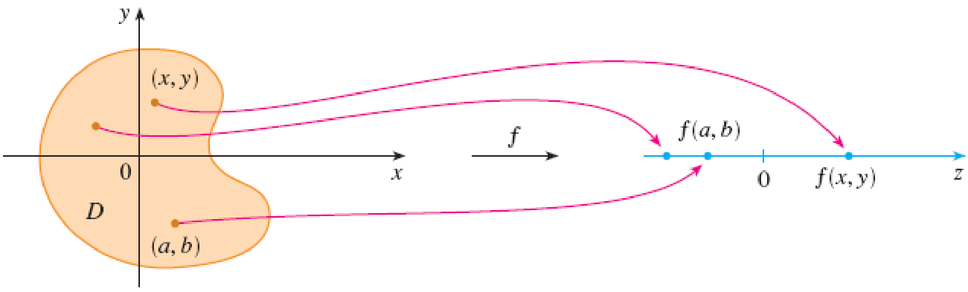
II. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN (FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES)

1.10 HÀM HAI BIẾN (FUNCTIONS OF TWO VARIABLES)

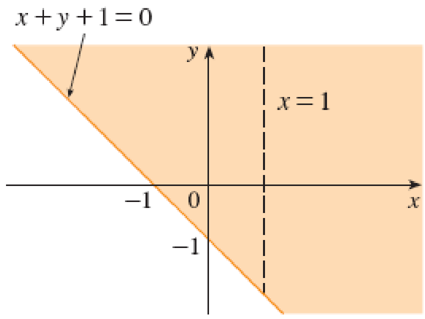
DEFINITION: Hàm số hai biến f là một quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số thực có thứ tự (x,y) trong tập $D\left(D\subset\mathbb{R}^2\right)$ với một số thực duy nhất được kí hiệu là $f(x,y)$. Tập D là *miền xác định* (domain) và tập $T=\{f(x,y)/(x,y)\in D\}\subset\mathbb{R}$ là *miền giá trị* (range) của hàm f

♦ **Ký hiệu hàm hai biến:** $z=f(x,y)$ với x, y là các biến độc lập và z là biến phụ thuộc.



Example 1: For each of the following functions, evaluate $f(3,2)$ and find the domain.

(a) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ (b) $f(x,y)=x\ln\left(y^2-x\right)$



Domain of $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

Giải:

(a) $f(3,2)=\dfrac{\sqrt{3+2+1}}{3-1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Miền xác định của hàm số f:

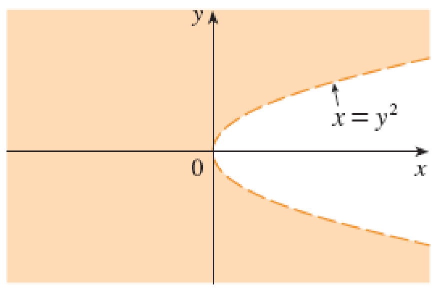
$$D=\{(x,y)/x+y+1\ge 0,\ x\ne 1\}$$

(b) $f(x,y)=x\ln\left(y^2-x\right)$

$$f(3,2)=3\ln\left(2^2-3\right)=0$$

Miền xác định của hàm số f:

$$D=\{(x,y)/x<y^2\}.$$



Domain of $f(x,y)=x\ln(y^2-x)$

Example 2:

Find the domain and range of $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

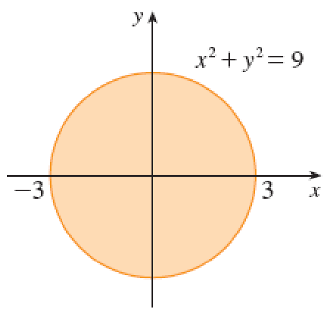
Giải: Miền xác định của hàm số g:

$$D=\{(x,y)/9-x^2-y^2\ge 0\}=\{(x,y)/x^2+y^2\le 9\}$$

D chính là đĩa tròn có tâm $(0,0)$ và bán kính bằng 3.

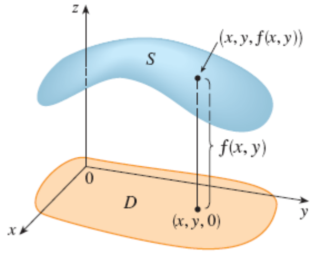
Miền giá trị của g: $\left\{z/z=\sqrt{9-x^2-y^2},(x,y)\in D\right\}=[0,3]$ vì:

$z\ge 0$ và vì $9-x^2-y^2\le 9$ nên $\sqrt{9-x^2-y^2}\le 3$.



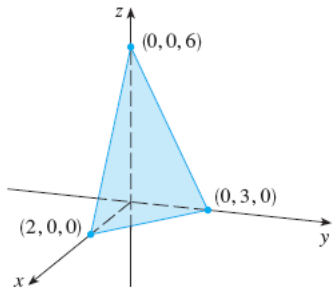
Domain of $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

♦ ĐỒ THỊ (GRAPHS):



DEFINITION: Nếu f là hàm hai biến với miền xác định D thì đồ thị của f là tập hợp tất cả các điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x, y)$ và (x, y) thuộc D

Example 3: Sketch the graph of the function $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.



Giải: $z = 6 - 3x - 2y \leftrightarrow 3x + 2y + z = 6$: phương trình mặt phẳng

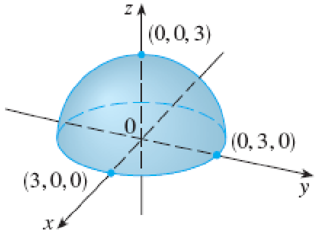
Để vẽ mặt phẳng ta cần xác định các giao điểm của nó với các trục tọa độ:

Cho $y = z = 0$, ta có $x = 2 \rightarrow$ mặt phẳng giao trục x tại $x = 2$

Tương tự giao với trục y tại $y = 3$ và trục z tại $z = 6$

lần lượt $x = 0, y = 0,$ và $z = 0$.

Example 4: Sketch the graph of $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

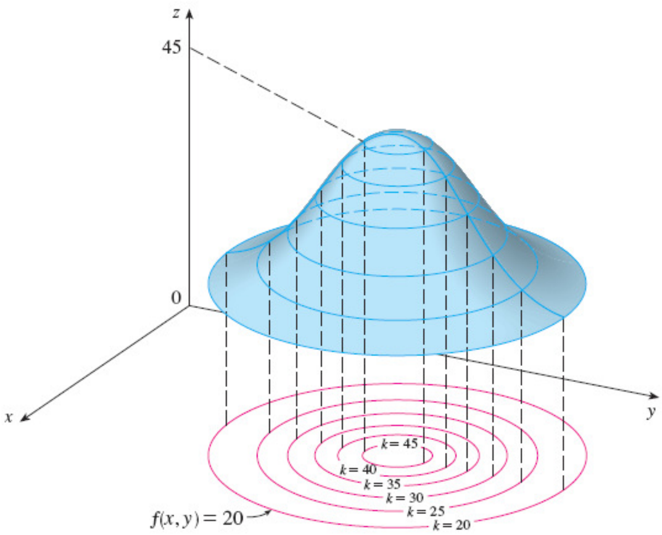


Graph of $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Giải: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$: đây là phương trình hình cầu có tâm O bán kính 3. Vì $z \geq 0$ nên đồ thị của g là nửa trên của hình cầu.

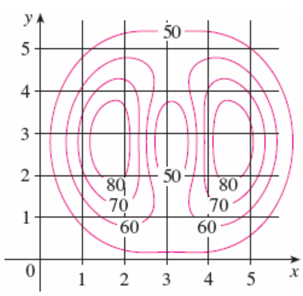
♦ LEVEL CURVES (ĐƯỜNG MỨC):

DEFINITION: Đường mức của hàm hai biến f là đường cong với phương trình $f(x, y) = k$ với k là hằng số (thuộc miền giá trị của hàm f).



Lưu ý: Đường mức là hình chiếu thẳng đứng lên mặt phẳng xy của giao của đồ thị hàm f với mặt cắt ngang $z = k$.

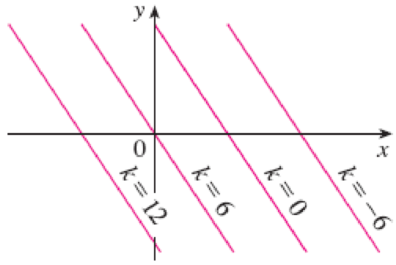
Example 5: A contour map for a function f is shown. Use it to estimate the values of $f(1,3)$ and $f(4,5)$.



Giải: Ta có: $f(1,3) \approx 73$ and $f(4,5) \approx 56$.

Example 6: Sketch the level curves of the function $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ for the values $k = -6, 0, 6, 12$.

Giải: Các đường mức là:



$$6-3x-2y=k \quad \text{hay} \quad 3x+2y+(k-6)=0$$

Đây là họ các đường thẳng có hệ số góc bằng -3/2. Thay k lần lượt bằng -6, 0, 6, 12 vào, ta sẽ được các đường mức tương ứng của hàm số:

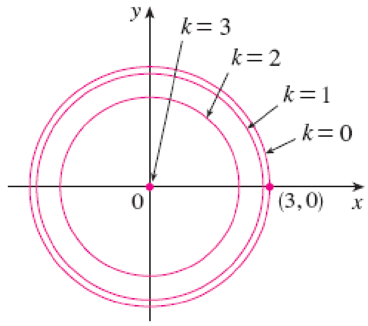
$$3x+2y-12=0,\ 3x+2y-6=0,\ 3x+2y=0,\ 3x+2y+6=0$$

Example 7: Sketch the level curves of the function

$$g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \text{ for } k=0,1,2,3.$$

Giải: Các đường mức của đường cong là:

$$\sqrt{9-x^2-y^2}=k \leftrightarrow x^2+y^2=9-k^2$$



Đây là họ các đường tròn đồng tâm O(0,0), bán kính $\sqrt{9-k^2}$.

Thay $k=0,1,2,3$ vào phương trình đường mức ta vẽ được các đường mức như hình vẽ.

1.11 HÀM SỐ BA HAY NHIỀU BIẾN (FUCTIONS OF THREE OR MORE VARIABLES)

Hàm số ba biến f là một quy tắc cho tương ứng mỗi bộ số có thứ tự (x,y,z) thuộc miền xác định $D\subset\mathbb{R}^3$ với một số thực duy nhất được kí hiệu là $f(x,y,z)$.

Example 8: Find the domain of f if: $f(x,y,z)=\ln(z-y)+xy\sin z$.

Giải: Hàm số xác định khi $z-y>0$. Vậy miền xác định của hàm số là:

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z>y\right\}$$ [Đây là tập các điểm nằm trên mặt phẳng $z=y$]

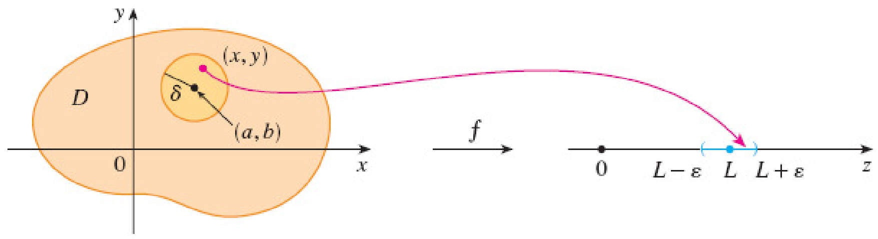
Hàm số n biến f là một quy tắc cho tương ứng mỗi bộ số có thứ tự $(x_1,x_2,...,x_n)$ thuộc $\mathbb{R}^n$ với duy nhất một số được kí hiệu là $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

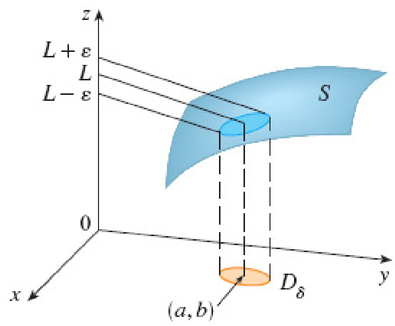
Example 9: Hàm số $C=f(x_1,x_2,...,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n,\ c_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$ là hàm số n biến.

1.12 GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC (LIMITS AND CONTINUITY):

DEFINITION: Cho f là hàm hai biến có miền xác định D chứa các điểm gần (a,b). Giới hạn của $f(x,y)$ khi (x,y) dần về (a,b) là L nếu với mỗi số $\varepsilon>0$ tồn tại tương ứng số $\delta>0$ sao cho với $(x,y)\in D$ và $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ thì $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

Ta viết: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=L$ hay $f(x,y)\to L$ khi $(x,y)\to(a,b)$





Tập $D_\delta(a,b)=\left\{(x,y)\in R^2:\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}$ gọi là đĩa (disk) tâm (a,b), bán kính δ.

> Nếu $f(x,y)\to L_1$ khi $(x,y)\to(a,b)$ theo đường C_1 và $f(x,y)\to L_2$ khi $(x,y)\to(a,b)$ theo đường C_2, với $L_1\neq L_2$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại.

Example 1: Show that $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ does not exist.

Giải: Đặt $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo trục x thì $y=0$: ta có $f(x,0)=\dfrac{x^2}{x^2}=1,\forall x\neq 0$ vậy $f(x,y)\to 1$

Cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo trục y thì $x=0$: ta có $f(0,y)=\dfrac{-y^2}{y^2}=-1,\forall y\neq 0$ vậy $f(x,y)\to -1$

→ giới hạn đã cho không tồn tại.

Example 2: If $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, does $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ exist?

Giải:

Cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo đường thẳng $y=x$: $f(x,y)=f(x,x)=\dfrac{x^3}{x^2+x^4}=\dfrac{x}{1+x^2}$:

$f(x,y)\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$

Cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo parabola $x=y^2$: $f(x,y)=f(y^2,y)=\dfrac{y^4}{y^4+x^4}=\dfrac{1}{2}$: $f(x,y)\to\dfrac{1}{2}$

khi $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo parabola $x=y^2$. Vậy giới hạn không tồn tại.

Example 3: Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ if it exists.

Giải: Với ε > 0, tìm δ > 0: nếu $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ thì $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

Ta có: $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\dfrac{3x^2|y|}{x^2+y^2}\leq 3|y|=3\sqrt{y^2}\leq 3\sqrt{x^2+y^2}$. Chọn $\delta=\varepsilon/3$, với :

$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta\to\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leq 3\sqrt{x^2+y^2}<3\delta=3\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)=\varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$.

Lưu ý:

- Các luật giới hạn (về tổng hiệu tích thương) và định lý Squeeze trong trường hợp một biến được mở rộng cho trường hợp hai biến
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a,\quad \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b,\quad \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c$

♦ LIÊN TỤC (CONTINUITY):

DEFINITION: Hàm số hai biến f liên tục tại (a,b) nếu $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Ta nói f liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm (a,b) trong D.

♦ Hàm đa thức (polynomial function) hai biến là một tổng các số hạng có dạng $cx^m y^n$, ở đó c là hằng số, m, n là các số nguyên không âm, ví dụ: $f(x,y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$

♦ Hàm hữu tỉ (rational function) là tỉ số của các hàm đa thức, ví dụ: $g(x,y) = \dfrac{x^2 - y}{2xy}$

Kết quả:

- Các hàm số $f(x,y) = x,\ g(x,y) = y,\ h(x,y) = c\ (const)$ là các hàm liên tục.
- Các đa thức là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$, các hàm hữu tỷ liên tục trên miền xác định của nó
- Nếu $f(x,y)$ liên tục trên D, $g(t)$ liên tục trên miền giá trị của *f* thì $h = g(f(x,y))$ liên tục trên D

Example 1: Evaluate $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y\right)$.

Giải: Vì $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ là hàm đa thức nên liên tục tại mọi (x,y). Do đó:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y\right) = 1^2.2^3 - 1^3.2^2 + 3.1 + 2.2 = 11.$$

Example 2: Where is the function $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ continous?

Giải: Hàm $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ là hàm hữu tỷ liên tục trên miền xác định D của nó:

$$D = \{(x,y) / (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Example 3: Where is the function $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ continous?

Giải: Hàm $g(x,y)$ được định nghĩa tại điểm (0,0) nhưng hàm không liên tục tại (0,0) vì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ không tồn tại. Vậy hàm $g(x,y)$ liên tục trên $D = \{(x,y) / (x,y) \neq (0,0)\}$.

1.13 ĐẠO HÀM RIÊNG (PARTIAL DERIVATIVES)

Cho hàm hai biến $f(x,y)$, giả sử chỉ biến x thay đổi và cố định y $(y=b)$. Khi đó, hàm f trở thành hàm một biến. Đặt $g(x)=f(x,b)$, nếu g có đạo hàm tại a, ta gọi nó là *đạo hàm riêng của f đối với x* tại (a,b) và kí hiệu là $f_x(a,b)$.

Do đó:

$$f_x(a,b)=g'(a) \quad \text{với} \quad g(x)=f(x,b)$$

Vì: $g'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ nên:

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

Tương tự, đạo hàm riêng của f đối với y tại (a,b) là:

.

$$f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

Nếu f là hàm hai biến, đạo hàm riêng của nó là các hàm f_x, f_y được xác định bởi:

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \qquad f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

NOTATIONS FOR PARTIAL DERIVATIVES: Nếu $z=f(x,y)$ thì

$$f_x(x,y)=f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=D_x f, \qquad f_y(x,y)=f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=D_y f$$

RULE FOR FINDING PARTIAL DERIVATIVES OF $z=f(x,y)$

1. Để tìm f_x, xem y là hằng số và lấy đạo hàm $f(x,y)$ đối với x
2. Để tìm f_y, xem x là hằng số và lấy đạo hàm $f(x,y)$ đối với y

Example 1: If $f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$, find $f_x(2,1)$ and $f_y(2,1)$.

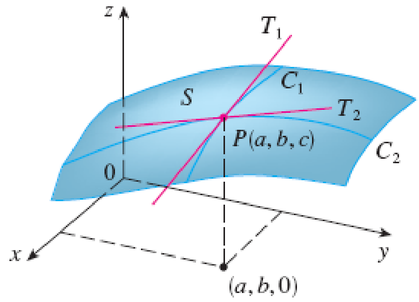
Giải: Xem y là hằng số và lấy đạo hàm đối với x:

$$f_x(x,y)=3x^2+2xy^3 \;\to\; f_x(2,1)=3.2^2+2.2.1^3=16$$

Xem x là hằng số và lấy đạo hàm đối với y:

$$f_y(x,y)=3x^2y^2-4y \;\to\; f_y(2,1)=3.2^2.1^2-4.1=8.$$

♦ GIẢI THÍCH VỀ ĐẠO HÀM RIÊNG (INTERPRETATIONS OF PARTIAL DERIVATIVES):



The partial derivatives of f at (a, b) are the slopes of the tangents to C_1 and C_2.

Đồ thị hàm $z = f(x, y)$ là mặt *S*, nếu $f(a,b) = c$ thì điểm $P(a,b,c)$ nằm trên *S*. Cố định $y = b$ và gọi C_1 là giao của mặt phẳng $y = b$ và mặt *S*, tương tự cố định $x = a$ và gọi C_2 là giao của mặt phẳng $x = a$ và mặt *S*. Khi đó: C_1 và C_2 đều qua điểm $P(a,b,c)$. Chú ý rằng, đường cong C_1 là đồ thị của hàm số $g(x) = f(x,b)$, vì thế hệ số góc của tiếp tuyến C_1 tại $P(a,b,c)$ là $g'(a) = f_x(a,b)$. Tương tự, hệ số góc của tiếp tuyến C_2 tại $P(a,b,c)$ là $f_y(a,b)$.

Do đó, các đạo hàm tiêng $f_x(a,b)$ và $f_y(a,b)$ được giải thích bằng hình học như là hệ số góc của các tiếp tuyến tại $P(a,b,c)$ của các vết C_1, và C_2 của *S* với các mặt phẳng $y = b$ và $x = a$.

Example 2: If $f(x, y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, calculate $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Giải: Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right).\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right).\frac{x}{(1+y)^2}.$$

Example 3: Find $\partial z/\partial x$ and $\partial z/\partial y$ if z is defined implicitly as a function of *x* and *y* by the equation $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Giải:

Xem *y* như hằng số, lấy đạo hàm theo biến *x* hai vế của phương trình đã cho:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

Tương tự, đối với biến *y* ta được $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$.

♦ HÀM NHIỀU HƠN HAI BIẾN (FUCTIONS OF MORE THAN TWO VARIABLES)

Nếu f là hàm số ba biến *x, y*, và *z* thì đạo hàm riêng đối với *x* được xác định bởi:

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

Tương tự ta cũng có công thức đạo hàm riêng đối với *y*, và *z*.

Tổng quát, nếu *u* là hàm *n* biến, $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, đạo hàm riêng của *u* đối với biến thứ i, x_i là:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,...,x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1},..., x_n) - f(x_1,...,x_i...,x_n)}{h}$$

Example 4: Find f_x, f_y and f_z if $f(x,y,z) = e^{xy}\ln z$.

Giải: Ta có: $f_x = ye^{xy}\ln z,\quad f_y = xe^{xy}\ln z,\quad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$.

1.14 ĐẠO HÀM CẤP CAO (HIGHER DERIVATIVES):

Nếu f là hàm hai biến, các đạo hàm riêng của nó là f_x, f_y cũng là các hàm hai biến. Ta có thể xét các đạo hàm riêng $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x$ và $(f_y)_y$, được gọi là các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f. Nếu $z = f(x,y)$, ta sử dụng các kí hiệu sau đây:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \qquad (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Example 4: Find the second partial derivatives of $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Giải: Ta có

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3, \qquad f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Khi đó

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 2xy^3\right) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - 4y\right) = 6x^2y - 4$$

CLAIRAUT' THEOREM: Giả sử hàm f được xác định trên đĩa D chứa điểm (a,b). Nếu các hàm số f_{xy} và f_{yx} là các hàm số liên tục trên D thì

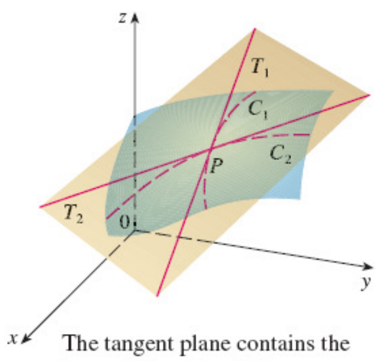
$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

1.15 MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VÀ XẤP XỈ TUYẾN TÍNH (TANGENT PLANES AND LINEAR APPROXIMATIONS):

♦ MẶT PHẲNG TIẾP XÚC (TANGENT PLANES)

Giả sử mặt S có phương trình $z = f(x,y)$, ở đó f có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục, và $P(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S. Gọi C_1 và C_2 là giao của các mặt phẳng thẳng đứng $y = y_0$ và $x = x_0$ với mặt S. Ta có điểm P nằm trên cả hai đường cong C_1 và C_2.

Gọi T_1, T_2 là các tiếp tuyến với C_1 và C_2 tại $P(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó, mặt phẳng tiếp xúc (tangent plane) của mặt S tại P được định nghĩa là mặt phẳng chứa cả hai tiếp tuyến T_1 và T_2.



The tangent plane contains the tangent lines T_1 and T_2.

Vì mặt phẳng tiếp xúc đi qua $P(x_0, y_0, z_0)$ nên phương trình của nó có dạng:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Chia 2 vế của phương trình cho C và đặt $a=-\dfrac{A}{C},\ b=-\dfrac{B}{C}$ ta được:

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

Lấy giao của mặt phẳng tiếp xúc với mặt phẳng $y=y_0$ ta được phương trình tiếp tuyến T_1

$$z-z_0=a(x-x_0) \qquad y=y_0$$

Hệ số góc của tiếp tuyến T_1 là $f_x(x_0,y_0)$ nên $a=f_x(x_0,y_0)$

Tương tự, đặt $x=x_0$: $z-z_0=b(y-y_0)$ là phương trình đường tiếp tuyến T_2 và $b=f_y(x_0,y_0)$.

Giả sử f có các đạo hàm riêng liên tục. Phương trình *mặt phẳng tiếp xúc* với mặt $z=f(x,y)$ tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$ là: $z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

Example 1: Find the tangent plane to the elliptic paraboloid $z=2x^2+y^2$ at the point $(1,1,3)$.

Giải: Đặt $f(x,y)=2x^2+y^2 \to f_x(x,y)=4x,\ f_y(x,y)=2y \to f_x(1,1)=4,\ f_y(1,1)=2$

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc là: $z=4x+2y-3$

♦ XẤP XỈ TUYẾN TÍNH (LINEAR APPROXIMATIONS)

Ở ví dụ 1, ta đã biết phương trình mặt tiếp xúc với đồ thị hàm $z=2x^2+y^2$ tại điểm $(1,1,3)$ là: $z=4x+2y-3$

Ta nhận thấy rằng, hàm tuyến tính hai biến $L(x,y)=4x+2y-3$ xấp xỉ tốt với $f(x,y)$ khi (x,y) gần $(1,1)$, chẳng hạn tại điểm $(1.1,0.95)$:

$$L(1.1,0.95)\approx 4(1.1)+2(0.95)-3=3.3, \qquad f(1.1,0.95)=2(1.1)^2+(0.95)^2=3.3225$$

Hàm L gọi là hàm tuyến tính hóa của f tại $(1,1)$ và xấp xỉ $f(x,y)\approx 4x+2y-3$ gọi là xấp xỉ tuyến tính hay xấp xỉ mặt phẳng tiếp xúc của f tại $(1,1)$.

Tổng quát, phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm hai biến f tại $(a,b,f(a,b))$:

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

Hàm tuyến tính hóa (linearization) của f tại (a,b):

$$L(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

Xấp xỉ $f(x,y)\approx f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ gọi là xấp xỉ tuyến tính (linear approximation) hay xấp xỉ mặt phẳng tiếp xúc (tangent plane approximate) của f tại (a,b).

♦ HÀM KHẢ VI (DIFFERENTIABLE FUNCTIONS):

Xét hàm hai biến $z=f(x,y)$, giả sử rằng x thay đổi từ a đến $a+\Delta x$, b thay đổi từ b đến $b+\Delta y$.

Khi đó, số gia tương ứng của z là $\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$.

DEFINITION: Hàm $z = f(x,y)$ khả vi tại (a,b) nếu Δz biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \text{, với } \varepsilon_1, \text{và } \varepsilon_2 \to 0 \ khi \ (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Định lí sau đây cho phép ta kiểm tra tính khả vi của hàm hai biến

THEOREM: Nếu các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại gần (a,b) và liên tục tại (a,b) thì f khả vi tại (a,b)

Example 2: Show that $f(x,y) = xe^{xy}$ is diferentiable at $(1,0)$ and find its linearization there. Then use it to approximate $f(1.1,-0.1)$.

Giải: Đạo hàm riêng là: $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$, $f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$

$f_x(1,0) = 1$, $f_y(1,0) = 1$

Cả hai hàm f_x và f_y liên tục nên f khả vi. Hàm tuyến tính hóa:

$$L(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) = x + y$$

Xấp xỉ tuyến tính tương ứng: $xe^{xy} \approx x + y \to f(1.1,-0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$.

♦ **VI PHÂN (DIFFERENTIALS)**

Cho hàm hai biến khả vi $z = f(x,y)$, ta định nghĩa các vi phân dx và dy là các biến độc lập (có thể nhận bất kì giá trị nào). Khi đó, vi phân toàn phần (total differential) dz được định nghĩa:

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Example 3:

(a) If $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$, find the differential dz.

(b) If x changes from 2 to 2.05 and y changes from 3 to 2.96, compare the values of Δz and dz.

Giải:

a. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$

b. Đặt $x = 2,\ dx = \Delta x = 0.05,\ y = 3,\ dy = \Delta y = -0.04$, ta có:

$$dz = (2.2 + 3.3)*0.05 + (3.2 - 2.3)*(-0.04) = 0.65$$

Số gia của z là: $\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2,3) = 0.6449$.

1.16 QUY TẮC XÍCH (THE CHAIN RULE):

THE CHAIN RULE (CASE 1): Giả sử $z = f(x,y)$ là hàm khả vi theo biến x, y, với $x = g(t)$, $y = h(t)$ là các hàm khả vi theo biến t, thì z là hàm khả vi theo biến t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{hay} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Example 1: If $z = x^2y + 3xy^4$, where $x = \sin 2t$ and $y = \cos t$, find $\frac{dz}{dt}$ when $t = 0$.

Giải: Theo quy tắc chuỗi ta có:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(2xy + 3y^4\right)\left(2\cos 2t\right) + \left(x^2 + 12xy^3\right)\left(-\sin t\right)$$

Khi $t = 0$ ta có $x = \sin 0 = 0$ và $y = \cos 0 = 1$. Do đó:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)2\cos 0 + (0+0)(-\sin 0) = 6.$$

THE CHAIN RULE (CASE 2): Giả sử $z = f(x, y)$ là hàm khả vi theo biến x, y, với $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$ là các hàm khả vi theo biến s và t thì:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Example 2: If $z = e^x \sin y$, where $x = st^2$ and $y = s^2t$, find $\partial z / \partial s$ and $\partial z/\partial t$.

Giải: Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \left(e^x \sin y\right)\left(t^2\right) + \left(e^x \cos y\right)\left(2st\right) = te^{st^2}\left[t\sin\left(s^2t\right) + 2s\cos\left(s^2t\right)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \left(e^x \sin y\right)\left(2st\right) + \left(e^x \cos y\right)\left(s^2\right) = se^{st^2}\left[2t\sin\left(s^2t\right) + s\cos\left(s^2t\right)\right].$$

THE CHAIN RULE (GENERAL VERSION): Giả sử u là hàm khả vi n biến $x_1, x_2, ..., x_n$ và mỗi x_i là một hàm khả vi m biến $t_1, t_2, ..., t_m$. Khi đó, u là một hàm theo các biến $t_1, t_2, ..., t_m$ và

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2, ..., m$$

Example 3: If $u = x^4y + y^2z^3$, where $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, $z = r^2s\sin t$, find the value of $\frac{\partial u}{\partial s}$ when $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$.

Giải:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \left(4x^3y\right)\left(re^t\right) + \left(x^4 + 2yz^3\right)\left(2rse^{-t}\right) + \left(3y^2z^2\right)\left(r^2\sin t\right)$$

Khi $r = 2,\ s = 1,\ t = 0 \ \to\ x = 2, y = 2, z = 0 \ \to\ \frac{\partial u}{\partial s} = 192$.

♦ ĐẠO HÀM HÀM ẨN (IMPLICIT DIFFERENTIATION)

- Xét y là hàm khả vi theo x: $y = f(x)$ và phương trình dạng $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$. Sử dụng quy tắc xích, lấy đạo hàm hai vế của phương trình theo biến x ta được:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.\ \text{Vì } \frac{dx}{dx} = 1 \text{ nên nếu } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0, \text{ thì:}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

- Cho $z = f(x,y)$ và $F(x,y,z) = F(x,y,f(x,y)) = 0$. Nếu F và f khả vi, theo quy tắc xích:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \text{ Vì } \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \text{ và } \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0 \text{ nên: } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Nếu $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, ta được: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Vậy:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

Example 4: Find y' if $x^3 + y^3 = 6xy$.

Giải: Phương trình đã cho được viết lại: $F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$

Vậy $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$.

Example 5: Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$ if $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Giải: Đặt $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$, ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

1.16 GIÁ TRỊ CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU (MAXIMUM AND MINIMUM VALUES):

DEFINITION: Hàm hai biến f có *cực đại địa phương (local maximum)* tại (a,b) nếu $f(x,y) \le f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b) [$f(x,y) \le f(a,b)$ với mọi (x,y) thuộc đĩa nào đó có tâm (a,b)]. Số $f(a,b)$ được gọi là *giá trị cực đại địa phương (local maximum value)*. Nếu $f(x,y) \ge f(a,b)$ khi (x,y) gần (a,b), thì f có *cực tiểu địa phương (local minimum)* tại (a,b) và $f(a,b)$ là *giá trị cực tiểu địa phương (local minimum value)*.

Nếu các bất đẳng thức trên đúng cho mọi (x,y) thuộc miền xác định của f ta nói f có *cực đại tuyệt đối (absolute maximum) hay cực tiểu tuyệt đối (absolute minimum)* tại (a,b).

THEOREM: Nếu f có cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương tại (a,b) và các đạo hàm riêng cấp 1 của f tồn tại thì $f_x(a,b) = 0$ và $f_y(a,b) = 0$

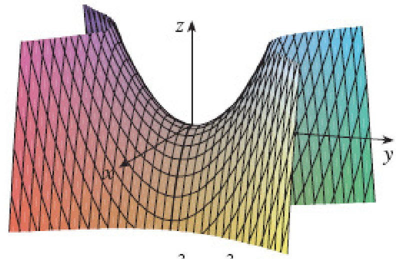
Điểm (a,b) gọi là *điểm tới hạn (critical point)* nếu $f_x(a,b)=0$ và $f_y(a,b)=0$, hoặc nếu một trong hai đạo hàm riêng không tồn tại. Từ định lí trên ta có nếu *f* có cực đại địa phương hay cực tiểu địa phương tại (a,b) thì (a,b) là điểm tới hạn của *f*. Tuy nhiên tại điểm tới hạn, hàm có thể có cực đại địa phương, cực tiểu địa phương hoặc không có cả hai.

Example 1: Let $f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$, Then $f_x(x,y)=2x-2$ $f_y(x,y)=2y-6$

Các đạo hàm riêng bằng 0 khi $x=1$ và $y=3$ nên $(1,3)$ là điểm tới hạn duy nhất của hàm số.

Ta có: $f(x,y)=4+(x-1)^2+(y-3)^2 \rightarrow f(x,y)\geq 4,\ \forall x,y$. Do đó: $f(1,3)=4$ là cực tiểu địa phương và cực tiểu toàn cục của f.

Example 2: Find the extreme values of $f(x,y)=y^2-x^2$



$z=y^2-x^2$

Giải: Ta có $f_x=-2x,\ f_y=2y \rightarrow f$ có một điểm cực trị $(0,0)$

Với các điểm trên trục *x*, ta có $y=0$ nên $f(x,y)=-x^2<0\,(x\neq 0)$

Với các điểm trên trục *y*, ta có $x=0$ nên $f(x,y)=y^2>0\,(y\neq 0)$

Vậy, mỗi đĩa với tâm $(0,0)$ chứa các điểm mà *f* có thể nhận giá trị dương cũng như giá trị âm, do đó $f(0,0)=0$ không thể là giá trị cực trị của f hay f không có giá trị cực trị.

SECOND DERIVATIVES TEST (TIÊU CHUẨN ĐẠO HÀM CẤP 2): Giả sử các đạo hàm riêng cấp 2 của f liên tục trên đĩa tâm (a,b), và giả sử rằng $f_x(a,b)=0$ và $f_y(a,b)=0$. Đặt

$$D=D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

(a) Nếu $D>0$ và $f_{xx}(a,b)>0$ thì $f(a,b)$ là cực tiểu địa phương.

(b) Nếu $D>0$ và $f_{xx}(a,b)<0$ thì $f(a,b)$ là cực đại địa phương.

(c) Nếu $D<0$ thì $f(a,b)$ không phải là cực đại hay cực tiểu địa phương.

Lưu ý: Trường hợp (c), điểm (a,b) gọi là điểm yên ngựa (saddle point) của hàm *f*.

Example 3: Find the local maximum and minimum values and saddle points of

$$f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1.$$

Giải: Trước tiên ta tìm các điểm tới hạn:

$$f_x=4x^3-4y \qquad f_y=4y^3-4x$$

Cho các đạo hàm riêng bằng không, ta tìm được các điểm tới hạn $(0,0)$, (1,1), và (-1,-1)

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 và $D(x,y)$

$$f_{xx}=12x^2 \quad f_{xy}=-4 \quad f_{yy}=12y^2 \quad D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\left[f_{xy}\right]^2=144x^2y^2-16$$

+ $D(0,0)=-16<0 \rightarrow f$ không có cực đại và cực tiểu địa phương tại $(0,0)$ và $(0,0)$ là một điểm yên ngựa.

+ $D(1,1)=128>0$ và $f_{xx}(1,1)=12>0$: $f(1,1)=-1$ là giá trị cực tiểu địa phương của *f*

+ $D(-1,-1)=128>0$ và $f_{xx}(-1,-1)=12>0$: $f(-1,-1)=-1$ là giá trị cực tiểu địa phương của *f*.

♦ GIÁ TRỊ CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU TUYỆT ĐỐI (ABSOLUTE MAXIMUM AND MINIMUM VALUES):

Tập đóng (closed set) trong $\mathbb{R}^2$ là tập có chứa tất cả các điểm biên của nó

Chẳng hạn, đĩa $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \le 1\}$ là một *tập đóng*.

Tập bị chặn (bounded set) trong $\mathbb{R}^2$ là tập được chứa trong một đĩa nào đó

EXTREME VALUE THEOREM FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES: Nếu f liên tục trên một tập đóng và bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$ thì f đạt được một giá trị cực đại tuyệt đối $f(x_1, y_1)$ và một giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(x_2, y_2)$ tại các điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ trong *D*.

Phương pháp tìm giá trị cực đại tuyệt đối và giá trị cực tiểu tuyệt đối của một hàm hai biến *f*:

Tìm giá trị cực đại và cực tiểu tuyệt đối của hàm số f liên tục trên một tập đóng và bị chặn *D*:

1. Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn của f trong *D*.
2. Tìm các giá trị cực trị của f trên biên *D*.
3. Giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hai bước trên là giá trị cực đại tuyệt đối/ cực tiểu tuyệt đối của f trên *D*.

Example 3: Find the absolute maximum and minimum values of the function

$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ on the rectangle $D = \{(x, y) / 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

Giải: Trước tiên ta tìm các điểm tới hạn của hàm số, ta có:

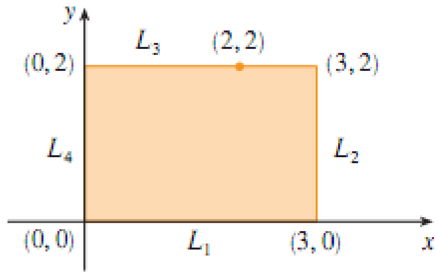
$$f_x = 2x - 2y \qquad f_y = -2x + 2$$

Cho các đạo hàm riêng bằng không ta tìm được điểm tới hạn là $(1,1)$ và $f(1,1) = 1$.

Biên của D gồm bốn đoạn thẳng $L_1, L_2, L_3,$ *và* L_4

Trên L_1, ta có $y = 0$ và $f(x,0) = x^2$, $0 \le x \le 3$: đây là hàm tăng nên giá trị cực tiểu là $f(0,0) = 0$ và giá trị cực đại là $f(3,0) = 9$.

Trên L_2, ta có $x = 3$ và $f(3, y) = 9 - 4y$, $0 \le y \le 2$: giá trị cực đại là $f(3,0) = 9$ và giá trị cực tiểu là $f(3,2) = 1$



Trên L_3 ta có $y = 2$ và $f(x,2) = x^2 - 4x + 4$, $0 \le x \le 3$: giá trị cực tiểu là $f(2,2) = 0$ và giá trị cực đại là $f(0,2) = 4$.

Và cuối cùng trên L_4 ta có $x = 0$ và $f(0, y) = 2y$, $0 \le y \le 2$: giá trị cực đại là $f(0,2) = 4$ và giá trị cực tiểu là $f(0,0) = 0$.

Do đó, trên biên *D*, giá trị lớn nhất là 9, giá trị bé nhất là 0. Vậy giá trị cực đại tuyệt đối của *f* trên D là $f(3,0) = 9$, và giá trị cực tiểu tuyệt đối của *f* trên *D* là $f(0,0) = f(2,2) = 0$.