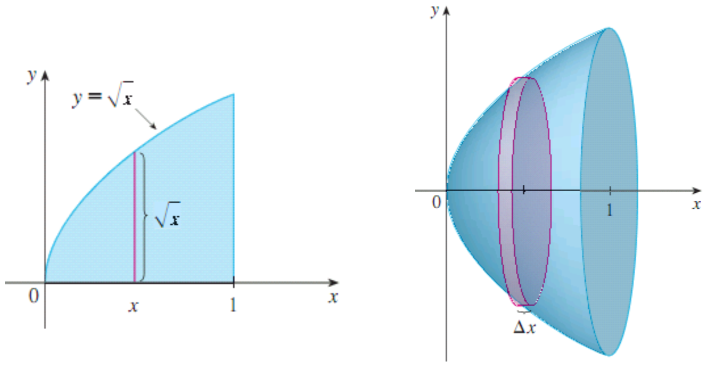


Sử dụng định nghĩa thể tích với $a=-r$ và $b=r$, ta có

$$V=\int_{-r}^{r}A(x)\,dx=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=2\pi\int_{0}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Example 6: Find the volume of the solid obtained by rotating about the x-axis the region under the curve $y=\sqrt{x}$ from 0 to 1. Illustrate the definition of volume by sketching a typical approximating cylinder.



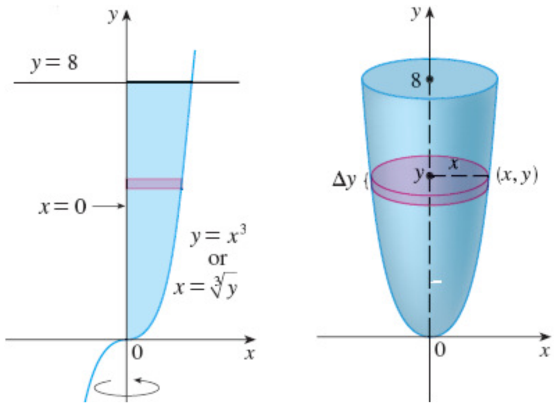
Giải: Diện tích của mặt cắt ngang:

$$A(x)=\pi\left(\sqrt{x}\right)^2=\pi x$$

Thể tích cần tìm:

$$V=\int_0^1 A(x)\,dx=\int_0^1 \pi x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

Example 7: Find the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y=x^3$, $y=8$ and $x=0$ about the y-axis.



Giải: Chia khối bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Oy. Nếu cắt S tại độ cao y, ta nhận được đĩa tròn có bán kính x, với $x=\sqrt[3]{y}$. Diện tích mặt cắt ngang qua y là:

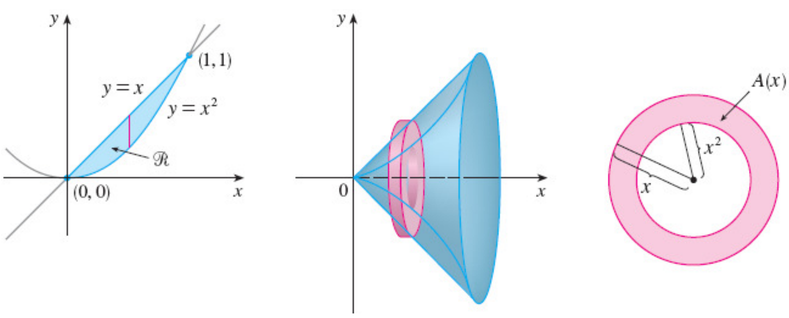
$$A(y)=\pi x^2=\pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2=\pi y^{\frac{2}{3}}$$

Thể tích khối hình trụ có độ cao Δy xấp xỉ:

$$A(y)\Delta y=\pi y^{\frac{2}{3}}\Delta y$$

Thể tích khối cần tìm: $V=\int_0^8 A(y)\,dy=\int_0^8 \pi y^{\frac{2}{3}}dy=\pi\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8=\frac{96\pi}{5}$

Example 8: The region $\mathbb{R}$ enclosed by the curves $y=x$ and $y=x^2$ is rotated about the x-axis. Find the volume of the resulting solid.



Giải: Giao điểm của các đường cong $y=x$ và $y=x^2$ là (0,0) và (1,1).

Diện tích của mặt cắt ngang:

$$A(x)=\pi x^2-\pi\left(x^2\right)^2$$

Thể tích của khối:

$$V=\int_0^1 A(x)\,dx=\int_0^1 \pi\left(x^2-x^4\right)dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{2\pi}{15}$$

Các khối trong các ví dụ 5 - 8 trên là các khối tròn xoay (solids of revolution). Tổng quát, để tính thể tích của các khối tròn xoay, ta sử dụng các công thức:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \text{ hoặc } V = \int_c^d A(y)\,dy$$

Xác định diện tích của mặt cắt ngang $A(x)$, $A(y)$ theo một trong hai cách sau:

a. Nếu mặt cắt ngang là một *đĩa* (disk) (như trong các ví dụ 5 - 7), ta tìm bán kính của đĩa và sử dụng công thức: $A = \pi(\text{bán kính})^2$

b. Nếu mặt cắt ngang là một washer (như trong ví dụ 8) có hai bán kính thì diện tích:

$$A = \pi(\text{bán kính ngoài})^2 - \pi(\text{bán kính trong})^2$$

2.10.3 GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA MỘT HÀM (AVERAGE VALUE OF A FUNCTION)

Giá trị trung bình của n số $y_1, y_2, ..., y_n$ là $y_{ave} = \dfrac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$

Để tìm giá trị trung bình của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$, ta chia $[a,b]$ thành n đoạn con bằng nhau, chiều dài mỗi đoạn là $\Delta x = (b-a)/n$. Chọn những điểm mẫu $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ trong n đoạn con đó. Giá trị trung bình của những số $f(x_1^*), f(x_2^*), ..., f(x_n^*)$ là

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + ... + f(x_n^*)}{n}$$

Vì $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ nên $n = \dfrac{b-a}{\Delta x}$, do đó giá trị trung bình trở thành

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + ... + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*) + f(x_2^*) + ... + f(x_n^*)\right]\Delta x = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

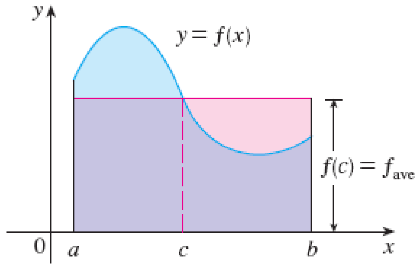
Khi n tăng, ta có định nghĩa:

> Giá trị trung bình của hàm f (the average value of *f*) trên $[a,b]$ là: $f_{ave} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

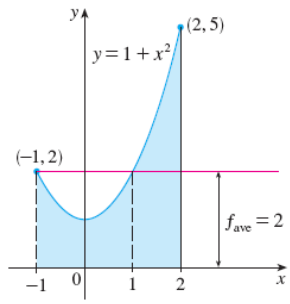
Example 12: Find the average value of the function $f(x) = 1 + x^2$ on the interval $[-1,2]$.

Giải: $f_{ave} = \dfrac{1}{2-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{2}(1+x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$.

> THE MEAN VALUE THEOREM FOR INTEGRALS: Nếu f liên tục trên đoạn $[a,b]$, khi đó tồn tại một số c trong $[a,b]$ sao cho:
>
> $$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ hay } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



Ý nghĩa hình học: Nếu hàm f dương trên đoạn $[a,b]$, thì tồn tại một số c thuộc $[a,b]$ sao cho diện tích của hình chữ nhật có đáy là $[a,b]$, chiều cao là $f(c)$ bằng diện tích của miền nằm bên dưới đồ thị của hàm f từ a đến b.

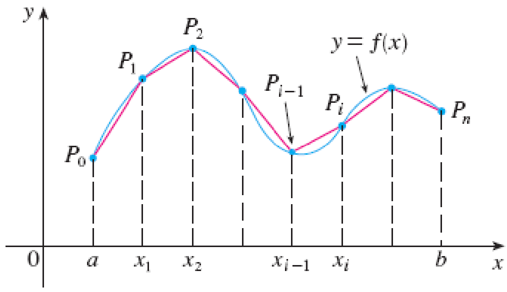


Example 13: Find c is in Example 12?

Giải: Ta có

$$f(c) = f_{ave} = 2 \text{ nên } 1 + c^2 = 2 \text{ hay } c^2 = 1 \text{ suy ra } c = \pm 1.$$

2.10.4 ĐỘ DÀI CUNG (ARC LENGTH)



Giả sử cung C được định nghĩa bởi phương trình $y = f(x)$, ở đó f liên tục và $a \le x \le b$. Ta thu được một xấp xỉ đa giác của C bằng cách chia $[a,b]$ thành n khoảng con với những điểm biên $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ và chiều rộng bằng Δx. Nếu $y_i = f(x_i)$, khi đó điểm $P_i(x_i, y_i)$ nằm trên C, và đa giác với các đỉnh $P_0, P_1, ..., P_n$ là một xấp xỉ của C

Độ dài L của C xấp xỉ độ dài của đa giác này và xấp xỉ càng tốt khi cho n càng tăng. Ta định nghĩa độ dài L của cung C với phương trình $y = f(x),\ a \le x \le b$ là giới hạn của những độ dài của các đa giác này (nếu giới hạn tồn tại).

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|}$$

Công thức trên không tiện lợi cho mục đích tính toán. Nếu hàm số f có đạo hàm liên tục [một hàm f như thế được gọi là trơn (smooth)], ta đặt $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, khi đó

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Sử dụng định lí giá trị trung bình của hàm f trên khoảng $[x_{i-1}, x_i]$: $\exists x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \to \Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

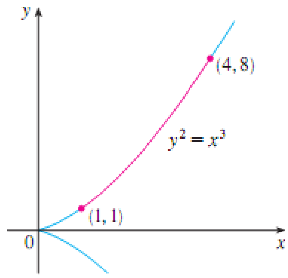
Do đó ta có $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$

Vậy: $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

THE ARC LENGTH FORMULA: Nếu f' liên tục trên $[a,b]$, khi đó độ dài cung $y = f(x),\ a \le x \le b$ là $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

Example 1: Find the length of the arc of the semicubical parabola $y^2 = x^3$ between the points (1,1) and (4,8)

Giải: Vì là nửa trên của cung nên ta có



$$y = x^{\frac{3}{2}} \text{ và } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Sử dụng công thức độ dài cung:

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

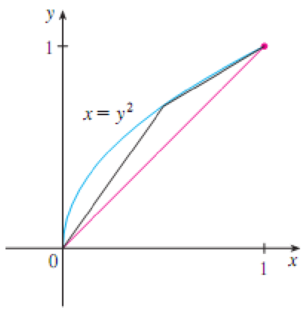
Đặt $u = 1 + \frac{9}{4}x$, khi đó $du = \frac{9}{4}dx$. Khi $x = 1,\ u = \frac{13}{4}$; khi $x = 4,\ u = 10$

Do đó: $L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right] = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$

Lưu ý: Nếu đường cong có phương trình $x = g(y)$, $c \le y \le d$ và $g'(x)$ liên tục, khi đó hoán đổi vai trò của x và y ta được: $L = \int_c^d \sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\,dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

Example 2: Find the length of the arc of the parabola $y^2 = x$ from (0,0) to (1,1).

Giải: Vì $x = y^2$ nên ta có $\frac{dx}{dy} = 2y$, vậy



$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\,dy$$

Đặt $y = \frac{1}{2}\tan\theta \to dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$, $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta$

Khi $y = 0$: $\tan\theta = 0 \to \theta = 0$; khi $y = 1$: $\tan\theta = 2 \to \theta = \tan^{-1}2 = \alpha$.

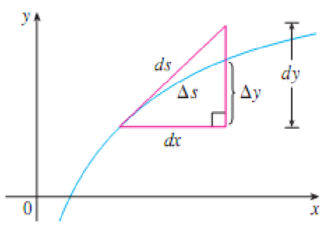
Do đó $L = \int_0^\alpha \sec\theta.\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\right]_0^\alpha$

$$= \frac{1}{4}\left(\sec\alpha\tan\alpha + \ln\left|\sec\alpha + \tan\alpha\right|\right)$$

Vì $\tan\alpha = 2$, ta có $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5 \to \sec\alpha = \sqrt{5} \to L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5} + 2\right)}{4}$

♦ HÀM ĐỘ DÀI CUNG (THE ARC LENGTH FUNCTION):

Nếu một đường cong phẳng C có phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Giả sử $s(x)$ là khoảng cách dọc theo C từ điểm ban đầu $P_0(a, f(a))$ đến điểm $Q(x, f(x))$. Khi đó $s(x)$ là một hàm, gọi là hàm độ dài cung, ta có: $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}\,dt$



$$\to \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Vi phân của độ dài cung là

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \text{ hay } (ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$$

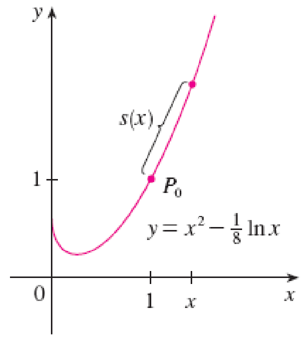
Example 3: Find the length function for the curve $y=x^2-\frac{1}{8}\ln x$ taking $P_0(1,1)$ as the starting point.

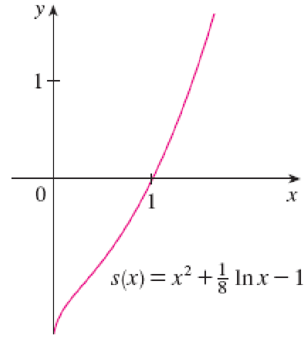
Giải: $f(x)=x^2-\frac{1}{8}\ln x \to f'(x)=2x-\frac{1}{8x}$

Hàm độ dài cung là

$$s(x)=\int_1^x\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\,dt=\int_1^x\left(2t+\frac{1}{8t}\right)dt$$

$$=t^2+\frac{1}{8}\ln t\Big]_1^x=x^2+\frac{1}{8}\ln x-1$$

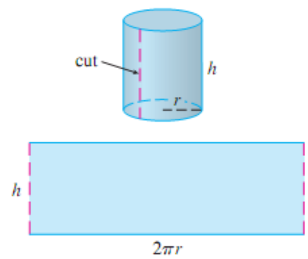




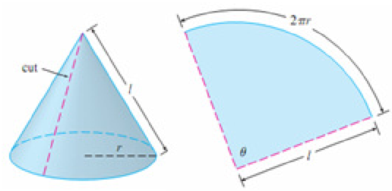
2.10.5 DIỆN TÍCH MẶT TRÒN XOAY (AREA OF A SURFACE OF REVOLUTION)

Ta đã biết rằng, mặt tròn xoay có được bằng cách quay một đường cong quanh một đường thẳng nào đó. Ta xét một số mặt tròn xoay đơn giản sau:

* Diện tích mặt tròn xoay của một hình lăng trụ tròn bán kính r, độ cao h là $A=2\pi rh$ (ta tưởng tượng rằng khi cắt mặt tròn xoay bằng một đường thẳng đứng và sau đó trải dài ra, ta sẽ thu được một hình chữ nhật với các cạnh là 2πr và h, khi đó diện tích của hình chữ nhật chính là diện tích của mặt tròn xoay)

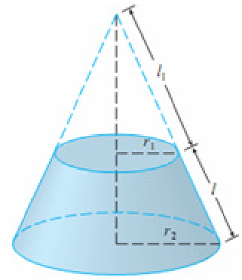


* Tương tự, với một hình nón tròn bán kính đáy r và chiều cao đường xiên l, cắt theo đường nét đứt như hình bên rồi trải ra ta thu được một hình quạt có bán kính l và góc ở tâm $\theta=2\pi r/l$. Diện tích của mặt tròn xoay chính là diện tích của hình quạt là



$$A=\frac{1}{2}l^2\theta=\frac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right)=\pi rl$$

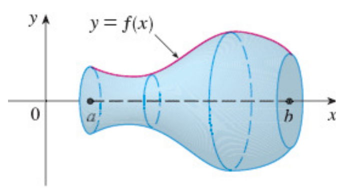
* Với một hình chóp cụt có chiều cao đường xiên l, bán kính trên và dưới là r_1, r_2 thì diện tích mặt tròn xoay chính là hiệu các diện tích của hai hình chóp



$$A=\pi r_2(l_1+l)-\pi r_1 l_1=\pi\left[(r_2-r_1)l_1+r_2 l\right]$$

Từ các tam giác đồng dạng ta có $\frac{l_1}{r_1}=\frac{l_1+l}{r_2}\to l_1 r_2=r_1 l_1+r_1 l\to(r_2-r_1)l_1=r_1 l$

Vậy $A=\pi(r_1 l+r_2 l)$ hay $A=2\pi rl$ với $r=\frac{r_1+r_2}{2}$ là bán kính trung bình của hình chóp cụt

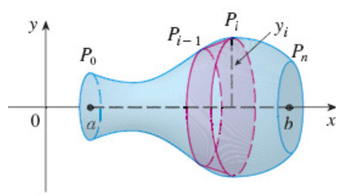


(a) Surface of revolution

♦ Xét bài toán tổng quát:

Xét mặt tròn xoay có được bằng cách quay đường cong

$y=f(x), a\le x\le b$ quanh trục hoành *Ox*, với f dương và có đạo hàm liên tục. Để xác định diện tích mặt tròn xoay, ta chia [a,b] thành n khoảng con với các điểm biên $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ có chiều rộng bằng Δx.



Nếu $y_i = f(x_i)$, khi đó điểm $P_i(x_i, y_i)$ nằm trên đường cong, phần bề mặt nằm giữa x_{i-1} và x_i được xấp xỉ bởi đoạn thẳng $P_{i-1}P_i$ và quay nó quanh trục Ox. Kết quả thu được là một hình chóp cụt có chiều cao đường xiên $l = |P_{i-1}P_i|$ và bán kính trung bình $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$, vậy diện tích mặt của nó là

$$A = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2}|P_{i-1}P_i| = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\Delta x, \quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

Khi Δx nhỏ, ta có $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ và $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$ vì f liên tục. Vậy:

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2}|P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*)\sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\Delta x$$

Diện tích của mặt tròn xoay cần tìm xấp xỉ

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*)\sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\Delta x$$

Xấp xỉ này càng tốt khi $n \to \infty$, biểu thức trên là tổng Riemann của hàm số $g(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*)\sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\Delta x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx$$

Trong trường hợp *f* dương và có đạo hàm liên tục, ta định nghĩa diện tích mặt (surface area) của mặt có được bằng cách quay đường cong $y = f(x)$, $a \le x \le b$, quanh *Ox* là:

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}$$

Nếu đường cong có phương trình: $x = g(y)$, $c \le y \le d$, ta có công thức của diện tích mặt:

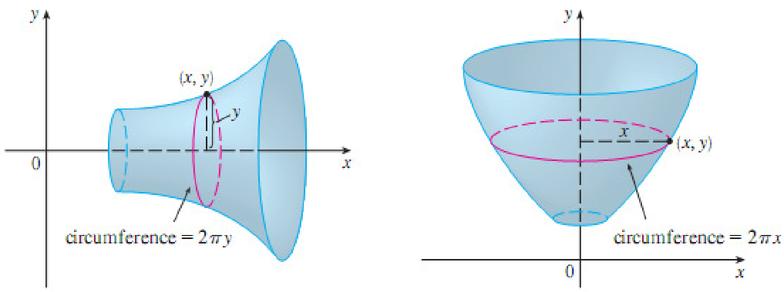
$$\boxed{S = \int_c^d 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy}$$

Cả hai công thức trên có thể được viết dưới ký hiệu của độ dài cung:

$$\boxed{S = \int 2\pi y ds}$$

Trong trường hợp quay quanh trục Oy, công thức diện tích mặt là

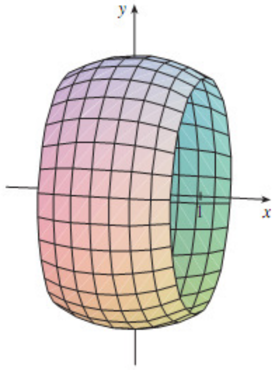
$$\boxed{S = \int 2\pi x ds}$$



(a) Rotation about x-axis: $S = \int 2\pi y\, ds$ (b) Rotation about y-axis: $S = \int 2\pi x ds$

với $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ hoặc $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$

Example 4: The curve $y=\sqrt{4-x^2}$, $-1\le x\le 1$, is an arc of the circle $x^2+y^2=4$. Find the area of the surface obtained by rotating this arc about the x-axis (The surface is portion of a sphere of radius 2).

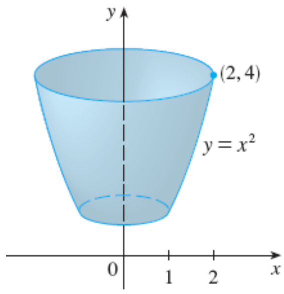


Giải: Ta có $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Diện tích mặt là:

$$S=\int_{-1}^{1}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\pi\int_{-1}^{1}1dx=4\pi(2)=8\pi$$

Example 5: The arc of the parabola $y=x^2$ from (1,1) to (2,4) is rotated about the y-axis. Find the area of the resulting surface.



Giải: Sử dụng $y=x^2\to\dfrac{dy}{dx}=2x$. Diện tích mặt là

$$S=\int 2\pi x ds=\int_{1}^{2}2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\int_{1}^{2}x\sqrt{1+4x^2}dx$$

Đặt $u=1+4x^2\to du=8xdx$. Khi $x=1$, ta có $u=5$; khi $x=2$ ta có $u=17$

Vậy: $$S=\frac{\pi}{4}\int_{5}^{17}\sqrt{u}du=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{5}^{17}=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$$

Giải cách 2 Sử dụng $x=\sqrt{y}\to\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. Ta có:

$$S=\int 2\pi x ds=\int_{1}^{4}2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy=2\pi\int_{1}^{4}\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy=\pi\int_{1}^{4}\sqrt{4y+1}dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{5}^{17}\sqrt{u}du=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)\qquad(u=1+4y)$$