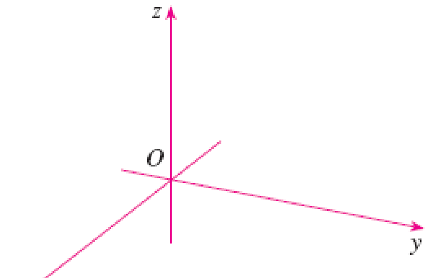
Chương 3: TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

3.1 MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ:

♦ VECTƠ VÀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN (VECTORS AND THE GEOMETRY OF SPACE)

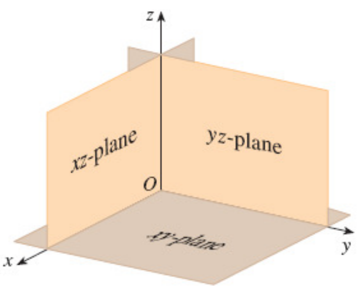
♦ HỆ TỌA ĐỘ BA CHIỀU (THREE-DIMENSIONAL COORDINATE SYSTEMS)



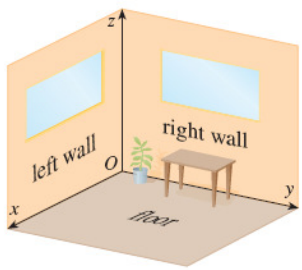
Coordinate axes

Để biểu diễn các điểm trong không gian, trước tiên ta chọn một điểm cố định O, gọi là điểm gốc (the origin) và ba đường thẳng định hướng đi qua O đôi một vuông góc với nhau (perpendicular), gọi là các trục tọa độ (the coordinate axes), ký hiệu trục x, trục y, trục z

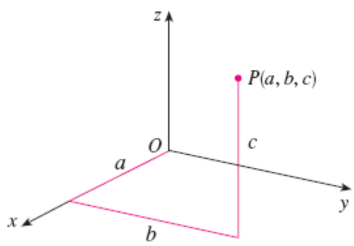
Ba trục tọa độ xác định ba mặt phẳng tọa độ (coordinate plane): Mặt phẳng xy chứa các trục x, y; mặt phẳng yz chứa các trục y, z; mặt phẳng xz chứa các trục x, z. Các mặt phẳng toạ độ này chia không gian thành 8 phần gọi là các góc phần tám. Góc phần tám thứ nhất (the first octant) được xác định bởi các trục dương.



(a) Coordinate planes



(b)



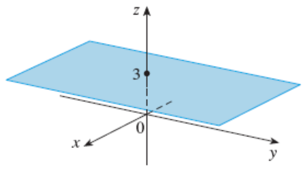
Với bất kì điểm P trong không gian, gọi a là khoảng cách định hướng (directed) từ mặt phẳng yz đến P, gọi b là khoảng cách từ mặt phẳng xz đến P, gọi c là khoảng cách từ mặt phẳng xy đến P. Ta biểu diễn điểm P bởi bộ ba số thực có thứ tự (a,b,c) và gọi a, b, c là các tọa độ của P; a là hoành độ, b là tung độ, c là cao độ. Để xác định điểm (a,b,c), ta bắt đầu tại gốc O, di chuyển a đơn vị dọc theo trục x, b đơn vị song song với trục y, và c đơn vị song song với trục z.

Tích Cartesian $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y,z)/\, x,y,z\in\mathbb{R}\}$ là tập tất cả các bộ ba số thực có thứ tự, được ký hiệu $\mathbb{R}^3$. Ta có tương ứng one-to-one giữa các điểm P trong không gian và các bộ ba có thứ tự (a,b,c) trong $\mathbb{R}^3$

Một phương trình biểu thị sự liên quan giữa x,y,z trong hình học giải tích 3 chiều biểu diễn một mặt (surface) trong $\mathbb{R}^3$

Example 1: What surfaces in $\mathbb{R}^3$ are represented by the following equations?

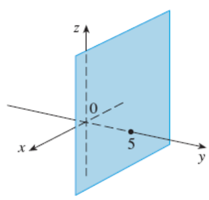
a. $z=3$ b. $y=5$



$z=3$, a plane in $\mathbb{R}^3$

Giải:

a. Phương trình $z=3$ biểu diễn tập $\{(x,y,z)/\, z=3\}$, là tập tất cả các điểm không gian có cao độ bằng 3. Đây là mặt phẳng song song với mặt phẳng xy, nằm bên trên và cách mặt phẳng xy một



$y=5$, a plane in $\mathbb{R}^3$

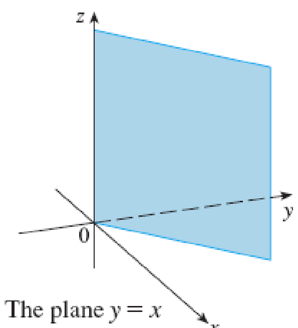
khoảng 3 đơn vị.

b. Tương tự phương trình $y = 5$ là mặt phẳng đứng, song song với mặt phẳng xz về bên phải 5 đơn vị

Example 2: Describe and sketch the surface in $\mathbb{R}^3$ represented by the equation $y = x$

Giải: Phương trình biểu diễn tập các điểm $\{(x,x,z)/x,z \in \mathbb{R}\}$

Đây là mặt phẳng đứng, cắt mặt phẳng xy theo đường thẳng $y = x$



The plane $y = x$

DISTANCE FORMULA IN THREE DIMENSIONS:

Khoảng cách $|P_1P_2|$ giữa các điểm $P_1(x_1, y_1, z_1)$ và $P_2(x_2, y_2, z_2)$ là:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Example 3: The distance from the point $P(2,-1,7)$ to the point $Q(1,-3,5)$ is :

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

EQUATION OF A SPHERE: Phương trình mặt cầu có tâm $C(h,k,l)$ và bán kính r là:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

Đặc biệt, nếu tâm là gốc O thì phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Example 4: Show that $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ is the equation of a sphere, and find its center and radius.

Giải: Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 8$$

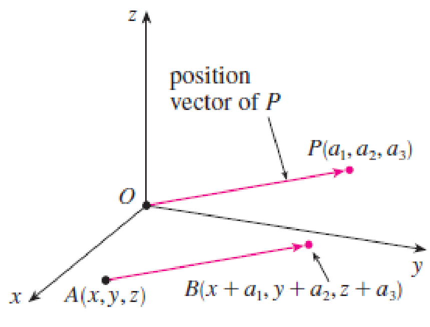
Vậy mặt cầu có tâm: $I(-2,3,-1)$ và bán kính: $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

♦ VECTORS:

Ta ký hiệu vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ là vector vị trí (position vector) của điểm $P(a_1, a_2, a_3)$.

Xét bất kỳ biểu diễn khác $\overrightarrow{AB}$ của **a**, với điểm đầu $A(x_1, y_1, z_1)$ điểm cuối $B(x_2, y_2, z_2)$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ nên $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$



Representations of $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

Cho các điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$, vectơ **a** biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ là:

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

Độ dài của vectơ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ là : $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Nếu $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ và $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ thì:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

Example 1: If $\mathbf{a} = \langle 4,0,3 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle -2,1,5 \rangle$, find $|\mathbf{a}|$ and the vectors $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ and $2\mathbf{a}+5\mathbf{b}$

Giải: $|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ $\qquad$ $3\mathbf{b} = 3\langle -2,1,5 \rangle = \langle -6,3,15 \rangle$

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle 4,0,3 \rangle + \langle -2,1,5 \rangle = \langle 2,1,8 \rangle$ $\qquad$ $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \langle 4,0,3 \rangle - \langle -2,1,5 \rangle = \langle 6,-1,-2 \rangle$

$2\mathbf{a}+5\mathbf{b} = 2\langle 4,0,3 \rangle + 5\langle -2,1,5 \rangle = \langle -2,5,31 \rangle$

Ta kí hiệu V_2 là tập hợp tất cả các vectơ hai chiều, V_3 là tập hợp tất cả các vectơ ba chiều. Tổng quát hơn, ta có thể xét tập V_n là tập hợp tất cả các vectơ n chiều. Mỗi vectơ là một bộ n số xếp thứ tự $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$

PROPERTIES OF VECTORS: Nếu **a**, **b**, và **c** là các vectơ trong V_n và t, s là các hằng số:

$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ $\qquad$ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ $\qquad$ $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$ $\qquad$ $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$

$t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ $\qquad$ $(t+s)\mathbf{a} = t\mathbf{a} + s\mathbf{a}$ $\qquad$ $(ts)\mathbf{a} = t(s\mathbf{a})$ $\qquad$ $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Ba vectơ trong không gian V_3 sau đây có vai trò đặc biệt:

$\mathbf{i} = \langle 1,0,0 \rangle$ $\qquad$ $\mathbf{j} = \langle 0,1,0 \rangle$ $\qquad$ $\mathbf{k} = \langle 0,0,1 \rangle$

Các vectơ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ được gọi là các **vectơ cơ sở chuẩn** (standard basic vectors). Chúng có độ dài bằng 1 và có cùng hướng dương với các trục *x, y, z.*

Với mỗi vectơ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ta đều có thể viết dưới dạng: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

Vectơ đơn vị (unit vector) là vectơ có độ dài bằng 1, ví dụ: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ là các vectơ đơn vị.

Nếu vectơ $\mathbf{a} \neq 0$, vectơ đơn vị có cùng hướng với vectơ **a** là vectơ $\mathbf{u} = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

Example 2: If $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, express the vector $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ in the terms of $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

Giải: $\quad 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}) = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Example 3: Find the unit vector in the direction of the vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

Giải: Độ dài của vectơ đã cho: $\quad |2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$

Vectơ đơn vị có cùng hướng với vectơ đã cho là: $\dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \dfrac{2}{3}\mathbf{i} - \dfrac{1}{3}\mathbf{j} - \dfrac{2}{3}\mathbf{k}$

♦ DOT PRODUCT (TÍCH VÔ HƯỚNG)

DEFINITION: Nếu $\mathbf{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ và $\mathbf{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, khi đó tích vô hướng của **a** và **b** là số **a.b** được cho bởi: $\mathbf{a.b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Example 1:

$$\langle -1,7,4\rangle.\left\langle 6,2,-\frac{1}{2}\right\rangle=(-1)(6)+(7)(2)+4\left(-\frac{1}{2}\right)=6$$

$$(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}).(2\mathbf{j}-\mathbf{k})=1(0)+2(2)-3(-1)=7$$

PROPERTIES OF THE DOT PRODUCT: Nếu **a**, **b** và **c** là các vectơ trong V_3 và t là một hằng số, ta có:

$\mathbf{a.a}=|\mathbf{a}|^2$ $\quad\quad$ $\mathbf{a.b}=\mathbf{b.a}$ $\quad\quad$ $\mathbf{0.a}=0$

$\mathbf{a.}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a.b}+\mathbf{a.c}$ $\quad\quad$ $(t\mathbf{a}).\mathbf{b}=t(\mathbf{a.b})=\mathbf{a}.(t\mathbf{b})$

THEOREM: Nếu θ là góc giữa các vectơ **a** và **b**, khi đó: $\mathbf{a.b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$

Example 2: If the vectors **a** and **b** have lengths 4 and 6, and the angle between them is $\pi/3$, find **a.b**

Giải: $\quad \mathbf{a.b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{3}=4.6.\frac{1}{2}=12$

COROLLARY: Nếu θ là góc giữa 2 vectơ khác không **a** và **b** thì $\cos\theta=\frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

Example 3: Find the angle between the vectors $\mathbf{a}=\langle 2,2,-1\rangle$ and $\mathbf{b}=\langle 5,\text{-}3,2\rangle$

Giải: Bởi vì

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3,\quad |\mathbf{b}|=\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{38},\quad \mathbf{a.b}=2(5)+2(-3)+(-1)(2)=2$$

$\rightarrow \cos\theta=\frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{2}{3\sqrt{38}}$. Vậy góc giữa 2 vectơ **a** và **b** là $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right)\approx 1{,}46(rad)$

Hai vectơ khác không **a** và **b** gọi là vuông góc hay trực giao (perpendicular or orthogonal) nếu góc giữa chúng là $\theta=\frac{\pi}{2}$. Khi đó, $\mathbf{a.b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Ngược lại, nếu $\mathbf{a.b}=0$ thì $\cos\theta=0$ hay $\theta=\frac{\pi}{2}$. Vectơ **0** được xem là vuông góc với mọi vectơ

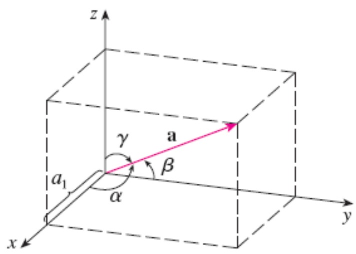
Hai vectơ **a** và **b** vuông góc nếu và chỉ nếu $\mathbf{a.b}=0$

Example 4: Show that $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ is perpendicular to $5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Giải: Vì: $(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})(5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k})=2(5)+2(-4)+(-1)(2)=0$

♦ GÓC ĐỊNH HƯỚNG VÀ COSINE ĐỊNH HƯỚNG (DIRECTION ANGLES AND DIRECTION COSINES)

Các **góc định hướng** của một vectơ khác không **a** là các góc α, β, và γ (trong khoảng $[0,\pi]$) mà **a** tạo với các trục dương *x, y, z*.



Cosine của các góc định hướng này $\cos\alpha, \cos\beta$, và $\cos\gamma$ gọi là các cosine định hướng của vectơ **a**, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{j}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|} = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{k}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|} = \frac{\mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}|}$$

Dễ dàng kiểm tra được: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Và $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle |\mathbf{a}|\cos\alpha, |\mathbf{a}|\cos\beta, |\mathbf{a}|\cos\gamma\rangle = |\mathbf{a}|\langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$

$$\to \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$$

Example 5: Find the direction angles of the vector $\mathbf{a} = \langle 1,2,3\rangle$

Giải: Ta có: $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

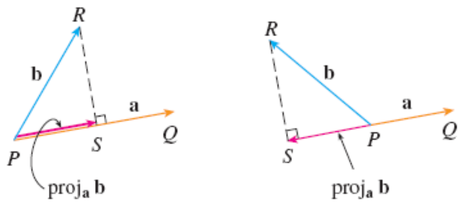
Vậy $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$

$$\to \cos\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74^0, \ \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58^0, \ \lambda = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^0$$

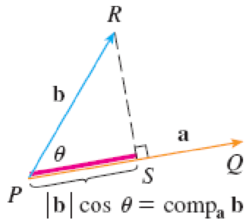
♦ PROJECTION (PHÉP CHIẾU)

Xét hai vectơ $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{PR}$ có cùng điểm đầu *P*.

Nếu *S* là chân đường vuông góc vẽ từ *R* đến đường thẳng chứa $\overrightarrow{PQ}$ thì vectơ $\overrightarrow{PS}$ gọi là vectơ chiếu (vector projection) của **b** trên **a**, ký hiệu là $\overrightarrow{PS} = proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$



Hình chiếu vô hướng (scalar project) của **b** trên **a** được định nghĩa là $comp_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\theta$, với θ là góc giữa **a** và **b**



Scalar projection

Hình chiếu vô hướng của **b** trên **a**:	$comp_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$
Vector chiếu của **b** trên **a**:	$proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$

♦ **Lưu ý:** Vectơ chiếu là hình chiếu vô hướng nhân với vectơ đơn vị theo hướng của **a**

Example 6: Find the scalar projection and vector projection of $\mathbf{b} = \langle 1,1,2\rangle$ onto $\mathbf{a} = \langle -2,3,1\rangle$

Giải: Ta có: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

Hình chiếu vô hướng của b trên a là: $comp_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{(-2)(1)+3(1)+1(2)}{\sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

Vectơ chiếu của b trên a: $proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{3}{14}\mathbf{a} = \left\langle -\dfrac{3}{7}, \dfrac{9}{14}, \dfrac{3}{14} \right\rangle$

♦ TÍCH CÓ HƯỚNG (THE CROSS PRODUCT)

Tích có hướng $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ của 2 vectơ **a** và **b** là một vectơ. Tích có hướng $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ chỉ được định nghĩa khi **a**, **b** là các vectơ 3 chiều.

> **DEFINITION:** Nếu $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ và $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ thì tích có hướng của **a** và **b** là vectơ
>
> $$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Để dễ nhớ, ta dùng ký hiệu của định thức (determinant) như sau

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Example 1: Show that $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$ for any vector **a** in V_3

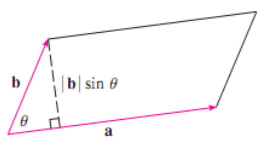
Giải: Nếu $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ thì:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2a_3 - a_3a_2)\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\mathbf{k} = 0$$

> **THEOREM:** Vectơ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vuông góc với cả hai vectơ **a** và ***b***

> **THEOREM:** Nếu θ là góc giữa **a** và **b** ($0 \le \theta \le \pi$) thì $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$

Chiều dài của tích có hướng $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ bằng diện tích của hình bình hành được xác định bởi **a** và **b**)



> **COROLLARY:** Hai vectơ khác không **a** và **b** song song nếu và chỉ nếu $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$

Example 2: Find a vector perpendicular to the plane that passes through the points

$$P(1,4,6), Q(-2,5,-1),\ R(1,-1,1).$$

Giải: Vectơ $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ *và* $\overrightarrow{PR}$ nên nó cũng vuông góc với mặt phẳng đi qua các điểm *P, Q,* và *R*

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \langle -3, 1, -7 \rangle$ *và* $\overrightarrow{PR} = \langle 0, -5, -5 \rangle$. Tích có hướng của các vectơ này:

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$ là vectơ vuông góc với mặt phẳng đi qua 3 điểm *P, Q, R*

THEOREM: Nếu **a**, **b**, và **c** là các vectơ và t là hằng số

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a} \qquad (t\mathbf{a})\times\mathbf{b}=t(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(t\mathbf{b})$$

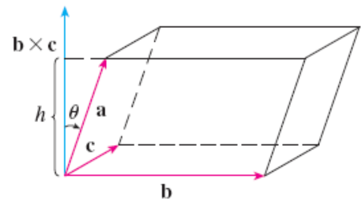
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \qquad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c} \qquad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$$

♦ TÍCH BA (TRIPLE PRODUCTS)

Tích ba vô hướng (scalar triple product) của các vectơ **a**, **b**, và **c** là: $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Thể tích của hình hộp chữ nhật xác định bởi các vector **a**, **b** và **c** là giá trị tuyệt đối của tích ba vô hướng của chúng: $V=|\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$



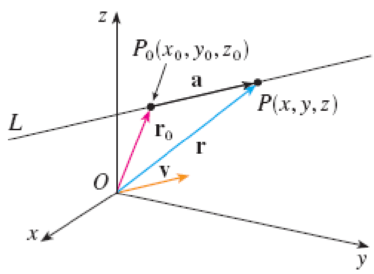
Nếu thể tích V bằng không thì 3 vectơ **a**, **b**, và **c** cùng nằm trên một mặt phẳng, chúng được gọi là đồng phẳng (coplanar).

Example 3: Use the scalar triple product to show that the following vectors are coplanar: $\mathbf{a}=\langle 1,4,-7\rangle$, $\mathbf{b}=\langle 2,-1,4\rangle$ and $\mathbf{c}=\langle 0,\text{-}9,18\rangle$

Giải: Ta có: $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}=0$ nên chúng đồng phẳng.

♦ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG (EQUATIONS OF LINES AND PLANES)

Một đường thẳng L trong không gian ba chiều được xác định khi ta biết một điểm $P_0(x_0,y_0,z_0)$ trên L và phương của L.



Gọi **v** là vectơ song song với L, $P(x,y,z)$ là một điểm tùy ý nằm trên L và gọi $\mathbf{r}_0$, **r** là các vectơ vị trí của P_0 và P ($\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$, $\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}$).

Ta có $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\overrightarrow{P_0P}$. Vì $\overrightarrow{P_0P}$ và **v** là các vectơ song song nên:

$\overrightarrow{P_0P}=t\mathbf{v}$ ($t\in\mathbb{R}$), khi đó **phương trình vectơ** của đường thẳng L là: $\boxed{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}}$

Nếu $\mathbf{v}=\langle a,b,c\rangle$ thì $t\mathbf{v}=\langle ta,tb,tc\rangle$, ta có thể viết $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$ và $\mathbf{r}_0=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$, khi đó: $\langle x,y,z\rangle=\langle x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc\rangle$, ($t\in\mathbb{R}$)

Phương trình tham số của đường thẳng L đi qua điểm $P_0(x_0,y_0,z_0)$ và song song với vectơ $v=\langle a,b,c\rangle$:

$$\boxed{x=x_0+ta \qquad y=y_0+tb \qquad z=z_0+tc}$$

Mỗi giá trị của tham số t cho tương ứng một điểm $P(x,y,z)$ trên L.

Example 1:

(a) Find a vector equation and parametric equations for the line that passes through the point $(5,1,3)$ and is parallel to the vector $\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

(b) Find two other points on the line.

Giải:

(a) Ta có $\mathbf{r}_0 = \langle 5,1,3 \rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ và $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, phương trình vectơ:

$$\mathbf{r} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = (5+t)\mathbf{i} + (1+4t)\mathbf{j} + (3-2t)\mathbf{k}$$

Phương trình tham số là: $x = 5+t,\ y = 1+4t,\ z = 3-2t$

(b) Chọn $t=1$ ta có $(6,5,1)$ là một điểm trên đường thẳng. Tương tự với $t=-1$ ta có điểm $(4,-3,5)$.

* Nếu cả 3 số *a*, *b*, và *c* đều khác 0, từ phương trình tham số ta có **phương trình đối xứng** (symmetric equations) của L:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

Lưu ý: Nếu một trong các số *a*, *b*, *c* bằng không, ví dụ $a=0$, ta có thể viết phương trình của L:

$$x = x_0,\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad \rightarrow \text{ L nằm trên mặt phẳng đứng } x = x_0$$

Example 2:

(a) Find parametric equations and symmetric equations of the line that passes through the points $A(2,4,-3)$ and $B(3,-1,1)$.

(b) At what point does this line intersect the *xy*-plane?

Giải:

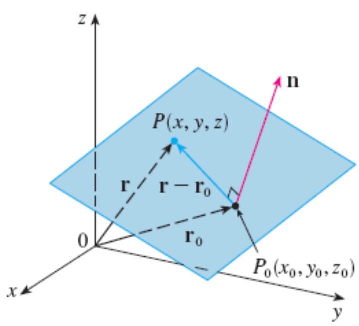
(a) Ta có vectơ $\overrightarrow{AB} = \langle 1,-5,4 \rangle$ song song với đường thẳng. Vậy phương trình tham số của đường thẳng đi qua A là: $x = 2+t,\ y = 4-5t,\ z = -3+4t$

Phương trình đối xứng là: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$

(b) Đường thẳng cắt mặt phẳng *xy* khi $z = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{3}{4} \rightarrow x = \dfrac{11}{4}, y = \dfrac{1}{4}$. Vậy đường thẳng cắt mặt phẳng *xy* tại điểm $\left(\dfrac{11}{4}, \dfrac{1}{4}, 0\right)$

♦ MẶT PHẲNG (PLANES):

Một mặt phẳng trong không gian được xác định bởi điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nằm trong mặt phẳng và vectơ pháp tuyến (normal vectơ) **n** vuông góc với mặt phẳng.



Gọi $P(x,y,z)$ là một điểm tùy ý trong mặt phẳng, $\mathbf{r}_0$ và $\mathbf{r}$ là các vectơ vị trí của P_0 *và* P. Khi đó vectơ $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ biểu diễn $\overrightarrow{P_0P}$. Vectơ pháp tuyến **n** vuông góc với mọi vectơ trong mặt phẳng nên cũng vuông góc với $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Ta có phương trình vectơ của mặt phẳng:

$$\boxed{\mathbf{n}.(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \ \text{ hay } \ \mathbf{n}.\mathbf{r} = \mathbf{n}.\mathbf{r}_0}$$

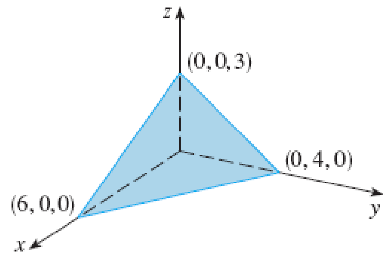
Nếu viết $\mathbf{n} = \langle a,b,c\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x,y,z\rangle$, và $\mathbf{r}_0 = \langle x_0,y_0,z_0\rangle$, từ phương trình trên cho ta :

$\langle a,b,c\rangle.\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = 0$ hay $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Đây là **phương trình vô hướng của mặt phẳng** (scalar equation of the plane) đi qua $P_0(x_0,y_0,z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\mathbf{n} = \langle a,b,c\rangle$.

Có thể viết lại phương trình mặt phẳng dạng **phương trình tuyến tính** (linear equation) :

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

Example 3: Find an equation of the plane through the point $(2,4,-1)$ with normal vector $\mathbf{n} = \langle 2,3,4\rangle$. Find the intercepts and sketch the plane.



Giải: Phương trình của mặt phẳng là :

$2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0 \leftrightarrow 2x+3y+4z=12$

Để tìm giao điểm với trục *x*, ta cho $y=z=0 \to x=6$

Tương tự giao với trục *y* là 4 và trục *z* là 3

Example 4: Find an equation of the plane that passes through the points $P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, và $R(5,2,0)$.

Giải: Các vectơ **a** và **b** được biểu diễn bởi $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{PR}$ là $\mathbf{a} = \langle 2,-4,4\rangle$ và $\mathbf{b} = \langle 4,-1,-2\rangle$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là : $\mathbf{n} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \langle 12,20,14\rangle$.

Phương trình mặt phẳng qua điểm $P(1,3,2)$ và có vectơ pháp tuyến **n** là:

$$12(x-1)+20(y-3)+14(z-2)=0 \text{ Hay } 6x+10y+7z=50$$

Example 5: Find the point at which the line with parametric equations $x=2+3t, y=-4t, z=5+t$ intersects the plane $4x+5y-2z=18$

Giải: Thay *x*, *y*, *z* từ phương trình tham số vào phương trình của mặt phẳng, ta được:

$$4(2+3t) + 5(-4t) - 2(5+t) = 18 \to t = -2$$

Tọa độ của điểm giao là: $x = 2+3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5-2 = 3 \to (-4,8,3)$

Example 6:

a. Find the angle between the planes $x+y+z=1$ and $x-2y+3z=1$

b. Find symmetric equations for the line of intersection *L* of these two planes

Giải:

a. Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng: $\mathbf{n}_1 = \langle 1,1,1\rangle$, $\mathbf{n}_2 = \langle 1,-2,3\rangle$. Góc giữa hai mặt phẳng là:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1)+1(-2)+1(3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}} \to \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^0$$

b. Trước hết ta cần tìm một điểm trên *L*: ta có thể tìm điểm đường thẳng giao với mặt phẳng *xy* bằng cách cho $z=0$ trong hai phương trình mặt phẳng, ta được điểm (1,0,0) thuộc *L*. Vì *L* nằm trên cả hai mặt phẳng nên nó vuông góc với cả hai vectơ pháp tuyến.

Một vectơ **v** song song với L được xác định: $\mathbf{v}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

Phương trình đối xứng của L là: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-3}$

♦ KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG:

Cho điểm $P(x_1,y_1,z_1)$ và mặt phẳng có phương trình $ax+by+cz+d=0$, khi đó khoảng cách D từ điểm P đến mặt phẳng được xác định bởi công thức :

$$\boxed{D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Example 7: Find the distance between the parallel planes $10x+2y-2z=5$ và $5x+y-z=1$.

Giải: Chọn một điểm trên mặt phẳng $10x+2y-2z=5$: cho $y=z=0\rightarrow x=\frac{1}{2}$. Khoảng cách từ điểm $\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$ đến mặt phẳng $5x+y-z=1$ là : $D=\dfrac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right)+1(0)-1(0)-1\right|}{\sqrt{5^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

♦ MẶT TRỤ VÀ MẶT BẬC HAI (CYLINDERS AND QUADRIC SURFACES)

Để phác họa đồ thị của mặt thì việc xác định các đường cong giao tuyến của mặt với các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ là cần thiết. Các đường cong giao tuyến này gọi là vết (traces) hay mặt cắt (cross-sections).

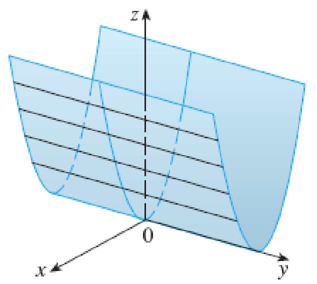
♦ MẶT TRỤ (CYLINDERS SURFACES):

Mặt trụ được sinh bởi một đường thẳng gọi là đường sinh (ruling) di chuyển trong không gian luôn song song với một phương cố định và tựa vào một đường cong phẳng cho trước.

Example 1: Sketch the graph of the surface $z=x^2$.

Giải: Lưu ý phương trình của đồ thị không chứa y, có nghĩa bất kỳ mặt phẳng đứng: $y=k$ (song song với mặt phẳng xz) cắt đồ thị theo đường cong có phương trình $z=x^2$. Vậy các vết đứng này là các parabola.

Trong mặt phẳng xz dựng parabola $z=x^2$ sau đó tịnh tiến nó theo phương trục y. Đồ thị là mặt trụ parabolic (Parabolic cylinder). Đường sinh của mặt trụ này song song với trục y.



The surface $z=x^2$ is a parabolic cylinder.

Lưu ý: Nếu một trong các biến x, y, z không có trong phương trình của mặt thì mặt là mặt trụ

Example 2: Identify and sketch the surface

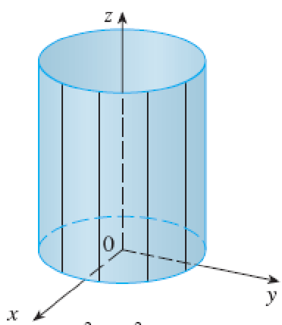
(a) $x^2+y^2=1$ $\quad\quad$ (b) $y^2+z^2=1$

Giải:

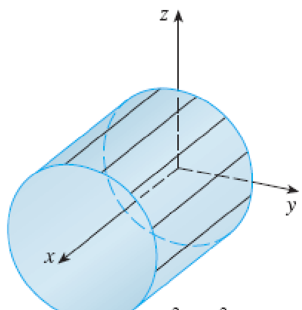
a. z khuyết trong phương trình $x^2+y^2=1$

Đây là mặt trụ tròn (circular cylinder), có đường sinh song song với trục z

b. Tương tự, đây là mặt trụ tròn, đường sinh song song với trục x



$x^2+y^2=1$



$y^2+z^2=1$

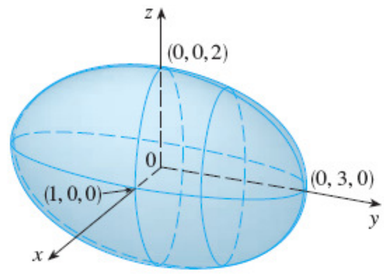
♦ MẶT BẬC HAI (QUADRIC SURFACES)

Mặt bậc hai là đồ thị của phương trình bậc hai ba biến *x*, *y*, và *z*. Phương trình tổng quát có dạng : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$ với *A*, *B*, *C*,... là các hằng số. Ta xét các mặt bậc hai có phương trình dạng chuẩn sau:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$ hoặc $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$

Example 3: Use traces to sketch the quadric surface with equation: $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

Giải: Cho $z = 0$, ta sẽ tìm được vết trong mặt *xy* là $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$, đây chính là phương trình của một ellipse. Tổng quát, vết ngang nằm trong mặt phẳng $z = k$ là $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4}$, $z = k$ là một ellipse với điều kiện $k^2 < 4$ hay $-2 < k < 2$



The ellipsoid $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

Tương tự các vết đứng cũng là các ellipse

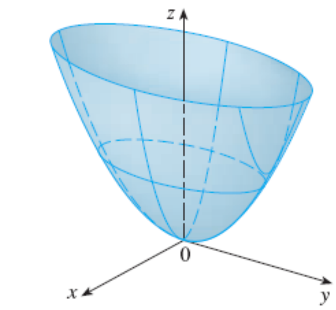
$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \quad (-1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \quad (-3 < k < 3)$$

Mặt này gọi là ellipsoid

Example 4: Use traces to sketch the surface $z = 4x^2 + y^2$

Giải: Cho $x = 0$, ta có $z = y^2$, vậy giao của mặt và mặt phẳng *yz* là parabola. Nếu $x = k$ (*k*: hằng số), ta có: $z = 4k^2 + y^2 \to$ nếu ta cắt đồ thị với bất kỳ mặt phẳng song song với mặt phẳng *yz* ta được parabola. Tương tự, nếu $y = k$, vết là $z = 4x^2 + k^2$ cũng là parabola. Nếu $z = k$, ta có vết ngang $4x^2 + y^2 = k$, đây là một họ ellipse. Mặt này gọi là elliptic paraboloid



The surface $z = 4x^2 + y^2$ is an elliptic paraboloid. Horizontal traces are ellipses; vertical traces are parabolas.

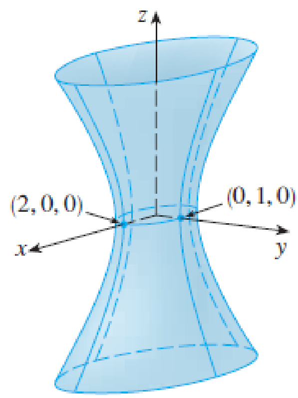
Example 5: Sketch the surface $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

Giải: Vết trong mặt phẳng nằm ngang $z = k$ là ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4}, \quad z = k$$

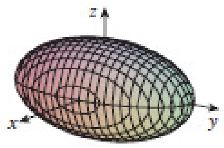
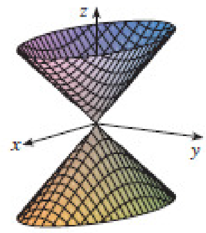
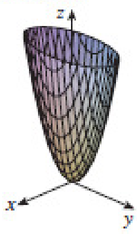
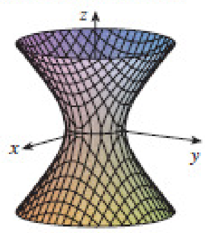
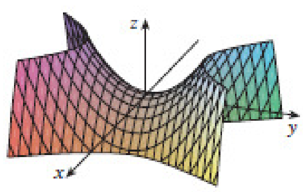
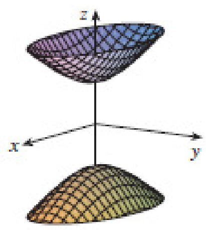
Vết trong các mặt phẳng *xz* và *yz* là các hyperbola :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1, \quad y = 0 \quad \text{và} \quad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \quad x = 0$$



Đây là mặt hyperboloid một tầng (hyperboloid of one sheet)

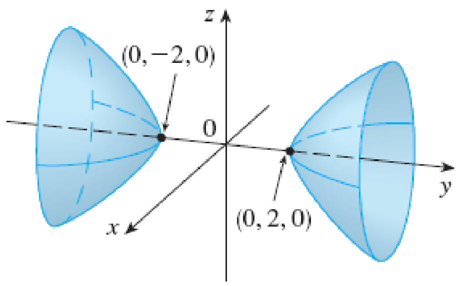
♦ ĐỒ THỊ MẶT BẬC HAI (GRAPHS OF QUADRIC SURFACE)

Surface	Equation	Surface	Equation
Ellipsoid 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ All traces are ellipses. If $a=b=c$, the ellipsoid is a sphere.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x=k$ and $y=k$ are hyperbolas if $k\neq 0$ but are pairs of lines if $k=0$.
Elliptic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	Hyperboloid of One Sheet 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
Hyperbolic Paraboloid 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c<0$ is illustrated.	Hyperboloid of Two Sheets 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Horizontal traces in $z=k$ are ellipses if $k>c$ or $k<-c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

Example 6: Identify and sketch the surface $4x^2-y^2+2z^2+4=0$.

Giải: Chia hai vế cho -4 ta được: $-x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{2}=1$

Đây là mặt hyperboloid hai tầng.



$4x^2-y^2+2z^2+4=0$

Example 7: Classify the quadric surface

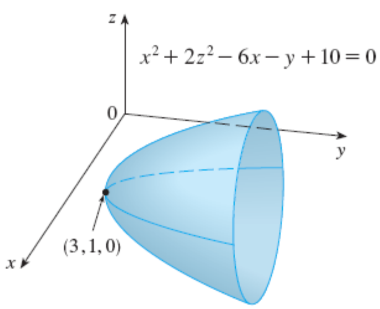
$$x^2+2z^2-6x-y+10=0$$

Giải:

Ta có: $x^2+2z^2-6x-y+10=0$

$$\leftrightarrow\ y-1=(x-3)^2+2z^2$$

Đây là mặt elliptic paraboloid.



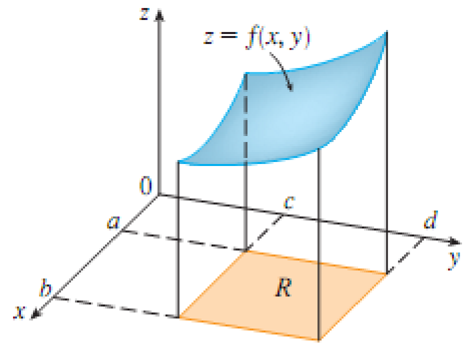
3.2 TÍCH PHÂN KÉP TRÊN HÌNH CHỮ NHẬT (DOUBLE INTEGRALS OVER RECTANGLES)

3.2.1 THỂ TÍCH VÀ TÍCH PHÂN KÉP (VOLUMES AND DOUBLE INTEGRALS)

Xét hàm hai biến f trên hình chữ nhật đóng

$R=[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\in R^2 / a\le x\le b, c\le y\le d\right\}$

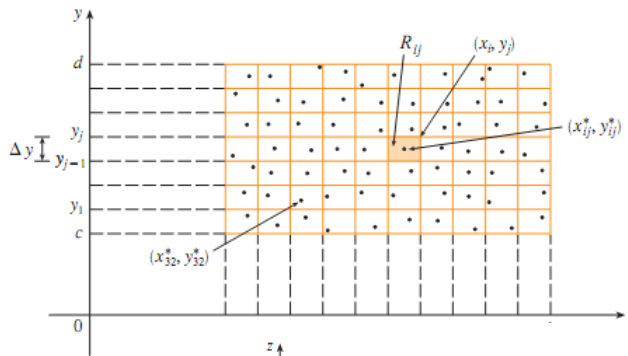
và giả sử $f(x,y)\ge 0$.



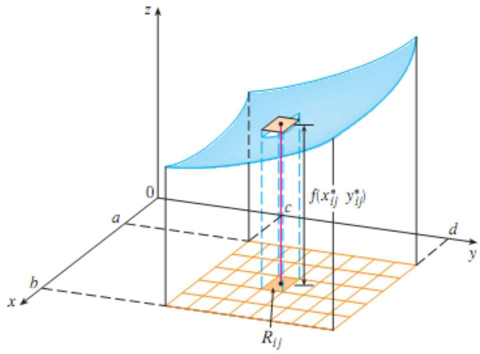
Đồ thị của f là mặt có phương trình: $z=f(x,y)$.

Gọi S là khối nằm trên R và nằm dưới đồ thị của f:

$S=\left\{(x,y,z)\in R^3 / 0\le z\le f(x,y),\ (x,y)\in R\right\}$



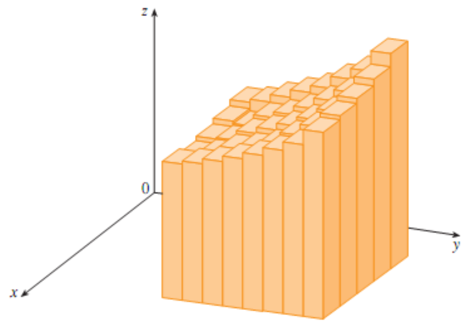
Để tìm thể tích của S, trước tiên ta chia hình chữ nhật R thành các hình chữ nhật con, bằng cách chia khoảng $[a,b]$ thành m khoảng con $[x_{i-1},x_i]$ có chiều rộng cùng bằng $\Delta x=\dfrac{b-a}{m}$, và chia khoảng $[c,d]$ thành n khoảng con $[y_{i-1},y_i]$ có chiều rộng cùng bằng $\Delta y=\dfrac{d-c}{n}$. Bằng cách vẽ các đường thẳng song song với các trục tọa độ qua các điểm biên của các khoảng con này ta sẽ thu được các hình chữ nhật.



$R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{i-1},y_i]=\left\{(x,y)/ x_{i-1}\le x\le x_i, y_{i-1}\le y\le y_i\right\}$

Mỗi hình chữ nhật có diện tích là $\Delta A=\Delta x.\Delta y$

Chọn điểm mẫu $\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\in R_{ij}$, xấp xỉ phần của S nằm trên mỗi R_{ij} bởi một hình hộp chữ nhật có đáy là R_{ij} và chiều cao là $f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)$. Thể tích của mỗi hộp này là: $f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A$. Xấp xỉ của tổng thể tích V



của S là: $\quad V\approx\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A$

Khi m và n càng lớn thì xấp xỉ này càng tốt, vậy:

$$V=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A$$

DEFINITION: Tích phân kép (double integral) của hàm số f trên hình chữ nhật R là $\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A$ nếu giới hạn này tồn tại. Khi đó ta nói hàm f khả tích (integrable)

Điểm mẫu $\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)$ có thể được chọn ở bất kì đâu trên hình chữ nhật R_{ij}, nhưng nếu chọn các điểm mẫu tại góc trên, bên phải của R_{ij} (điểm (x_i,y_i)) thì tích phân kép sẽ đơn giản hơn:

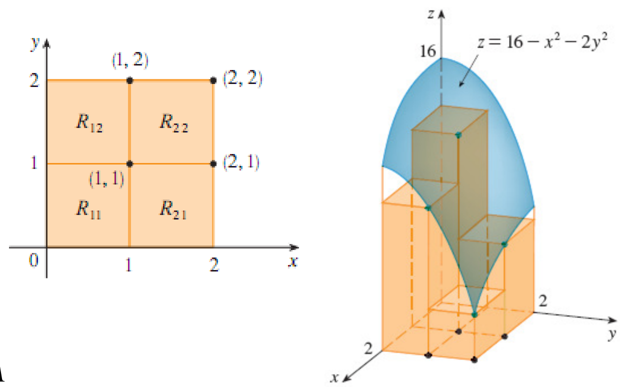
$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta A}$$

Vậy: Nếu $f(x,y)\ge 0$ thể tích V của khối nằm trên hình chữ nhật R và nằm dưới mặt $z=f(x,y)$ là

$$\boxed{V=\iint_R f(x,y)\,dA}$$

Tổng $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*},y_{ij}^{*}\right)\Delta A$ gọi là tổng Riemann kép (double Riemann sum)

Example 1: Estimate the volume of the solid that lies above the square $R=[0,2]\times[0,2]$ and below the elliptic paraboloid $z=16-x^2-2y^2$. Divide R into four equal squares and choose the sample point to be the upper right corner of each square R_{ij}.



Giải: Paraboloid là đồ thị của $z=16-x^2-2y^2$ và diện tích của mỗi hình chữ nhật là 1. Xấp xỉ thể tích bằng tổng Riemann với $m=n=2$:

$$V\approx\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i,y_j)\Delta A$$

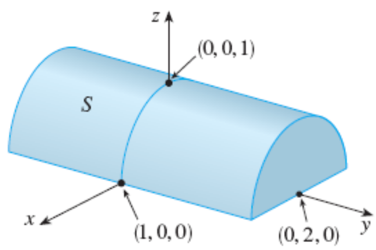
$$= f(1,1)\Delta A+f(1,2)\Delta A+f(2,1)\Delta A+f(2,2)\Delta A$$

$$=13.1+7.1+10.1+4.1=34$$

Example 2: If $R=\{(x,y)/-1\le x\le 1,-2\le y\le 2\}$. Evaluate the integral: $\iint_R\sqrt{1-x^2}\,dA$

Giải: Vì $z=\sqrt{1-x^2}\ge 0 \leftrightarrow x^2+z^2=1$ và $z\ge 0$

Ta tính tích phân kép như là thể tích của khối S nằm dưới hình trụ tròn $x^2+z^2=1$ và trên hình chữ nhật R. Vậy:



$$\iint_R\sqrt{1-x^2}\,dA=\frac{1}{2}\pi(1)^2.4=2\pi$$

♦ QUY TẮC TRUNG ĐIỂM (THE MIDPOINT RULE):

MIDPOINT RULE FOR DOUBLE INTEGRALS:

$$\iint_R f(x,y)\,dA\approx\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\overline{x_i},\overline{y_j}\right)\Delta A$$

Trong đó, $\overline{x_i}$ là trung điểm của $[x_{i-1},x_i]$, $\overline{y_i}$ là trung điểm của $[y_{i-1},y_i]$

Example 3: Use the midpoint rule with $m=n=2$ to estimate the value of the integral:

$\iint_R\left(x-3y^2\right)dA$ where $R=\{(x,y)\in R^2\setminus 0\le x\le 2,1\le y\le 2\}$.

Giải: Ta có $\overline{x_1}=\frac{1}{2}$, $\overline{x_2}=\frac{3}{2}$, $\overline{y_1}=\frac{5}{4}$, $\overline{y_2}=\frac{7}{4}$.

Diện tích mỗi hình chữ nhật con là $\Delta A = \frac{1}{2}$. Do đó:

$$\iint_R \left(x - 3y^2\right) dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(\overline{x_i}, \overline{y_j}\right)\Delta A$$

$$= f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)\Delta A + f\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)\Delta A + f\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)\Delta A + f\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)\Delta = -11,875$$

♦ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH (AVERAGE VALUE):

Giá trị trung bình của hàm hai biến f xác định trên hình chữ nhật R được định nghĩa:

$$f_{ave} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\,dA, \text{ với } A(R) \text{ là diện tích của } R$$

Nếu $f(x,y) \geq 0$, phương trình $A(R)\times f_{ave} = \iint_R f(x,y)\,dA$ có nghĩa hình hộp với đáy R, chiều cao f_{ave} có cùng thể tích với khối nằm dưới đồ thị hàm f

♦ CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN KÉP (PROPERTIES OF DOUBLE INTEGRALS):

Giả sử tất cả các tích phân là tồn tại:

1. $\iint_R \left[f(x,y) + g(x,y)\right] dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$

2. $\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$, $c = const$

3. Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in R$ thì $\iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA$.

3.2.2 TÍCH PHÂN LẶP (ITERATED INTEGRALS):

Giả sử f là hàm hai biến khả tích trên hình chữ nhật $R = [a,b]\times[c,d]$.

Cố định x trong hàm $f(x,y)$, lấy tích phân theo biến y từ $y = c$ đến $y = d$ ta có tích phân riêng (partial integral) theo biến y là $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Khi đó $\int_c^d f(x,y)\,dy$ phụ thuộc vào x, ta viết:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Lấy tích phân hàm $A(x)$ theo biến x từ $x = a$ đến $x = b$ ta được:

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Tích phân bên phải của phương trình trên gọi là tích phân lặp (iterated integrals). Ta có thể viết:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Tương tự, tích phân lặp: $\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$

Example 1: Evaluate the iterated integrals:

$$(a)\quad \int_0^3\int_1^2 x^2 y\,dy\,dx \qquad\qquad (b)\quad \int_1^2\int_0^3 x^2 y\,dx\,dy$$

Giải: (a) Xem x như hằng số, ta có $\int_1^2 x^2 y\,dy = \left[x^2\dfrac{y^2}{2}\right]_1^2 = \dfrac{3}{2}x^2$

Vậy: $$\int_0^3\int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3\left(\int_1^2 x^2 y\,dy\right)dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{2}\right)_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Tương tự: $$\int_1^2\int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2\left[\int_0^3 x^2 y\,dx\right]dy = \int_1^2\left[\frac{x^3 y}{3}\right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9y\,dy = \frac{27}{2}.$$

FUBINI'S THEOREM

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật $R = [a,b]\times[c,d] = \{(x,y) / a \le x \le b, c \le y \le d\}$ thì:

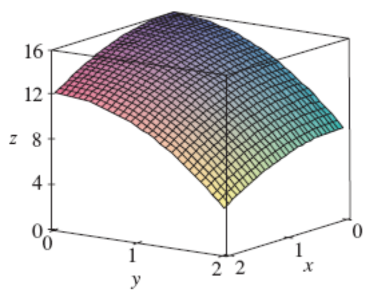
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Example 2: Evaluate the double integral $\iint_R (x-3y^2)\,dA$ where $R = \{(x,y) / 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$

Giải: Sử dụng định lý Fubini:

$$\iint_R (x-3y^2)\,dA = \int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^2 (x-7)\,dx = -12$$

Example 3: Find the volume of the solid S that is bounded by the elliptic paraboloid $x^2+2y^2+z=16$, the planes $x = 2$ and $y = 2$ and the three coordinate planes



Giải: Ta có S là khối nằm dưới mặt $z = 16 - x^2 - 2y^2$ và trên hình chữ nhật $R = [0,2]\text{x}[0,2]$. Ta có:

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy = 48$$

Đặc biệt, nếu $f(x,y) = g(x)h(y)$ và $R = [a,b]\times[c,d]$ thì:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy,\ R = [a,b]\times[c,d]$$

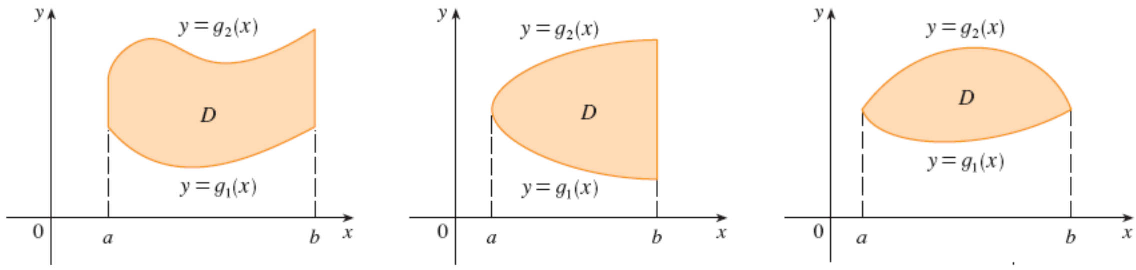
Example 4: If $R = \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x,y) = \sin x\cos y$. Evaluate $\iint_R \sin x \cos y\,dA$

Giải: Ta có: $$\iint_R \sin x\cos y\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.1 = 1$$

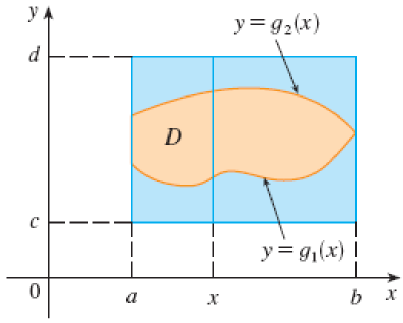
3.2.3 TÍCH PHÂN KÉP TRÊN MIỀN TỔNG QUÁT (DOUBLE INTEGRALS OVER GENERAL REGIONS):

Một miền phẳng D gọi là loại I nếu nó nằm giữa hai đồ thị của hai hàm liên tục theo biến x:

$D=\{(x,y)/a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ với $g_1(x)$, $g_2(x)$ là các hàm liên tục trên $[a,b]$



Some type I regions



Để tính $\iint\limits_D f(x,y)dA$ với D là miền loại I, ta chọn hình chữ nhật

$R=[a,b]\times[c,d]$ chứa D và đặt $F(x,y)=\begin{cases} f(x,y),(x,y)\in D\\ 0, \quad (x,y)\in R\setminus D\end{cases}$

Ta có: $\iint\limits_D f(x,y)dA=\iint\limits_R F(x,y)dA=\int\limits_a^b\int\limits_c^d F(x,y)dydx$

Vì $F(x,y)=0,\ y<g_1(x)$ hay $y>g_2(x)$ nên

$$\int\limits_c^d F(x,y)dy=\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy=\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \text{ (vì } F(x,y)=f(x,y),\ g_1(x)\le y\le g_2(x))$$

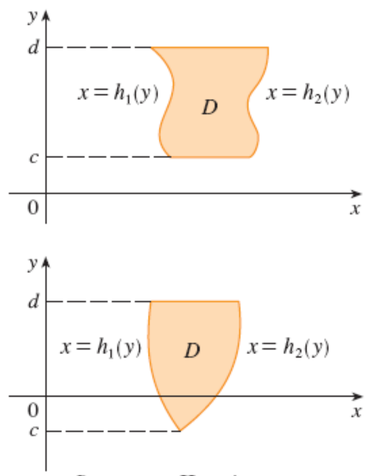
Nếu f liên tục trên miền D *loại I:* $D=\{(x,y)/a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dA=\int\limits_a^b\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

Các miền phẳng loại II là các miền được biểu diễn dưới dạng

$$D=\{(x,y)/c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$$

Tương tự ta có:



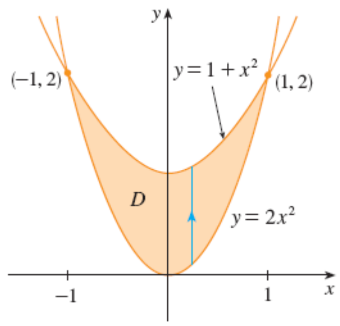
Some type II regions

Nếu f liên tục trên miền D loại *II*

$$D=\{(x,y)/c\le y\le d, h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$$

thì $$\iint\limits_D f(x,y)dA=\int\limits_c^d\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Example 1: Evaluate $\iint_D (x+2y)\,dA$, where D is the region bounded by the parabolas $y=2x^2$ và $y=1+x^2$.



Giải: Giao điểm của các parabola: $2x^2=1+x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Miền D là miền loại *I* được xác định:

$$D=\left\{(x,y)\,/\,-1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2\right\}$$

Khi đó:

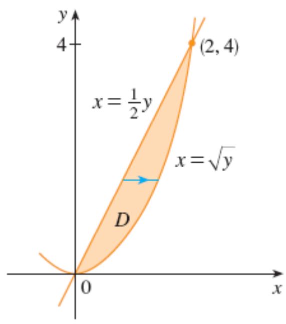
$$\iint_D (x+2y)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dydx=\int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\left(-3x^4-x^3+2x^2+x+1\right)dx=\frac{32}{15}$$

Example 2: Find the volume of the solid that lies under the paraboloid $z=x^2+y^2$ and above the region D in the *xy-plane* bounded by the line $y=2x$ and the parabola $y=x^2$

Giải: Miền D là miền loại *II*, được xác định:

$$D=\left\{(x,y)\,/\,0\le y\le 4,\ \frac{1}{2}y\le x\le \sqrt{y}\right\}$$

Thể tích cần tìm: $V=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dA=\int_0^4\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\dfrac{216}{35}$

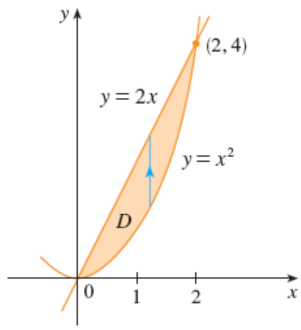


D as a type II region

Lưu ý: Với bài toán này, ta có thể xem miền D là miền loại *I* được xác định: $D=\left\{(x,y)\,/\,0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\right\}$.

Thể tích cần tìm là:

$$V=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}\left(x^2+y^2\right)dydx=\frac{216}{35}$$



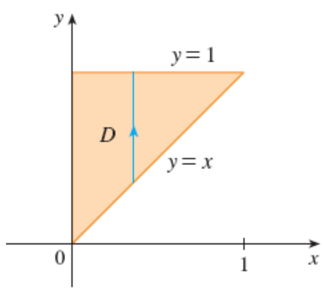
D as a type I region

Example 3: Evaluate the iterated integral $\int_0^1\int_x^1 \sin\left(y^2\right)dydx$.

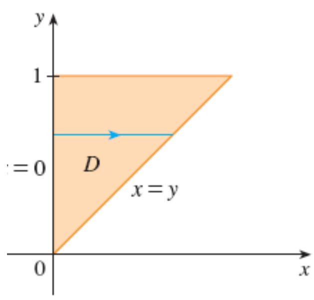
Giải: $\int_0^1\int_x^1 \sin\left(y^2\right)dydx=\iint_D \sin\left(y^2\right)dA$, với miền D được xác định:

$$D=\left\{(x,y)\,/\,0\le x\le 1, x\le y\le 1\right\}$$

Nhưng vì tích phân $\int_x^1 \sin\left(y^2\right)dy$ không phải là hàm cơ bản. Ta có thể viết miền D thành miền loại *II*: $D=\left\{(x,y)\,/\,0\le y\le 1, 0\le x\le y\right\}$



D as a type I region



D as a type II region

Khi đó: $\int_0^1\int_x^1 \sin\left(y^2\right)dydx=\iint_D \sin\left(y^2\right)dA=\int_0^1\int_0^y \sin\left(y^2\right)dxdy=$

$$=\int_0^1\left[x\sin\left(y^2\right)\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_0^1 y\sin\left(y^2\right)dy=-\frac{1}{2}\cos\left(y^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

♦ CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN KÉP (PROPERTIES OF DOUBLE INTEGRALS):

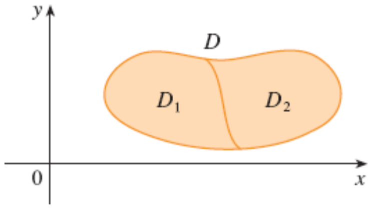
1. $\iint\limits_D \left[f(x,y) + g(x,y) \right] dA = \iint\limits_D f(x,y)\,dA + \iint\limits_D g(x,y)\,dA$

2. $\iint\limits_D cf(x,y)\,dA = c\iint\limits_D f(x,y)\,dA$, với $c = const$.

3. Nếu $f(x,y) \ge g(x,y),\ \forall (x,y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x,y)\,dA \ge \iint\limits_D g(x,y)\,dA$.

4. Nếu $D = D_1 \cup D_2$, trong đó D_1 và D_2 không chồng lên nhau:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA$$



5. $\iint\limits_D 1dA = A(D)$, *A(D)* là diện tích của miền *D*.

6. Nếu $m \le f(x,y) \le M,\ \forall (x,y) \in D$, khi đó: $mA(D) \le \iint\limits_D f(x,y)\,dA \le MA(D)$

Example 4: Estimate the integral $\iint\limits_D e^{\sin x \cos x}\,dA$, where *D* is the disk with center the origin and radius 2

Giải: Vì $-1 \le \sin x \le 1,\ -1 \le \cos y \le 1 \ \rightarrow\ -1 \le \sin x \cos y \le 1$

$$\rightarrow\ e^{-1} \le e^{\sin x \cos x} \le e^{1} = e$$

Ta có: $A(D) = \pi 2^2 = 4\pi$, nên:

$$e^{-1}.4\pi \le \iint\limits_D e^{\sin x \cos x}\,dA \le e.4\pi \ \rightarrow\ \frac{4\pi}{e} \le \iint\limits_D e^{\sin x \cos x}\,dA \le 4\pi e$$

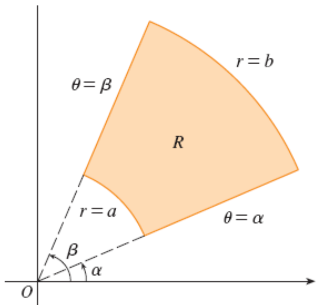
3.3 TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ CỰC (DOUBLE INTEGRALS IN POLAR COORDINATES):

Hình chữ nhật cực (polar rectangle) là miền có dạng $R = \left\{ (r,\theta) / a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta \right\}$.

CHANGE TO POLAR COORDINATES IN A DOUBLE INTEGRALS:

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật cực *R*: $0 \le a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta$

với $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ thì $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$



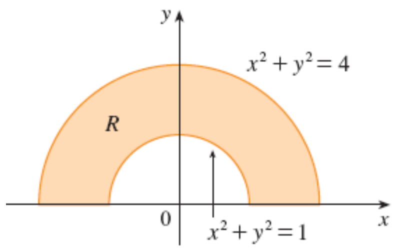
Polar rectangle

Example 1: Evaluate $\iint\limits_R (3x + 4y^2)\,dA$, where *R* is the region in the upper half-plane bounded by the circles $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$.

Giải: Miền *R* được mô tả như sau $R = \left\{ (x,y) / y \ge 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\}$

Biểu diễn hình chữ nhật cực: $R = \left\{ (r,\theta) / 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi \right\}$

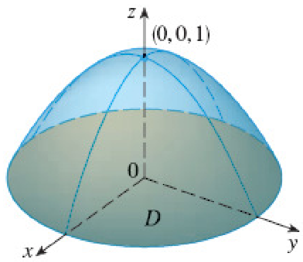
$$\iint\limits_R (3x + 4y^2)\,dA = \int\limits_0^\pi \int\limits_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2 \sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$



$R = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$

$$= \int_0^{\pi}\int_1^2 \left(3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta\right)drd\theta = \int_0^{\pi}\left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_1^2 d\theta = \frac{15\pi}{2}$$

Example 2: Find the volume of the solid bounded by the plane $z = 0$ and the paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.



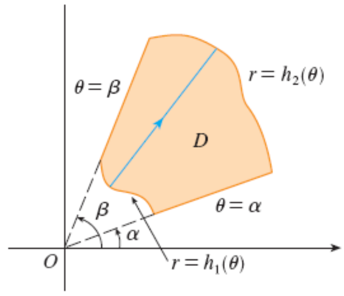
Giải: Giao của paraboloid với mặt phẳng *xy* là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Vậy khối nằm dưới paraboloid và trên đĩa tròn *D* có pt: $x^2 + y^2 \le 1$

Trong tọa độ cực: $D = \{(r,\theta)/0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

Vì $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$ nên thể tích là: $V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right)rdrd\theta = \frac{\pi}{2}$

> Nếu f liên tục trên miền cực có dạng
>
> $$D = \{(r,\theta)/\alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$
>
> thì $$\iint_D f(x,y)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$



$D = \{(r,\theta)\,|\,\alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$

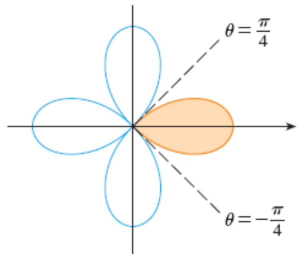
Đặc biệt, nếu $f(x,y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$, $h_2(\theta) = h(\theta)$ ta có diện tích miền *D* giới hạn bởi $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r = h(\theta)$ là $A(D) = \iint_D 1dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_0^{h(\theta)} rdrd\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\left[h(\theta)\right]^2 d\theta$

Example 3: Use a double integral to find the area enclosed by one loop of the four-leaved rose $r = \cos 2\theta$

Giải: Ta có một cánh của hoa hồng xác định trên miền:

$$D = \left\{(r,\theta)/-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}1,\ 0 \le r \le \cos 2\theta\right\}$$

Diện tích: $A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos 2\theta} rdrd\theta = \frac{\pi}{8}$



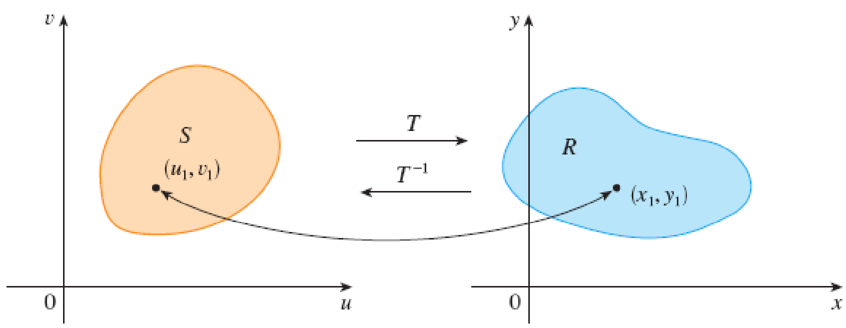
3.4 ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN KÉP (CHANGE VARIABLE IN DOUBLE INTEGRALS):

Xét một phép biến đổi (transformation) *T* từ mp(*uv*) đến mp(*xy*): *T(u,v) = (x,y)*

với *x = g(u,v), y = h(u,v)*

T là C^1 transformation nếu *g* và *h* có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục

T là một hàm có miền xác định và miền giá trị đều là tập con của R^2



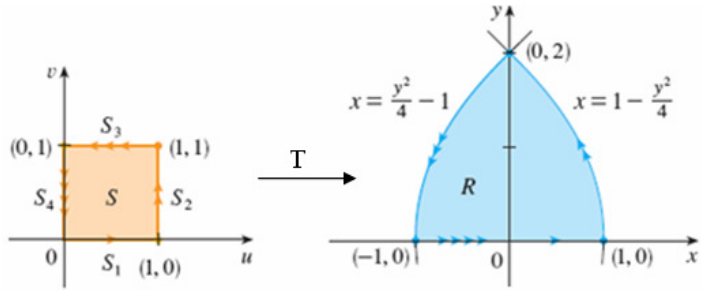
Nếu $T(u_1,v_1) = (x_1,y_1)$ thì (x_1,y_1) gọi là ảnh của (u_1,v_1). Nếu không có hai điểm có cùng ảnh thì *T* gọi là 1-1 (*one to one*).

Miền *R* là ảnh của miền *S* nếu *R* gồm ảnh của tất cả các điểm trong *S*

Nếu *T* là 1-1 thì *T* có phép biến đổi ngược (inverse transformation) T^{-1} từ *mp(xy)* đến *mp(uv)*, ta có thể giải tìm *u, v* theo *x, y: u = G(x,y)* và *v = H(x,y)*

Example 1: A transformation is defined by the equations: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Find the image of the square: $S = \{(u,v) / 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$

Giải: Tìm ảnh các biên của hình vuông:



Biên S_1: $v = 0,\ 0 \le u \le 1$

$\rightarrow x = u^2,\ y = 0 \ \rightarrow\ 0 \le x \le 1$

Vậy ảnh của S_1 là đoạn thẳng nối (0,0) và (1,0) trong *mp(xy)*

Biên S_2: $u = 1,\ 0 \le v \le 1$

$\rightarrow x = 1 - v^2,\ y = 2v \ \rightarrow\ x = 1 - \dfrac{y^2}{4},\ 0 \le x \le 1$: đây là một phần của parabola

Biên S_3: $v = 1,\ 0 \le u \le 1$

$\rightarrow x = u^2 - 1,\ y = 2u \ \rightarrow\ x = \dfrac{y^2}{4} - 1,\ -1 \le x \le 0$: đây là một phần của parabola

Biên S_4: $u = 0,\ 0 \le v \le 1$

$\rightarrow x = -v^2,\ y = 0 \ \rightarrow\ -1 \le x \le 0$: đây là đoạn thẳng nối (-1,0) và (0,0)

DEFINITION: Định thức Jacobian của phép biến đổi *T* cho bởi *x = g(u,v), y = h(u,v)* là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

CHANGE OF VARIABLES IN A DOUBLE INTEGRAL: Giả sử:

- *T* là C^1 transformation có định thức Jacobian khác 0 biến miền *S* trong *mp(uv)* thành miền *R* trong *mp(xy)*
- *f* liên tục trên *R* và *R, S* là các miền phẳng loại *I* hoặc loại *II*
- *T* là 1-1, có thể trừ trên biên của S thì

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Example 2: Use the change of variable $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ to evaluate the integral $\iint_R y\,dA$, where *R* is the region bounded by the *x-axis* and the parabolas
$y^2 = 4 - 4x$ and $y^2 = 4 + 4x,\ y \ge 0$

Giải: Tính định thức Jacobian: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$

Vậy: $\displaystyle\iint_R y\,dA = \iint_S 2uv\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA = 8\int_0^1\int_0^1 \left(u^3v + uv^3\right) dudv = \int_0^1 \left(2v + 4v^3\right) dv = 2$

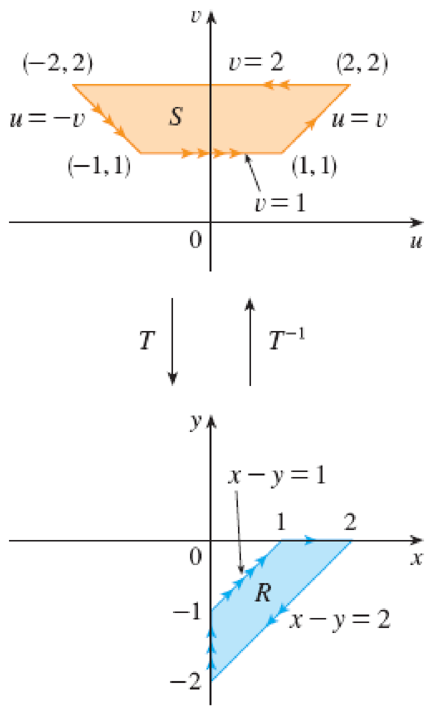
Example 3: Evaluate the integral $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA$, where R is the trapezoidal region with vertices (1,0), (2,0), (0,-2) and (0,-1)

Giải:

Để dễ tính tích phân ta cần đặt: $u = x+y,\ v = x-y$

Dùng phép biến đổi: T: $mp(uv) \to mp(xy)$: $x = \frac{1}{2}(u+v),\ y = \frac{1}{2}(u-v)$

Tính định thức Jacobian:



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Để tìm miền S trong mặt phẳng uv tương ứng với miền R, ta để ý biên của R nằm trên các đường thẳng:

$$y = 0,\ x - y = 2,\ x = 0,\ x - y = 1$$

Các đường thẳng ảnh trong mặt phẳng uv là:

$$u = v,\ v = 2,\ u = -v,\ v = 1.$$

Vậy S là hình thang với các đỉnh: (1,2), (2,2), (-2,2) và (-1,1)

$$\to S = \{(u,v) / 1 \le v \le 2,\ -v \le u \le v\}$$

Vậy: $$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA = \iint_S e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} dudv =$$

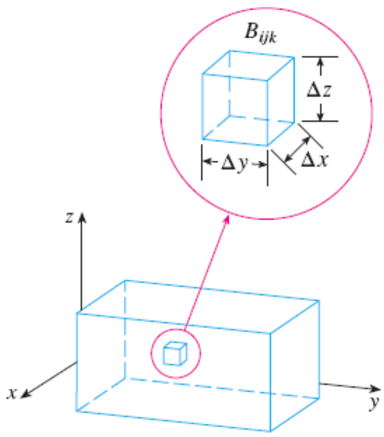
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1}) v dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1})$$

3.5 TÍCH PHÂN BỘI BA (TRIPLE INTEGRALS) – SINH VIÊN ĐỌC THÊM

♦ TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG TỌA ĐỘ ĐỀ-CÁC:

Ta xét trường hợp đơn giản nhất với hàm 3 biến f xác định trên hình hộp chữ nhật:

$$B = \{(x,y,z) / a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\}$$



Đầu tiên, ta chia B thành các hình hộp con bằng cách chia $[a,b]$ thành l đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ có độ dài bằng Δx, chia $[c,d]$ thành m đoạn con có chiều rộng Δy, chia $[r,s]$ thành n đoạn con có chiều rộng Δz. Các mặt phẳng đi qua các điểm cuối của những đoạn con này song song với các mặt phẳng tọa độ, chia hình hộp B thành lmn hình hộp con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i] \times [z_{i-1}, z_i].$$

Mỗi hình hộp con có thể tích là: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

Tổng Riemann bội ba là: $\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V$, với điểm mẫu $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in B_{ijk}$

DEFINITION: Tích phân bội ba của f trên hình hộp B là

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)\Delta V$$ nếu giới hạn này tồn tại.

Ta có thể chọn điểm mẫu một cách tùy ý trong mỗi hình hộp con, nhưng nếu ta chọn điểm mẫu là $\left(x_i, y_j, z_k\right)$ thì ta sẽ có biểu diễn tích phân bội ba đơn giản hơn

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_i, y_j, z_k\right)\Delta V$$

FUBINI'S THEOREM FOR TRIPLE INTEGRALS

Nếu f là hàm số liên tục trên hình hộp chữ nhật $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, khi đó

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

Lưu ý: Ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân của các biến *x, y, z*

Example 1: Evaluate the triple integral $\iiint_B xyz^2\,dV$, where B is the rectangular box given by:

$$B=\left\{(x,y,z)/0\le x\le 1, -1\le y\le 2, 0\le z\le 3\right\}.$$

Giải: Ta chọn tích phân với *x*, rồi *y*, rồi *z*, ta có

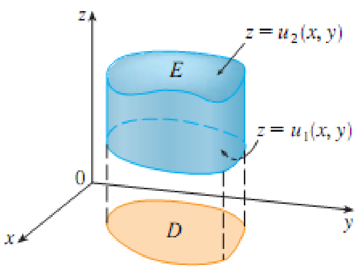
$$\iiint_B xyz^2\,dV = \int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 xyz^2\,dxdydz = \int_0^3\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}dydz = \int_0^3 \frac{3z^2}{4}dz = \frac{27}{4}$$

Bây giờ, ta định nghĩa tích phân bội ba trên một miền bị chặn tổng quát E trong không gian 3 chiều. Chọn hình hộp chữ nhật B chứa E. Ta định nghĩa hàm F bằng f trên E và bằng 0 trên $B\backslash E$. Ta có:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iiint_B F(x,y,z)\,dV$$

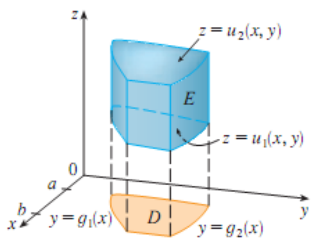
♦ **Một miền khối *E* gọi là loại một** nếu nó nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục theo *x* và *y*:

$$E=\left\{(x,y,z)/(x,y)\in D,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\right\}$$



với D là hình chiếu của E lên mặt phẳng *xy*. Khi đó

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D\left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$$

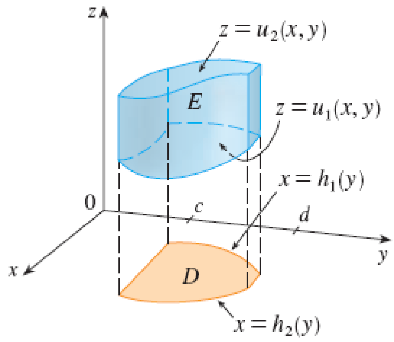


Đặc biệt, nếu hình chiếu D của E lên mặt phẳng *xy* là miền phẳng loại *I* thì:

$$E=\left\{(x,y,z)/a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x),\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\right\}$$

Phương trình trên trở thành

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx}$$



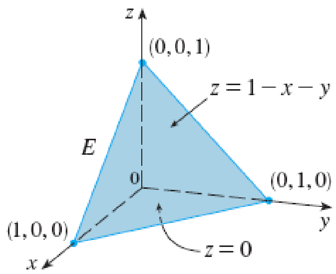
Nếu D là miền phẳng loại *II*, thì

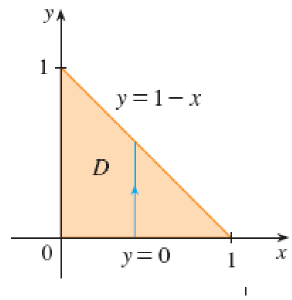
$$E=\{(x,y,z)\,/\,c\le y\le d,\ h_1(y)\le x\le h_2(y),\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$$

Và ta có:

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdxdy}$$

Example 2: Evaluate $\iiint\limits_E z\,dV$, where E is the solid tetrahedron bounded by the four planes $x=0,\ y=0,\ z=0$, và $x+y+z=1$





Giải: Để tính tích phân bội ba ta cần vẽ 2 miền: miền E và hình chiếu D của E lên mặt phẳng xy

Biên dưới của tứ diện là mặt phẳng $z = 0$ và biên trên là mặt phẳng $z = 1- x - y$, vậy

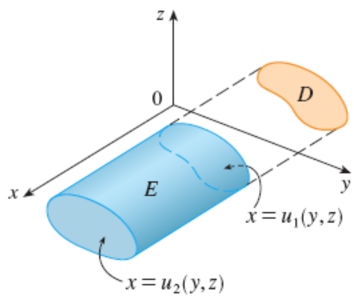
$u_1(x,y)=0,\ u_2(x,y)=1-x-y$ và lưu ý giao của hai mặt phẳng $z = 0$ và mặt phẳng $z = 1- x- y$ là đường thẳng $x + y = 1$. Hình chiếu của E là miền tam giác. Ta có:

$$E=\{(x,y,z)\,/\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$$

E là miền loại I nên: $\iiint\limits_E z\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dzdydx = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dydx = \frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3dx = \frac{1}{24}$

♦ **Một miền khối *E* là loại *II*** nếu nó có dạng:

$$E=\{(x,y,z)\,/\,(y,z)\in D,\ u_1(y,z)\le x\le u_2(y,z)\}$$



A type 2 region

Khi đó ta có

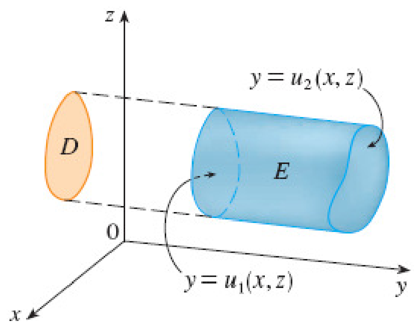
$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D\left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right]dA}$$

với D là hình chiếu của E trên mặt phẳng yz

♦ **Một miền khối *E* là loại *III*** nếu nó có dạng:

$$E=\{(x,y,z)\,/\,(x,z)\in D,\ u_1(x,z)\le y\le u_2(x,z)\}$$

Khi đó ta có:

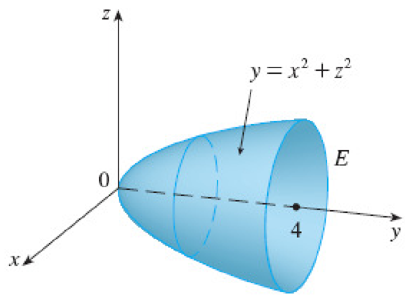


A type 3 region

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA}$$

với D là hình chiếu của E trên mặt phẳng xz

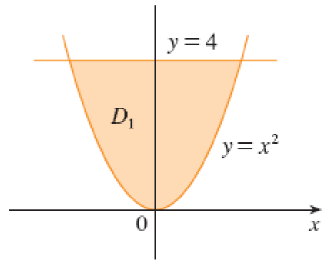
Example 3: Evaluate $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV$, where E is the region bounded by the paraboloid $y = x^2+z^2$ and the plane $y=4$.



Giải: Nếu ta xem khối E là loại *I*, ta cần xét hình chiếu D_1 của nó lên *mp(xy)* là parabolic $y = x^2$

Vì $y = x^2+z^2 \to z = \pm\sqrt{y-x^2}$ nên mặt biên dưới của E là $z = -\sqrt{y-x^2}$ và mặt trên là $z = \sqrt{y-x^2}$. Do đó miền E:

$$E = \left\{(x,y,z) / -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4,\ -\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$



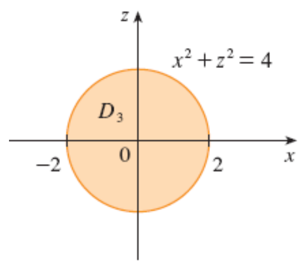
Projection on *xy*-plane

Tích phân cần tính được viết dưới dạng

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\,dzdydx.$$

Tích phân này rất khó để tính.

Bây giờ ta xét E là loại 3, hình chiếu D_3 của E lên *mp(xz)* là đĩa $x^2+z^2 \le 4$. Biên trái của E là paraboloid $y = x^2+z^2$ và biên phải là mặt phẳng $y = 4$. Lấy $u_1(x,z) = x^2+z^2,\ u_1(x,z) = 4$, ta có:



Projection on *xz*-plane

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \iint\limits_{D_3}\left[\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right]dA = \iint\limits_{D_3}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dA$$

Chuyển sang tọa độ cực trong *mp(xz)* với $x = r\cos\theta$ *và* $z = r\sin\theta$ ta được:

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \iint\limits_{D_3}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dzdx$$

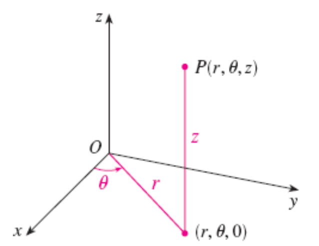
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(4-r^2\right)r\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}\left(4r^2-r^4\right)dr = \frac{128\pi}{15}$$

*** Lưu ý:** Nếu $f(x,y,z)=1,\ \forall(x,y,z)\in E$ thì thể tích của E là $V(E) = \iiint\limits_E dV$

• TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG TỌA ĐỘ TRỤ (TRIPLE INTEGRALS IN CYLINDRICAL COORDINATES)

♦ TỌA ĐỘ TRỤ (CYLINDRICAL COORDINATES)

Trong tọa độ trụ, điểm P trong không gian 3 chiều được xác định bởi bộ ba có thứ tự (r,θ,z), với r, θ là tọa độ cực của hình chiếu của P lên *mp(xy)* và z là khoảng cách từ *mp(xy)* đến P



The cylindrical coordinates of a point

Công thức chuyển từ tọa độ trụ sang tọa độ vuông góc:

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z}$$

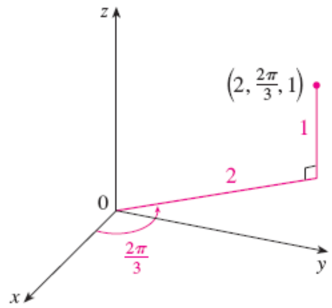
Ngược lại, công thức chuyển từ tọa độ vuông góc sang tọa độ trụ:

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z}$$

Example 1:

(a) Plot the point with cylindrical coordinates $(2, 2\pi/3, 1)$ and find its rectangular coordinates.

(b) Find cylindrical coordinates of the point with rectangular coordinates $(3, -3, -7)$.



Giải:

(a) $x = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} = -1 \qquad y = 2\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sqrt{3} \qquad z = 1$

Tọa độ vuông góc là $\left(-1, \sqrt{3}, 1\right)$

(b) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{2}$, $\tan\theta = \dfrac{-3}{3} = -1 \rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$, $z = -7$

Tọa độ trụ là: $\left(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7\right)$

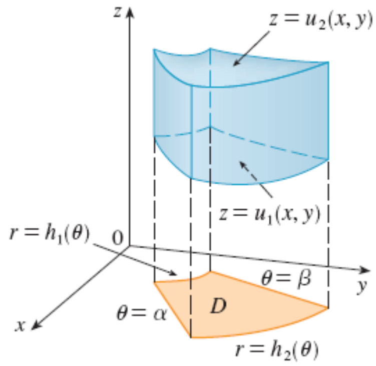
♦ TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA VỚI TỌA ĐỘ TRỤ (EVALUATING TRIPLE INTEGRALS WITH CYLINDRICAL COORDINATES):

Giả sử f liên tục, khối E là loại I:

$$E = \left\{(x, y, z) / (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\right\}$$

E có hình chiếu D lên mặt phẳng xy được mô tả trong tọa độ cực:

$$D = \left\{(r, \theta) / \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\right\}$$



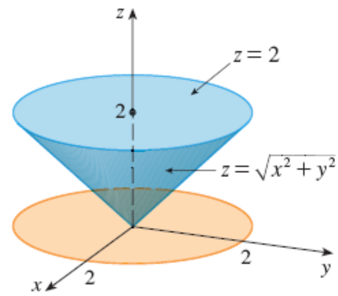
Ta đã biết:

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dA$$

Chuyển tích phân kép sang tọa độ cực ta được công thức tích phân bội ba trong tọa độ trụ:

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta}$$

Example 2: Evaluate $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \left(x^2 + y^2\right) dz\,dy\,dx$



Giải: Đây là tích phân bội ba trên khối E được xác định như sau:

$$E = \left\{(x, y, z) / -2 \le x \le 2, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2},\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2\right\}$$

Hình chiếu của E trên mặt phẳng xy là đĩa $x^2 + y^2 \le 4$

Khối E được biểu diễn đơn giản hơn trong tọa độ trụ:

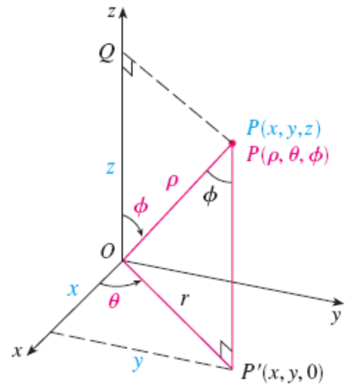
$$E=\{(r,\theta,z)/0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2,\ r\le z\le 2\}$$

Theo công thức tích phân bội ba trong tọa độ trụ ta có

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dzdydx=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3(2-r)\,dr=\frac{16\pi}{5}$$

• TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG TỌA ĐỘ CẦU (TRIPLE INTEGRALS IN SPHERICAL COORDINATES)

• TỌA ĐỘ CẦU (SPHERICAL COORDINATES)



Điểm P trong không gian có tọa độ cầu $P(\rho,\theta,\phi)$ với $\rho=|OP|$,

θ giống như góc trong tọa độ trụ, và Φ là góc giữa trục dương z với đoạn thẳng OP. Lưu ý: $\rho\ge 0$ và $0\le\phi\le\pi$

Liên hệ giữa tọa độ vuông góc và tọa độ cầu:

Ta có: $z=\rho\cos\phi,\ r=\rho\sin\phi,\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

Vậy

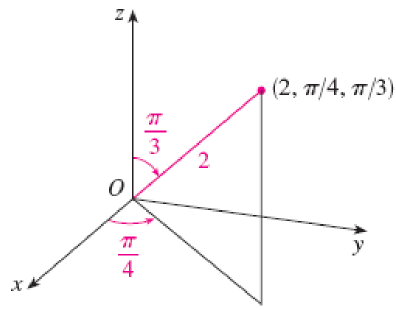
$$\boxed{x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=\rho\cos\phi,\ \rho^2=x^2+y^2+z^2}$$

Example 1:

a. The point $\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ is given in spherical coordinates. Plot the point and find its rectangular coordinates

b. The point $\left(0,2\sqrt{3},-2\right)$ is given in rectangular coordinates. Find spherical coordinates for this point.

Giải:



a. Ta có: $x=\rho\sin\phi\cos\theta=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$y=\rho\sin\phi\sin\theta=2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z=\rho\cos\phi=2\cos\frac{\pi}{3}=1$$

Vậy tọa độ vuông góc là $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$

b. Ta có: $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$

$$\cos\phi=\frac{z}{\rho}=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \phi=\frac{2\pi}{3}\qquad \cos\theta=\frac{x}{\rho\sin\phi}=0\ \rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

Vậy tọa độ cầu là $\left(4,\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$

♦ TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA VỚI TỌA ĐỘ CẦU (EVALUATING TRIPLE INTEGRALS WITH SPHERICAL COORDINATES):

Nếu khối E được biểu diễn trong tọa độ cầu: $E=\{(\rho,\theta,\phi)/\,a\le\rho\le b,\alpha\le\theta\le\beta,c\le\phi\le d\}$

Công thức tích phân bội ba trong tọa độ cầu:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\int_c^d\int_\alpha^\beta\int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

với $E=\{(\rho,\theta,\phi)/\,a\le\rho\le b,\alpha\le\theta\le\beta,c\le\phi\le d\}$

Example 2: Evaluate $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, where B is the unit ball $B=\{(x,y,z)/\,x^2+y^2+z^2\le1\}$

Giải: Biểu diễn B trong tọa độ cầu:

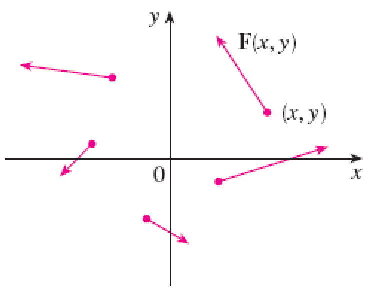
$B=\{(\rho,\theta,\phi)/\,0\le\rho\le1,0\le\theta\le2\pi,0\le\phi\le\pi\}$, và $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=\int_0^\pi\sin\phi\,d\phi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}}\rho^2\,d\rho=\frac{4}{3}\pi(e-1)$$

3.6 TRƯỜNG VECTOR (VECTOR FIELDS):

DEFINITION: Cho D là một tập trong $\mathbb{R}^2$. Trường vector trên $\mathbb{R}^2$ là một hàm $\mathbf{F}$ cho tương ứng mỗi điểm (x,y) trong D với một vectơ hai chiều $\mathbf{F}(x,y)$.

Cách tốt nhất để hình dung trường vector là vẽ mũi tên biểu diễn vector $\mathbf{F}(x,y)$ bắt đầu tại (x,y)



Vector field on $\mathbb{R}^2$

Vì $\mathbf{F}(x,y)$ là vectơ hai chiều nên ta có thể viết nó theo các hàm số thành phần P và Q như sau:

$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}=\langle P(x,y),Q(x,y)\rangle$

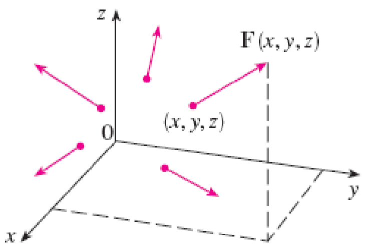
viết gọn $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$, với P, Q là các hàm vô hướng hai biến, hay gọi là các trường vô hướng (scalar fields).

DEFINITION: Cho E là một tập con của $\mathbb{R}^3$. Trường vector trong $\mathbb{R}^3$ là một hàm $\mathbf{F}$ cho tương ứng mỗi điểm (x,y,z) trong E với một vectơ ba chiều $\mathbf{F}(x,y,z)$

Vì $\mathbf{F}(x,y,z)$ là một vectơ ba chiều, ta có thể biểu diễn nó theo các hàm số thành phần P, Q, R:

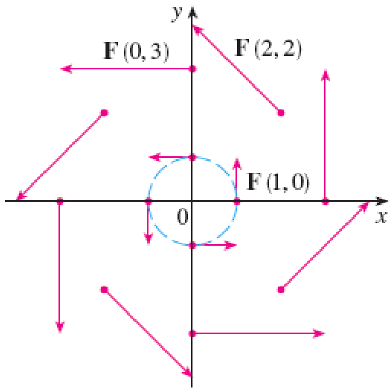
$\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$

Trường vector $\mathbf{F}$ liên tục nếu các hàm thành phần P, Q, R liên tục



Vector field on $\mathbb{R}^3$

Example 1: A vector field on $\mathbb{R}^2$ is defined by $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Describe $\mathbf{F}$ by sketching some of the vector $\mathbf{F}(x, y)$.



$\mathbf{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

Giải:

Ta có **F**(1,0) = **j**, ta vẽ vector **j** = <0,1> bắt đầu từ điểm (1,0)

F(0,1) = -**i**, ta vẽ vector <-1,0> bắt đầu từ điểm (0,1)

Tiếp tục theo cách này, ta có thể tính các giá trị khác của $\mathbf{F}(x, y)$ trong bảng giá trị sau rồi vẽ các vector tương ứng để mô tả trường vector

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

♦ TRƯỜNG GRADIENT (GRADIENT FIELDS)

Nếu f là hàm số 2 biến thì gradient ∇f của f được xác định: $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$

Ta có ∇f là một trường vector trên $\mathbb{R}^2$ và gọi là trường vector gradient (gradient vector fields)

Tương tự, nếu f là một hàm số ba biến thì gradient của nó là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ được cho bởi: $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$

Trường vector **F** gọi là trường vector bảo toàn (conservative vector field) nếu nó là gradient của hàm vô hướng nào đó, nghĩa là tồn tại một hàm f thỏa mãn $\mathbf{F} = \nabla f$

Example 2: Find the gradient vector field of $f(x, y) = x^2 y - y^3$.

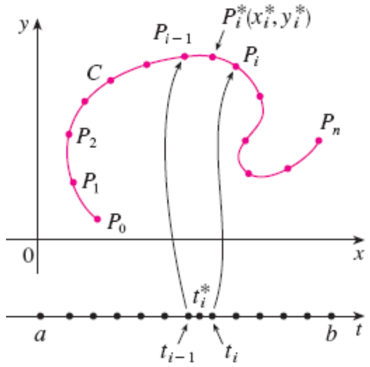
Giải: $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + \left(x^2 - 3y^2\right)\mathbf{j}$.

3.7 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG (LINE INTEGRALS)

Ta bắt đầu với đường cong phẳng C được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), y = y(t),\ a \le t \le b$$

Hoặc viết tương đương với phương trình vectơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, và giả sử C là một đường cong trơn [nghĩa là $\mathbf{r}'(t)$ liên tục và $\mathbf{r}'(t) \neq 0$]



Chia khoảng tham số [a,b] thành n khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$ bằng nhau và đặt $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, khi đó các điểm tương ứng $P_i(x_i, y_i)$ sẽ chia C thành n cung con với chiều dài là $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$.

Chọn điểm tùy ý $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ trong cung con thứ i (tương ứng $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$). Nếu f là hàm số hai biến có miền xác định chứa cung C thì ta sẽ tính được $f(x_i^*, y_i^*)$, rồi nhân với chiều dài Δs_i

của cung con. Khi đó ta xác định được tổng $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta s_i$

DEFINITION: Nếu f xác định trên đường cong trơn C có phương trình

$$x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$$

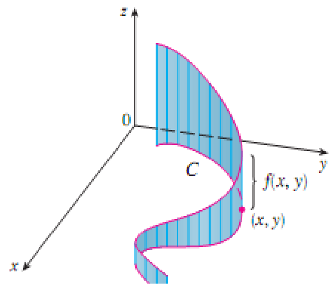
khi đó tích phân đường của f dọc theo C (line integral of f along C) là

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta s_i$$, nếu giới hạn này tồn tại.

Ta đã biết độ dài của C là $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

Nếu f là hàm liên tục thì giới hạn trong định nghĩa luôn tồn tại, ta tính tích phân đường theo công thức

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$



Nếu C là đoạn thẳng nối hai điểm $(a,0)$ và $(b,0)$, phương trình tham số của C là: $x = x,\ y = 0,\ a \le x \le b$ thì $\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,0)\,dx$

Nếu $f(x,y) \ge 0$, $\int_C f(x,y)\,ds$ được hiểu là diện tích của một mặt màn có cạnh là C và chiều cao tại điểm (x,y) là $f(x,y)$.

Example 1: Evaluate $\int_C \left(2 + x^2 y\right) ds$, where C is the upper half of the unit circle $x^2 + y^2 = 1$

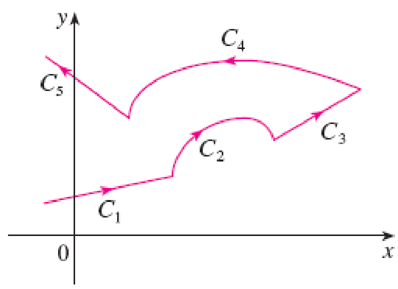
Giải: Phương trình tham số của nửa trên đường tròn đơn vị: $x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t \le \pi$

Do đó $\int_C \left(2 + x^2 y\right) ds = \int_0^\pi \left(2 + \cos^2 t \sin t\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt =$

$$= \int_0^\pi \left(2 + \cos^2 t \sin t\right)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = 2\pi + \frac{2}{3}$$

• Nếu C là đường cong trơn từng khúc (piecewise-smooth curve), tức là C là hợp của một số hữu hạn đường cong trơn $C_1, C_2, \dots, C_n$, với điểm đầu của C_{i+1} là điểm cuối của C_i. Khi đó ta định nghĩa:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{C_1} f(x,y)\,ds + \int_{C_2} f(x,y)\,ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y)\,ds$$



A piecewise-smooth curve

Example 2: Evaluate $\int_C 2x\,ds$, where C consists the arc C_1 of the parabola $y = x^2$ from $(0,0)$ to $(1,1)$ followed by the vertical line segment C_2 from $(1,1)$ to $(1,2)$

Giải: Cung C_1 có phương trình tham số $x = x,\ y = x^2,\ 0 \le x \le 1$

Khi đó $\displaystyle\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$

Cung C_2 có phương trình tham số $x = 1,\ y = y,\ 1 \le y \le 2$

Khi đó $\displaystyle\int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy = 2$

Vậy: $\displaystyle\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2 = \frac{5\sqrt{5}+11}{6}.$

Nếu trong định nghĩa tích phân đường ta thay Δs_i bởi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ hoặc $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, ta có hai tích phân đường khác, gọi là tích phân đường của *f* dọc theo cung *C* đối với *x* hoặc *y*.

$$\int_C f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \quad \text{hoặc} \quad \int_C f(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i$$

Nếu $x = x(t),\ y = y(t),\ dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt$, tích phân đường đối với *x* hoặc *y* được tính:

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt; \qquad \int_C f(x,y)\,dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt}$$

Tích phân đường đối với *x* và *y* thường xảy ra cùng nhau, ta sẽ viết gọn

$$\int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

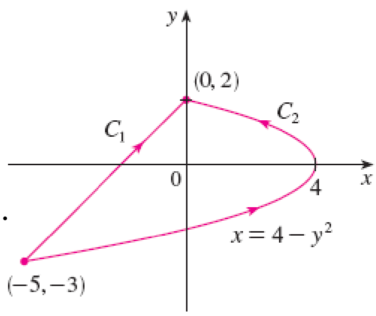
Lưu ý: biểu diễn tham số của một đoạn thẳng có điểm đầu $\mathbf{r}_0$, điểm cuối $\mathbf{r}_1$ là

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1,\ 0 \le t \le 1$$

Example 3: Evaluate $\displaystyle\int_C y^2dx + xdy$, where

(a) $C = C_1$ is the line segment from $(-5,-3)$ to $(0,2)$

(b) $C = C_2$ is the arc of parabola $x = 4 - y^2$ from $(-5,-3)$ to $(0,2)$.



Giải:

(a) Phương trình tham số của đoạn thẳng C_1:

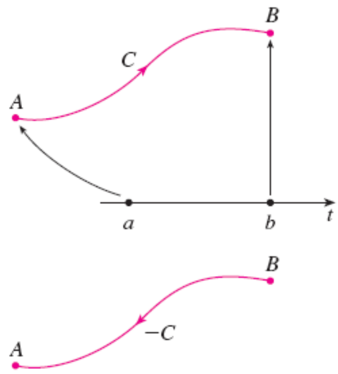
$$x = 5t - 5,\ y = 5t - 3,\ 0 \le t \le 1$$

Khi đó $dx = 5dt,\ dy = 5dt$ và $\displaystyle\int_C y^2dx + xdy = \int_0^1 (5t-3)^2(5dt) + (5t-5)(5dt) = -\frac{5}{6}$

(b) Chọn *y* làm tham số, cung C_2 được biểu diễn: $x = 4 - y^2,\ y = y, -3 \le y \le 2$

Khi đó $dx = -2ydy$ và $\displaystyle\int_C y^2dx + xdy = \int_{-3}^2 y^2(-2y)\,dy + (4-y^2)\,dy = 40\frac{5}{6}.$

♦ **Lưu ý:** Biểu diễn tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b$ xác định một sự định hướng của cung C, hướng dương tương ứng với hướng tăng giá trị của tham số t.



Gọi $-C$ là cung gồm tất cả các điểm của C, nhưng có hướng ngược lại. Khi đó

$$\int_{-C} f(x,y)\,dx = -\int_C f(x,y)\,dx \qquad \int_{-C} f(x,y)\,dy = -\int_C f(x,y)\,dy$$

Nhưng nếu lấy tích phân đường đối với độ dài cung thì giá trị tích phân vẫn không thay đổi:

$$\int_{-C} f(x,y)\,ds = \int_C f(x,y)\,ds$$

vì $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ luôn dương khi hướng của cung thay đổi.

♦ TÍCH PHÂN ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN (LINE INTEGRALS IN SPACE)

Giả sử C là đường cong trơn trong không gian được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t); \quad a \le t \le b$$

hoặc bởi phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Nếu f là hàm ba biến liên tục trên miền nào đó chứa C, ta định nghĩa tích phân đường của f dọc theo C là $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i$

Ta sử dụng công thức sau để tính tích phân:

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Đặc biệt, nếu $f(x,y,z) = 1$, ta có

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_C ds = L,$$ với L là chiều dài của cung C.

Tích phân đường dọc theo C đối với x, y, z cũng được định nghĩa tương tự, chẳng hạn đối với z:

$$\int_C f(x,y,z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt$$

Example 4: Evaluate $\displaystyle\int_C y\sin z\,ds$, where C is the circular helix given by the equations

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi .$$

Giải: $\displaystyle\int_C y\sin z\,ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \sqrt{2}\pi$$

Example 5: Evaluate $\int_C ydx + zdy + xdz$, where C consists of the line segment C_1 from $(2,0,0)$ to $(3,4,5)$, followed by the vertical line segment C_2 from $(3,4,5)$ to $(3,4,0)$

Giải: Phương trình tham số của đường C_1 : $x = 2 + t,\ y = 4t,\ z = 5t,\ 0 \le t \le 1$

$$\rightarrow \int_{C_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 (4t)dt + (5t)4dt + (2+t)5dt = \int_0^1 (10 + 29t)dt = 24.5$$

Phương trình tham số của đường C_2 : $x = 3,\ y = 4,\ z = 5 - 5t,\ 0 \le t \le 1$

Ta có: $dx = 0 = dy \rightarrow \int_{C_2} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 3(-5)dt = -15$ Vậy: $\int_C ydx + zdy + xdz = 9.5$

3.8 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA TRƯỜNG VECTOR (LINE INTEGRALS OF VECTOR FIELDS):

DEFINITION: Cho $\mathbf{F}$ là trường vectơ liên tục xác định trên đường cong trơn C được cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$. Khi đó, tích phân đường của $\mathbf{F}$ dọc theo C là

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\,\mathbf{r}'(t)dt$$

Lưu ý:

* $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ là cách viết gọn của $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$ nên để tính $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ ta thay $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ vào biểu thức $\mathbf{F}(x, y, z)$ và ta cũng sử dụng cách viết $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$

* $\int_{-C} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$

Example 6: Evaluate $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$, where $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ and C is the twisted cubic given by: $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \le t \le 1$

Giải: Ta có: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ $\quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

Vậy: $$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)dt = \frac{27}{28}$$

♦ Liên hệ giữa tích phân đường của trường vector và trường vô hướng (The connection between line integrals of vector fields and line integrals of scalar fields):

Giả sử trường vector $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^3$ được cho bởi: $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, ta có:

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}).(x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k})dt$$

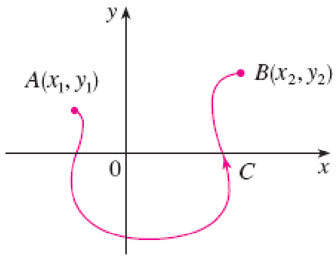
$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right]dt$$

Vậy $$\boxed{\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz, \quad \mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}}$$

3.9 ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG (THE FUNDAMENTAL THEOREM FOR LINE INTEGRALS)

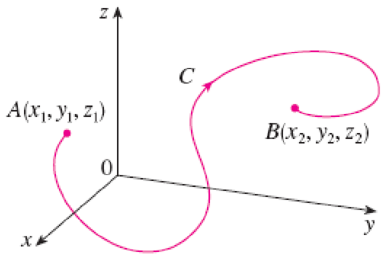
THEOREM:
Giả sử C là đường cong trơn được cho bởi hàm vecto $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, f là hàm khả vi hai hay ba biến có vector gradient ∇f liên tục trên C. Khi đó: $\int_C \nabla f . d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$

Lưu ý:



- Nếu f là hàm hai biến và C là đường cong phẳng với điểm đầu $A(x_1,y_1)$ và điểm cuối $B(x_2,y_2)$ thì

$$\int_C \nabla f . d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$



- Nếu f là hàm ba biến và C là đường cong trong không gian nối điểm $A(x_1,y_1,z_1)$ và điểm $B(x_2,y_2,z_2)$ thì

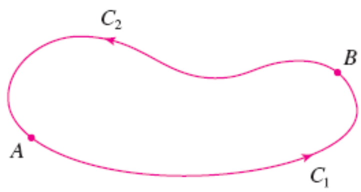
$$\int_C \nabla f . d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

♦ SỰ ĐỘC LẬP ĐƯỜNG ĐI (INDEPENDENCE OF PATH)

Giả sử C_1 và C_2 là hai đường cong trơn từng khúc (gọi là các đường đi) có cùng điểm đầu A và điểm cuối B. Ta đã biết: $\int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} \ne \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ nhưng với định lý trên ta có $\int_{C_1} \nabla f . d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f . d\mathbf{r}$, với ∇f liên tục. Nói cách khác tích phân đường của trường vector bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong

Tổng quát, nếu **F** là trường vectơ liên tục trên miền D, ta nói tích phân đường $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ là độc lập đường đi (independence of path) nếu $\int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ với bất kì hai đường C_1 và C_2 (trong D) có cùng điểm đầu và điểm cuối. Tích phân đường của trường vector bảo toàn là độc lập đường đi

Một đường cong đóng (closed) nếu điểm đầu trùng với điểm cuối



Nếu $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ là độc lập đường đi trong D và C là đường đi đóng trong D, ta có thể chọn bất kỳ hai điểm A, B trên C và xem C được hợp thành từ hai đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A, ta có:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

THEOREM: $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ là độc lập đường đi trong D nếu và chỉ nếu $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$ với mọi đường C đóng trong D

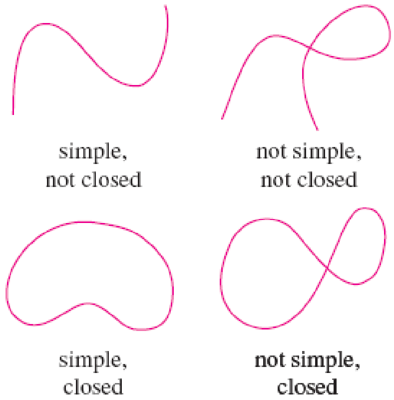
♦ Nếu miền D là *mở (open)* [mỗi điểm P trong D đều tồn tại một đĩa tâm P nằm hoàn toàn trong D] và giả sử D là *liên thông (connected)*, nghĩa là bất kì hai điểm nào trong D cũng được nối với nhau bởi một đường nằm trong D.

THEOREM: Giả sử **F** là một trường vectơ liên tục trên miền mở, liên thông D. Nếu $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ là độc lập đường đi trong D thì **F** là trường vectơ bảo toàn trên D, nghĩa là tồn tại hàm số f thỏa $\nabla f = \mathbf{F}$

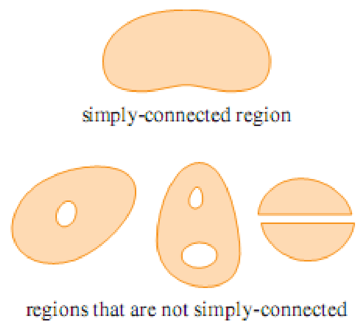
THEOREM: Nếu $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ là trường vectơ bảo toàn, với P, Q có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên miền D thì trên D ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Đường cong đơn (simple curves) là đường cong không tự nó cắt nhau ở bất kì nơi nào giữa các điểm biên của nó.

Miền đơn liên (simply-connected region) trong mặt phẳng là một miền liên thông D sao cho mỗi đường cong đóng đơn trong D chỉ bao gồm các điểm trong D [trực giác: miền không có lỗ và không tách rời]



Types of curves



THEOREM: Cho $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ là trường vector trên miền mở, đơn liên D. Giả sử P và Q có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục và $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên D thì **F** là bảo toàn.

Example 1: Determine whether or not the vector field

$$\mathbf{F}(x,y) = (x-y)\mathbf{i} + (x-2)\mathbf{j} \text{ is conservative}$$

Giải: Đặt $P(x,y) = x - y,\ Q(x,y) = x - 2$, ta có:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \ \rightarrow F \text{ không bảo toàn}$$

Example 2:

a. If $\mathbf{F}(x,y) = (3+2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$, find a function f such that $\mathbf{F} = \nabla f$

b. Evaluate the line integral $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$, where C is the curve given by

$$\mathbf{r}(t) = e^t \sin(t)\mathbf{i} + e^t \cos(t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi$$

Giải:

a. Tìm hàm f thỏa: $\mathbf{F} = \nabla f$

Ta có $f_x(x,y) = 3 + 2xy \ \rightarrow f(x,y) = 3x + x^2 y + g(y) \ \rightarrow f_y(x,y) = x^2 + g'(y)$

(hằng số của tích phân là hằng số tương ứng với x, là hàm theo y)

Theo đề ta có $f_y(x,y) = x^2 - 3y^2$ nên $g'(y) = 3y^2 \ \rightarrow \ g(y) = -y^3 + K, \quad K \in \mathbb{R}$

Vậy $f(x,y) = 3x + x^2 y - y^3 + K$

b. Ta có: $\mathbf{r}(0)=(0,1),\ \ \mathbf{r}(\pi)=(0,-e^{\pi})$

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_C \nabla f.d\mathbf{r}=f(0,-e^{\pi})-f(0,1)=e^{3\pi}+1$$

Example 3: If $\mathbf{F}(x,y,z)=y^2\mathbf{i}+(2xy+e^{3z})\mathbf{j}+3ye^{3z}\mathbf{k}$, find a function f such that $\nabla f=\mathbf{F}$

Giải: Ta có: $f_x(x,y,z)=y^2 \rightarrow f(x,y,z)=xy^2+g(y,z) \rightarrow f_y(x,y,z)=2xy+g_y(y,z)$

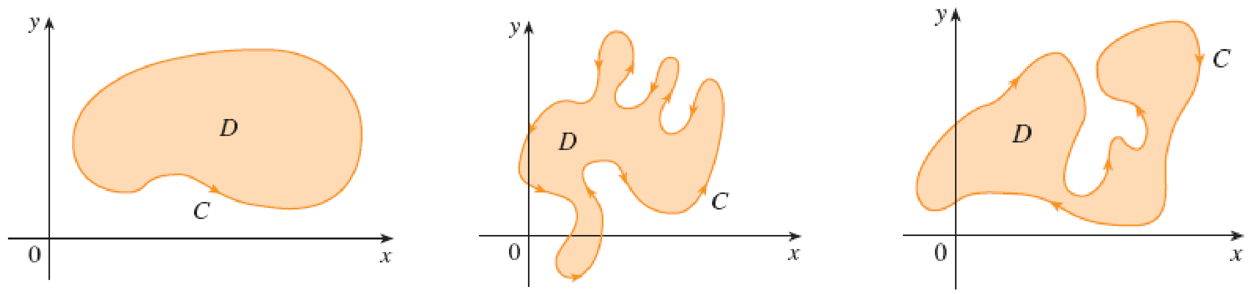
Theo giả thuyết: $f_y(x,y,z)=2xy+e^{3z}$ nên $g_y(y,z)=e^{3z} \rightarrow g(y,z)=ye^{3z}+h(z)$

Vậy $f(x,y,z)=xy^2+ye^{3z}+h(z) \rightarrow f_z(x,y,z)=3ye^{3z}+h'(z)$. So sánh với giả thuyết $f_z(x,y,z)=3ye^{3z}$, ta có $h'(z)=0 \rightarrow h(z)=K$. Hàm f cần tìm:

$$f(x,y,z)=xy^2+ye^{3z}+K,\ K\in\mathbb{R}$$

3.10 ĐỊNH LÝ GREEN (GREEN'S THEOREM):

Định lí Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường trên đường cong đóng, đơn C và tích phân kép trên miền phẳng D được giới hạn bởi C. Quy ước hướng dương (positive orientation) của đường cong đơn, đóng C là hướng sao cho một người đi dọc C theo hướng ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi C gần mình nhất ở về bên trái



Positive orientation

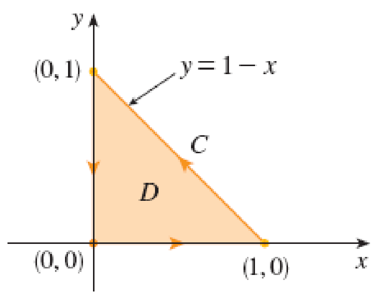
Negative orientation

GREEN'S THEOREM: Cho C là đường cong đơn, đóng, trơn từng khúc có hướng dương và D là miền được giới hạn bởi C. Nếu P và Q có đạo hàm riêng liên tục trên miền mở chứa D thì:
$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

♦ **Lưu ý:** ta cũng dùng các ký hiệu sau cho tích phân theo đường cong đóng định hướng dương:

$$\oint_C Pdx+Qdy \quad \text{hay} \quad \int_{\partial D} Pdx+Qdy \qquad (\partial D\text{: biên của miền D})$$

Example 1: Evaluate $\int_C x^4dx+xydy$, where C is the triangular curve consisting of the line segments from $(0,0)$ to $(1,0)$, from $(1,0)$ to $(0,1)$ and from $(0,1)$ to $(0,0)$



Giải: Miền D được giới hạn bởi C đơn và có hướng dương

Đặt $P(x,y)=x^4,\ \ Q(x,y)$. Ta có:

$$\int_C x^4dx+xydy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int_0^1\int_0^{1-x}(y-0)\,dydx=\frac{1}{6}$$

Example 2: Evaluate $\oint_C \left(3y - e^{\sin x}\right)dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy$, where C is the circle $x^2 + y^2 = 9$

Giải: Miền D được giới hạn bởi C là đĩa $x^2 + y^2 \le 9$, sử dụng định lý Green:

$$\oint_C \left(3y - e^{\sin x}\right)dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x + \sqrt{y^4+1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3y - e^{\sin x}\right)\right]dA$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (7-3)\,r\,dr\,d\theta = 36\pi$$

Lưu ý: Ta đã biết diện tích của miền D là $\iint_D dA$. Nếu ta chọn các hàm P và Q sao cho

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, chẳng hạn, các khả năng sau:

$$P(x,y) = 0,\ Q(x,y) = x \ \text{ hay } \ P(x,y) = -y,\ \ Q(x,y) = 0 \ \text{ hay } \ P(x,y) = -\frac{1}{2}y,\ \ Q(x,y) = \frac{1}{2}x$$

Thì từ định lý Green ta có công thức tính diện tích miền D:

$$\boxed{A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx}$$

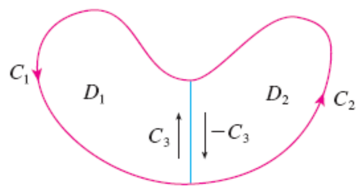
Example 3: Find the area enclosed by the Elippse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Giải: Phương trình tham số của Elippse $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

Diện tích của Elippse là:

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t)(b\cos t)dt - (b\sin t)(-a\sin t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt = \pi ab$$

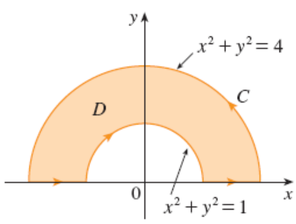
♦ **Nếu miền D là hợp hữu hạn của các miền đơn** (miền loại 1 hoặc loại 2 trong mặt phẳng): ví dụ xét $D = D_1 \cup D_2$: biên của D_1 là $C_1 \cup C_3$ và biên của D_2 là $C_2 \cup (-C_3)$, theo định lý Green:



$$\int_{C_1 \cup C_3} Pdx + Qdy = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \qquad \text{Vậy: } \int_{C_1 \cup C_2} Pdx + Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

Example 4: Evaluate $\oint_C y^2dx + 3xydy$, where C is the boundary of the semiannular region D in the upper half-plane between the circles $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$.



Giải: Trong tọa độ cực, miền D được biểu diễn:

$$D = \{(r,\theta) / 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

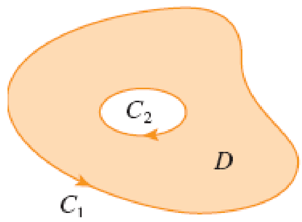
Sử dụng định lý Green:

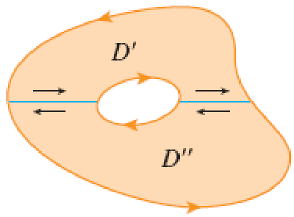
$$\oint_C y^2dx + 3xydy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right]dA = \iint_D ydA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_1^2 r^2dr = \frac{14}{3}$$

♦ Định lý Green có thể mở rộng đối với miền có lỗ:

Biên C của miền D bao gồm 2 đường cong đơn, đóng C_1 và C_2. Hướng dương ngược chiều kim đồng hồ với đường cong ngoài C_1, cùng chiều kim đồng hồ với đường cong trong C_2. Nếu ta chia D thành hai miền D' và D'' như hình vẽ, ta có





$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

$$= \int_{\partial D'} Pdx + Qdy + \int_{\partial D''} Pdx + Qdy$$

$$\rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_C Pdx + Qdy$$

3.11 MẶT THAM SỐ VÀ DIỆN TÍCH CỦA CHÚNG (PARAMETRIC SURFACES AND THEIR AREAS)

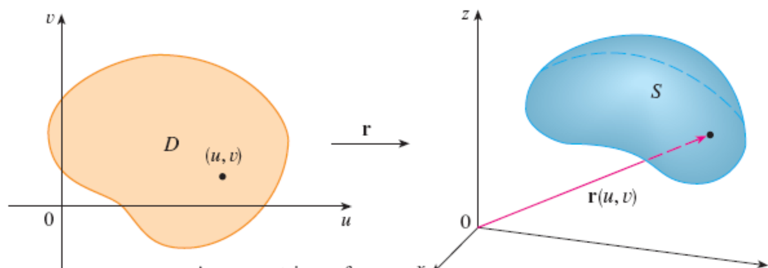
♦ MẶT THAM SỐ (PARAMETRIC SURFACES)

Ta mô tả mặt bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(u,v)$ với u, v là hai tham số. Giả sử:

$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$ là một hàm vectơ được xác định trên miền D trong mặt phẳng uv. Tập tất cả các điểm $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sao cho:

$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)\ (*)$

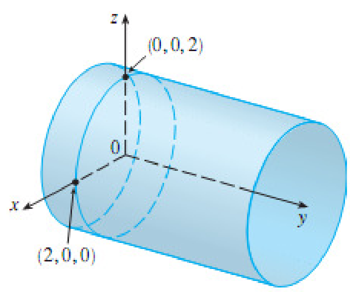
với $(u,v) \in D$ gọi là **mặt tham số S** (parametric surface S). Phương trình (*) là **phương trình tham số của S** (parametric equations of S)



A parametric surface

Example 1: Identify and sketch the surface with vector equation

$$\mathbf{r}(u,v) = 2(\cos u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2(\sin u)\mathbf{k}$$



Giải: Phương trình tham số của mặt: $x = 2\cos u,\ y = v,\ z = 2\sin u$

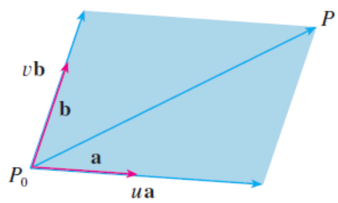
Ta có: $x^2 + z^2 = 4$: đây là mặt trụ tròn có trục Oy.

Example 2: Find a vector function that represents the plane that passes through the point P_0 with position vector $\mathbf{r}_0$ and that contains two nonparallel vectors **a** and **b**

Giải: Lấy P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng, ta có: $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$

Nếu $\mathbf{r}$ là vector vị trí của điểm P : $\mathbf{r} = \overrightarrow{0P_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b},\ u,v \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình vector của mặt phẳng: $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b},\ u,v \in \mathbb{R}$



Nếu $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$, $\mathbf{r}_0=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$, $\mathbf{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $\mathbf{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ thì phương trình tham số của mặt phẳng có thể viết như sau:

$$x=x_0+ua_1+vb_1,\quad y=y_0+ua_2+vb_2,\quad z=z_0+ua_3+vb_3$$

Example 3: Find a parametric representation of the sphere: $x^2+y^2+z^2=a^2$

Giải: Trong tọa độ cầu, phương trình của mặt cầu: ρ = a, chọn các góc θ và ϕ như là các tham số. Đặt $\rho = a$, ta có phương trình tham số của mặt cầu:

$$x=a\sin\phi\cos\theta,\ y=a\sin\phi\sin\theta,\ z=a\cos\phi$$

Phương trình vector tương ứng:

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=a\sin\phi\cos\theta\mathbf{i}+a\sin\phi\sin\theta\mathbf{j}+a\cos\phi\mathbf{k},\quad 0\le\phi\le\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

Example 4: Find a parametric representation for the cylinder $x^2+y^2=4,\ 0\le z\le 1$

Giải: Trong tọa độ trụ, phương trình mặt trụ: $r = 2$. Chọn các tham số là θ và z trong tọa độ trụ, phương trình tham số của mặt trụ: $x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta,\ z=z$ với $0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 1$

Example 5: Find a vector function that represents the elliptic paraboloid $z=x^2+2y^2$

Giải: Ta xem *x, y* như là các tham số thì phương trình tham số: $x=x,\ y=y,\ z=x^2+2y^2$

Phương trình vector: $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\left(x^2+2y^2\right)\mathbf{k}$

Example 6: Find a parametric representation for the surface $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, that is the top half of the cone $z^2=4x^2+4y^2$

Giải cách 1: chọn *x, y* như là các tham số thì phương trình tham số:

$$x=x,\ y=y,\ z=2\sqrt{x^2+y^2}$$

Phương trình vector: $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+2\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}$

Giải cách 2: chọn tham số r, θ trong tọa độ cực. Một điểm *(x,y,z)* trên hình nón thỏa:

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=2\sqrt{x^2+y^2}=2r$$

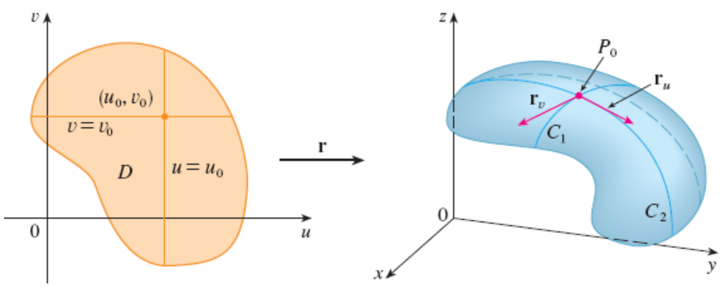
Phương trình vector: $\mathbf{r}(r,\theta)=r\cos\theta\mathbf{i}+r\sin\theta\mathbf{j}+2r\mathbf{k},\quad r\ge 0,\quad 0\le\theta\le 2\pi$

♦ MẶT PHẲNG TIẾP XÚC (TANGENT PLANES):

Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt tham số *S* được cho bởi hàm vectơ:

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k}$$

tại điểm P_0 có vectơ vị trí $\mathbf{r}(u_0,v_0)$



Nếu cố định $u = u_0$ thì $r(u_0,v)$ là hàm vectơ theo một tham số *v*, xác định một đường cong lưới (grid curve) C_1 nằm trên *S* và vectơ tiếp tuyến với C_1 tại P_0 là

$$\mathbf{r}_v=\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\mathbf{k}$$

Tương tự, cố định $v=v_0$ ta sẽ thu được đường cong C_2 và vector tiếp tuyến với C_2 tại P_0 là

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\mathbf{k}$$

Nếu tích có hướng $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ khác không thì mặt S gọi là trơn (smooth). Với mặt trơn, mặt phẳng tiếp xúc là mặt phẳng chứa các vector tiếp tuyến $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ và vector $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc

Example 7: Find the tangent plane to the surface with parametric equation

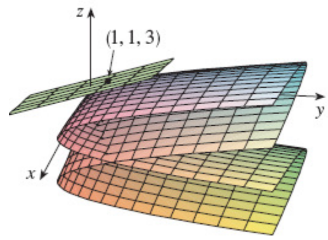
$x = u^2,\ y = v^2,\ z = u + 2v$ at the point $(1,1,3)$

Giải: Tìm các vector tiếp tuyến

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = 2v\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\mathbf{i} - 4u\mathbf{j} + 4uv\mathbf{k}$$



Điểm $(1,1,3)$ ứng với các tham số $u = 1,\ v = 1$, nên vector pháp tuyến: $-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại $(1,1,3)$:

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0 \ \leftrightarrow\ x + 2y - 2z + 3 = 0$$

♦ DIỆN TÍCH MẶT (SURFACE AREA):

DEFINITION: Nếu mặt tham số trơn S có phương trình

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in D$$

và S được bao phủ chỉ một lần khi (u,v) chạy khắp miền tham số D, thì diện tích mặt S là

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA \text{, trong đó } \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k},\ \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Example 8: Find the surface area of a sphere of radius a.

Giải: Phương trình tham số của mặt cầu: $x = a\sin\phi\cos\theta,\ y = a\sin\phi\sin\theta,\ z = a\cos\phi$

Miền xác định tham số: $D = \{(\phi,\theta)/\ 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Ta có:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial x/\partial\phi & \partial y/\partial\phi & \partial z/\partial\phi \\ \partial x/\partial\theta & \partial y/\partial\theta & \partial z/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\mathbf{k}$$

Vậy: $|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = a^2\sin\phi$

Diện tích mặt cầu: $A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta = a^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi = 4\pi a^2$

♦ **TRƯỜNG HỢP RIÊNG:**

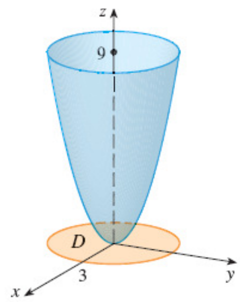
♦ **Nếu mặt S được cho bởi phương trình** $z = f(x,y),\ (x,y)\in D$, và f có các đạo hàm riêng liên tục. Ta coi x, y như các tham số, phương trình tham số của f: $x = x,\ y = y,\ z = f(x,y)$.

Vậy $\quad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k},\ \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k} \ \rightarrow\ \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\left|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Công thức tính diện tích trở thành $\boxed{A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA}$

Example 9: Find the area of the part of the paraboloid $z = x^2 + y^2$ that lies under the plane $z = 9$



Giải: Mặt phẳng cắt paraboloid theo đường tròn $z = x^2 + y^2,\ z = 9$

Mặt đã cho nằm trên đĩa D có tâm là gốc, bán kính 3. Ta có:

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\, dA$$

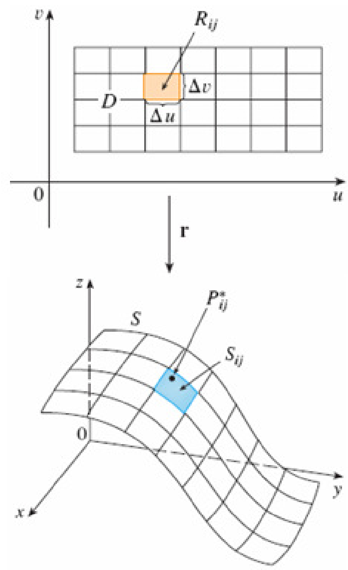
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

3.12 TÍCH PHÂN MẶT (SURFACE INTEGRALS)

♦ MẶT THAM SỐ (PARAMETRIC SURFACES)

Giả sử mặt S có phương trình vector:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v)\in D$$



Trước tiên, ta giả sử miền D là hình chữ nhật và ta chia nó thành các hình chữ nhật con R_{ij} với các cạnh là $\Delta u,\ \Delta v$. Khi đó mặt S được chia tương ứng thành các mảnh S_{ij}. Lấy $P_{ij}^* \in S_{ij}$, tính $f\left(P_{ij}^*\right)\Delta S_{ij}$, với ΔS_{ij} là diện tính mỗi mảnh.

Lập tổng dạng Riemann $\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\Delta S_{ij}$

Ta định nghĩa **tích phân mặt của f trên mặt S** (surface integral of f over the surface S) là:

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\Delta S_{ij}}$$

Để tính tích phân mặt, ta xấp xỉ diện tích mỗi mảnh ΔS_{ij} với xấp xỉ của diện tích hình bình hành trong mặt phẳng tiếp xúc, ta có

$$\Delta S_{ij} \approx \left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right|\Delta u\Delta v \quad \text{với} \quad \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k},\ \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Khi đó $$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right| dA}$$

Lưu ý:

- Nếu $\mathbf{r}$ liên tục và $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ khác không và không song song trong *D*, công thức trên vẫn đúng nếu *D* không phải là hình chữ nhật
- Trường hợp $f(x,y,z)=1$ ta có $\iint_S 1dS = \iint_D \left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right| dA = A(S)$ là diện tích mặt S.

Example 1: Compute the surface integral $\iint_S x^2 dS$, where *S* is the unit sphere $x^2+y^2+z^2=1$.

Giải: Phương trình tham số của mặt cầu đơn vị:

$$x=\sin\phi\cos\theta,\ y=\sin\phi\sin\theta,\ z=\cos\phi,\ \ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=\sin\phi\cos\theta\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\mathbf{j}+\cos\phi\mathbf{k} \ \rightarrow\ \left|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta\right|=\sin\phi\,.$$

Vậy $$\iint_S x^2 dS = \iint_D (\sin\phi\cos\theta)^2\left|r_\phi\times r_\theta\right| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\phi\cos^2\theta\sin\phi\, d\phi\, d\theta\,.$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\left(1-\cos^2\phi\right)d\phi=\frac{4\pi}{3}$$

♦ TRƯỜNG HỢP RIÊNG:

Giả sử mặt *S* có phương trình $z=g(x,y)$, phương trình tham số của *S*:

$$x=x,\ y=y,\ z=g(x,y)$$

Ta có $$\mathbf{r}_x=\mathbf{i}+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}_y=\mathbf{j}+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}\ \rightarrow\ \left|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}$$

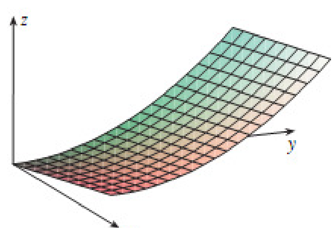
Khi đó $$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\,dA}$$

Tương tự, nếu mặt *S* có phương trình $x=k(y,z)$ hay $y=h(x,z)$, chẳng hạn $y=h(x,z)$ và *D* là hình chiếu của *S* lên mặt phẳng *xz* thì

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,h(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+1}\,dA$$

Example 2: Evaluate $\iint_S y dS$, where *S* is the surface $z=x+y^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

Giải: Ta có $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y$ nên



$$\iint_S y dS=\iint_D y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA=\int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1+1+4y^2}\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 dx\sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}\,dy=\frac{13\sqrt{2}}{3}$$

♦ **Lưu ý:** Nếu mặt S là hợp hữu hạn của các mặt trơn $S_1,...,S_n$ chỉ có giao nhau dọc theo biên của chúng thì:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \ldots + \iint_{S_n} f(x,y,z)\,dS$$

♦ **CURL**

Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và các đạo hàm riêng của *P, Q, R* tồn tại, thì curl của **F** là trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$\boxed{\text{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}}$$

Ta gọi vectơ toán tử vi phân ∇ ("del") như sau: $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$

Nếu f là hàm vô hướng thì del của f là gradient của f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Nếu ta xem ∇ như một vectơ với các thành phần $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ thì tích có hướng

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \text{curl}\mathbf{F}$$

Vậy $\boxed{\text{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}}$

Example 3: If $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, find curl**F**

Giải: Ta có:

$$\text{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k}$$

$$= -y(2+x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

> **THEOREM:** Nếu f là hàm ba biến có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục thì
> $$\text{curl}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

Hệ quả: Nếu **F** là trường vector bảo toàn thì curl**F** = **0**

Example 4: Show that the vector field $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ is not conservative

Giải: Vì $\text{curl}\mathbf{F} = -y(2+x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \rightarrow \text{curl}\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ nên **F** không bảo toàn

THEOREM: Nếu **F** là trường vectơ được xác định trên toàn bộ $\mathbb{R}^3$ với các hàm thành phần có đạo hàm riêng liên tục và $\text{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ thì **F** là trường vector bảo toàn.

E

Example 5:

a. Show that $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$ is a conservative vector field

b. Find a function f such that $\mathbf{F} = \nabla f$

Giải: a. Ta có domain của **F** là $\mathbb{R}^3$ và :

$$\text{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(6xyz^2 - 6xyz^2\right)\mathbf{i} - \left(3y^2z^2 - 3y^2z^2\right)\mathbf{j} + \left(2yz^3 - 2yz^3\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

b. Ta có:

$f_x(x,y,z) = y^2z^3 \to f(x,y,z) = xy^2z^3 + g(y,z) \to f_y(x,y,z) = 2xyz^3 + g_y(y,z)$

Theo đề toán $F_y(x,y,z) = 2xyz^3 \to g_y(y,z) = 0 \to g_y(y,z) = h(z)$

Vì $F_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$. Từ đề toán: $F_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 \to h'(z) = 0$

Vậy: $f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$

♦ DIVERGENCE:

Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và $\partial P/\partial x, \partial Q/\partial y, \partial R/\partial z$ tồn tại, khi đó divergence của **F** là hàm ba biến được xác định

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{hay} \quad \text{div}\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F}$$

Example 6: If $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$. Find div**F**

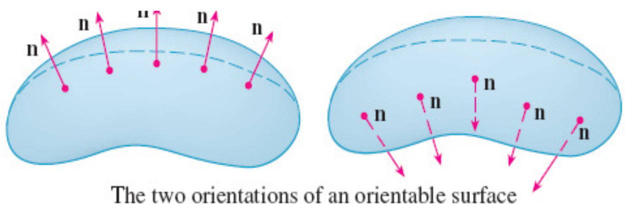
Giải: Ta có $\text{div}\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xz) + \dfrac{\partial}{\partial y}(xyz) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-y^2\right) = z + xz$

THEOREM: Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và *P, Q, R* có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục thì $\text{div curl } \mathbf{F} = 0$

♦ MẶT ĐỊNH HƯỚNG (ORIENTED SURFACES)

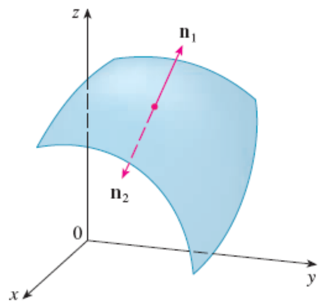
Xét mặt S có mặt phẳng tiếp xúc tại mỗi điểm $(x,y,z)\in S$ (trừ điểm trên biên). Có hai vectơ pháp tuyến đơn vị là $\mathbf{n}_1$ và $\mathbf{n}_2=-\mathbf{n}_1$ tại điểm *(x,y,z)*.

Nếu có thể chọn vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ tại mỗi điểm $M(x,y,z)\in S$ và thay đổi liên tục khi M chạy trên S thì S gọi là **mặt định hướng** (oriented surface). Việc chọn $\mathbf{n}$ sẽ cho S một hướng. Có hai hướng cho bất kì một mặt định hướng



The two orientations of an orientable surface

* Với mặt S có phương trình $z=g(x,y)$, thì mặt S có vectơ pháp tuyến đơn vị:



$$\mathbf{n}=\frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i}-\dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

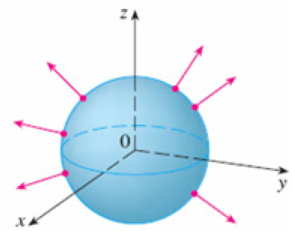
$\rightarrow$ cho hướng lên trên của mặt

* Nếu S là mặt định hướng trơn, cho dưới dạng tham số bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(u,v)$ thì vectơ pháp tuyến đơn vị là $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$, hướng đối diện là $-\mathbf{n}$

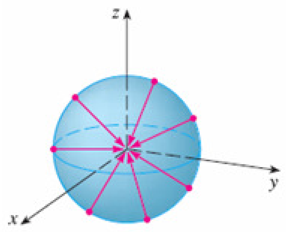
* Với mặt cầu, ta có vector pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài từ hình cầu

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta|}=\sin\phi\cos\theta\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\mathbf{j}+\cos\phi\mathbf{k}=\frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi,\theta)$$

Hướng đối diện (hướng vào trong hình cầu) có được nếu ta đảo ngược thứ tự của tham số: $\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\phi=-\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta$



Positive orientation



Negative orientation

* Đối với mặt đóng (closed surface), đó là mặt biên của miền khối E, quy ước hướng dương là hướng của vector pháp tuyến của mặt hướng ra ngoài từ E

3.13 TÍCH PHÂN MẶT CỦA TRƯỜNG VECTOR (SURFACE INTEGRALS OF VECTOR FIELDS)

DEFINITION: Nếu $\mathbf{F}$ là trường vector liên tục được định nghĩa trên một mặt định hướng S với vector pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ thì tích phân mặt của $\mathbf{F}$ trên $\mathbf{S}$ (surface integral of $\mathbf{F}$ over S) là: $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}dS$

Tích phân này cũng được gọi là thông lượng của $\mathbf{F}$ qua S (flux of $\mathbf{F}$ across S)

Nếu S được cho bởi hàm vector $\mathbf{r}(u,v)$, ta có:

$$\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{F}.\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}dS=\iint_D\left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)).\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\right]|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dA$$, với D là miền xác định của

tham số. Vậy: $\boxed{\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}.(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,dA}$

Example 7: Find the flux of the vector field $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ across the unit sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Giải: Biểu diễn tham số của mặt cầu:

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k},\ 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Ta có: $\mathbf{F}\left[\mathbf{r}(\phi,\theta)\right] = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + \sin\phi\cos\theta\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\mathbf{k}$$

$$\to \mathbf{F}\left[\mathbf{r}(\phi,\theta)\right].(\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

Vậy: $$\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}.(\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(2\cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta\right)d\phi d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin^2\phi\cos\phi d\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

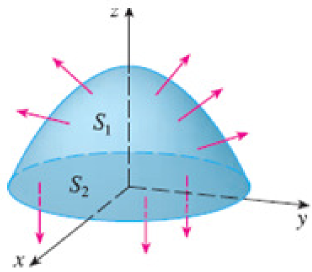
Nếu mặt S cho bởi phương trình $z = g(x,y)$, ta xem x, y là các tham số. Khi đó:

$$\mathbf{F}.(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k})\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Vậy: $$\boxed{\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA}$$

♦ **Lưu ý:** Công thức này đối với hướng lên trên của S. Với hướng xuống dưới ta nhân với -1

Các công thức tương tự có thể viết được đối với các mặt S được cho bởi $y = h(x,z)$ hay $x = k(y,z)$



Example 8: Evaluate $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$, where $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ and S is the boundary of the solid region E enclosed by the paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ and the plane $z = 0$

Giải: S bao gồm mặt trên là paraboloid S_1 và mặt đáy tròn S_2. S là mặt đóng, ta dùng quy ước hướng dương, với S_1 hướng lên trên. Gọi D là hình chiếu của S_1 lên mp(x,y) $\to D$ là đĩa $x^2 + y^2 \le 1$

Ta có: $P(x,y,z) = y,\ Q(x,y,z) = x,\ R(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2$ và $\frac{\partial g}{\partial x} = -2x,\ \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$. Vậy:

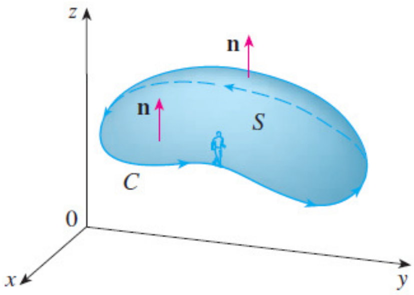
$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA = \iint_D \left(1 + 4xy - x^2 - y^2\right)dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 + 4r^2\cos\theta\sin\theta - r^2\right)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r - r^3 + 4r^3\cos\theta\sin\theta\right)drd\theta = \frac{\pi}{2}$$

Đĩa S_2 có hướng xuống dưới là hướng dương, vector pháp tuyến đơn vị là $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, ta có

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F}.(-\mathbf{k})\,dS = \iint_D (-z)\,dA = \iint_D 0dA = 0 \text{ vì } z = 0 \text{ trên } S_2$$

Vậy: $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}.d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2}$



3.14 ĐỊNH LÝ STOKE (STOKE'S THEOREM):

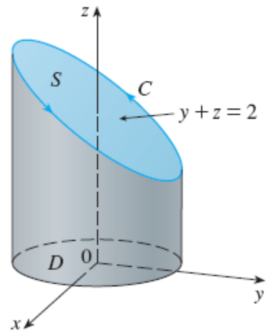
Định lý Stoke cho ta mối liên hệ giữa tích phân mặt trên mặt định hướng S và tích phân đường theo đường cong biên của S. Hình bên cho ta mặt định hướng S với vector pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$. Hướng của mặt S xác định hướng dương của đường cong biên C, đó là nếu ta đứng theo hướng của $\mathbf{n}$ và đi dọc theo hướng dương của C thì mặt S nằm bên trái

STOKE'S THEOREM:: Cho S là một mặt định hướng, trơn từng mảnh, được giới hạn bởi đường cong C đơn, đóng, trơn từng khúc, có hướng dương. Nếu $\mathbf{F}$ là trường vecto với các thành phần của nó có đạo hàm riêng liên tục trong một miền mở trong $\mathbb{R}^3$ chứa S thì

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\mathbf{F}.d\mathbf{S}$$

Example 9: Evaluate $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$, where $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ and C is the curve of intersection of the plane $y + z = 2$ and the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ (Orient C to be counterclockwise when viewed from above).

Giải: Tính



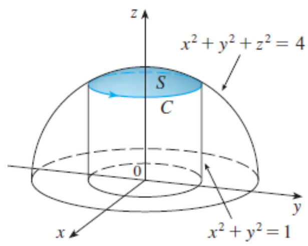
$$\text{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\mathbf{k}$$

Miền S là elippse nằm trong mặt phẳng $y + z = 2$ được giới hạn bởi C. Nếu hướng của S lên trên thì C có hướng dương. Chiếu S xuống mặt phẳng xy ta được miền D: $x^2 + y^2 \le 1$

Theo định lí Stoke ta có: $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iint_D (1+2y)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \pi$

Example 10: Use Stokes' Theorem to compute the integral $\iint_S \text{curl}\mathbf{F}.d\mathbf{S}$, where $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ and S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ that lies inside the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and above the *xy-plane*

Giải: Tìm biên C: giao của mặt cầu và mặt trụ:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow z^2 = 3 \to z = \sqrt{3}\ (z > 0)$$

Vậy C là đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 1,\ z = \sqrt{3}$. Phương trình vector của C:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 2\pi \quad \to \quad \mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Và: $\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = \sqrt{3}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin t\mathbf{j} + \cos t \sin t\mathbf{k}$. Sử dụng định lý Stoke:

$$\iint_S \text{curl}\mathbf{F}.d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t\sin t + \sqrt{3}\cos t\sin t\right)dt = 0$$

♦ **Lưu ý:** Nếu S_1, S_2 là 2 mặt định hướng có cùng biên định hướng C và cả hai thỏa mãn giả thiết của định lí Stoke thì $\iint_{S_1} \text{curl}\mathbf{F}.d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{curl}\mathbf{F}.d\mathbf{S}$

3.15 ĐỊNH LÝ VỀ DIVERGENCE (THE DIVERGENCE THEOREM)

Ta gọi miền khối đơn E (simple solid region) là miền đồng thời là loại 1, loại 2, loại 3. Ví dụ miền giới hạn bởi các ellipsoid hay hình hộp chữ nhật

DIVERGENCE THEOREM: Giả sử E là một miền khối đơn và mặt biên của E là mặt đóng S được cho với hướng dương (hướng ra ngoài). Nếu $\mathbf{F}$ là trường vectơ với các thành phần của nó có đạo hàm riêng liên tục trong một miền mở chứa E thì $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div}\mathbf{F}\,dV$

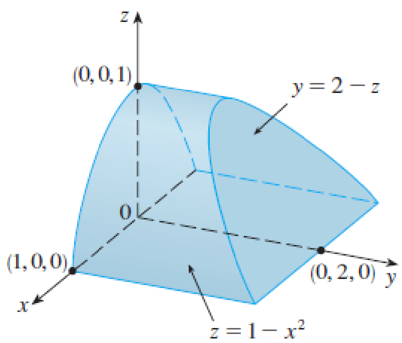
Example 11: Find the flux of the vector field $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ over the unit sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Giải: Tính $\text{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(z) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(x) = 1$

Mặt cầu đơn vị S là biên của hình cầu đơn vị B : $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Theo định lý Divergence:

$$\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iiint_B \text{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_B 1\,dV = V(B) = \frac{4\pi}{3}$$

Example 12: Evaluate $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$, where $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\mathbf{j} + \sin(xy)\mathbf{k}$ and S is the surface of the region E bounded by the parabolic cylinder $z = 1 - x^2$ and the planes $z = 0$, $y = 0$ and $y + z = 2$



Giải: Tính $\text{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xy) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\sin xy) = 3y$

Miền $E = \left\{(x,y,z) /\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x^2,\ 0 \le y \le 2 - z\right\}$

Ta có $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_E 3y\,dV = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dy\,dz\,dx$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\,dz\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(x^2+1\right)^3 - 8\right]dx = \frac{184}{35}$$