Chương 5: DÃY VÀ CHUỖI VÔ HẠN (INFINITE SEQUENCES AND SERIES)

5.1 DÃY SỐ (SEQUENCES):

Một dãy số có thể hiểu là một dãy các số được viết theo một thứ tự xác định: $a_1,\ a_2,...,\ a_n,...$

Số a_1 gọi là số hạng thứ nhất, a_2 là số hạng thứ 2, và tổng quát a_n là số hạng thứ n

Với mỗi số nguyên dương n, ta có số tương ứng a_n. Vậy **dãy số** là hàm số với miền xác định là tập các số nguyên dương. Ta ký hiệu $a_n = f(n)$ là giá trị của hàm f tại n

Dãy số $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ thường được viết gọn $\{a_n\}$ hoặc $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Example 1: Some sequences in the following examples:

a. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, ..., \dfrac{n}{n+1}, ...\right\}$

b. $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3}, n \geq 3$ $\qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n-3}, ...\right\}$

Example 2: Find a formula for the general term a_n of the sequence:

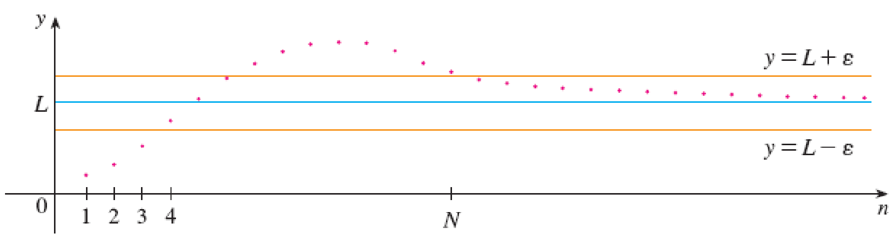
$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, ...\right\}$$

Giải: Ta có: $a_1 = \dfrac{3}{5},\ a_2 = -\dfrac{4}{25},\ a_3 = \dfrac{5}{125},\ a_4 = -\dfrac{6}{625},\ a_5 = \dfrac{7}{3125}$

$\rightarrow$ Số hạng tổng quát thứ n là: $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{5^n}$

DEFINITION: Dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn L, kí hiệu là: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ hoặc $a_n \to L$ *khi* $n \to \infty$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ có một số nguyên dương N tương ứng sao cho với $n > N$ thì $|a_n - L| < \varepsilon$. Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ hội tụ (convergent)

Dãy số có giới hạn L được minh họa bằng hình vẽ dưới đây:



THEOREM: Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ và $f(n) = a_n$, với n là số nguyên, khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Đặc biệt, ta đã biết $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^r} = 0,\ r > 0 \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^r} = 0,\ r > 0$

DEFINITION: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ nếu với mỗi số $M > 0$ có một số nguyên dương N sao cho với $n > N$ thì $a_n > M$. Khi đó ta nói dãy $\{a_n\}$ phân kì (divergent)

LIMIT LAWS: Nếu $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là những dãy số hội tụ và c là hằng số, khi đó:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \text{ khi } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{khi } p > 0 \text{ và } a_n > 0$$

THEOREM: Nếu $a_n \le b_n \le c_n$ với $n \ge n_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

THEOREM: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Example 3: Find $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

Giải: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

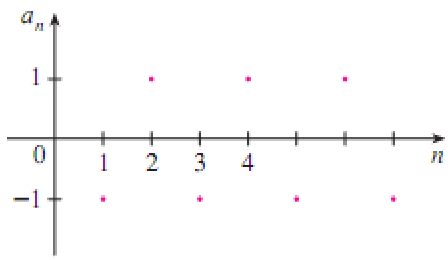
Example 4: Calculate $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

Giải: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

Example 5: Determine whether the sequence $a_n = (-1)^n$ is convergent or divergent?

Giải: Dãy đã cho được viết đưới dạng:

$$\{-1, 1, -1, 1, ...\}$$



Dựa vào đồ thị ta thấy, các số hạng của dãy luân phiên nhận các giá trị 1 và –1, do đó

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ không tồn tại hay dãy $a_n = (-1)^n$ phân kì

Example 6: Evaluate $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ if it exists

Giải: Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \;\to\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

THEOREM: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ và hàm số f liên tục tại L thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

Example 7: Find $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi/n)$.

Giải: Vì hàm sine là hàm liên tục tại 0, nên ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi/n) = \sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}(\pi/n)\right) = \sin 0 = 0$

Example 8: Discuss the convergence of the sequence $a_n = n!/n^n$, where $n! = 1.2.3.....n$

Giải: Ta có

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3.....n}{n.n.n.....n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2.3.....n}{n.n.....n}\right) \to 0 < a_n \le \frac{1}{n}. \quad \text{Vì } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \to \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

Dãy số $\{r^n\}$ hội tụ nếu $-1 < r \le 1$ và phân kì khi r nhận các giá trị còn lại

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & -1 < r < 1 \\ 1, & r = 1 \end{cases}$$

DEFINITION: Dãy $\{a_n\}$ gọi là tăng/giảm (increasing/decreasing) nếu $a_n < a_{n+1} / a_n > a_{n+1}$, với mọi $n \ge 1$. Dãy tăng hay giảm gọi là dãy đơn điệu (monotonic)

Example 9: The sequence $\left\{\frac{3}{n+5}\right\}$ is decreasing

Thật vậy, ta có $\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6} \quad \to \quad a_n > a_{n+1}, \ \forall n \ge 1$

Example 10: Show that the sequence $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ is decreasing.

Giải: Xét hàm $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Ta có $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ với $x^2 > 1$

$\to$ f giảm trên $(1,\infty) \to f(n) > f(n+1) \to \{a_n\}$ giảm

DEFINITION: Dãy $\{a_n\}$ được gọi là bị chặn trên/ bị chặn dưới (bounded above/ bounded below) nếu có một số M sao cho $a_n \le M$ / $a_n \ge M$ với mọi $n \ge 1$. Nếu $\{a_n\}$ vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới thì $\{a_n\}$ được gọi là dãy số bị chặn (bounded sequence).

Example 11: The sequence $\{n\}$ is bounded below $(a_n > 0)$ but not above

The sequence $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ is bounded because $0 < a_n < 1$ for all n.

MONOTONIC SEQUENCE THEOREM: Mọi dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ

Example 12: Investigate the sequence $\{a_n\}$ defined by the recurrence relation:

$$a_1 = 2, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad \text{where} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Giải: - Chứng minh $\{a_n\}$ tăng bằng phương pháp quy nạp:

Với $n = 1$: $a_1 = 2, \ a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 8 \quad \to \quad a_1 < a_2$

Giả sử $a_k < a_{k+1}$. Ta chứng minh $a_{k+1} < a_{k+2}$

Vì $a_k < a_{k+1} \ \to \ a_k + 6 < a_{k+1} + 6 \ \to \ \frac{1}{2}(a_k+6) < \frac{1}{2}(a_{k+1}+6)$. Vậy $a_{k+1} < a_{k+2} \to \{a_n\}$ tăng

- Chứng minh $\{a_n\}$ bị chặn $[2 \le a_n < 6, \forall n]$

Ta có $a_n > a_1 = 2$ [vì dãy tăng]. Ta chứng minh $a_n < 6$ bằng quy nạp

Giả sử $a_k < 6 \;\to\; a_k + 6 < 12 \;\to\; \frac{1}{2}(a_k + 6) < 6$. Vậy $a_{k+1} < 6 \;\to\; a_n < 6, \forall n$

Vậy dãy đã cho hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n + 6) \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}(L+6) \Leftrightarrow L = 6$

5.2 CHUỖI (SERIES)

Nếu ta cộng các số hạng của dãy vô hạn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ta nhận được biểu diễn:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Biểu diễn này được gọi là chuỗi vô hạn (infinite series) hay gọi tắt là chuỗi (series), kí hiệu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{hoặc} \quad \sum a_n$$

DEFINITION: Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Tổng riêng thứ *n* (*nth* partial sum) của chuỗi là: $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Nếu dãy số $\{s_n\}$ hội tụ (convergent) và $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, ta nói chuỗi $\sum a_n$ hội tụ và viết:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s \quad \text{hoặc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Số *s* được gọi là tổng của chuỗi (the sum of the series). Ngược lại, chuỗi được gọi là phân kì (divergent)

- Tổng của chuỗi là giới hạn của dãy số các tổng riêng, do đó: $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

Example 1: An important example of an infinite series is the geometric series (chuỗi hình học)

$$a + ar + ar^2 \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Nếu $r = 1$, ta có $s_n = a + a + \ldots + a = na \;\to\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$: chuỗi phân kì

Nếu $r \neq 1$, ta có $s_n = a + ar + ar^2 \ldots + ar^{n-1}$

$$rs_n = ar + ar^2 \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\to s_n - rs_n = a - ar^n \to s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Nếu $-1 < r < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$: chuỗi hội tụ

Nếu $r \leq -1$ hoặc $r > 1$ ta có $\{r^n\}$ phân kì $\to \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ không tồn tại: chuỗi phân kì. Vậy:

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$ hội tụ nếu $|r| < 1$, có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

Nếu $|r| \geq 1$ chuỗi hình học phân kì.

Example 2: Find the sum of the geometric series

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\ldots$$

Giải: Số hạng đầu tiên là $a=5$ và tỉ số chung (common ratio) $r=-\frac{2}{3}$. Vì $|r|=\frac{2}{3}<1$ nên chuỗi số hội tụ và tổng của nó là:

$$5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\ldots=\frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{5}{\frac{5}{3}}=3$$

Example 3: Is the series $\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}3^{1-n}$ convergent or divergent?

Giải: Ta viết số hạng thứ n của chuỗi dưới dạng ar^{n-1}

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}3^{1-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^2\right)^n 3^{-(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^{(n-1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Đây là chuỗi hình học với $a=4$ và $r=\frac{4}{3}$. Vì $r>\frac{4}{3}$ nên chuỗi này là phân kì.

Example 4: Write the number $2.3\overline{17}=2.3171717\ldots$ as a ratio of integer

Giải: Ta có $2.3171717\ldots=2.3+\frac{17}{10^3}+\frac{17}{10^5}+\frac{17}{10^7}+\ldots$

Sau số hạng đầu tiên ta có chuỗi hình học với $a=\frac{17}{10^3}$, $r=\frac{1}{10^2}$. Vậy

$$2.3\overline{17}=2.3+\frac{\frac{17}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{23}{10}+\frac{17}{990}=\frac{1147}{495}$$

Example 5: Find the sum of the series $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, where $|x|<1$

Giải: Ta có: $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots$ đây là chuỗi hình học với $a=1$ và $r=x$.

Vì $|r|=|x|<1$ nên chuỗi hội tụ và $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

Example 6: Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ is convergent, and find its sum

Giải: Xét tổng riêng thứ n của chuỗi:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$$

Example 7: Show that the harmonic series (chuỗi điều hòa) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ is divergent

Giải: Ta có $s_1=1,\quad s_2=1+\frac{1}{2}$

$$s_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2}$$

$$s_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}$$

Tương tự: $s_{2^n}>1+\frac{n}{2}\quad\rightarrow\lim_{n\to\infty}s_{2^n}=\infty$. Vậy chuỗi đã cho phân kì

> **THEOREM:** Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

> **THE TEST FOR DIVERGENCE:**
>
> Nếu $\lim_{n\to\infty}a_n$ không tồn tại hoặc $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kì

Example 8: Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$ diverges.

Giải: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+4/n^2}=\frac{1}{5}\neq 0$. Vậy chuỗi phân kì

> **THEOREM:** Nếu $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là các chuỗi hội tụ thì các chuỗi $\sum ca_n$, $\sum(a_n+b_n)$, và $\sum(a_n-b_n)$ (c là hằng số) cũng hội tụ và
>
> $(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

Example 9: Find the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$

Giải: Ta có $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ là chuỗi hình học với $a=1/2$ và $r=1/2$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\text{ và }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

Vậy $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3.1+1=4$$

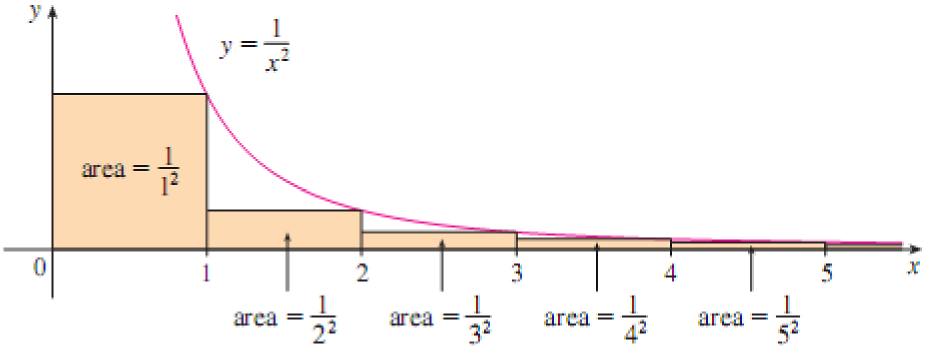
♦ **Lưu ý:** Một số hữu hạn số hạng của chuỗi không ảnh hưởng đến sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi

5.3 TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN VÀ ƯỚC LƯỢNG TỔNG (THE INTEGRAL TEST AND ESTIMATES OF SUMS):

Xét chuỗi số: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

Ta rất khó để đưa ra công thức đơn giản của tổng riêng s_n của chuỗi số trên, vì vậy ta sẽ không thể tính được $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Để xét tính hội tụ của chuỗi số này, ta sẽ sử dụng phương pháp sau đây:

Biểu diễn đường cong $y=\dfrac{1}{x^2}$ và các hình chữ nhật nằm bên dưới đường cong như hình vẽ



Cạnh của các hình chữ nhật này là một đoạn có độ dài bằng 1; chiều cao của hình chữ nhật bằng giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2}$ tại điểm biên bên phải của mỗi đoạn. Vậy tổng diện tích của các hình chữ nhật là:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Trừ hình chữ nhật đầu tiên, tổng diện tích của hình chữ nhật còn lại nhỏ hơn diện tích nằm bên dưới đường cong $y=\dfrac{1}{x^2}$ với $x\ge 1$, đó chính là giá trị của tích phân $\int_1^{\infty}\dfrac{1}{x^2}dx=1$.

Vì vậy, tất cả các tổng riêng nhỏ hơn $\dfrac{1}{1^2}+\int_1^{\infty}\dfrac{1}{x^2}dx=2$

Vậy dãy các tổng riêng bị chặn trên và tăng nên hội tụ nên chuỗi số cũng hội tụ.

Tiêu chuẩn sau đây sẽ cho phép ta kiểm tra tính chất hội tụ của những chuỗi số như vậy

THE INTEGRAL TEST: Cho f là hàm số liên tục, dương, giảm trên khoảng $[1,\infty)$ và giả sử $a_n=f(n)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ là hội tụ nếu và chỉ nếu tích phân $\int_1^{\infty}f(x)dx$ hội tụ.

♦ **Lưu ý:** Tiêu chuẩn tích phân vẫn đúng nếu

- Hàm f không cần phải giảm trên $[1,\infty)$, chỉ cần giảm với mọi $n\ge N$ nào đó
- Nếu xét chuỗi $\sum\limits_{n=c}^{\infty}a_n$ thì xét tích phân $\int_c^{\infty}f(x)dx$

Example 1: Test the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ for convergent or divergent?

Giải: Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ liên tục, dương, và giảm trên $[1,\infty)$ và

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_1^t=\lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Vậy $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ hội tụ $\to$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ cũng hội tụ.

Thực hành: For what values of p is the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergent?

> Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (gọi tên chuỗi này là p-chuỗi) là hội tụ nếu $p>1$ và phân kì nếu $p\le 1$.

Example 2: Determine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converges or diverges?

Giải: Xét hàm $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ đây là hàm dương, liên tục với $x>1$.

Ta có: $f'(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}$. $f'(x)<0$ khi $\ln x>1$ hay $x>e$

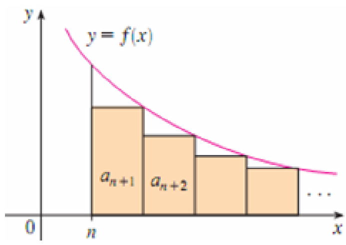
Áp dụng tiêu chuẩn tích phân: $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{\ln x}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^t=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln^2 t}{2}=\infty$

♦ ƯỚC LƯỢNG TỔNG CỦA CHUỖI SỐ (ESTIMATING THE SUM OF A SERIES)

Ta có bất kỳ tổng riêng s_n của chuỗi hội tụ $\sum a_n$ xấp xỉ với tổng s của chuỗi vì $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

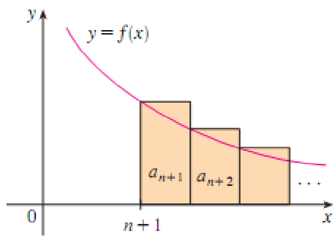
Để biết xấp xỉ này tốt như thế nào ta cần ước lượng độ lớn của phần dư (remainder):

$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$



So sánh diện tích các hình chữ nhật với diện tích bên dưới đường cong $y=f(x)$ với $x>n$ ta thấy:

$$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\dots<\int_n^{\infty} f(x)dx$$



Tương tự $$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\dots>\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx$$

Vậy, ta có ước lượng sai số sau đây:

> **REMAINDER ESTIMATE FOR THE INTEGRAL TEST:**
>
> Giả sử $f(k)=a_k$, với f là hàm số liên tục, dương, giảm khi $x\ge n$
>
> và $\sum a_n$ hội tụ. Nếu $R_n = s - s_n$ thì $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le \int_n^{\infty} f(x)dx$
>
> Hay $s_n+\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le s \le s_n+\int_n^{\infty} f(x)dx$

Example 3:

(a) Approximate the sum of the series $\sum 1/n^3$ by using the sum of the first 10 terms. Estimate the error involved in this approximate.

(b) How many terms are required to ensure that the sum is accurate to within 0.0005?

Giải:

Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn tích phân, ta có

$$\int_n^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2x^2}\bigg|_n^t=\frac{1}{2n^2}$$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\approx s_{10}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{10^3}\approx 1.1975$ Và $R_{10}\le\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2(10)^2}=\frac{1}{200}$

(b) Để sai số chính xác đến 0.0005, ta phải có $R_n\le 0.0005$

Vì $R_n\le\int_n^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2n^2}$ nên ta muốn $\frac{1}{2n^2}<0.0005\Leftrightarrow n>\sqrt{1000}=31.6$

Vì vậy ta cần đến 32 số hạng để đảm bảo chính xác đến 0.0005.

5.4 TIÊU CHUẨN SO SÁNH (THE COMPARISION TESTS):

THE COMPARISION TESTS: Giả sử $\sum a_n$ và $\sum b_n$ là các chuỗi với số hạng dương.

(i) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $a_n\le b_n$ với mọi n (hoặc $\forall n\ge N$) thì $\sum a_n$ cũng hội tụ.

(ii) Nếu $\sum b_n$ phân kì và $a_n\ge b_n$ với mọi n (hoặc $\forall n\ge N$) thì $\sum a_n$ cũng phân kì.

E

Example 1: Determine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n^2+4n+3}$ converges or diverges?

Giải: Nhận xét:

$$\frac{5}{2n^2+4n+3}<\frac{5}{2n^2} \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n^2}=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ là chuỗi hội tụ} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n^2+4n+3} \text{ hội tụ}$$

Example 2: Test the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ for convergence or divergence?

Giải: Vì $\ln n>1$ với $n\ge 3\to\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n},\ n\ge 3$ và $\sum\frac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi đã cho phân kì

THE LIMIT COMPARISION TEST: Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ là các chuỗi với số hạng dương

Nếu $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$ với c là số hữu hạn dương thì cả 2 chuỗi hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Example 3: Test the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ for convergence or divergence?

Giải: Xét 2 chuỗi số: $a_n=\frac{1}{2^n-1}$ và $b_n=\frac{1}{2^n}$

Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2^n-1)}{1/2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=1>0$ và $\sum\frac{1}{2^n}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ hội tụ

Example 4: Determine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ converges or diverges?

Giải: Xét 2 chuỗi số: $a_n=\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ và $b_n=\frac{2n^2}{n^{5/2}}=\frac{2}{n^{1/2}}$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}.\frac{n^{1/2}}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{5/2}+3n^{3/2}}{2\sqrt{5+n^5}}=1>0$ và $\sum\frac{1}{n^{1/2}}$ phân kì nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ phân kì

♦ ƯỚC LƯỢNG TỔNG CỦA CHUỖI (ESTIMATING THE SUM OF A SERIES):

Nếu chứng tỏ chuỗi $\sum a_n$ hội tụ bằng cách so sánh với chuỗi $\sum b_n$, ta có thể ước lượng tổng của chuỗi $\sum a_n$ bằng việc so sánh phần dư của hai chuỗi. Gọi s và R_n là tổng và phần dư của chuỗi $\sum a_n$, t và T_n là tổng và phần dư của chuỗi $\sum b_n$, ta có:

$$R_n=s-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\dots$$

$$T_n=t-t_n=b_{n+1}+b_{n+2}+\dots \qquad \text{Vì } a_n\le b_n,\forall n \ \rightarrow\ R_n\le T_n.$$

Nếu $\sum b_n$ là p-chuỗi, ta có thể ước lượng T_n như mục trên.

Nếu $\sum b_n$ là chuỗi hình học, ta có thể tính chính xác T_n

Example 5: Use the sum of the first 100 terms to approximate the sum of the series $\sum 1/\left(n^3+1\right)$. Estimate the error involved in this approximation.

Giải: Sử dụng máy tính ta có thể tìm được $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\approx\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^3+1}\approx 0.6864538$

Vì $\frac{1}{n^3+1}<\frac{1}{n^3}$ nên $\sum 1/\left(n^3+1\right)$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh

Phần dư T_n của chuỗi $\sum 1/n^3$ đã tính trong mục trên: $T_n\le\int_n^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2n^2}$

Vậy phần dư của chuỗi $\sum 1/\left(n^3+1\right)$ là $R_n\le T_n\le\frac{1}{2n^2}$

Với $n=100$, ta có : $R_{100}\le\frac{1}{2(100)^2}=0.00005$

5.5 CHUỖI ĐAN DẤU (ALTERNATING SERIES):

♦ **Chuỗi đan dấu** là chuỗi mà các số hạng luân phiên thay đổi dấu.

Ví dụ: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ hay $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$

THE ALTERNATING SERIES TEST:

Nếu chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+\dots,\ b_n>0$ thỏa mãn $b_{n+1}\le b_n$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ thì chuỗi hội tụ.

Example 1: Determine whether the alternating harmonic series converges or diverges?

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Giải: Chuỗi đã cho thỏa mãn $b_{n+1}<b_n$ vì $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ nên hội tụ

Example 2: Test the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+1}$ for convergence or divergence?

Giải: Chuỗi đã cho đan dấu.

Xét $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}\ \to\ f'(x)=\frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$. Với $x>0$ thì $f'(x)<0$ khi $x>\sqrt[3]{2}$

Vậy *f* giảm trên $(\sqrt[3]{2},\infty)$ hay $f(n+1)<f(n)$, do đó $b_{n+1}<b_n,\ n\geq 2$.

và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=0$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ

♦ ƯỚC LƯỢNG TỔNG (ESTIMATING SUMS):

ALTERNATING SERIES ESTIMATION THEOREM: Nếu $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ là tổng của chuỗi đan dấu thỏa mãn $0\leq b_{n+1}\leq b_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ thì $|R_n|=|s-s_n|\leq b_{n+1}$

Example 3: Find the sum of the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ correct to three decimal places

Giải:

Ta có chuỗi đan dấu trên hội tụ vì $\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{n!}$ *và* $0<\frac{1}{n!}<\frac{1}{n}\to 0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

Tổng

$$s=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\ldots=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\frac{1}{5040}+\ldots$$

Chú ý rằng $b_7=\frac{1}{5040}<\frac{1}{5000}=0.0002$ và $s_6=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx 0.368056$

Theo định lí ước lượng chuỗi đan dấu ta có $|s-s_6|\leq b_7<0.0002$. Sai số này nhỏ hơn 0.0002 nên không ảnh hưởng đến 3 chữ số thập phân nên ta có $s\approx 0.368$ chính xác đến 3 chữ số thập phân.

5.6 HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI VÀ CÁC TIÊU CHUẨN TỶ SỐ VÀ CĂN THỨC (ABSOLUTE CONVERGENCE AND THE RATIO AND ROOT TESTS)

Cho chuỗi số $\sum a_n$, ta xét chuỗi tương ứng: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots$

DEFINITION: Chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi giá trị tuyệt đối $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ hội tụ

Example 1: The series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...$ is absolutely convergent because

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ is a convergent p-series

Example 2: We know that the harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is convergent but it is not absolutely convergent because the corresponding series of absolute value is $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ which is the harmonic series and is therefore divergent.

DEFINITION: Chuỗi $\sum a_n$ gọi là hội tụ có điều kiện (conditionally convergent) nếu nó hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối

THEOREM: Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Example 3: Determine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}=\frac{\cos 1}{1^2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\frac{\cos 3}{3^2}+...$ is convergent or divergent?

Giải: Ta có : $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$ và $\frac{|\cos n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$

Chuỗi $\sum\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, do vậy hội tụ.

THE RATIO TEST:

(i) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L<1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó hội tụ)

(ii) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L>1$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kì

(iii) Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ chưa có kết luận về tính hội tụ hay phân kì của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

Example 4: Test the series $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$ for absolute convergence

Giải: Ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{(n+1)}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^3}{3^{(n+1)}}.\frac{3^n}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}<1$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối

THE ROOT TEST:

(i) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L<1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó hội tụ)

(ii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L>1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kì

(iii) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ chưa có kết luận về tính hội tụ hay phân kì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

Example 5: Test the convergence of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

Giải: Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n+2}=\dfrac{2}{3}<1$. Chuỗi đã cho hội tụ.

5.7 CHUỖI LŨY THỪA (POWER SERIES):

♦ **Chuỗi lũy thừa** là chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$ với x là biến và các c_i là các hằng số

Với mỗi giá trị của x cố định, chuỗi trên sẽ trở thành chuỗi số và ta sẽ kiểm tra được tính hội tụ hay phân kì của chuỗi.

♦ Tổng của chuỗi là một hàm số: $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+..+c_nx^n+\ldots$

Miền xác định của hàm số này là tập tất cả các giá trị x mà chuỗi hội tụ.

Tổng quát hơn, chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots$ gọi là chuỗi lũy thừa tâm a (power series centered at a)

Example 1: For what values of x is the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ convergent?

Giải: Nếu $x\neq 0$, theo tiêu chuẩn tỷ số

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)|x|=\infty$ khi $x\neq 0$. Vậy chuỗi phân kì với $x\neq 0$

Vậy chuỗi chỉ hội tụ khi $x=0$

Example 2: For what values of x does the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n}$ converge?

Giải: Đặt $a_n=\dfrac{(x-3)^n}{n}$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{(x-3)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3|=|x-3|$$

Theo tiêu chuẩn tỷ số, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối nên hội tụ khi $|x-3|<1 \leftrightarrow 2<x<4$.
Tiêu chuẩn tỷ số chưa có kết luận cho trường hợp $|x-3|=1\to x=2, x=4$ nên ta cần xét riêng cho các trường hợp này

Với $x = 2$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, đây là chuỗi hội tụ

Với $x = 4$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, đây là chuỗi phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $2 \le x < 4$

THEOREM: Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, chỉ có thể xảy ra 3 khả năng sau

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x

(iii) Có một số dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kì nếu $|x-a| > R$.

Số R gọi là bán kính hội tụ (radius of convergence) của chuỗi lũy thừa. Bán kính hội tụ của chuỗi ở trường hợp (i) là $R = 0$ và trường hợp (ii) là $R = \infty$

Example 3: Find the radius of convergence and interval of convergent of the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

Giải: Ta có $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}|x| = 3|x|$

Theo tiêu chuẩn tỷ số, chuỗi đã cho hội tụ khi $3|x| < 1 \leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$ và phân kì khi $3|x| > 1 \leftrightarrow |x| > \frac{1}{3} \to$ bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{3}$. Vậy, chuỗi hội tụ trong khoảng $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Ta sẽ kiểm tra sự hội tụ của chuỗi tại các biên của khoảng này.

Khi $x = -\frac{1}{3}$, chuỗi đã cho trở thành: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ chuỗi phân kì

Khi $x = \frac{1}{3}$, chuỗi đã cho trở thành: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ chuỗi hội tụ.

Vậy khoảng hội tụ của chuỗi đã cho là $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$.

5.8 CHUỖI TAYLOR VÀ CHUỖI MACLAURIN (TAYLOR AND MACLAURIN SERIES)

a. BIỂU DIỄN HÀM DƯỚI DẠNG CHUỖI LŨY THỪA (REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS AS POWER SERIES)

Example 1: Express $\frac{1}{1+x^2}$ as the sum of a power series and find the interval of convergence

Giải: Ta đã biết $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$

Thay x bởi $-x^2$ ta được: $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-\left(-x^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots$

Đây là chuỗi hình học, hội tụ khi $\left|-x^2\right|<1\leftrightarrow|x|<1\rightarrow$ khoảng hội tụ là $(-1;1)$

Example 2: Find a power series representation for $\dfrac{1}{2+x}$

Giải: Ta có: $\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}=\dfrac{1}{2\left(1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right)}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$

Chuỗi hội tụ khi $|-x/2|<1\ \leftrightarrow\ |x|<2\rightarrow$ khoảng hội tụ là $(-2,2)$

♦ ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN CHUỖI LŨY THỪA (DIFFERENTIATION AND INTEGRATION OF POWER SERIES)

THEOREM: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum c_n(x-a)^n$ có bán kính hội tụ $R>0$ thì hàm f được xác định bởi:

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

khả vi (do đó liên tục) trên $(a-R,a+R)$ và

(i) $f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)dx=C+c_0(x-a)+c_1\dfrac{(x-a)^2}{2}+c_2\dfrac{(x-a)^3}{3}+\ldots=C+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Bán kính hội tụ của các chuỗi (i) và (ii) cùng bằng R.

Example 3: Express $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ as a power series. What is the radius of convergence.

Giải: Lấy đạo hàm của 2 vế của phương trình $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ta được

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Theo định lý trên, bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ bằng nhau, do đó bằng 1

Example 4: Find a power series representation for $\ln(1-x)$ and its radius of convergence.

Giải: Ta có

$$-\ln(1-x)=\int\frac{1}{1-x}dx=\int\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right)dx$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+C\qquad |x|<1$$

Cho $x=0$ vào 2 vế ta được $C=0$. Vậy $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n},\quad |x|<1$

Bán kính hội tụ của chuỗi là 1

Thay $x = 1/2$ vào kết quả trên, ta có $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

Example 5: Find a power series representation for $f(x) = \tan^{-1} x$

Giải: Ta có $\tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...\right) dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$

Cho $x = 0$, ta có $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Do đó $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Example 6:

a. Evaluate $\int \frac{dx}{1+x^7}$ as a power series

b. Use part a to approximate $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^7}$ correct to within 10^{-9}

Giải:

a. Biểu diễn hàm cần lấy tích phân dưới dạng một chuỗi lũy thừa:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x)^7} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^7\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - ...$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{1+x^7} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1} = C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + ...$$

b. $$\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^7} = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + ... \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8.2^8} + \frac{1}{15.2^{15}} - \frac{1}{22.2^{22}} + ... + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + ...$$

Sử dụng xấp xỉ chuỗi đan dấu, sai số $|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}$, với $n = 4: \frac{1}{29.2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$

Do đó: $$\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^7} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8.2^8} + \frac{1}{15.2^{15}} - \frac{1}{22.2^{22}} \approx 0.4995137424$$

b. CHUỖI TAYLOR VÀ CHUỖI MACLAURIN (TAYLOR AND MACLAURIN SERIES):

THEOREM: Nếu f có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại a dạng $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, $|x-a| < R$

thì các hệ số (coefficients) của nó được cho bởi công thức $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Thay thế các hệ số c_n vào trong chuỗi, ta được công thức chuỗi Taylor của hàm số f tại a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

Đặc biệt với $a = 0$, chuỗi Taylor trở thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + ...$$

Example 1: Find the Maclaurin series of the function $f(x)=e^x$ and its radius of convergence.

Giải: Ta có $f^{(n)}(x)=e^x$ vì thế $f^{(n)}(0)=1$ với mọi *n*. Chuỗi Maclaurin:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Đặt $a_n=\dfrac{x^n}{n!}$, khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\dfrac{n!}{x^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{n+1}\right|=0<1$

Vậy chuỗi hội tụ với mọi *x* và bán kính hội tụ là $R=\infty$, do đó ta có : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0}$

♦ **Vấn đề:** Khi nào hàm f có thể viết bằng tổng của một chuỗi Taylor như sau:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

Xét tổng riêng của chuỗi trên :

$$T_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

T_n là đa thức bậc *n*, gọi là đa thức Taylor bậc *n* (the nth-degree Taylor polynomial) của f tại *a*.

Đặt $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ thì $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$. $R_n(x)$ được gọi là phần dư của chuỗi Taylor

THEOREM: Nếu $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, và $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ với $|x-a|<R$ thì f bằng tổng của chuỗi Taylor của nó trên khoảng $|x-a|<R$ (T_n là đa thức Taylor bậc *n* của f tại *a*)

TAYLOR'S INEQUALITY: Nếu $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$ với $|x-a|\le d$ thì phần dư $R_n(x)$ của chuỗi Taylor thỏa mãn bất đẳng thức $|R_n(x)|\le\dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ với $|x-a|\le d$

Example 2: Prove that e^x is equal to the sum of its Maclaurin series

Giải: Ta có $f^{(n+1)}(x)=e^x$ với mọi *n*. Nếu *d* là một số dương tùy ý và $|x|\le d$ thì ta có $\left|f^{(n+1)}(x)\right|=e^x\le e^d$. Theo bất đẳng thức Taylor với $a=0$, và $M=e^d$ ta có

$$|R_n(x)|\le\frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}\quad\text{với } |x|\le d$$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}=e^d\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

Vậy e^x bằng tổng chuỗi Maclaurin của nó : $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\quad\forall x$

Khi $x=1$, ta có : $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots$

Example 3: Find the Maclaurin series for *sinx* and prove that it represents *sinx* for all *x*

Giải: Ta có :

$$f(x)=\sin x,\ \ f(0)=0 \qquad f'(x)=\cos x,\ \ f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\sin x,\ \ f''(0)=0 \qquad f'''(x)=-\cos x,\ \ f'''(0)=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x,\ \ f^{(4)}(x)=0$$

Chuỗi Maclaurin của hàm sin$x$ là :

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Vì $f^{(n+1)}(x)$ là $\pm$ sin$x$ hay $\pm$ cos$x$ nên $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le 1,\ \forall x$. Lấy $M=1$ trong bất đẳng thức Taylor:

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|=\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}.$$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}=0\to\lim\limits_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right|=0\to\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

Vậy sin$x$ bằng tổng chuỗi Maclaurin của nó :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ \forall x$$

THE BINOMIAL SERIES: Nếu k là một số thực bất kì và $|x|<1$.

Khi đó : $$(1+x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+...$$

Trong đó ký hiệu $\dbinom{k}{n}=\dfrac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{n!},\ n\ge 1;\quad \dbinom{k}{0}=1$

Example 4: Find the Maclaurin series for the function $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ and its radius of convergence

Giải: Ta viết lại $f(x)$ dưới dạng nhị thức : $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{4}\right)^{-1/2}$

Sử dụng chuỗi nhị thức với $k=-\dfrac{1}{2}$ và x được thay thế bởi $-\dfrac{x}{4}$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{8}x+\frac{1.3}{2!8^2}x^2+\frac{1.3.5}{3!8^3}x^3+...+\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!8^n}x^n+...\right]$$

Chuỗi hội tụ khi $|-x/4|<1\leftrightarrow|x|<4$. Vậy bán kính hội tụ là $R=4$.

BẢNG CÁC CHUỖI MACLAURIN THƯỜNG GẶP:

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\dots$	$R=1$
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$R=\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\dots$	$R=\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$R=\infty$
$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\dots$	$R=1$
$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\dots$	$R=1$

Example 5:

a. Evaluate $\int e^{-x^2}dx$ as an infinite series

b. Evaluate $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ correct to within an error of 0.001

Giải:

a. Ta có: $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots$

$$\to\int e^{-x^2}dx=\int\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\dots\right)dx$$

$$=C+x-\frac{x^3}{3.1!}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\dots$$

Chuỗi này hội tụ với mọi x vì chuỗi e^{-x^2} hội tụ với mọi x

b. $\int_0^1 e^{-x^2}dx=\left[x-\frac{x^3}{3.1!}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+\frac{x^9}{9.4!}-\dots\right]_0^1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\dots$

$$\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}\approx 0.7475\quad\text{[sai số }\frac{1}{11\times 5!}=\frac{1}{1320}<0.001\text{]}$$

Example 6: Evaluate $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

Giải:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)=\frac{1}{2}$$

Example 7:

a. Approximate the function $f(x)=\sqrt[3]{x}$ by a Taylor polynomial of degree 2 at $a=8$

b. How accurate is this approximation when $7\le x\le 9$?

Giải:

a. Ta có $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ $\qquad f(8)=2$

$$f'(x)=\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(8)=\tfrac{1}{12}$$

$$f''(x)=-\tfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \qquad f''(8)=-\tfrac{1}{144}$$

$$T_2(x)=f(8)+\frac{f'(8)}{1!}(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2=2+\tfrac{1}{12}(x-8)-\tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

Xấp xỉ cần tìm: $\sqrt[3]{x}\approx T_2(x)=2+\tfrac{1}{12}(x-8)-\tfrac{1}{288}(x-8)^2$

b. Sử dụng bất đẳng thức Taylor để đánh giá sai số trong xấp xỉ trên:

$$|R_2(x)|\le\frac{M}{3!}|x-8|^3,\text{ với } |f'''(x)|\le M$$

Ta có : $f'''(x)=\tfrac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}\to f'''(x)\le\tfrac{10}{27}\times 7^{-\frac{8}{3}}<0.0021$ (vì $x\ge 7$)

Và với $7\le x\le 9$ $\to$ $-1\le x-8\le 1$ hay $|x-8|\le 1$, khi đó:

$$|R_2(x)|\le\frac{0.0021}{3!}\times 1^3=\frac{0.0021}{6}<0.0004$$

Example 8:

a. What is the maximum error possible in using the approximation $\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$ when $-0.3\le x\le 0.3$? Use this approximation to find $\sin 12^0$ correct to six decimal places

b. For what values of x is this approximation accurate to within 0.00005

Giải:

a. Lưu ý chuỗi Maclaurin $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$ là chuỗi đan dấu với mọi giá trị $x\ne 0$ và các số hạng liên tiếp giảm khi $|x|<1$, do đó sai số lớn nhất trong xấp xỉ trên là: $\left|\dfrac{x^7}{7!}\right|$. Với giả thuyết $-0.3\le x\le 0.3$, hay $|x|\le 0.3$, sai số cần tìm: $\left|\dfrac{x^7}{7!}\right|=\dfrac{|x|^7}{5040}\le\dfrac{(0.3)^7}{5040}\approx 3.4\times 10^{-8}$

Tính $\sin 12^0=\sin\left(\dfrac{12\pi}{180}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{15}\right)\approx\dfrac{\pi}{15}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{15}\right)^3+\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{15}\right)^5\approx 0.207912$

b. Sai số nhỏ hơn 0.00005 nếu $\dfrac{|x|^7}{5040}<0.00005\ \leftrightarrow\ |x|^7<0.252$ hay $|x|<0.82$