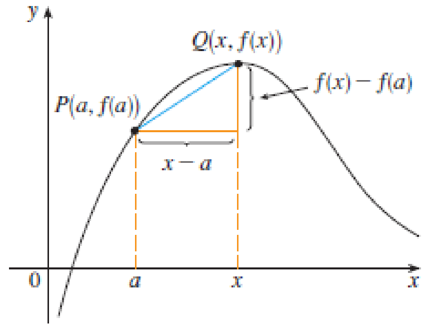
Chương 1: ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM (DERIVATIVES AND APPLICATIONS OF DIFFERENTIATION)

I. HÀM MỘT BIẾN:

1.1 ĐẠO HÀM (DERIVATIVES):

♦ **TIẾP TUYẾN (TANGENT LINE):**



DEFINITION: Tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $P(a, f(a))$ là đường thẳng đi qua điểm P với hệ số góc $m = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nếu giới hạn này tồn tại.

Đặt $h = x - a \leftrightarrow x = a + h$ thì $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

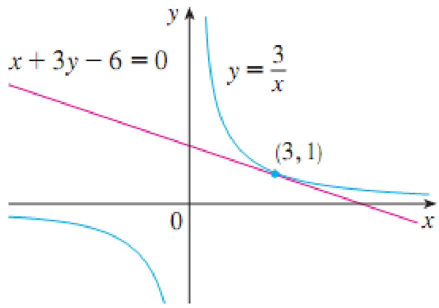
Example 1a: Find an equation of the tangent line to the parabola $y = x^2$ at the point $P(1,1)$.

Giải: Ở đây $a = 1$, $f(x) = x^2$. Hệ số góc là: $m = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$

Vậy phương trình đường tiếp tuyến: $y - 1 = 2(x - 1) \leftrightarrow y = 2x - 1$.

Example 1b: Find an equation of the tangent line to the hyperbola $y = \dfrac{3}{x}$ at the point $(3,1)$.

Giải: Đặt $f(x) = \dfrac{3}{x}$, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm (3,1):

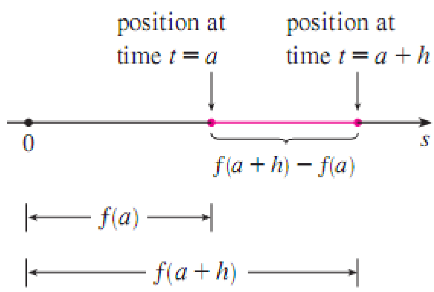


$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm (3,1):

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3) \leftrightarrow x + 3y - 6 = 0$$

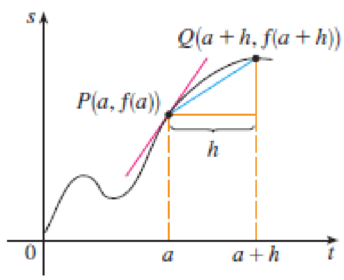
♦ **VẬN TỐC (VELOCITIES):**



Giả sử một vật di chuyển trên một đường thẳng có phương trình chuyển động: $s = f(t)$. Trong khoảng thời gian h từ $t = a$ đến $t = a + h$ vật đi được một quãng đường: $f(a+h) - f(a)$ với vận tốc trung bình: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Khi h càng nhỏ ($h \to 0$), vận tốc tức thời $v(a)$ tại thời điểm $t = a$ là giới hạn của vận tốc trung bình:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
= average velocity

Vậy vận tốc tức thời tại thời điểm $t = a$ bằng hệ số góc của tiếp tuyến tại P.

Example 2: Suppose that a ball is dropped from the upper observation deck of the CN Tower, 450m above the ground.

(a) What is the velocity of the ball after 5 seconds?

(b) How fast is the ball traveling when it hits the ground?

Giải: Phương trình chuyển động của quả bóng: $s = f(t) = 4.9t^2$, vận tốc tức thời tại thời điểm $t = a$ là:

$$v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} = 9.8a$$

a. Vận tốc tức thời sau 5s: $v(5) = 49\text{m/s}$.

b. Vì tầng quan sát cách mặt đất 450m nên quả bóng chạm mặt đất tại thời điểm t_1 thỏa mãn phương trình: $s(t_1) = 450$ hay $4.9t_1^2 = 450 \;\rightarrow\; t_1 \approx 9.6\text{s}$.

Vậy vận tốc tức thời của quả bóng lúc chạm đất là: $v(t_1) = 9.8t_1 \approx 94\text{m/s}$.

♦ ĐẠO HÀM (DERIVATIVES):

DEFINITION: Đạo hàm của hàm f tại điểm a, ký hiệu $f'(a)$ là:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$, nếu giới hạn này tồn tại

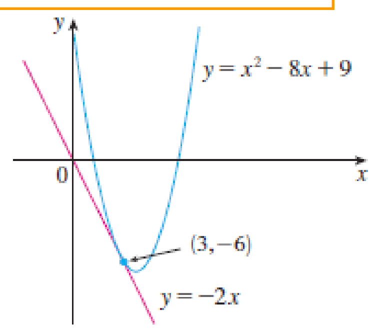
Lưu ý: Đặt $x = a + h \;\leftrightarrow\; h = x - a$, khi đó: $f'(a) = \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Example 3: Find the derivative of the function $f(x) = x^2 - 8x + 9$ at the number a.

Giải: Theo định nghĩa

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left[(a+h)^2 - 8(a+h)+9\right]-\left[a^2-8a+9\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah-8h}{h} = 2a-8$$

Tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(a, f(a))$ là đường thẳng đi qua $(a, f(a))$, có hệ số góc $f'(a)$ và có phương trình: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$



Example 4: Find an equation of the tangent line to the parabola $y = x^2 - 8x + 9$ at the point $(3, -6)$.

Giải: Từ ví dụ 3 ta có: $y'(a) = 2a - 8$

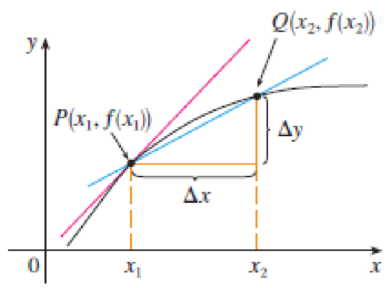
Hệ số góc của tiếp tuyến tại $(3,-6)$: $f'(3) = -2$

Phương trình của tiếp tuyến tại điểm $(3,-6)$ là: $y = -2x$.

♦ TỶ LỆ BIẾN THIÊN (RATES OF CHANGE):

Giả sử y là một hàm theo x: $y = f(x)$. Khi x thay đổi từ x_1 sang x_2 thì sự thay đổi (còn gọi là số gia (increment)) của x là $\Delta x = x_2 - x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Tỷ số số gia:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$ là tỷ lệ biến thiên trung bình của y tương ứng với x trên đoạn $[x_1, x_2]$ và có thể hiểu như là hệ số góc của cát tuyến PQ trong hình bên.



average rate of change $= m_{PQ}$

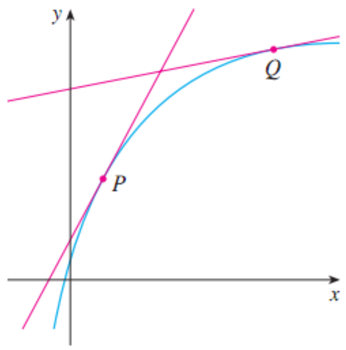
instantaneous rate of change = slope of tangent at P

Tương tự như vận tốc tức thời, giới hạn của tỷ lệ biến thiên trung bình $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ gọi là tỷ lệ biến thiên tức thời của y đối với x tại $x = x_1$, đây là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $P(x_1, f(x_1))$

Tỷ lệ biến thiên tức thời: instantaneous rate of change = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Giới hạn trên chính là đạo hàm $f'(x_1)$, vậy:

Đạo hàm $f'(a)$ là tỷ lệ biến thiên tức thời của $y = f(x)$ khi $x = a$.



The y-values are changing rapidly at P and slowly at Q.

Vì tỷ lệ thay đổi tức thời tại a là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại a, hay cũng chính là $f'(a)$ nên khi đạo hàm tại một điểm lớn (đường cong dốc, như tại điểm P trong hình vẽ) thì giá trị của y thay đổi nhanh. Khi đạo hàm tại một điểm nhỏ (đường cong phẳng, như tại điểm Q trong hình vẽ) thì giá trị của y thay đổi chậm.

Example 5: A manufacturer produces bolts of a fabric with a fixed width. The cost of producing x yards of this fabric is $C = f(x)$ dollars.

a. What is the meaning of the derivative $f'(x)$? What are its units?

b. In practical terms, what does it mean to say that $f'(1000) = 9$?

c. Which do you think is greater, $f'(50)$ or $f'(500)$? What about $f'(5000)$?

Giải:

a. Đạo hàm $f'(x)$ là tỷ lệ biến thiên tức thời của C tương ứng với x, có nghĩa $f'(x)$ là tỷ lệ biến thiên của chi phí sản xuất tương ứng với số yard sản phẩm (trong kinh tế gọi tỷ lệ biến thiên này là giá trị cận biên (marginal cost)).

Vì $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta x}$ nên đơn vị của $f'(x)$ là đơn vị của thương $\dfrac{\Delta C}{\Delta x}$: dollars/yard.

b. $f'(1000) = 9$ nghĩa là sau một 1000 yards vải được sản xuất, tỷ lệ mà theo đó chi phí sản suất tăng thêm 9\$/yard (khi $x = 1000$, C tăng nhanh 9 lần so với x).

Vì $\Delta x = 1$ nhỏ so với $x = 1000$ nên ta có thể xấp xỉ: $f'(1000) \approx \dfrac{\Delta C}{\Delta x} = \dfrac{\Delta C}{1} = \Delta C$, ta nói chi phí để sản xuất yard vải thứ 1000 là khoảng 9\$.

c. Tỉ lệ mà theo đó chi phí sản xuất tăng lên (theo mỗi yard) khi $x = 500$ có thể thấp hơn khi $x = 50$ (chi phí để sản xuất yard vải thứ 500 thấp hơn chi phí sản xuất yard vải thứ 50) do nhà sản xuất tận dụng hiệu quả hơn những chi phí sản xuất cố định, do đó: $f'(50) > f'(500)$. Nhưng khi mở rộng sản xuất, kết quả hoạt động với quy mô lớn có thể trở nên kém hiệu quả và có thể có các chi phí ngoài giờ. Vậy tỷ lệ của sự tăng chi phí có thể sẽ bắt đầu tăng nên có khả năng xảy ra $f'(5000) > f'(500)$

Example 6: Let $D(t)$ be the US national debt at time t. The table in the margin gives approximate values of this function by providing end of year estimates, in billions of dollars, from 1980 to 2000. Interpret and estimate the value of $D'(1900)$.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

Giải: Đạo hàm $D'(1900)$ là tỷ lệ biến thiên của D tương ứng với t tại thời điểm $t = 1900$, đó là tỷ lệ tăng của khoản nợ quốc gia vào năm 1900. Ta có:

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

$$D'(1900) = \lim_{t\to 1900} \frac{D(t) - D(1900)}{t - 1900}$$

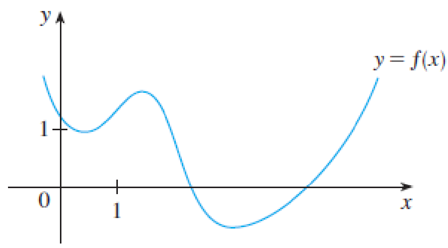
Từ bảng bên ta thấy $D'(1900)$ nằm trong khoảng 257.48 và 348.14 tỉ dollars/năm, ta ước lượng tỷ lệ tăng của khoản nợ quốc gia của Mỹ vào năm 1900 là trung bình cộng của hai số trên: $D'(1900) \approx 303$ tỉ dollars/năm.

♦ ĐẠO HÀM LÀ MỘT HÀM (THE DERIVATIVE AS A FUNCTION)

Trong mục trước chúng ta xét đạo hàm của hàm f tại điểm a: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

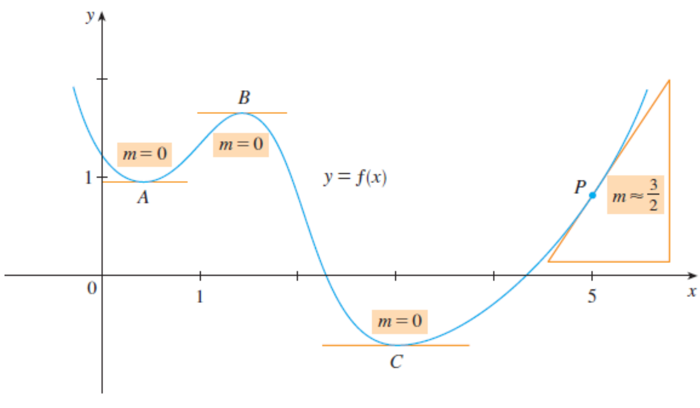
Xem a là biến x, ta có thể viết lại: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Cứ mỗi x, nếu giới hạn trên tồn tại, ta có $f'(x)$. Ta có thể xem f' như là một hàm mới và gọi là đạo hàm (derivative) của hàm f. Miền xác định của hàm f' là tập các giá trị của x sao cho $f'(x)$ tồn tại, nó có thể nhỏ hơn miền xác định của f

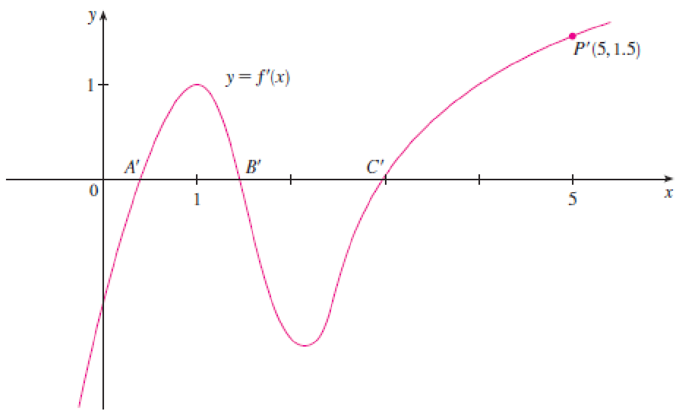


Example 1: The graph of a function f is given. Use it to sketch the graph of the derivative f'

Giải: Ta ước lượng giá trị của đạo hàm tại x bất kỳ bằng cách vẽ đường tiếp tuyến tại điểm $(x, f(x))$ và ước lượng hệ số góc của nó. Chẳng hạn tại $x = 5$ ta vẽ tiếp tuyến tại P, ước lượng hệ số góc khoảng $\dfrac{3}{2}$ (xem hình (a) bên dưới) nên $f'(5) \approx 1.5$. Do đó đồ thị hàm f' đi qua điểm $P'(5, 1.5)$. Lặp lại theo cách này để tìm các điểm khác của đồ thị hàm f'. Lưu ý tại các điểm A, B, C tiếp tuyến của đồ thị nằm ngang ($f'(x) = 0$) nên đồ thị hàm f' cắt trục Ox tại các điểm A', B', C' có cùng hoành độ x với các điểm A, B, C. Ở giữa A và B, các đường tiếp tuyến có hệ số góc dương nên f' dương, giữa B và C, các đường tiếp tuyến có hệ số góc âm nên f' ở đó. Hình (b) là đồ thị hàm f'



(a)

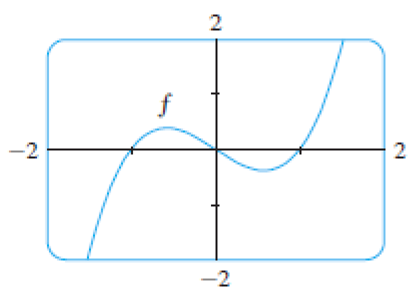


(b)

Example 2:

a. If $f(x) = x^3 - x$, find a formula for $f'(x)$.

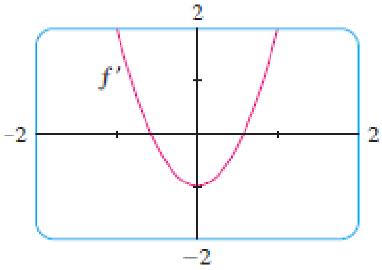
b. Illustrate by comparing the graphs of f and f'.



Giải:

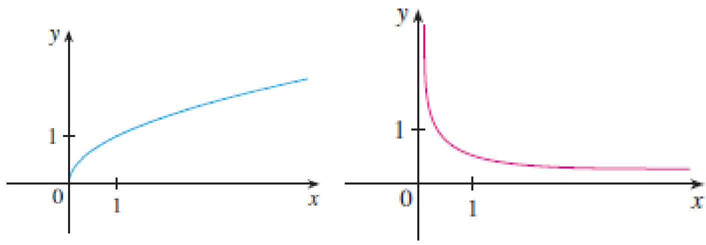
a.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3-(x+h)\right]-\left[x^3-x\right]}{h}=3x^2-1$$



b. Vẽ đồ thị hai hàm f và f', ta có $f'(x)=0$ khi f có tiếp tuyến nằm ngang, và $f'(x)>0$ khi các đường tiếp tuyến có hệ số góc dương. Các đồ thị này giúp ta kiểm tra lại kết quả của phần a.

Example 3: If $f(x)=\sqrt{x}$, find the derivative of f. State the domain of f'.



(a) $f(x)=\sqrt{x}$ (b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Giải:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x)$ xác định khi $x>0$. Vậy miền xác định của f' là $(0,+\infty)$ [miền xác định của $f:[0,+\infty)$]

Example 4: Find f' if $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x}$.

Giải: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\dfrac{1-x}{2+x}}{h}=-\dfrac{3}{(2+x)^2}$

♦ NHỮNG KÝ HIỆU KHÁC (OTHER NOTATIONS):

Cho hàm số $y=f(x)$ trong đó x là biến độc lập, y là biến phụ thuộc, thì đạo hàm của y theo x còn có thể được ký hiệu bằng nhiều cách khác như sau:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_xf(x)$$

Để ký hiệu giá trị của đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}$ tại $x = a$, ta có thể viết $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

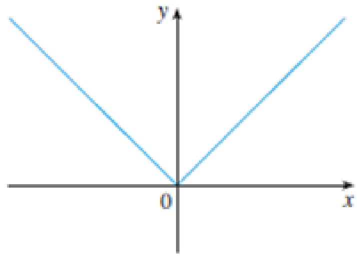
> DEFINITION: Hàm f gọi là khả vi (differentiable) tại a nếu $f'(a)$ tồn tại. f khả vi trong khoảng (a,b) (hoặc $(a,+\infty)$, hoặc $(-\infty,a)$ hoặc $(-\infty,+\infty)$) nếu nó khả vi tại mỗi số thuộc khoảng đó.

Example 5: where is the function $f(x)=|x|$ differentiable?

Giải: Nếu $x>0$ thì $|x|=x$, ta có thể chọn h đủ nhỏ để $x+h>0$, do đó $|x+h|=x+h$.

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x+h|-|x|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$. Vậy f khả vi với $x>0$.

Tương tự với $x<0$ thì $|x|=-x$, ta có thể chọn h đủ nhỏ để $x+h<0$, do đó $|x+h|=-(x+h)$



$y = f(x) = |x|$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x+h|-|x|}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(x+h)-(-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-1) = -1$. Vậy f khả vi với $x > 0$.

Với $x = 0$: $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ (nếu giới hạn tồn tại)

Vì $\dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|h|}{h} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|h|}{h} = -1$.

Vậy không tồn tại $f'(0)$ hay f không khả vi tại điểm 0.

Kết luận: f khả vi trên các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$.

THEOREM: Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a

Chứng minh: Vì f khả vi tại a nên $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Ta có: $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$

$$\rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a).0 = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f(a) + \left(f(x)-f(a)\right)\right] = \lim_{x\to a} f(a)\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right] = f(a) + 0 = f(a)$$

Vậy f liên tục tại a

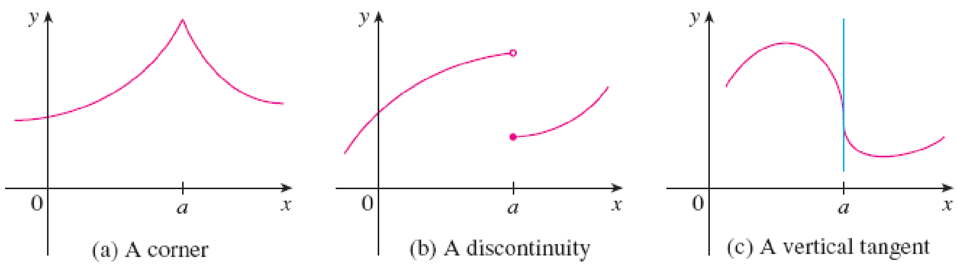
Lưu ý: Hàm số liên tục tại a chưa chắc khả vi tại a ($y = |x|$ liên tục tại 0, không khả vi tại 0)

♦ NHẬN BIẾT HÀM KHÔNG KHẢ VI:

a. Nếu đồ thị của hàm f có góc (corner) tại a thì nó sẽ không có tiếp tuyến tại a do đó không khả vi tại a.

b. Nếu hàm f không liên tục tại a thì f không khả vi tại a.

c. Đường cong có tiếp tuyến đứng tại a (f liên tục tại a và $\lim\limits_{x\to a}|f'(x)| = \infty$).

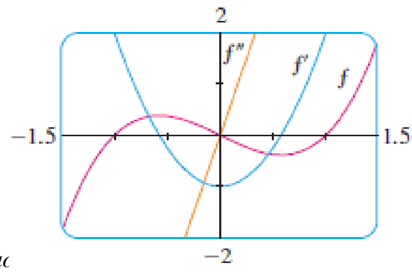


(a) A corner (b) A discontinuity (c) A vertical tangent

Three ways for f not to be differentiable at a

♦ ĐẠO HÀM CẤP CAO (HIGHER DERIVATIVES):

Cho f là hàm khả vi. Đạo hàm của f' (nếu có) gọi là đạo hàm cấp 2 (the second derivative) của hàm f, ký hiệu: $f'' = (f')' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.



Example 6: If $f(x) = x^3 - x$. Find and interpret $f''(x)$?

Giải: Ta đã tính $f'(x) = 3x^2 - 1$ (example 2)

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)^2-1\right]-\left[3x^2-1\right]}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h) = 6x$$

Có thể hiểu $f''(x)$ như là hệ số góc của đường cong $y = f'(x)$ tại điểm $(x, f'(x))$. Nói cách khác $f''(x)$ là tỷ lệ biến thiên của hệ số góc của đường cong $y = f(x)$. $f''(x) < 0$ khi $y = f'(x)$ có hệ số góc âm, $f''(x) > 0$ khi $y = f'(x)$ có hệ số góc dương.

Nếu $s = s(t)$ là phương trình của một vật chuyển động trên một đường thẳng, như ta đã biết $s'(t)$ là vận tốc tức thời của vật: $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$. Tốc độ biến thiên tức thời của vận tốc theo thời gian gọi là gia tốc (acceleration) $a(t) = v'(t) = s''(t)$ hay viết $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

♦ **Đạo hàm cấp 3 (the third derivative) của hàm f** là đạo hàm của đạo hàm cấp 2:

$$f''' = (f'')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

♦ **Đạo hàm cấp n (the *n*th derivative)** là đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Example 7: If $f(x) = x^3 - x$. Find $f'''(x)$ and $f^{(4)}(x)$?

Giải: Trong example 6 ta đã có: $f''(x) = 6x$. Đồ thị của đạo hàm cấp hai có phương trình $y = 6x$, đây là phương trình của đường thẳng có hệ số góc là 6. Do đó đạo hàm cấp ba $f'''(x) = 6$. Đồ thị của f''' là một đường thẳng nằm ngang nên đạo hàm cấp bốn $f^{(4)}(x) = 0$.

1.2 ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM (DERIVATIVES OF SOME FUNCTIONS)

♦ HÀM HẰNG (CONSTANT FUNCTION):

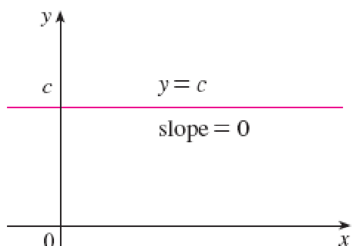
Xét hàm $f(x) = c$, với c là hằng số. Ta có:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Sử dụng *ký hiệu Leibniz* ta viết lại kết quả này như sau:

DERIVATIVE OF A CONSTANT FUNCTION

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$



The graph of $f(x) = c$ is the line $y = c$, so $f'(x) = 0$.

♦ HÀM LŨY THỪA (POWER FUNCTIONS):

Xét hàm số $f(x) = x^n$, với n nguyên dương. Ta có:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

Với n là số thực, ta cũng có kết quả tương tự sẽ chứng minh ở mục 3.6

THE POWER RULE: Nếu n là số thực bất kỳ, ta có

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$

Các trường hợp đặc biệt:

- Nếu $n=1$: $\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$
- Nếu $n=-1$: $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}}$
- Nếu $n=\frac{1}{2}$: $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Example 1:

(a) If $f(x) = x^6$, then $f'(x) = 6x^5$.

(b) If $y = x^{1000}$, then $y' = 1000x^{999}$.

(c) If $y = t^4$, then $\frac{dy}{dt} = 4t^3$.

(d) $\frac{d}{dr}\left(r^3\right) = 3r^2$.

Example 2: Differentiate:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

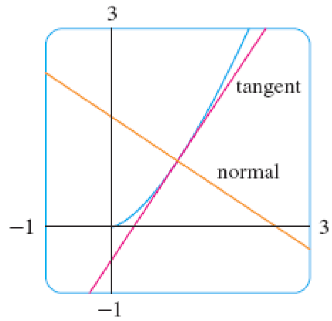
Giải:

(a) Ta có $f(x) = x^{-2}$. Áp dụng qui tắc ta được: $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Example 3: Find equations of the tangent line and normal line to the curve $y = x\sqrt{x}$ at the point $(1,1)$. Illustrate by graphing the curve and these lines.

Giải:



Ta có $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Hệ số góc của đường thẳng tiếp tuyến tại điểm $(1,1)$: $f'(1) = \frac{3}{2}$

Phương trình tiếp tuyến: $y - 1 = \frac{3}{2}(x-1)$ hay $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Vì đường thẳng pháp tuyến vuông góc (perpendicular) với đường thẳng tiếp tuyến nên hệ số góc của đường pháp tuyến là $-\frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đường pháp tuyến là: $y-1=-\frac{2}{3}(x-1)$ hay $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

♦ NEW DERIVATIVES FROM OLD:

THE CONSTANT MULTIPLE RULE: Nếu c là một hằng số và f là một hàm khả vi thì:

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=c\frac{d}{dx}f(x)$$

Chứng minh:

Đặt $g(x)=cf(x)$, khi đó:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$$

Example 4:

(a) $\frac{d}{dx}(3x^4)=3\frac{d}{dx}(x^4)=3(4x^3)=12x^3$.

(b) $\frac{d}{dx}(-x)=\frac{d}{dx}\left[(-1)x\right]=(-1)\frac{d}{dx}(x)=-1(1)=-1$.

THE SUM RULE: Nếu f và g là hai hàm khả vi, khi đó:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

Chứng minh:

Đặt $F(x)=f(x)+g(x)$, khi đó:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

THE DIFFERENCE RULE: Nếu f và g là hai hàm khả vi, khi đó:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

Example 5:

$$\frac{d}{dx}\left(x^8+12x^5-4x^4+10x^3-6x+5\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^8\right)+12\frac{d}{dx}\left(x^5\right)-4\frac{d}{dx}\left(x^4\right)+10\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-6\frac{d}{dx}\left(x\right)+\frac{d}{dx}(5)$$

$$=8x^7+12\left(5x^4\right)-4\left(4x^3\right)+10\left(3x^2\right)-6(1)+0=8x^7+60x^4-16x^3+30x^2-6.$$

Example 6: Find the points on the curve $y=x^4-6x^2+4$ where the tangent line is horizontal.

Giải:

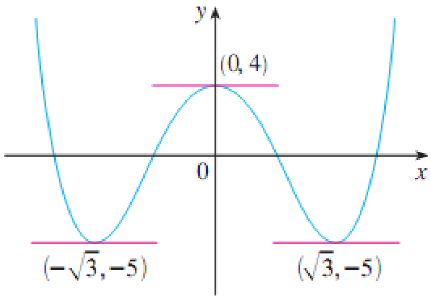
Đường thẳng tiếp tuyến nằm ngang khi đạo hàm của hàm số tại điểm tiếp xúc bằng 0. Ta có:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^4\right)-6\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(4)=4x^3-12x+0=4x\left(x^2-3\right)$$

Vậy $\frac{dy}{dx}=0$ nếu $x=0$ hoặc $x=\pm\sqrt{3}$.

Các điểm trên đường cong có tiếp tuyến nằm ngang là:

$(0,4)$; $\left(\sqrt{3},-5\right)$; $\left(-\sqrt{3},-5\right)$.



Example 7: The equation of motion of a particle is $s=2t^3-5t^2+3t+4$, where s is measured in centimeters and t in seconds. Find the acceleration as a function of time. What is the acceleration after 2 seconds?

Giải:

Vận tốc và gia tốc của chất điểm được xác định như sau:

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=6t^2-10t+3 \qquad a(t)=\frac{dv}{dt}=12t-10$$

Gia tốc sau 2 giây là $a(2)=14$ cm/s^2.

♦ HÀM SỐ MŨ (EXPONENTIAL FUNCTIONS):

Xét hàm số: $f(x)=a^x$.

Ta có: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Mặt khác: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$.

Vậy nếu hàm số $f(x)=a^x$ có đạo hàm tại điểm $x=0$ thì nó có đạo hàm tại mọi điểm và

$$f'(x)=f'(0)a^x$$

DEFINITION OF THE NUMBER e: e là một số thoả mãn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

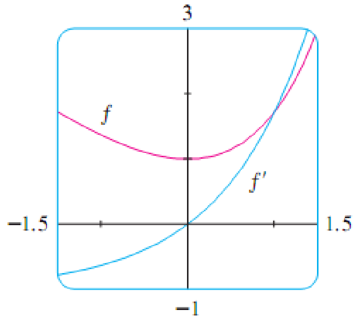
DERIVATIVE OF THE NATURAL EXPONENTIAL FUNCTION: $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$

♦ **Tính chất của hàm số $f\left(x\right)=e^{x}$:**

- Tiếp tuyến tại điểm $\left(0,1\right)$ có hệ số góc bằng 1.
- Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số bằng tung độ của tiếp điểm.

Example 8: If $f\left(x\right)=e^{x}-x$, find f' and f''. Compare the graphs of f and f'.

Giải:



Áp dụng các qui tắc tính đạo hàm, ta có:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(e^{x}-x\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)-\frac{d}{dx}\left(x\right)=e^{x}-1$$

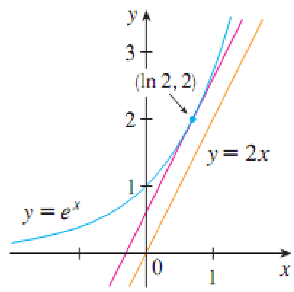
$$f''(x)=\left(f'\right)'=\frac{d}{dx}\left(e^{x}-1\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)-\frac{d}{dx}\left(1\right)=e^{x}$$

Đồ thị hàm f có một tiếp tuyến nằm ngang tại điểm có hoành độ bằng 0 vì $f'\left(0\right)=0$.

Khi $x>0$, thì $f'\left(x\right)$ dương và f tăng. Khi $x<0$, thì $f'\left(x\right)$ âm và f giảm.

Example 9: At what point on the curve $y=e^{x}$ is the tangent line parallel to the line $y=2x$?

Giải:



Giả sử đường thẳng tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=e^{x}$ tại điểm có hoành độ bằng a. Khi đó hệ số góc của đường thẳng này là $y'\left(a\right)=e^{a}$.

Để đường thẳng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=2x$ thì hệ số góc của hai đường thẳng này phải bằng nhau: $e^{a}=2$ hay $a=\ln 2$. Do đó điểm cần tìm là $\left(a,e^{a}\right)=\left(\ln 2,2\right)$.

1.3 QUY TẮC TÍCH VÀ THƯƠNG (THE PRODUCT AND QUOTIENT RULES)

♦ QUY TẮC TÍCH (THE PRODUCT RULE):

THE PRODUCT RULE: Nếu f và g là các hàm khả vi thì:

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]=f\left(x\right)\frac{d}{dx}\left[g\left(x\right)\right]+g\left(x\right)\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right]$$

Example 1:

(a) If $f\left(x\right)=xe^{x}$, find $f'\left(x\right)$.

(b) Find the nth derivative, $f^{(n)}\left(x\right)$.

Giải:

(a) $f'\left(x\right)=\dfrac{d}{dx}\left(xe^{x}\right)=x\dfrac{d}{dx}\left(e^{x}\right)+e^{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\right)=xe^{x}+e^{x}.1=\left(x+1\right)e^{x}$

(b) $f''(x)=\dfrac{d}{dx}\left[(x+1)e^x\right]=(x+1)\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right)+e^x\dfrac{d}{dx}(x+1)=(x+1)e^x+e^x=(x+2)e^x$

Tương tự:

$f^{(3)}(x)=(x+3)e^x$, $f^{(4)}(x)=(x+4)e^x$, … . Tổng quát ta có: $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

Example 2: Differentiate the function $f(t)=\sqrt{t}\,(a+bt)$.

Giải:

Cách 1: Ta có $f'(t)=\sqrt{t}\dfrac{d}{dt}(a+bt)+(a+bt)\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)=\sqrt{t}\cdot b+(a+bt)\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

$$=b\sqrt{t}+\frac{a+bt}{2\sqrt{t}}=\frac{a+3bt}{2\sqrt{t}}.$$

Cách 2: Ta có $f(t)=a\sqrt{t}+bt\sqrt{t}=at^{\frac{1}{2}}+bt^{\frac{3}{2}}$. Vậy $f'(t)=\dfrac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2}bt^{\frac{1}{2}}$.

Example 3: If $f(x)=\sqrt{x}\,g(x)$, where $g(4)=2$ and $g'(4)=3$, find $f'(4)$.

Giải: $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right]=\sqrt{x}\dfrac{d}{dx}\left[g(x)\right]+g(x)\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]=\sqrt{x}\,g'(x)+g(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Vậy: $f'(4)=\sqrt{4}\,g'(4)+\dfrac{g(4)}{2\sqrt{4}}=2\cdot 3+\dfrac{2}{2\cdot 2}=6.5$

♦ QUY TẮC THƯƠNG (THE QUOTIENT RULE):

THE QUOTIENT RULE: Nếu f và g là các hàm khả vi thì:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]-f(x)\dfrac{d}{dx}\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

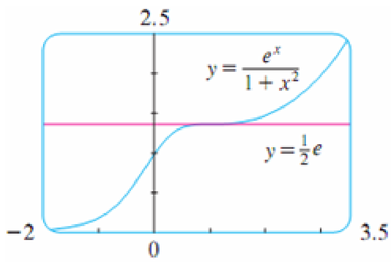
Example 4: Let $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$. Then

$$y'=\frac{\left(x^3+6\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2+x-2\right)-\left(x^2+x-2\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^3+6\right)}{\left(x^3+6\right)^2}==\frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{\left(x^3+6\right)^2}$$

Example 5: Find an equation of the tangent line to the curve $y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$ at the point $\left(1,\dfrac{1}{2}e\right)$.

Giải:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+x^2\right)\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right)-e^x\dfrac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{e^x(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$



Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $\left(1,\dfrac{1}{2}e\right)$ là $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=0$

Vậy đường thẳng tiếp tuyến tại điểm $\left(1,\dfrac{1}{2}e\right)$ là đường nằm ngang, có phương trình $y=\dfrac{1}{2}e$

♦ **Bảng tổng kết một số quy tắc tính đạo hàm:**

$$\frac{d}{dx}(c)=0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad (cf)'=cf'$$

$$(f+g)'=f'+g' \qquad (f-g)'=f'-g' \qquad (fg)'=fg'+gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$$

♦ ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC (DERIVATIVES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS):

DERIVATIVES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

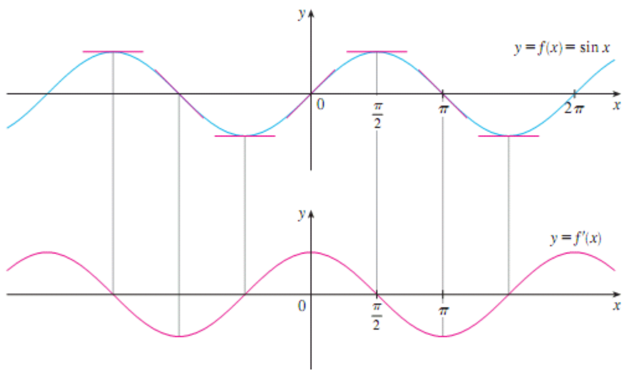
Chứng minh: Xét hàm số lượng giác: $f(x)=\sin x$

Ta có:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2\frac{h}{2}}=\cos x$$

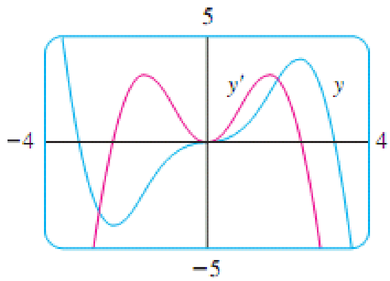


Example 1: Differentiate $y=x^2\sin x$.

Giải:

$$\frac{dy}{dx}=x^2\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=x^2\cos x+2x\sin x.$$

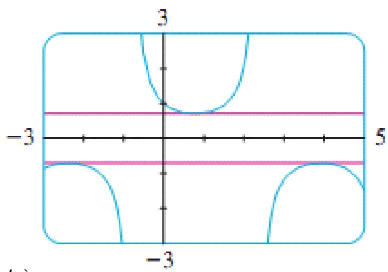


Example 2: Differentiate $f(x)=\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$. For what values of x does the graph of f have a horizontal tangent?

Giải:

$$f'(x)=\frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(\sec x)-\sec x\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{(1+\tan x)\sec x\tan x-\sec x.\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$



$$= \frac{\sec x\left(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x\right)}{\left(1+\tan x\right)^2} = \frac{\sec x\left(\tan x - 1\right)}{\left(1+\tan x\right)^2}$$

Ta có: $f'(x) = 0$ khi $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = n\pi + \pi/4$, ($n$ là số nguyên)

Example 3: Find the 27th derivative of $\cos x$.

Giải: Ta có

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, $f^{(5)}(x) = -\sin x$

Khi n là bội số của 4 thì $f^{(n)}(x) = \cos x$, do đó $f^{(24)}(x) = \cos x$

Tính đạo hàm thêm 3 lần nữa ta có $f^{(27)}(x) = \sin x$

Example 4: Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{4x}$.

Giải: Đặt $\theta = 7x$, ta có $\theta \to 0$ khi $x \to 0$. Vậy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right) = \frac{7}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{7}{4}.1 = \frac{7}{4}$$

Example 5: Calculate $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$.

Giải: $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{\cos 0}{1} = 1$

1.4 QUI TẮC DÂY CHUYỀN (THE CHAIN RULE):

Đây là quy tắc để tìm đạo hàm của hàm hợp

THE CHAIN RULE: Nếu g là hàm khả vi tại x và f hàm khả vi tại $g(x)$ thì hàm hợp $F = f\circ g$ khả vi tại x và $F'(x) = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Hay $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dF}{du}.\dfrac{du}{dx}$, với $u = g(x)$

Lưu ý: Quy tắc trên có thể được hiểu *ta lấy đạo hàm hàm ngoài f tại hàm trong $g(x)$ nhân với đạo hàm của hàm trong*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{outer}\\ \text{function}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluated}\\ \text{at inner}\\ \text{function}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivative}\\ \text{of outer}\\ \text{function}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluated}\\ \text{at inner}\\ \text{function}}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivative}\\ \text{of inner}\\ \text{function}}}$$

Example 1: Find $f'(x)$ if $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Giải: Ta có $f(u) = \sqrt{u}$, $g(x) = x^2+1 \to F(x) = (f\circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left(x^2+1\right) = \sqrt{x^2+1}$

Vì $f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $g'(x) = 2x \to F'(x) = f'\left[g(x)\right]g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Example 2: Differentiate (a) $y = \sin\left(x^2\right)$ and (b) $y = \sin^2 x$

Giải:

a. $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{\substack{\text{outer}\\\text{function}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluated}\\\text{at inner}\\\text{function}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivative}\\\text{of outer}\\\text{function}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluated}\\\text{at inner}\\\text{function}}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\text{derivative}\\\text{of inner}\\\text{function}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

b. $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{inner}\\\text{function}}}{}^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivative}\\\text{of outer}\\\text{function}}}\cdot\underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{evaluated}\\\text{at inner}\\\text{function}}}\cdot\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivative}\\\text{of inner}\\\text{function}}}$$

THE POWER RULE COMBINED WITH THE CHAIN RULE:

Nếu n là một số thực tùy ý và $u = g(x)$ khả vi, khi đó:

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{Hay} \qquad \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]^n = n\left[g(x)\right]^{n-1}.g'(x)$$

Example 3: Differentiate $y = \left(x^3-1\right)^{100}$.

Giải: Đặt $u = g(x) = x^3 - 1$ và $n = 100$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x^3-1\right)^{100}\right] = 100\left(x^3-1\right)^{99}\frac{d}{dx}\left(x^3-1\right) = 300x^2\left(x^3-1\right)^{99}.$$

Example 4: Find $f'(x)$ if $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Giải: Trước tiên, ta viết $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^{-1/3}$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-4/3}\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-4/3}(2x+1).$$

Example 5: Find the derivative of the function $g(t) = \left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$.

Giải: $$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right) = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

Example 6: Differentiate $f(x) = (2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^4$.

Giải:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^5\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)^4 + \left(x^3-x+1\right)^4\frac{d}{dx}(2x+1)^5$$

$$= (2x+1)^5.4\left(x^3-x+1\right)^3\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right) + \left(x^3-x+1\right)^4.5(2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= 4(2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^3\left(3x^2-1\right) + 10\left(x^3-x+1\right)^4(2x+1)^4$$

$$= 2(2x+1)^4\left(x^3-x+1\right)^3\left(17x^3+6x^2-9x+3\right)$$

Example 7: Differentiate $y = e^{\sin x}$.

Giải: Hàm trong là $g(x) = \sin x$ và hàm ngoài là hàm mũ $f(x) = e^x$. Vậy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right) = e^{\sin x}\cos x$$

Có thể sử dụng Chain rule để tính đạo hàm của một hàm mũ với mọi cơ số $a > 0$. Thật vậy, vì $a = e^{\ln a}$ nên $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x} \to \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right) = e^{(\ln a)x}\ln a$

Vậy: $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x\ln a}$$

Nếu $y = f(u)$, $u = g(x)$, và $x = h(t)$, trong đó f, g, và h là các *hàm số khả vi*. Thì:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

Example 8: Differentiate $y(x) = \sin(\cos(\tan x))$.

Giải: $y'(x) = \cos(\cos(\tan x)).\frac{d}{dx}(\cos(\tan x)) = \cos(\cos(\tan x))\left[-\sin(\tan x)\right]\frac{d}{dx}(\tan x)$

$$= \cos(\cos(\tan x))(-\sin(\tan x))\sec^2 x.$$

Example 9: Differentiate $y(x) = e^{\sec 3x}$.

Giải: $\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) = e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta) = 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta$.

1.5 ĐẠO HÀM ẨN (IMPLICIT DIFFERENTIATION):

Dạng tường minh của một hàm số $y = f(x)$, ví dụ $y = \sqrt{x^3 + 1}$ hay $y = x\sin x$

Có nhiều hàm số được cho dưới dạng ẩn bởi một biểu thức biểu thị mối quan hệ của x, y, ví dụ: $x^2 + y^2 = 25 \quad (1)$ hoặc $x^3 + y^3 = 6xy \quad (2)$

Từ (1) ta có thể viết y dưới dạng tường minh: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, nhưng từ (2) ta không thể viết tường minh y theo x. Tuy nhiên để tìm đạo hàm ta không cần phải viết hàm dưới dạng tường minh, ta có thể dùng phương pháp ***đạo hàm ẩn***, bằng cách lấy đạo hàm 2 vế của phương trình theo x rồi giải kết quả có được để tìm y'.

Example 1: (a) If $x^2 + y^2 = 25$, find $\frac{dy}{dx}$.

(b) Find an equation of the tangent to the circle $x^2 + y^2 = 25$ at the point $(3,4)$.

Giải:

(a) $x^2 + y^2 = 25 \to \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(25) \to 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \to \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

(b) $y'(3,4) = -\frac{3}{4} \to$ phương trình tiếp tuyến: $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \leftrightarrow 3x + 4y = 25$.

Example 2:

(a) If $x^3+y^3=6xy$, find y'.

(b) Find the tangent to the folium of Descartes $x^3+y^3=6xy$ at the point $(3,3)$.

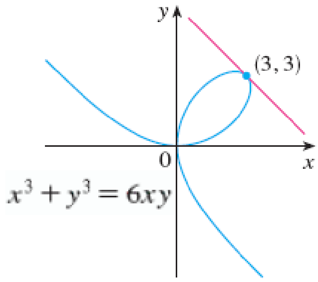
(c) At what points in the first quadrant is the tangent line horizontal?

Giải:

(a) $x^3+y^3=6xy \to \frac{d}{dx}\left(x^3+y^3\right)=\frac{d}{dx}(6xy) \to 3x^2+3y^2y'=6y+6xy' \to y'=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$.

(b) $y'(3,3)=-1 \to$ phương trình tiếp tuyến:

$y-3=-1(x-3) \leftrightarrow x+y=6$.



(c) Tiếp tuyến nằm ngang tại x thỏa:

$y'=0 \to 2y-x^2=0 \to y=\frac{1}{2}x^2$.

Thay y vào phương trình của đường cong:

$$x^3+\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3=6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) \to x^6=16x^3 \to x^3\left(x^3-16\right)=0 \to x=0, x=2^{\frac{4}{3}}.$$

Vậy tiếp tuyến nằm ngang tại điểm $(0,0)$ và $\left(2^{\frac{4}{3}},2^{\frac{5}{3}}\right)$.

Example 3: Find y' if $\sin(x+y)=y^2\cos x$.

Giải: Lấy đạo hàm hai vế của phương trình đối với x, ta được:

$$\cos(x+y).(1+y')=y^2(-\sin x)+(\cos x)(2yy')$$

$$\to \cos(x+y)+y^2\sin x=(2y\cos x)y'-\cos(x+y).y'$$

$$\to y'=\frac{y^2\sin x+\cos(x+y)}{2y\cos x-\cos(x+y)}.$$

Example 4: Find y'' if $x^4+y^4=16$.

Giải: Lấy đạo hàm hai vế của phương trình đối với x: $4x^3+4y^3y'=0 \to y'=-\frac{x^3}{y^3}$

$$\text{Tính } y''=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)=-\frac{y^3(d/dx)\left(x^3\right)-x^3(d/dx)\left(y^3\right)}{\left(y^3\right)^2}=-\frac{y^3.3x^2-x^3\left(3y^2y'\right)}{y^6}$$

Thay y' vào ta được:

$$y''=-\frac{3x^2y^3-3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}=-\frac{3\left(x^2y^4+x^6\right)}{y^7}=-\frac{3x^2\left(y^4+x^4\right)}{y^7}=-48\frac{x^2}{y^7} \qquad \left(x^4+y^4=16\right)$$

♦ ĐẠO HÀM HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC (DERIVATIVES OF INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS):

DERIVATIVES OF INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Chứng minh:

Xét hàm $y=\arcsin x=\sin^{-1}x \leftrightarrow \sin y=x,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $\sin y=x$ theo biến *x*, ta được:

$$\frac{d}{dx}(\sin y)=\frac{d}{dx}(x)\to\cos y\frac{dy}{dx}=1\to\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Vậy $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Example 5: Differentiate (a) $y=\frac{1}{\sin^{-1}x}$ (b) $y=x\arctan\sqrt{x}$.

Giải:

(a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\left(\sin^{-1}x\right)^{-1}\right]=(-1)\left(\sin^{-1}x\right)^{-2}\left(\sin^{-1}x\right)'=-\frac{1}{\left(\sin^{-1}x\right)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) $$y'=\left(x\arctan\sqrt{x}\right)'=\arctan\sqrt{x}+x.\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}.$$

♦ ĐẠO HÀM HÀM LOGARIT (DERIVATIVES OF LOGARITHMIC FUNCTIONS)

Xét hàm số $y=\log_a x$. Khi đó $a^y=x$

Lấy đạo hàm hai vế đối với biến *x*: $a^y(\ln a)\frac{dy}{dx}=1 \leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$

Vậy $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)=\frac{1}{x\ln a}}$ $\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}}$ $(a=e)$ Tổng quát: $\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$

Example 1: Differentiate $y=\ln\left(x^3+1\right)$.

Giải: Đặt $u=x^3+1 \to y=\ln u$. Ta có $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^3+1}\left(3x^2\right)=\frac{3x^2}{x^3+1}$.

Example 2: Find $\frac{d}{dx}\ln(\sin x)$.

Giải: Ta có

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x)=\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{1}{\sin x}\cos x=\cot x.$$

Example 3: Differentiate $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

Giải: Sử dụng Chain rule, ta có $f'(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

Example 4: Differentiate $f(x)=\log_{10}(2+\sin x)$

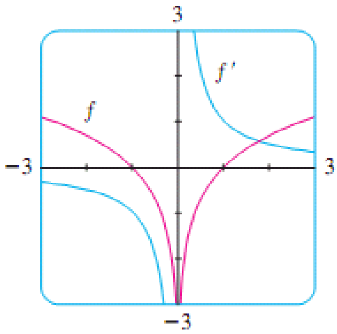
Giải: $f'(x)=\frac{1}{(2+\sin x)\ln 10}.(2+\sin x)'=\frac{\cos x}{(2+\sin x)\ln 10}$.

Example 5: Find $\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

Giải: $\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}=\frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right]=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

Example 6: Find $f'(x)$ if $f(x)=\ln|x|$.

Giải: Vì $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{if } x>0\\ \ln(-x) & \text{if } x<0\end{cases}$



$$\to f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{if } x>0\\ \frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x} & \text{if } x<0\end{cases}$$

Vậy $f'(x)=1/x$ với mọi $x\neq 0$: $\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}}$

♦ TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẤY LOGARIT:

Việc tính đạo hàm các hàm số phức tạp liên quan đến tích, thương, hoặc mũ có thể đơn giản hóa bằng cách lấy logarit. Phương pháp được sử dụng trong ví dụ sau đây gọi là đạo hàm bằng logarit ***(logarithmic differentiation).***

Example 7: Differentiate $y(x)=\frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

Giải: Lấy logarit hai vế của phương trình:

$$\ln y=\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-5\ln(3x+2)$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với *x*: $\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}.\frac{1}{x}+\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+1}.2x-5.\frac{1}{3x+2}.3$

$$\to y'=y\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right)=\frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right)$$

STEPS IN LOGARITHMIC DIFFERENTIATION:

1. Lấy *ln* hai vế của phương trình $y=f(x)$
2. Tính đạo hàm ẩn theo x
3. Giải phương trình kết quả tìm y'

Example 8: If n is any real number and $f(x)=x^n$, then $f'(x)=nx^{n-1}$

Giải: Đặt $y=x^n$, lấy ln hai vế: $\ln|y|=\ln|x|^n=n\ln|x|,\quad x\neq 0$

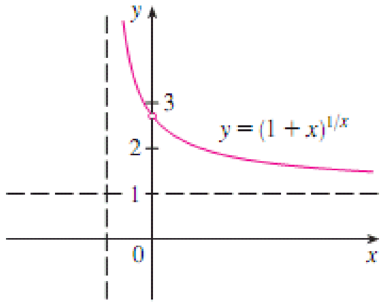
$$\to \frac{y'}{y}=\frac{n}{x}\ \to\ y'=\frac{n}{x}y=nx^{n-1}$$

Example 9: Differentiate $y(x)=x^{\sqrt{x}}$.

Giải: Lấy *ln* hai vế: $\ln y=\ln x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\ln x$

Lấy đạo hàm hai vế: $\frac{y'}{y}=\sqrt{x}.\frac{1}{x}+(\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \to\ y'=y\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$

♦ THE NUMBER *e* AS A LIMIT:



Nếu $f(x)=\ln x\to f'(x)=\frac{1}{x}\to f'(1)=1$.

Mặt khác: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

Vì $f'(1)=1\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

Và $e=e^1=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Vậy

$$\boxed{e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n=\frac{1}{x}}$$

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

Bảng bên cho ta số e được làm tròn đến bảy chữ số thập phân: $e\approx 2.7182818$.

♦ TỐC ĐỘ BIẾN THIÊN TRONG KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ XÃ HỘI (RATES OF CHANGE IN THE NATURAL AND SOCIAL SCIENCES):

Chúng ta đã biết nếu $y=f(x)$ thì đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ có thể được hiểu như tốc độ biến thiên của y đối với x. Khái niệm này được ứng dụng khá rộng rãi trong nhiều lĩnh vực của khoa học mà ta sẽ tìm hiểu trong mục này.

♦ VẬT LÝ (PHYSICS):

Giả sử $s=f(t)$ là hàm xác định vị trí của một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng. Ta biết rằng $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ biểu thị vận tốc trung bình của chất điểm chuyển động trong khoảng thời gian Δt, và $v=\frac{ds}{dt}$ biểu thị vận tốc tức thời *(tốc độ biến thiên của vị trí so với thời gian)*.

Ngoài ra, ta cũng biết gia tốc biểu thị tốc độ biến thiên của vận tốc tức thời so với thời gian:

$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$

Example 1: The position of a particle is given by the equation $s=f(t)=t^3-6t^2+9t$, where t is measured in seconds and s in meters.

(a) Find the velocity at time t.

(b) What is the velocity after 2s? After 4s?

(c) When is the particle at rest?

(d) When is the particle moving forward (that is, in the positive direction)?

(e) Draw a diagram to represent the motion of the particle.

(f) Find the total distance traveled by the particle during the first five seconds.

(g) Find the acceleration at time t and after 4s.

(h) Graph the position, velocity, and acceleration functions for $0 \le t \le 5$.

(i) When is the particle speeding up? When is it slowing down?

Giải:

(a) Ta có $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$.

(b) Vận tốc sau 2 giây là vận tốc tức thời ở thời điểm $t = 2$, tức là:

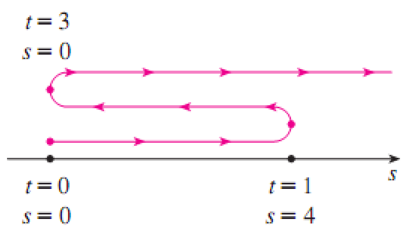
$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3\ m/s$$

Vận tốc sau 4 giây là: $v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9\ m/s$

(c) Chất điểm ngừng lại khi $v(t) = 0$, tức là, $3t^2 - 12t + 9 = 0 \leftrightarrow t = 1,\ t = 3$. Vậy chất điểm dừng lại sau 1 giây và sau 3 giây.

(d) Chất điểm chuyển động về phía trước (theo chiều dương) khi $v(t) > 0$, tức là:

$3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) > 0 \leftrightarrow t < 1$ hoặc $t > 3$. Vậy chất điểm chuyển động theo chiều dương trong các khoảng thời gian $t < 1$ và $t > 3$. Từ đó cũng suy ra chất điểm chuyển động về phía sau (theo chiều âm) trong khoảng thời gian $1 < t < 3$.



(e) Dùng kết quả của câu (d), ta phác thảo lược đồ chuyển động của chất điểm trên đường thẳng (trục s)

(f) Từ câu (d) và câu (e), ta cần tính khoảng cách di chuyển của chất điểm trong các khoảng thời gian $[0,1]$, $[1,3]$, $[3,5]$.

Khoảng cách di chuyển trong khoảng thời gian $[0,1]$: $|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4m$

Khoảng cách di chuyển trong khoảng thời gian $[1,3]$: $|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4m$

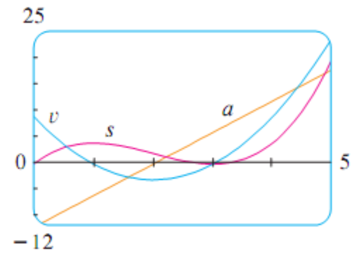
Khoảng cách di chuyển trong khoảng thời gian $[3,5]$: $|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20m$

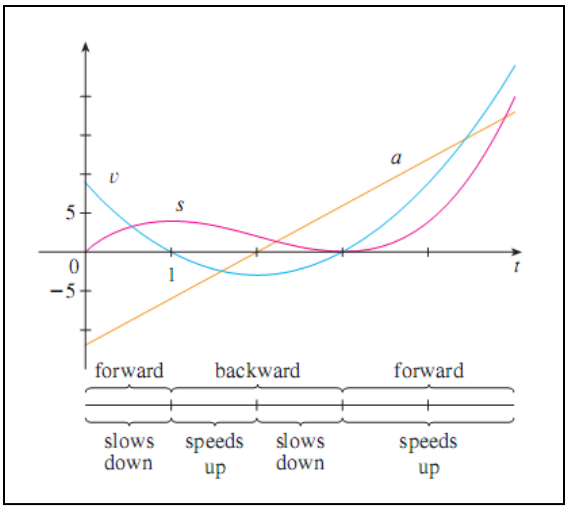
Vậy khoảng cách chất điểm đã di chuyển sau 5 giây là $4 + 4 + 20 = 28m$.

(g) Gia tốc ở thời điểm t: $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = 6t - 12$.

Gia tốc sau 4 giây: $a(4) = 6(4) - 12 = 12 m/s^2$

(h) Đồ thị của hàm vị trí (s), vận tốc (v), gia tốc (a) trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây:



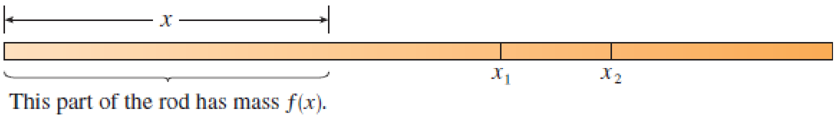


(i) Chất điểm tăng tốc khi vận tốc của nó dương và tăng (v và a dương) và cũng xảy ra khi vận tốc của nó âm và giảm (v và a âm). Nói cách khác, chất điểm tăng tốc khi vận tốc và gia tốc cùng dấu.

Từ đồ thị ở câu (h) ta thấy điều này xảy ra khi $1 < t < 2$ và khi $t > 3$.

Tương tự, chất điểm giảm tốc khi v và a trái dấu, dựa vào đồ thị ta nhận được khi $0 \le t < 1$ và khi $2 < t < 3$.

Example 2: Nếu một thanh hoặc một miếng kim loại đồng chất thì mật độ dài (linear density) là đồng đều và mật độ này được tính bằng tỷ lệ của khối lượng với đơn vị độ dài ($\rho = m/l$) (đo bằng kilogam trên mét). Bây giờ giả sử rằng thanh kim loại không đồng chất, khi đó mật độ dài của thanh kim loại sẽ không bằng nhau tại mọi điểm. Ta sẽ tìm cách tính mật độ này tại mỗi điểm trên thanh kim loại.



Giả sử khối lượng của thanh kim loại tính từ điểm ngoài cùng bên trái (xem như điểm 0) đến điểm x là $m = f(x)$ (xem hình vẽ). Khi đó khối lượng của phần kim loại nằm giữa điểm $x = x_1$ và $x = x_2$ là $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, vì vậy mật độ trung bình của phần kim loại này là:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Nếu cho $x_2 \to x_1$ ($\Delta x \to 0$), ta tính được mật độ trung bình trên những đoạn ngày càng gần x_1. Giới hạn của những mật độ trung bình này khi $\Delta x \to 0$ là mật độ tuyến tính ρ ở điểm x_1:

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}.$$

Ví dụ, nếu $m = f(x) = \sqrt{x}$, trong đó x đo bằng mét và m đo bằng kilogam. Khi đó mật độ trung bình của phần kim loại giới hạn bởi $1 \le x \le 1.2$ là:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - \sqrt{1}}{0.2} \approx 0.48\, kg/m.$$

Mật độ dài tại điểm $x = 1$ là: $\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.5\, kg/m.$

♦ HÓA HỌC (CHEMISTRY):

Example 3: Ta gọi những "sản phẩm" (products) trong một phản ứng hóa học là những chất được hình thành do phản ứng hóa học từ một hay nhiều chất ban đầu, gọi là những chất phản ứng (reactants).

Xét phản ứng: $A + B \to C$, trong đó A và B là những chất phản ứng, C là sản phẩm.

Nồng độ của chất A (ký hiệu $[\mathrm{A}]$) là số mole ($1\text{mole} = 6.022 \times 10^{23}$ phân tử) trên lít. Vì nồng độ luôn biến đổi suốt quá trình phản ứng nên $[\mathrm{A}], [\mathrm{B}], [\mathrm{C}]$ là những hàm theo biến thời gian t.

Tốc độ phản ứng trung bình của sản phẩm C trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$ là:

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Tốc độ phản ứng tức thời được xác định bởi việc tính giới hạn của tốc độ phản ứng trung bình trên những khoảng thời gian Δt dần về 0:

$$\text{Tốc độ phản ứng tức thời} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}.$$

Trong thực tế, nồng độ của chất sản phẩm C luôn tăng khi phản ứng xảy ra, do đó $\frac{d[C]}{dt}$ (hay tốc độ phản ứng tức thời) luôn là số dương. Ngược lại, nồng độ của những chất phản ứng luôn giảm suốt quá trình phản ứng, do đó $\frac{d[A]}{dt}, \frac{d[B]}{dt}$ là những số âm. Tuy nhiên ta cũng biết rằng tốc độ giảm của những nồng độ $[A]$ và $[B]$ luôn bằng tốc độ tăng của nồng độ $[C]$, do đó:

$$\text{Tốc độ phản ứng tức thời} = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}.$$

♦ SINH HỌC (BIOLOGY):

Example 4: Giả sử $n = f(t)$ là số lượng cá thể trong một cộng đồng động vật hay thực vật nào đó tại thời điểm t. Sự thay đổi số lượng cá thể giữa thời điểm $t = t_1$ và $t = t_2$ là $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, và do đó ta tính được:

+ Tốc độ phát triển trung bình số lượng cá thể trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

+ Tốc độ phát triển tức thời số lượng cá thể:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Ví dụ, xét số lượng vi khuẩn trong một môi trường dinh dưỡng đồng nhất. Giả sử bằng việc lấy mẫu vi khuẩn trong những khoảng thời gian nào đó, ta xác định được số lượng vi khuẩn tăng lên gấp đôi sau mỗi giờ. Giả sử số lượng vi khuẩn ban đầu là n_0 và thời gian t (tính bằng giờ):

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0 \qquad f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0 \qquad f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

Tổng quát: $\qquad f(t) = 2^t n_0$

Vậy hàm của số lượng vi khuẩn $n = f(t) = n_0 2^t$ cho ta thấy số lượng vi khuẩn sau t giờ.

Bây giờ giả sử $n_0 = 100$, tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sau 4 giờ:

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = \left. n_0 2^t \ln 2 \right|_{t=4} = 100.2^4 \ln 2 \approx 1109$$

Điều đó có nghĩa sau 4 giờ, số lượng vi khuẩn sẽ phát triển ở tốc độ khoảng 1109 vi khuẩn trên giờ.

♦ KINH TẾ (ECONOMICS):

Example 5: Giả sử $C(x)$ là tổng chi phí mà một công ty phải bỏ ra để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó. Hàm C gọi là hàm chi phí. Nếu số đơn vị hàng hóa tăng từ x_1 lên x_2 thì chi phí bỏ ra tăng thêm $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ và tốc độ tăng trung bình của chi phí là:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Lấy giới hạn của $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ ta nhận được: tốc độ biến thiên tức thời của chi phí so với số đơn vị hàng hóa sản xuất, các nhà kinh tế gọi đây là chi phí cận biên (marginal cost):

$$\text{Chi phí cận biên} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Khi $\Delta x = 1$ và n lớn (số đơn vị hàng hóa sản xuất lớn) thì Δx được xem là nhỏ so với n (có thể coi như Δx gần 0) và do đó $C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$, tức là chi phí cận biên của sản xuất n đơn vị hàng hóa gần bằng chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ $n+1$.

Ví dụ, giả sử một công ty ước lượng chi phí (tính bằng dollar) để sản xuất x đơn vị sản phẩm là

$$C(x) = 10{,}000 + 5x + 0.01x^2.$$

Hàm chi phí cận biên: $C'(x) = 5 + 0.02x$

Chi phí cận biên để sản xuất 500 đơn vị sản phẩm: $C'(500) = 5 + 0.02x\big|_{x=500} = 15\$/sp$

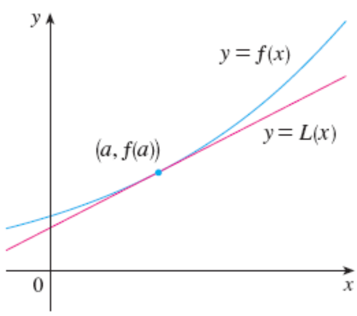
Con số này cho thấy tốc độ tăng của chi phí đối với mức sản xuất $x = 500$ và dự báo chi phí của sản phẩm thứ 501

Chi phí thực của sản phẩm thứ 501:

$$C(501) - C(500) = \left[10{,}000 + 5(501) + 0.01(501)^2\right] - \left[10{,}000 + 5(500) + 0.01(500)^2\right] = 15.01\$$$

Ta thấy $C'(500)$ ước lượng khá tốt chi phí của sản phẩm thứ 501.

1.6 XẤP XỈ TUYẾN TÍNH VÀ VI PHÂN (LINEAR APPROXIMATIONS AND DIFFERENTIALS):



Xét đường cong $y = f(x)$ và một tiếp tuyến với đường cong tại điểm $(a, f(a))$. Khi x gần a, đường cong và đường tiếp tuyến rất gần nhau. Nói cách khác, ta có thể xấp xỉ đường tiếp tuyến với đường cong khi x gần a. Phương trình của đường tiếp tuyến là:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

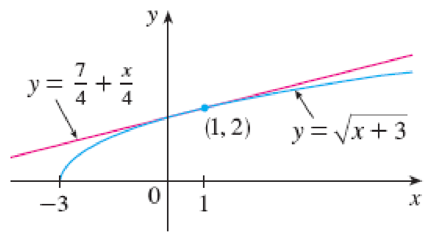
Với các giá trị x gần a ta có xấp xỉ $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ gọi là xấp xỉ tuyến tính của f tại a. Hàm tuyến tính $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ gọi là hàm tuyến tính hóa (linearization) của f tại a.

Example 1: Find the linearization of the function $f(x) = \sqrt{x+3}$ at $a = 1$ and use it to approximate the numbers $\sqrt{3.98}$ and $\sqrt{4.05}$. Are these approximations overestimates or underestimates?

Giải: Tính $f'(x)=\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\to f'(1)=\frac{1}{2}$

Hàm tuyến tính

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)=2+\frac{1}{4}(x-1)=\frac{7}{4}+\frac{x}{4}$$



Vậy khi x gần 1, ta có: $\sqrt{x+3}\approx\frac{7}{4}+\frac{x}{4}$

Đặc biệt, $\sqrt{3.98}=\sqrt{0.98+3}\approx\frac{7}{4}+\frac{0.98}{4}=1.995$

$$\sqrt{4.05}=\sqrt{1.05+3}\approx\frac{7}{4}+\frac{1.05}{4}=2.0125$$

Xem hình trên, ta thấy đường tiếp tuyến cho xấp xỉ tốt với hàm đã cho khi x gần 1, và vì đường tiếp tuyến nằm trên đường cong nên xấp xỉ này cho giá trị lớn hơn. Dĩ nhiên máy tính có thể cho ta giá trị gần đúng của $\sqrt{3.98}$ và $\sqrt{4.05}$ nhưng xấp xỉ tuyến tính cho ta xấp xỉ trên cả một khoảng

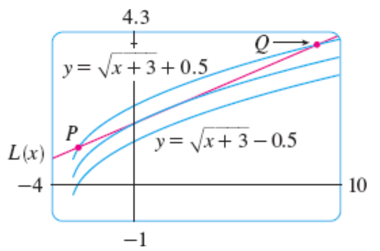
Bảng bên cạnh cho ta so sánh kết quả của xấp xỉ tuyến tính với giá trị thực, lưu ý xấp xỉ tuyến tính cho kết quả tốt khi x gần 1 nhưng độ chính xác của xấp xỉ không còn khi x ở xa 1.

	x	From $L(x)$	Actual value
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

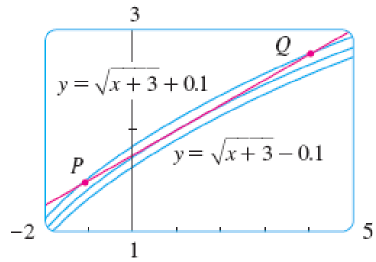
Example 2: For what values of is the linear approximation $\sqrt{x+3}\approx\frac{7}{4}+\frac{x}{4}$ accurate to within 0.5? What about accuracy to within 0.1?

Giải: Chính xác đến 0.5 có nghĩa sự khác biệt của hai hàm nhỏ hơn 0,5:

$$\left|\sqrt{x+3}-\left(\frac{7}{4}+\frac{x}{4}\right)\right|<0.5\leftrightarrow\sqrt{x+3}-0.5<\frac{7}{4}+\frac{x}{4}<\sqrt{x+3}+0.5$$



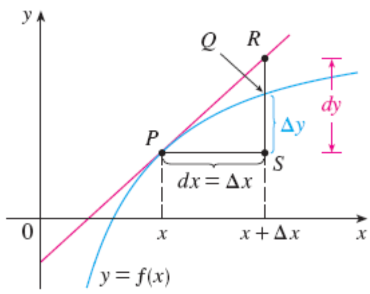
Điều này có nghĩa xấp xỉ tuyến tính nên nằm giữa các đường cong có được từ đường cong $y=\sqrt{x+3}$ bằng cách tịnh tiến theo trục tung lên trên và xuống dưới một khoảng 0.5. Hình vẽ cho thấy tiếp tuyến $y=\frac{7+x}{4}$ giao với đường cong trên tại điểm P và Q.



Phóng to và dùng thước trên máy tính ta đo được tọa độ x của điểm P là -2.66 và tọa độ x của điểm Q là 8.66. Vậy, để có sự khác biệt của hai hàm nhỏ hơn 0,5 thì $-2.66<x<8.66$.

Tương tự, xấp xỉ với độ chính xác đến 0.1 khi $-1.1<x<3.9$

♦ VI PHÂN (DIFFERENTIALS):



Cho $y=f(x)$, với f là hàm khả vi.

Vi phân của hàm y, ký hiệu dy được định nghĩa dưới dạng một phương trình: $dy=f'(x)dx$. Với phương trình này, dy là biến phụ thuộc, nó phụ thuộc vào x và dx. Khi cho dx một giá trị cụ thể và lấy một giá trị x thuộc domain của y thì dy hoàn toàn xác định

♦ Ý nghĩa hình học của vi phân:

Giả sử $P\left(x, f\left(x\right)\right)$ và $Q\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\right)$ là các điểm

trên đồ thị hàm f và giả sử $\Delta x = dx$ thì $\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)$

Hệ số góc của đường tiếp tuyến PR là $f'\left(x\right)$

$\rightarrow RS = f'\left(x\right)dx = dy$. Vậy khi x thay đổi một lượng dx thì dy biểu diễn sự thay đổi của đường tiếp tuyến, còn Δy biểu diễn sự thay đổi của đường cong $y = f\left(x\right)$

Biểu thức vi phân: $dy = f'\left(x\right)dx$

Example 3: Compare the values of Δy and dy if $y = f\left(x\right) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ and x changes (a) from 2 to 2.05 and (b) from 2 to 2.01.

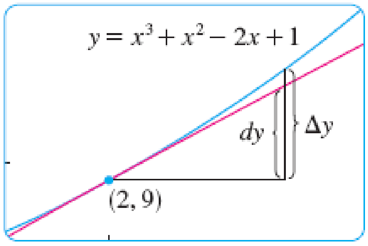
Giải:

(a) Với $x = 2,\ \Delta x = dx = 2.05 - 2 = 0.05$ Ta có:

$f\left(2\right) = 2^3 + 2^2 - 2\left(2\right) + 1 = 9, \quad f\left(2.05\right) = \left(2.05\right)^3 + \left(2.05\right)^2 - 2\left(2.05\right) + 1 = 9.717625$

Vậy $\Delta y = f\left(2.05\right) - f\left(2\right) = 0.717625$

$dy = f'\left(x\right)dx = \left(3x^2 + 2x - 2\right)dx = \left[3\left(2\right)^2 + 2\left(2\right) - 2\right]0.05 = 0.7$



(b) Tương tự khi $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.1$ thì

$\Delta y = 0.140701 \qquad dy = 0.14$

Lưu ý:

- Trong ví dụ trên, xấp xỉ $\Delta y \approx dy$ tốt hơn khi Δx nhỏ hơn và ta tính dy dễ hơn tính Δy. Đối với các hàm phức tạp, nhiều khi không thể tính chính xác Δy. Trong những trường hợp như vậy, tính xấp xỉ bằng vi phân là tốt nhất
- Xấp xỉ tuyến tính có thể được viết dưới dạng vi phân: $f\left(a+dx\right) \approx f\left(a\right) + dy$. Với ký hiệu này, trong ví dụ 1 ta có thể viết $dy = f'\left(x\right)dx = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+3}}$. Với $a = 1,\ dx = \Delta x = 0.05$ thì

$dy = \dfrac{0.05}{2\sqrt{1+3}} = 0.0125$ và $\sqrt{4.05} = f\left(1.05\right) \approx f\left(1\right) + dy = 2.0125$

Example 4: The radius of a sphere was measured and found to be 21cm with a possible error in measurement of at most 0.05cm. What is the maximum error in using this value of the radius to compute the volume of the sphere?

Giải: Nếu bán kính của quả cầu là r, thì thể tích của quả cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Nếu sai số khi đo giá trị của r là $dr = \Delta r$ thì sai số tương ứng khi tính giá trị của thể tích là ΔV và được xấp xỉ bởi vi phân $dV = 4\pi r^2 dr$

Khi $r = 21$ và $dr = 0.05$, ta có $dV = 4\pi\left(21\right)^2 0.05 \approx 277$

Vậy sai số lớn nhất khi tính thể tích vào khoảng $277\,cm^3$.