Chương 0: HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN (FUNCTIONS AND LIMITS)

1. HÀM SỐ (FUNCTION):

Hàm số xuất hiện khi có một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác, xét các ví dụ:

A. Diện tích *A* của một hình tròn phụ thuộc vào bán kính *r* của nó, quy tắc liên kết giữa *A* và *r* được cho bởi phương trình $A = \pi r^2$. Với mỗi số dương *r* sẽ cho tương ứng với một giá trị của *A*, ta gọi *A* là một hàm theo *r*.

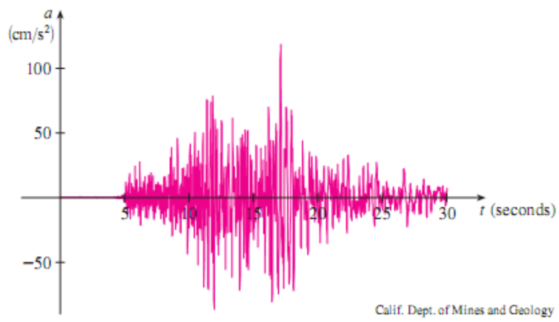
B. Dân số thế giới *P* phụ thuộc vào thời gian *t*, bảng bên cho ta các giá trị ước lượng của *P* theo thời gian *t*, ví dụ $P(1950) \approx 2.560.000.000$. Với mỗi giá trị của *t* cho tương ứng với một giá trị của *P* và ta gọi *P* là một hàm theo *t*.

Year	Population (millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

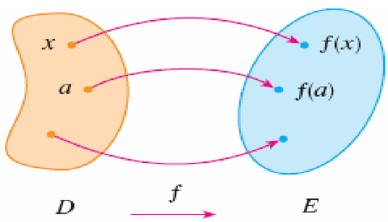
C. Giá tiền chuyển một lá thư *C* phụ thuộc vào cân nặng *w* của nó, mặc dù không có công thức liên hệ nào giữa *C* và *w*, nhưng một bưu điện có thể quy định cước phí theo cân nặng, ví dụ cân nặng đến 1 ounce, cước phí là 0.39 dollars, cân nặng hơn 1 ounce và đến 2 ounces, cước phí là 0.63 dollars, …Ta cũng gọi *C* là một hàm theo *w*.

w (ounces)	$C(w)$ (dollars)
$0 < w \leq 1$	0.39
$1 < w \leq 2$	0.63
$2 < w \leq 3$	0.87
$3 < w \leq 4$	1.11
$4 < w \leq 5$	1.35
⋮	⋮
$12 < w \leq 13$	3.27

D. Gia tốc thẳng đứng a của mặt đất được đo bởi một máy đo địa chấn trong một trận động đất là một hàm theo thời gian *t*. Hình bên ghi lại cơn địa chấn tại Los Angeles năm 1994: với mỗi giá trị của *t*, hình vẽ cho ta một giá trị *a* tương ứng, ta nói *a* là một hàm theo *t*



Cho *D* và *E* là các tập các số thực (real). *Hàm số f* là một quy tắc cho tương ứng với mỗi phần tử *x* trong tập *D* với duy nhất một phần tử *f(x)* trong tập *E*.

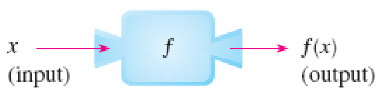


Arrow diagram for *f*

D: miền xác định (domain), *E*: Miền giá trị (range)

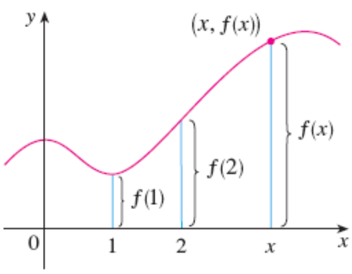
x: biến độc lập (independent variable),

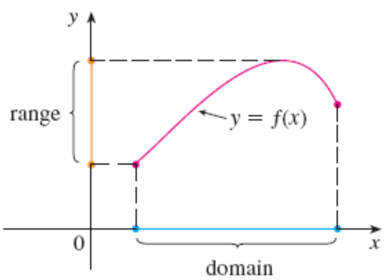
f(x): biến phụ thuộc (dependent variable)



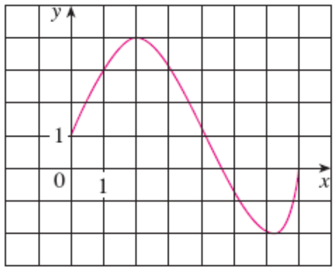
Machine diagram for a function *f*

Đồ thị (graph) của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) thỏa $y = f(x)$, với $x \in D$





Example 1: The graph of a function is shown



a. Find the values of $f(1)$, $f(5)$ and $f(7)$.

b. What are the domain and range of f

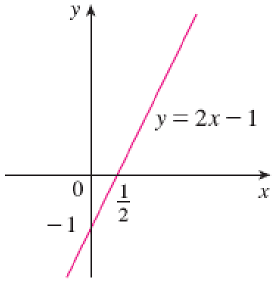
Giải:

a. $f(1)=3$ $\qquad$ $f(5)\approx -0.7$ $\qquad$ $f(7)=0$

b. Miền xác định: $D=[0,7]$ $\qquad$ Miền giá trị: $D=[-2,4]$

Example 2: Sketch the graph and find the domain and range of each function

a. $f(x)=2x-1$ $\qquad$ b. $g(x)=x^2$

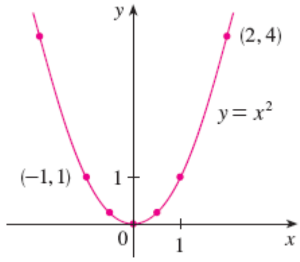


Giải:

a. Đây là phương trình đường thẳng, có hệ số góc là 2

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$ $\qquad$ Miền giá trị: $R=\mathbb{R}$

b. Đây là phương trình của parabola, đỉnh $A(0,0)$



Miền xác định: $D=\mathbb{R}$

Miền giá trị: $R=[0,\infty)$

Example 3: If $f(x)=2x^2-5x+1$ and $h\neq 0$

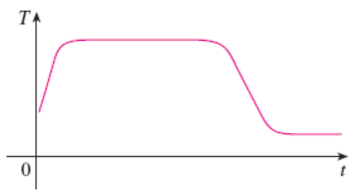
Evaluate $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Giải:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\left(2(a+h)^2-5(a+h)+1\right)-\left(2a^2-5a+1\right)}{h}=4a+2h-5$$

Example 4: When you turn on a hot-water faucet, the temperature of the water depends on how long the water has been running. Draw a rough graph of T as a function of the time t that has elapsed since the faucet was turned on.

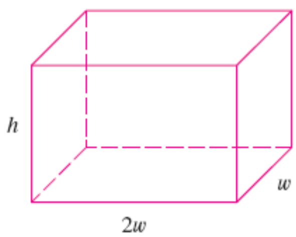
Giải:



Nhiệt độ ban đầu của nước chảy ra gần bằng với nhiệt độ của căn phòng vì nó nằm trong ống dẫn nước. Khi nước nóng trong bình chảy đến vòi nước thì nhiệt độ T tăng lên nhanh. Tiếp theo, T sẽ ổn định ở mức nhiệt độ của nước nóng trong bình chứa. Khi bình chứa cạn dần, T sẽ giảm dần đến nhiệt độ của nguồn nước cung cấp.

Example 5: A rectangular storage container with an open top has a volume of 10 m^3. The length of its base is twice its width. Material for the base costs \$10 per square meter, material for the sides costs \$6 per square meter. Express the cost of materials as a function of the width of the base.

Giải:



Gọi w và $2w$ là chiều rộng và chiều dài của mặt đáy, h là chiều cao

Diện tích mặt đáy: $2w^2$, diện tích của các mặt bên: $2wh+2(2wh)$

Tổng chi phí vật liệu làm thùng chứa hàng là:

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Thể tích của thùng chứa hàng là $10m^3$ nên: $w(2wh) = 10 \rightarrow h = \dfrac{5}{w^2}$

Thay vào phương trình trên ta có: $C = 20w^2 + 36w\left(\dfrac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \dfrac{180}{w}$

Vậy biểu diễn của hàm C theo w: $C(w) = 20w^2 + \dfrac{180}{w}, \quad w > 0$

Example 6: Find the domain of each function.

a. $f(x) = \sqrt{x+2}$ b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Giải:

a. Căn bậc hai của một số thực âm không được định nghĩa, miền xác định của f là tập tất cả các giá trị của x thỏa mãn:

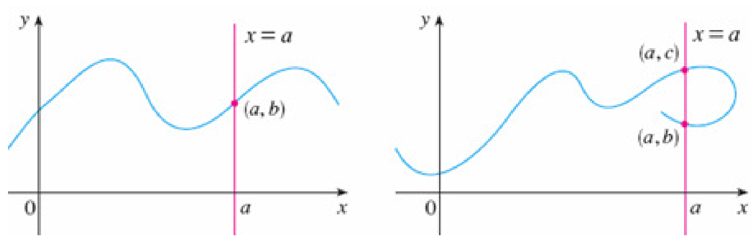
$$x + 2 \ge 0 \leftrightarrow x \ge -2 \quad \text{Vậy } D = [-2, \infty)$$

b. Hàm $g(x)$ xác định khi mẫu số khác 0. Miền xác định của g:

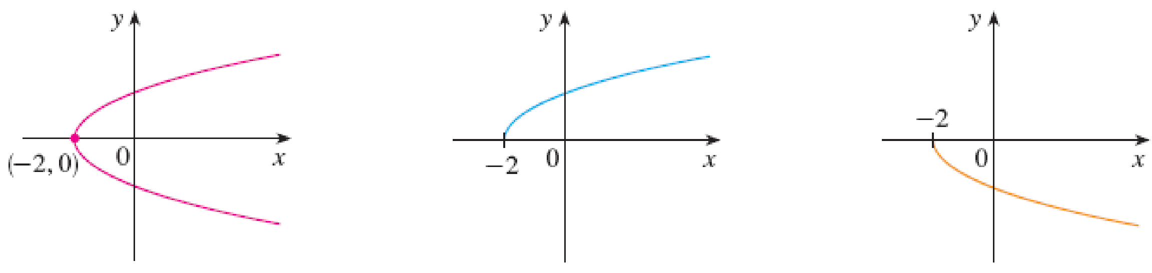
$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \ne 0, x \ne 1\} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$$

THE VERTICAL LINE TEST:

Đường cong trong mặt phẳng *Oxy* là đồ thị của hàm f khi và chỉ khi không có đường thẳng đứng (song song với *Oy*) nào cắt đường cong nhiều hơn 1 điểm



Ví dụ, parabola trong hình vẽ (a) dưới đây không phải là đồ thị của một hàm theo x vì có đường thẳng đứng cắt đồ thị tại hai điểm. Nếu xem x như là một hàm theo y thì (a) là đồ thị của hàm $x = y^2 - 2$. Vì $x = y^2 - 2 \rightarrow y^2 = x + 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x+2}$ nên (b) là đồ thị của hàm $y = \sqrt{x+2}$, (c) là đồ thị của hàm $y = -\sqrt{x+2}$.



(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

♦ HÀM ĐỊNH NGHĨA TRÊN TỪNG MIỀN (PIECEWISE DEFINED FUNCTIONS):

Các hàm cho dưới đây được định nghĩa bởi các công thức khác nhau trong các miền khác nhau của miền xác định

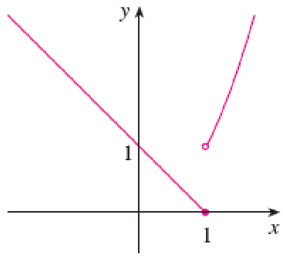
Example 7: A function f is defined by $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$. Evaluate $f(0)$, $f(1)$ and $f(2)$ and sketch the graph.

Giải:

Với hàm f đã cho, nhận xét:

- Nếu $x \le 1$, giá trị $f(x)$ là $1-x$, một phần đồ thị của hàm f là đường thẳng nằm phía bên trái đường thẳng $x=1$

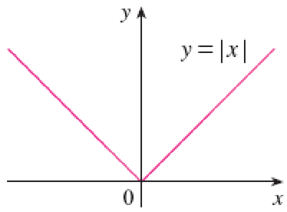
- Nếu $x>1$, giá trị $f(x)$ là x^2, phần còn lại của đồ thị hàm f là parabola nằm phía bên phải đường thẳng $x=1$



Vì $\quad 0 \le 1 \to f(0) = 1-0 = 1,$

$$1 \le 1 \to f(1) = 1-1 = 0, \qquad 2 > 1 \to f(2) = 2^2 = 4$$

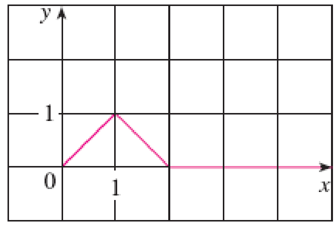
Example 8: Sketch the graph of the absolute value function $y=|x|$



Giải:

Ta có $\qquad y = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Example 9: Find a formula for the function f graphed



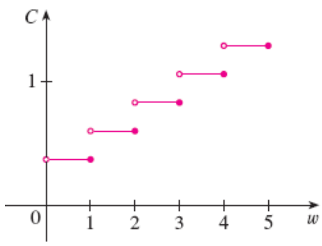
Giải:

Bằng cách viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm, công thức cần tìm của đồ thị hàm f đã cho là:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Example 10: In Example C at the beginning of this section we considered the cost $C(w)$ of mailing a first-class letter with weight w. In effect, this is a piecewise defined function because, from the table of values, we have

$$C(w) = \begin{cases} 0.39, & 0 < w \le 1 \\ 0.63, & 1 < w \le 2 \\ 0.87, & 2 < w \le 3 \\ 1.11, & 3 < w \le 4 \\ & \dots \end{cases}$$



♦ Hàm có dạng trên gọi là hàm bước nhảy (step function)

♦ SỰ ĐỐI XỨNG (SYMMETRY):

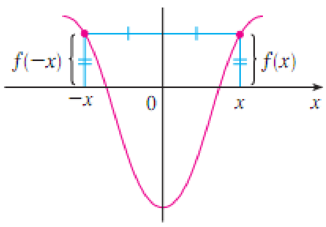
- *f là hàm số chẵn (even function)* trên miền D nếu:

  $$f(-x) = f(x), \ \forall x \in D$$

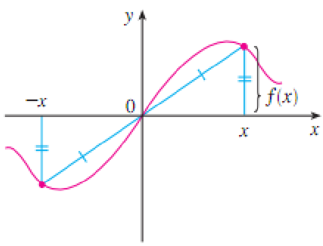
- *f là hàm số lẻ (odd function)* trên miền D nếu:

  $$f(-x) = -f(x), \ \forall x \in D$$

- *Đồ thị hàm số chẵn* nhận trục Oy làm trục đối xứng
- *Đồ thị hàm số lẻ* nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng



An even function



An odd function

Example 11: Determine whether each of the following functions is even, odd, or neither even nor odd.

$a.\ f(x) = x^5 + x$ $\qquad b.\ g(x) = 1 - x^4$ $\qquad c.\ h(x) = 2x - x^2$

Giải:

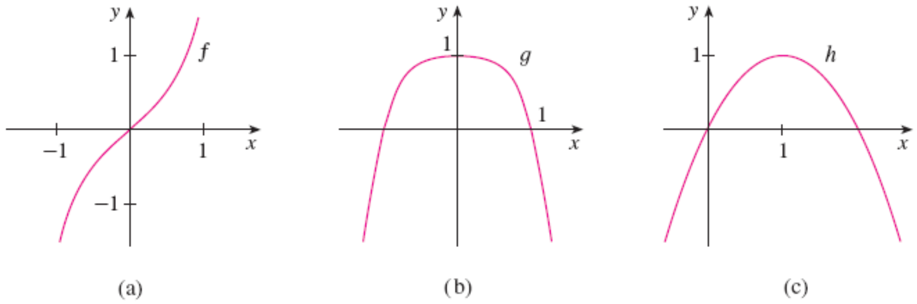
a. $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -(x^5 + x) = -f(x)$. Vậy f là hàm lẻ

b. $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$. Vậy g là hàm chẵn

c. $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Ta có $h(-x) \neq h(x)$ và $h(-x) \neq -h(x)$ nên hàm h không chẵn cũng không lẻ

Đồ thị của các hàm trên:

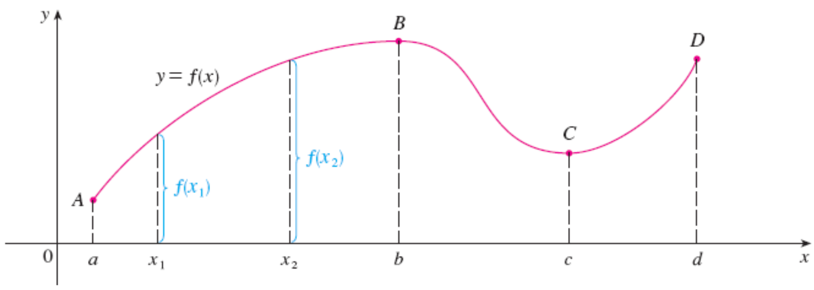


♦ CÁC HÀM SỐ TĂNG, GIẢM (INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS):

- *Hàm số f tăng* trong khoảng I nếu $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I$
- *Hàm số f giảm* trong khoảng I nếu $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in I$
- *Đồ thị hàm số tăng* có dáng điệu đi lên kể từ trái sang phải
- *Đồ thị hàm số giảm* có dáng điệu đi xuống kể từ trái sang phải

Hàm f trong hình vẽ dưới: - Tăng trên [a,b] và trên [c,d]

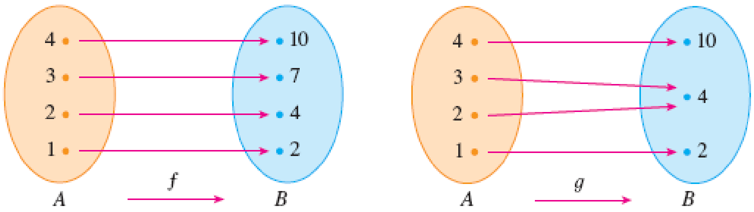
- Giảm trên [b,c]



♦ HÀM SỐ NGƯỢC (INVERSE FUNCTIONS):

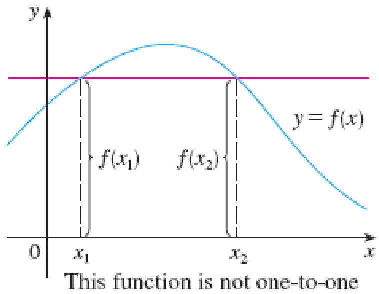
DEFINITION: Hàm f gọi là hàm 1-1 (one to one function) nếu nó không nhận cùng một giá trị hai lần, có nghĩa $f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall x_1 \neq x_2$

Sơ đồ mũi tên của hai hàm f và g dưới đây cho biết f là hàm 1-1, g không phải hàm 1-1 vì g nhận giá trị 4 hai lần: $g(2) = g(3) = 4$



f is one-to-one; g is not

HORIZONTAL LINE TEST: Hàm f là 1-1 nếu và chỉ nếu không có đường thẳng nằm ngang (song song với Ox) nào cắt đồ thị của nó tại nhiều hơn một điểm



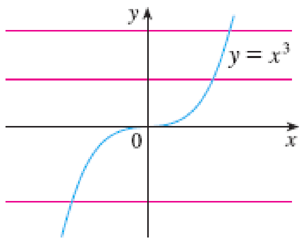
This function is not one-to-one

Example 12: Is the function $f(x) = x^3$ one-to-one?

Giải:

Cách 1: Nếu $x_1 \neq x_2 \;\; \to \; x_1^3 \neq x_2^3$. Theo định nghĩa f là 1-1

Cách 2: Từ hình vẽ ta thấy không có đường thẳng nằm ngang nào cắt đồ thì hàm $f(x) = x^3$ nhiều hơn 1 điểm. Theo Horizontal line test, f là 1-1



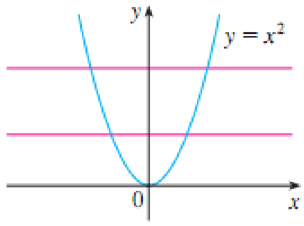
$f(x) = x^3$ is one-to-one.

Example 13: Is the function $g(x) = x^2$ one-to-one?

Giải:

Hàm $g(x) = x^2$ không phải hàm 1-1 vì:

$1 \neq -1$ nhưng $g(1) = g(-1) = 1$



$g(x) = x^2$ is not one-to-one.

DEFINITION: Cho f là hàm 1-1, có domain A và range B. Hàm ngược của f là f^{-1} có domain B, range A và được xác định $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y, \; \forall y \in B$

Lưu ý: domain of f^{-1} = range of f range of f^{-1} = domain of f

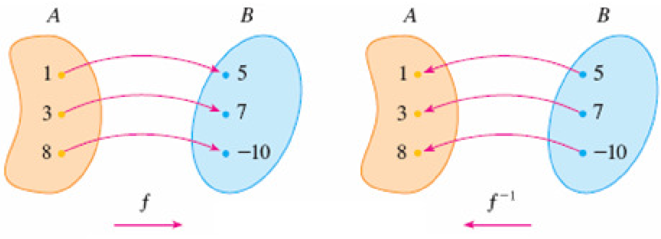
Ta thường ký hiệu x là biến độc lập, y là biến phụ thuộc nên sẽ viết hàm số ngược là:

$$\boxed{f^{-1}(x) = y \leftrightarrow f(y) = x}$$

Ví dụ: hàm ngược của hàm $f(x) = x^3$ là $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ vì nếu $y = x^3$ thì

$$\to f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

Example 14: If $f(1)=5, f(3)=7, f(8)=-10$. Find $f^{-1}(5), f^{-1}(7), f^{-1}(-10)$



The inverse function reverses inputs and outputs.

Giải:

$f^{-1}(5)=1$ vì $f(1)=5$

$f^{-1}(7)=3$ vì $f(3)=7$ $\qquad$ $f^{-1}(-10)=8$ vì $f(8)=-10$

Từ định nghĩa hàm ngược ta có kết quả:

$$f^{-1}(f(x))=x,\ \forall x\in A \qquad f(f^{-1}(x))=x,\ \forall x\in B$$

Ví dụ, hàm ngược của hàm $f(x)=x^3$ là $f^{-1}(x)=x^{1/3}$. Ta có:

$$f^{-1}(f(x))=(x^3)^{1/3}=x, \quad f(f^{-1}(x))=(x^{1/3})^3=x$$

HOW TO FIND THE INVERSE FUNCTION OF A ONE-TO-ONE FUNCTION f

Bước 1: Viết $y=f(x)$

Bước 2: Giải phương trình trên tìm x theo y (nếu có thể)

Bước 3: Biểu diễn f^{-1} là một hàm theo x, hoán đổi x và y, kết quả là $y=f^{-1}(x)$

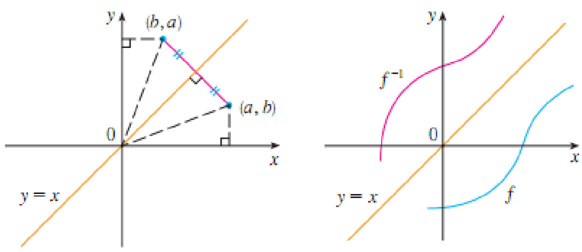
Example 15: Find the inverse function of $f(x)=x^3+2$

Giải: Trước tiên ta viết: $y=x^3+2$

Giải phương trình trên tìm x: $x^3=y-2 \to x=\sqrt[3]{y-2}$.

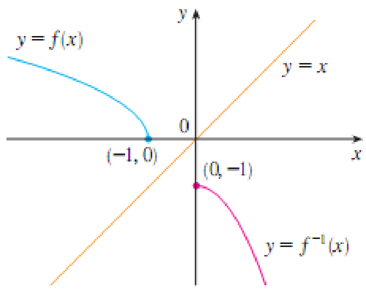
Hoán đổi x và y: $y=\sqrt[3]{x-2}$.

Hàm ngược là $y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$.



Đồ thị hàm ngược f^{-1} có được bằng phép lấy đối xứng đồ thị hàm f qua đường thẳng $y=x$

Example 15: Sketch the graphs of $f(x)=\sqrt{-1-x}$ and its inverse function using the same coordinate axes.

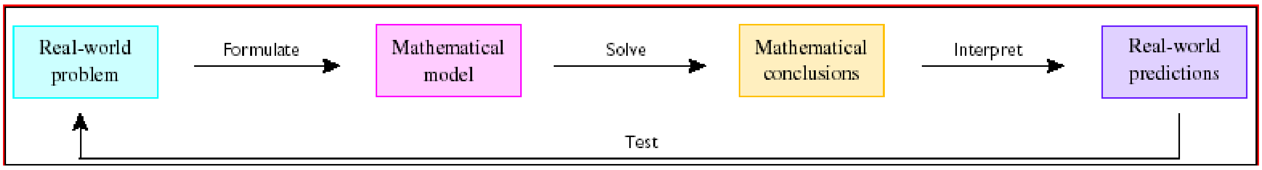


Giải: Trước hết vẽ đường cong $y=\sqrt{-1-x}$ (nửa trên của parabola $y^2=-1-x$ hay $x=-y^2-1$) rồi lấy đối xứng qua đường thẳng $y=x$ ta có đồ thị hàm f^{-1}

2. CÁC HÀM SỐ CƠ BẢN (ESSENTIAL FUNCTIONS):

Một mô hình toán học (**mathematical model**) là một sự mô tả toán học (thường dưới dạng một hàm hay một phương trình) về những hiện tượng của tự nhiên như: độ tăng dân số, tốc độ rơi của vật, độ cô đặc của vật chất trong phản ứng hóa học, tuổi thọ trung bình của một người… Mục đích của việc mô tả này là làm tăng thêm sự hiểu biết về các hiện tượng cũng như đưa ra các dự đoán về chúng trong tương lai.

Ở hình sau cho ta tiến trình của việc xây dựng một mô hình toán học:



Ta thấy đây là một mô hình khép kín. Ban đầu từ những vấn đề đặt ra của giới tự nhiên, người ta cố gắng mô hình hóa thành một mô hình toán học. Sau đó bằng những công cụ toán học, các nhà toán học sẽ giải quyết và đưa ra những kết luận toán học. Từ những kết luận này, quay lại đối chiếu với những hiện tượng thực tế cũng như đưa ra các dự đoán. Nếu các dự đoán này chưa đúng với thực tế người ta phải xem xét lại mô hình ban đầu và có thể phải xây dựng một mô hình mới. Quá trình này cứ tiếp diễn để xây dựng mô hình mới tốt hơn.

Một mô hình toán học không bao giờ là một đại diện tuyệt đối chính xác của hiện tượng tự nhiên. Nó thường là một sự "lý tưởng hóa" tức là giảm bớt đi ít nhiều những điều kiện ràng buộc. Một mô hình đủ tốt có thể vừa cho phép thực hiện được các tính toán toán học mà kết quả của nó lại cũng đảm bảo đưa ra những kết luận có giá trị thực tế.

Có nhiều cách để đưa ra một mô hình toán học, trong đó việc sử dụng hàm số là phổ biến Dưới đây giới thiệu một số hàm số cơ bản và các ví dụ thực tế được mô tả bởi các hàm này.

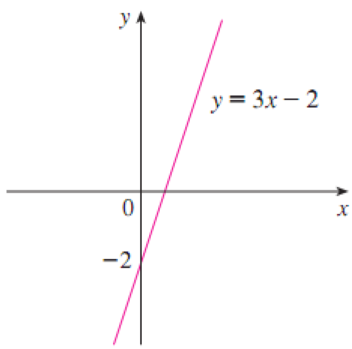
♦ HÀM TUYẾN TÍNH (LINEAR FUNCTION)

Ta nói y là một hàm tuyến tính của x nếu y có dạng: $y = mx + b$.

Đồ thị của hàm y là một đường thẳng có hệ số góc m và cắt trục tung tại điểm có tung độ b

Nét đặc trưng của hàm tuyến tính là nó tăng với tỷ lệ hằng. Hằng số đó chính là hệ số góc m. Chẳng hạn, xét hàm $f(x) = 3x - 2$, xem bảng tính các giá trị của y ta có nhận xét khi x tăng 0.1 thì $f(x)$ tăng 0.3 [$f(x)$ tăng nhanh gấp 3 lần x]

x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5



Example 1:

a. As dry air moves upward, it expands and cools. If the ground temperature is $20^0 C$ and the temperature at a height of 1 km is $10^0 C$, express the temperature T (in °C) as a function of the height h (in kilometers), assuming that a linear model is appropriate.

b. Draw the graph of the function in part a. What does the slope represent?

c. What is the temperature at a height of 2.5km?

Giải:

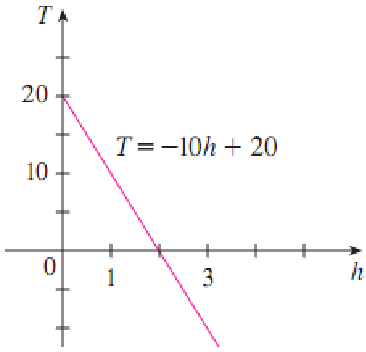
a. Vì T là một hàm tuyến tính theo biến h nên $T = mh + b$.

Theo giả thiết ta có:

$T = 20$ khi $h = 0$: $\quad 20 = m.0 + b \rightarrow b = 20$

$T = 10$ khi $h = 1$: $\quad 10 = m.1 + 20 \rightarrow m = -10$. Vậy $T = -10h + 20$

b. Đồ thị :



Hệ số góc $m = -10^0 C/km$ biểu diễn tỷ lệ thay đổi của nhiệt độ tương ứng với độ cao

c. Ở độ cao $h = 2.5km$, nhiệt độ là $T = -10(2.5) + 20 = -5^0 C$

Nếu hiện tượng tự nhiên xảy ra không theo quy luật thì người ta sẽ xây dựng mô hình kinh nghiệm, bằng cách dựa vào các dữ liệu thu thập được sẽ tìm một đồ thị phù hợp nhất biểu diễn xu hướng của hiện tượng.

Example 2: Table 1 lists the average carbon dioxide level in the atmosphere, measured in parts per million at Mauna Loa Observatory from 1980 to 2002. Use the data in Table 1 to find a model for the carbon dioxide level.

TABLE 1

Year	CO_2 level (in ppm)	Year	CO_2 level (in ppm)
1980	338.7	1992	356.4
1982	341.1	1994	358.9
1984	344.4	1996	362.6
1986	347.2	1998	366.6
1988	351.5	2000	369.4
1990	354.2	2002	372.9

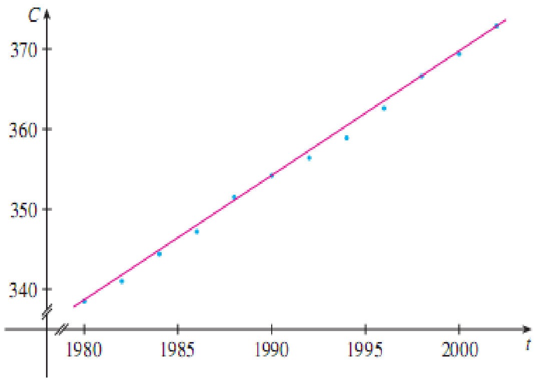
Giải:

Số liệu trong bảng 1 được biểu diễn như hình vẽ, ta thấy các điểm nằm gần như trên một đường thẳng, một cách tự nhiên ta liên tưởng tới kiểu mô hình tuyến tính. Tuy nhiên ta nên chọn đường thẳng nào để có xấp xỉ tốt? Một khả năng là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của dữ liệu, hệ số góc của đường thẳng này:

$$\frac{372.9 - 338.7}{2002 - 1980} = \frac{34.2}{22} \approx 1.5545$$

Phương trình của đường thẳng là :

$$C = 1.5545t - 2739.21$$



Linear model through first and last data points

♦ ĐA THỨC (POLYNOMIAL):

Hàm P gọi là một đa thức nếu:

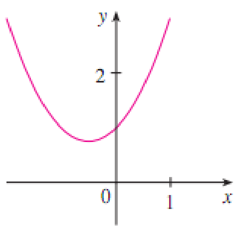
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$: hệ số (coefficient) của đa thức, n: bậc (degree) của đa thức $(a_n \neq 0)$

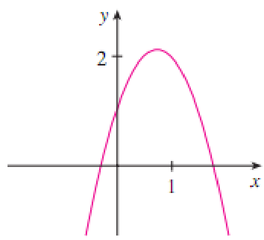
Miền xác định của đa thức: $D = \mathbb{R}$

Đa thức bậc 1 có dạng $P(x) = mx + b$, đây là hàm tuyến tính

Đa thức bậc 2 có dạng $P(x) = ax^2 + bx + c$ gọi là hàm bậc hai (quadratic function), có đồ thị là parabola, hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và xuống dưới khi $a < 0$



(a) $y = x^2 + x + 1$

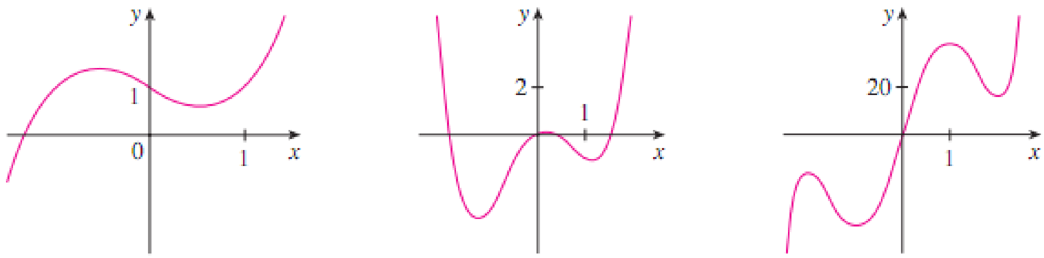


(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

The graphs of quadratic functions are parabolas.

Đa thức bậc 3 có dạng $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gọi là hàm bậc 3 (cubic function)

Các đồ thị dưới đây cho ta hình ảnh các hàm bậc 3, bậc 4, bậc 5:

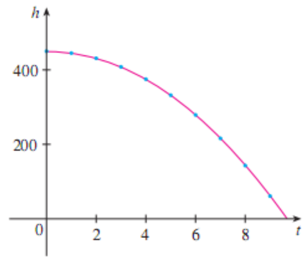


(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Example 3: A ball is dropped from the upper observation deck of the CN Tower, 450m above the ground, and its height h above the ground is recorded at 1-second intervals in Table 2. Find a model to fit the data and use the model to predict the time at which the ball hits the ground.

TABLE 2

Time (seconds)	Height (meters)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61



Quadratic model for a falling ball

Giải:

Xác định các điểm theo dữ liệu bảng 2 và nhận xét mô hình tuyến tính là không phù hợp, ta sẽ thử với mô hình hàm bậc hai. Sử dụng máy tính, ta đạt được mô hình hàm bậc 2:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$$

Quả bóng chạm mặt đất khi $h = 0$:

$$449.36 + 0.96t - 4.90t^2 = 0$$

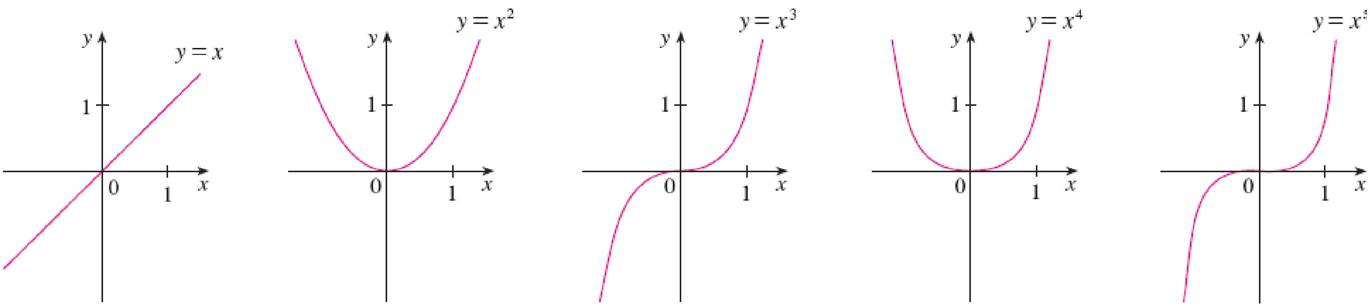
$$\rightarrow t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}.$$

Chọn $t > 0$, khi $t \approx 9.7$ quả bóng chạm mặt đất

♦ HÀM LŨY THỪA (POWER FUNCTIONS):

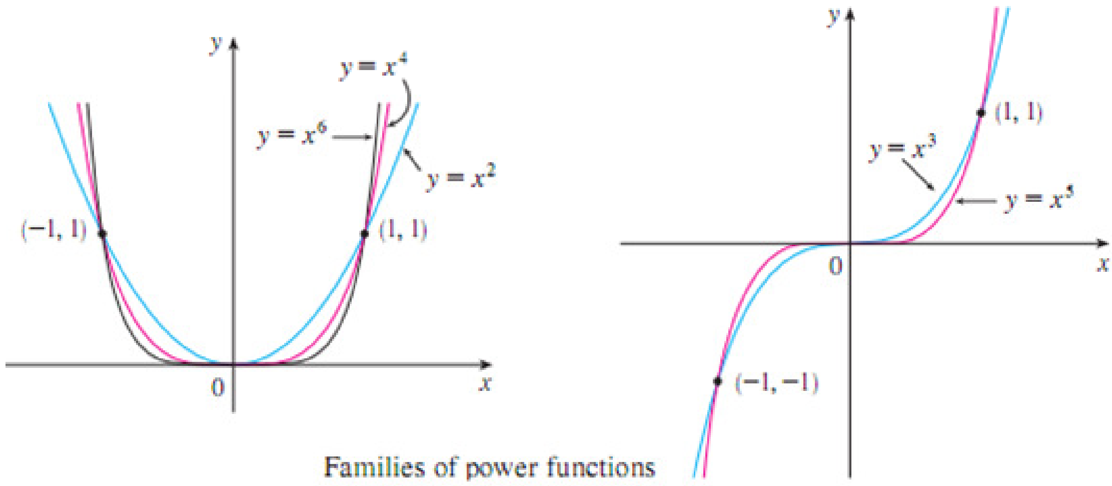
Hàm lũy thừa có dạng $f(x) = x^a$ với a là hằng số (constant)

* Khi $a = n$ là số nguyên dương (positive integer):



Graphs of $f(x) = x^n$ for $n = 1, 2, 3, 4, 5$

♦ Hình dáng đồ thị hàm $f(x) = x^n$ phụ thuộc vào n chẵn hay lẻ. Nếu n chẵn thì f là hàm chẵn có đồ thị tương tự như parabola $y = x^2$, nếu n lẻ thì f là hàm lẻ có đồ thị tương tự hàm $y = x^3$



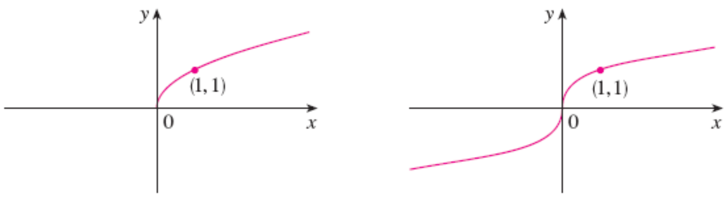
Families of power functions

* Khi $a = 1/n$ với n nguyên dương:

Hàm $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ là hàm căn thức (root function).

Với $n = 2$: $f(x) = \sqrt{x}$, miền xác định: $D = [0, \infty)$.

Với $n = 3$: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, miền xác định $D = \mathbb{R}$

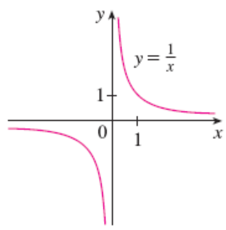


(a) $f(x) = \sqrt{x}$ Graphs of root functions (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

* Khi $a = -1$:

Đồ thị hàm nghịch đảo (reciprocal function) $f(x) = x^{-1} = 1/x$ là hyperbola có các đường tiệm cận (asymptote) là các trục tọa độ

Hàm này xuất hiện trong vật lý và hóa học với định luật Boyle: Khi nhiệt độ không đổi, thể tích V của một lượng khí tỷ lệ nghịch với áp suất P: $V = \dfrac{C}{P}$, với C là hằng số



The reciprocal function

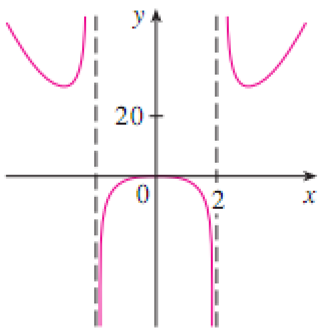
♦ HÀM HỮU TỶ (RATIONAL FUNCTIONS):

Hàm hữu tỷ có dạng $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, với P, Q là các đa thức

Miền xác định là tập các giá trị x thỏa $Q(x) \neq 0$.

Ví dụ: hàm $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ là hàm hữu tỷ có

miền xác định $y = \cos x$ $\{x / x \neq \pm 2\}$



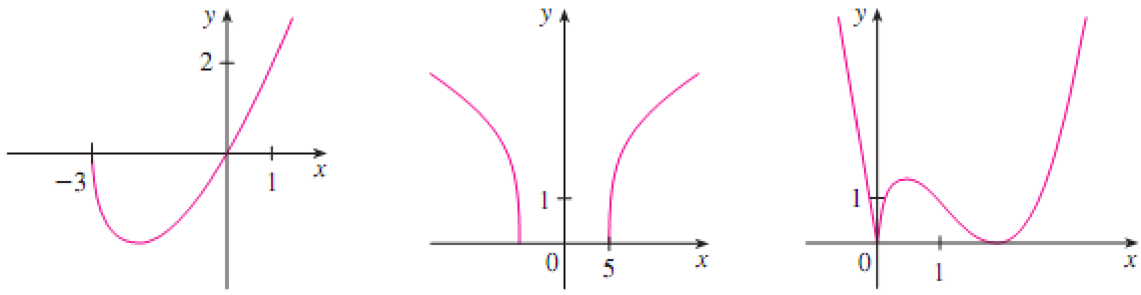
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

♦ HÀM ĐẠI SỐ (ALGEBRAIC FUNCTIONS):

Sử dụng các phép toán đại số: cộng (addition), trừ (subtraction), nhân (multiplication), chia (division), lấy căn (taking roots) các hàm đa thức ta được hàm đại số. Ví dụ hàm hữu tỷ và các hàm sau là hàm đại số:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \qquad g(x)=\frac{x^4-16x^2}{x+\sqrt{x}}+(x-2)\sqrt[3]{x+1}$$

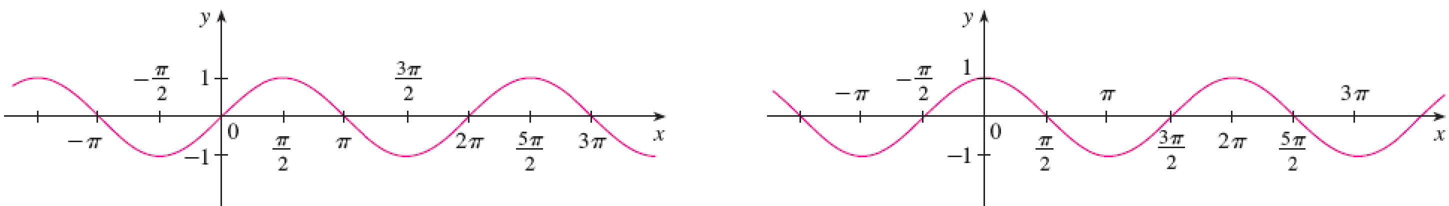
Đồ thị các hàm đại số khá đa dạng, dưới đây là hình ảnh một số hàm đại số:



(a) $f(x)=x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x)=\sqrt[4]{x^2-25}$ (c) $h(x)=x^{2/3}(x-2)^2$

♦ HÀM LƯỢNG GIÁC (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS):

* Hàm $y=\sin x$ và $y=\cos x$:



(a) $f(x)=\sin x$ (b) $g(x)=\cos x$

Cả 2 hàm sine và cosine có miền xác định là $(-\infty,+\infty)$ và miền giá trị là $[-1,1]$

$$\boxed{-1\le \sin x\le 1 \qquad -1\le \cos x\le 1}$$

Các hàm sine và cosine có tính chất tuần hoàn (periodic) chu kỳ (period) 2π, có nghĩa với mọi *x*, ta có:

$$\boxed{\sin(x+2\pi)=\sin x \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x}$$

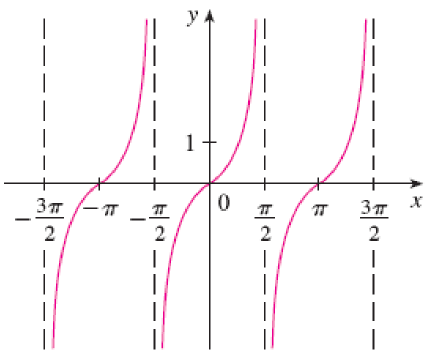
Mô hình hàm tuần hoàn phù hợp với các hiện tượng lặp đi lặp lại như thủy triều, dao động của lò xo hay sự chuyển động của sóng âm …. Chẳng hạn hàm sau biểu diễn mối liên hệ giữa số giờ chiếu sáng ở Philadelphia trong *t* ngày sau tháng 1:

$$L(t)=12+2.8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

* Hàm tangent: $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

- Hàm không xác định khi $\cos x=0 \leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\dots$

- Miền giá trị: $(-\infty,+\infty)$



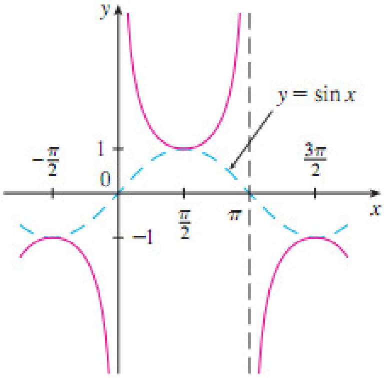
$y=\tan x$

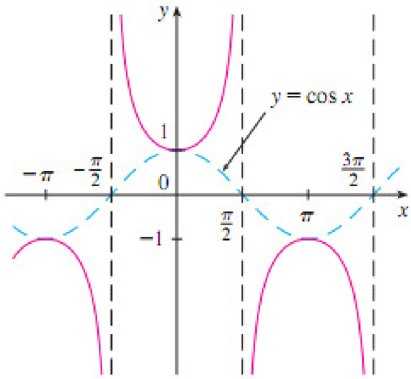
- Chu kỳ của hàm là π : $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

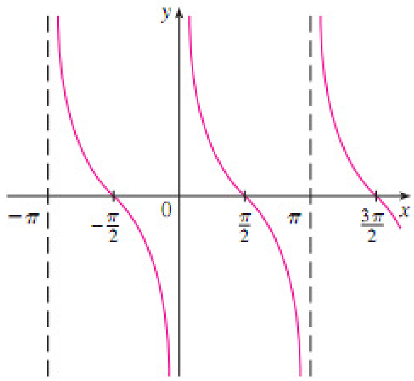
* Các hàm cosecant, secant, cotangent là nghịch đảo của các hàm sine, cosine và tangent

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x \frac{1}{\tan x}$$

Dưới đây là đồ thị của các hàm trên:



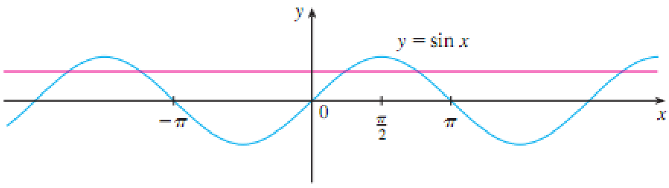


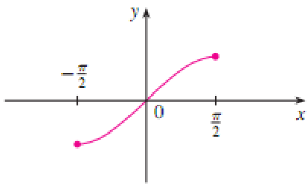


♦ HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC (INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS):

Các hàm lượng giác không phải là hàm 1-1 trên miền xác định của nó. Để tìm các hàm lượng giác ngược ta cần giới hạn miền xác định để chúng trở thành hàm 1-1 trên miền này

Hàm $y = \sin x$ không phải là hàm 1-1 trên $\mathbb{R}$ nhưng nó là hàm 1-1 trên $[-\pi/2, \pi/2]$.





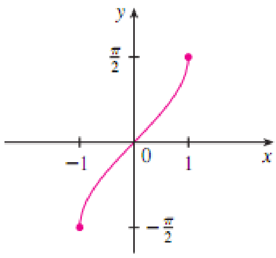
$y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Vậy *sinx* có hàm ngược trên $[-\pi/2, \pi/2]$

là hàm *arcsinx* hay viết $\sin^{-1} x$

Hàm *arcsinx* có miền xác định: [-1,1]

và miền giá trị: $[-\pi/2, \pi/2]$



$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

Theo định nghĩa hàm ngược, ta có:

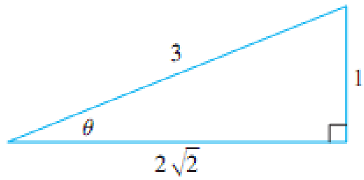
$$\sin^{-1} x = y \ \leftrightarrow \ \sin y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\sin(\sin^{-1} x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Example 4: Evaluate $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ and $\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

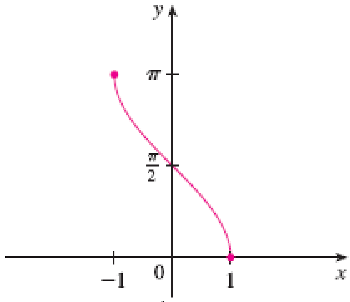
Giải:

Ta có $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ vì $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$



Đặt $\theta=\arcsin\dfrac{1}{3}\to\sin\theta=\dfrac{1}{3}$

Vậy $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)=\tan\theta=2\sqrt{2}$



$y=\cos^{-1}x=\arccos x$

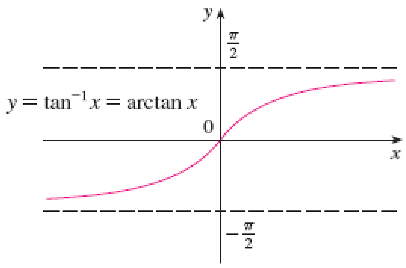
♦ Tương tự, hàm ngược của hàm *cosx* là hàm *arccosx* ($\cos^{-1}x$)

Hàm *arccosx* có miền xác định: $[-1,1]$ và miền giá trị: $[0,\pi]$

$$\boxed{\cos^{-1}x=y\ \leftrightarrow\ \cos y=x,\quad 0\le y\le\pi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos^{-1}(\cos x)=x,\quad 0\le x\le\pi\\ &\cos(\cos^{-1}x)=x,\quad -1\le x\le 1\end{aligned}}$$

♦ Hàm ngược của hàm *tanx* là hàm *arctanx* ($\tan^{-1}x$).



Hàm *arctanx* có miền xác định: $(-\infty,\infty)$ và miền giá trị: $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{\tan^{-1}x=y\ \leftrightarrow\ \tan y=x,\quad -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}}$$

Example 5: Simplify the expression $\cos\left(\tan^{-1}x\right)$.

Giải: Đặt $y=\tan^{-1}x\ \leftrightarrow\ \tan y=x,\ -\pi/2<y<\pi/2$

Ta có $\sec^2 y=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y\ =1+x^2\ \to\ \sec y=\sqrt{1+x^2}$

Vậy $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\cos y=\dfrac{1}{\sec y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Các hàm lượng giác ngược còn lại không sử dụng thường xuyên, được tóm tắt trong bảng sau:

$$\boxed{\begin{aligned}&y=\csc^{-1}x\left(|x|\ge 1\right)\ \leftrightarrow\ \csc y=x,\quad y\in(0,\pi/2]\cup(\pi,3\pi/2]\\ &y=\sec^{-1}x\left(|x|\ge 1\right)\ \leftrightarrow\ \sec y=x,\quad y\in[0,\pi/2)\cup[\pi,3\pi/2)\\ &y=\cot^{-1}x\left(x\in\mathbb{R}\right)\ \leftrightarrow\ \cot y=x,\quad y\in(0,\pi)\end{aligned}}$$

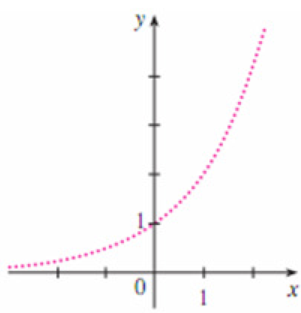
♦ HÀM SỐ MŨ (EXPONENTIAL FUNCTIONS):

* Hàm số mũ có dạng: $f(x)=a^x,\ a>0$ có miền xác định $\mathbb{R}$, miền giá trị $(0,+\infty)$

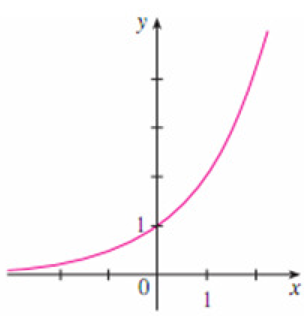
- Với $x=n$ là số nguyên dương:

$$a^n=\underbrace{a.a....a}_{n\ \text{thừa số}}$$

- Với $x=0\ \to\ a^0=1$
- Với $x=-n$ (n nguyên dương):



Representation of $y=2^x$, x rational

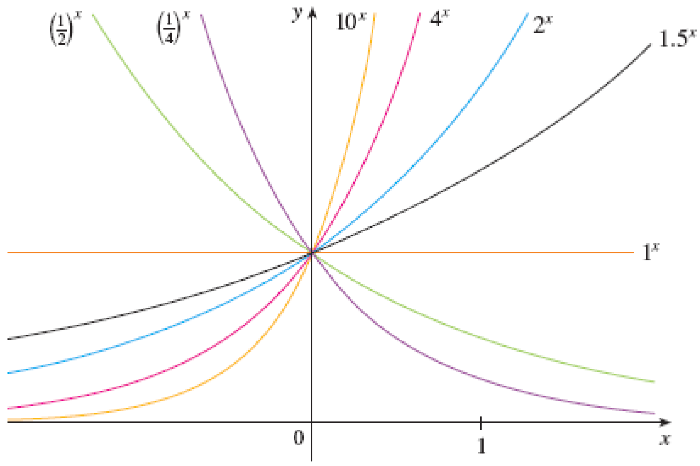


$y=2^x$, x real

$$x = -n \ \rightarrow \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Với x hữu tỷ: $x = \dfrac{p}{q}$ (p, q nguyên, $q > 0$):

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$



* Tính chất:

Hàm số mũ tăng nếu $a > 1$, giảm nếu $0 < a < 1$

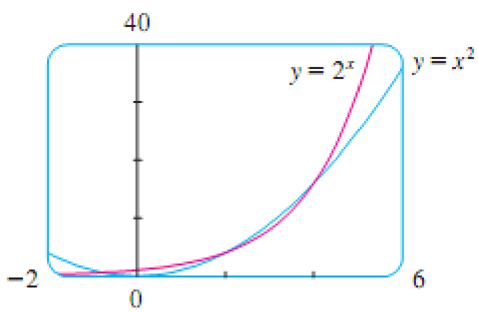
LAWS OF EXPONENTS: Nếu *a, b* là các số dương, *x,y* là các số thực, ta có

1. $a^{x+y} = a^x.a^y$ 2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$ 4. $(ab)^x = a^x b^x$

Example 6: Use a graphing device to compare the exponential function $f(x) = 2^x$ and the power function $g(x) = x^2$. Which function grows more quickly when x is large?

Giải: Xem hình vẽ của hai hàm đã cho trong hình chữ nhật $[-2,6]\times[0,40]$ ta thấy chúng giao nhau 3 lần, nhưng với $x > 4$ đồ thị hàm $f(x) = 2^x$ nằm trên đồ thị hàm $g(x) = x^2$. Vậy khi x lớn, hàm mũ $y = 2^x$ tăng nhanh hơn hàm lũy thừa $y = x^2$



Xét mô hình phát triển dân số,

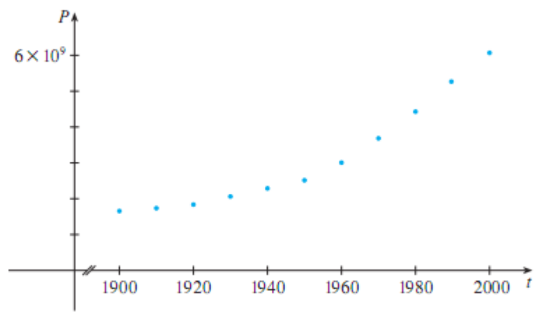
Table 1 đưa ra dữ liệu về dân số thế giới trong thế kỷ 20.

Nhìn vào biểu đồ được vẽ bởi dữ liệu của bảng cho ta thấy sự phát triển của dân số theo kiểu hàm số mũ. Sử dụng máy tính ta có thể xây dựng được mô hình tương thích với những dữ liệu rời rạc của bảng như sau:

$$P = (0.008079266)(1.013731)^t$$

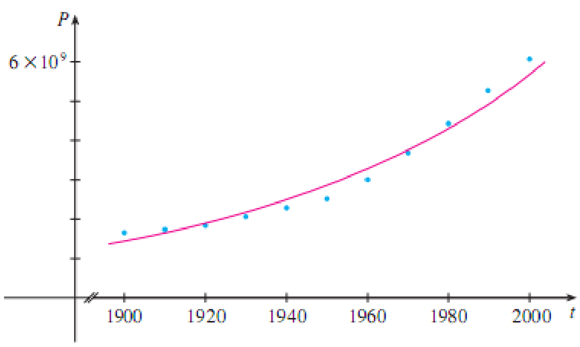
TABLE 1

Year	Population (millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080



Scatter plot for world population growth

Hình bên cho đồ thị biểu diễn mô hình này là khá phù hợp với dữ liệu ban đầu. Giai đoạn phát triển dân số thế giới tương đối chậm là do ảnh hưởng của hai cuộc chiến tranh thế giới và cuộc đại suy thoái kinh tế thế giới những năm 1930.



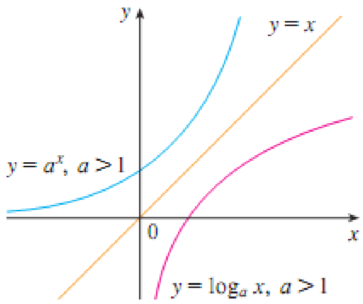
Exponential model for population growth

♦ HÀM LOGARIT (LOGARITHMIC FUNCTIONS):

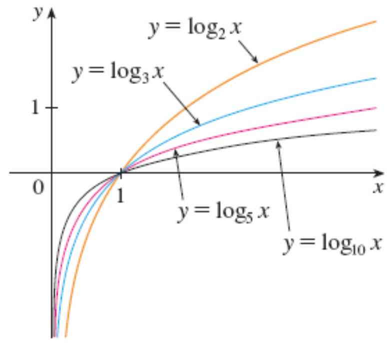
Nếu $a > 0,\ a \neq 1$, hàm mũ $f(x) = a^x$ là hàm 1-1, nên có hàm ngược là f^{-1}, được gọi là hàm logaritmic với cơ số a và được kí hiệu là $\log_a$:

$$\boxed{\log_a x = y \ \leftrightarrow\ x = a^y}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a\left(a^x\right) = x,\quad x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} = x,\quad x > 0 \end{array}}$$



Hàm logarithmic $\log_a$ có miền xác định $D = (0, +\infty)$, miền giá trị $\mathbb{R}$, có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm $y = a^x$ qua đường thẳng $y = x$



LAWS OF EXPONENTS: Nếu *x, y* là các số dương, ta có

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a\left(x^r\right) = r\log_a x,\quad r \in \mathbb{R}$

Example 7: Use the laws of logarithms to evaluate $\log_2 80 - \log_2 5$

Giải: Ta có

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 .$$

♦ LOGARIT TỰ NHIÊN (NATURAL LOGARITHMS)

Logarit với cơ số *e* (*e* là số vô tỷ, có giá trị ≈ 2.71828) gọi là logarit tự nhiên và có kí hiệu:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Ta có: $\boxed{\ln x = y \ \leftrightarrow\ e^y = x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln\left(e^x\right) = x,\quad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} = x,\quad x > 0 \\ \ln e = 1 \end{array}}$$

Example 8: Solve the equation $e^{5-3x} = 10$.

Giải: Lấy logarithms tự nhiên hai vế của phương trình:

$$\ln\left(e^{5-3x}\right) = \ln 10 \ \leftrightarrow\ 5 - 3x = \ln 10 \ \leftrightarrow\ 3x = 5 - \ln 10 \ \leftrightarrow\ x = \frac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Example 9: Express $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ as a single logarithm.

Giải:

Ta có: $\ln a + \dfrac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{1/2} = \ln a + \ln\sqrt{b} = \ln\left(a\sqrt{b}\right)$

CHANGE OF BASE FORMULA: Với $a>0,\ a\neq 1$ ta có:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Example 10: Evaluate $\log_8 5$ correct to six decimal places

Giải: Ta có: $\log_8 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$

♦ HÀM SIÊU VIỆT (TRANSCENDENTAL FUNCTIONS):

Các hàm không phải hàm đại số gọi là hàm siêu việt

♦ Các hàm siêu việt đã biết: hàm lượng giác, lượng giác ngược, hàm mũ, hàm logarit

Example 11: Classify the following functions as one of the types of functions that we have discussed.

a. $f(x)=5^x$ b. $g(x)=x^5$ c. $h(x)=\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ d. $u(t)=1-t+5t^4$

Giải:

a. $f(x)=5^x$ là hàm mũ

b. $g(x)=x^5$ là hàm lũy thừa

c. $h(x)=\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ là hàm đại số

d. $u(t)=1-t+5t^4$ là đa thức bậc 4

3. HÀM MỚI TỪ CÁC HÀM ĐÃ CÓ (NEW FUNCTIONS FROM OLD FUNCTIONS):

♦ BIẾN ĐỔI HÀM SỐ (TRANSFORMATIONS OF FUNCTIONS):

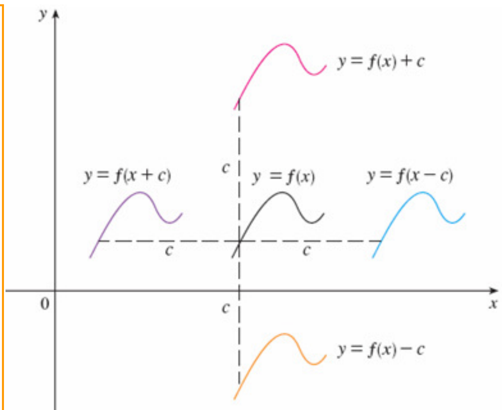
VERTICAL AND HORIZONTAL SHIFTS: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $c>0$. Ta có thể suy ra đồ thị các hàm số sau:

$y=f(x)+c$: dời đồ thị hàm $y=f(x)$ lên trên c đơn vị

$y=f(x)-c$: dời đồ thị hàm $y=f(x)$ xuống dưới c đơn vị

$y=f(x+c)$: dời đồ thị hàm $y=f(x)$ về bên trái c đơn vị

$y=f(x-c)$: dời đồ thị hàm $y=f(x)$ về bên phải c đơn vị



Translating the graph of f

VERTICAL AND HORIZONTAL STRETCHING AND REFLECTING:

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $c > 1$. Ta có thể suy ra đồ thị các hàm số sau:

$y = cf(x)$: giãn (stretch) đồ thị hàm $y = f(x)$ theo chiều thẳng đứng c lần

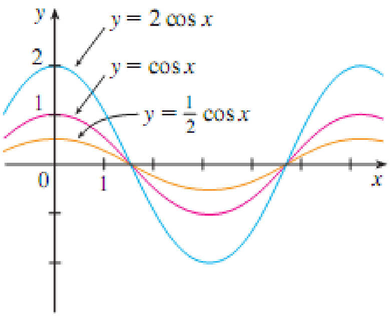
$y = \frac{1}{c} f(x)$: co (compress) đồ thị hàm $y = f(x)$ theo chiều thẳng đứng c lần

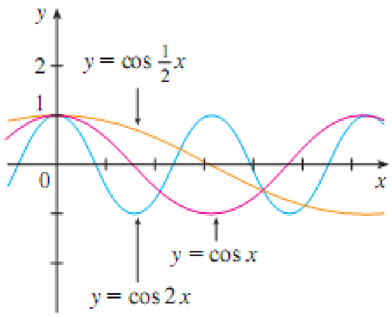
$y = f(cx)$: co (compress) đồ thị hàm $y = f(x)$ theo chiều nằm ngang c lần

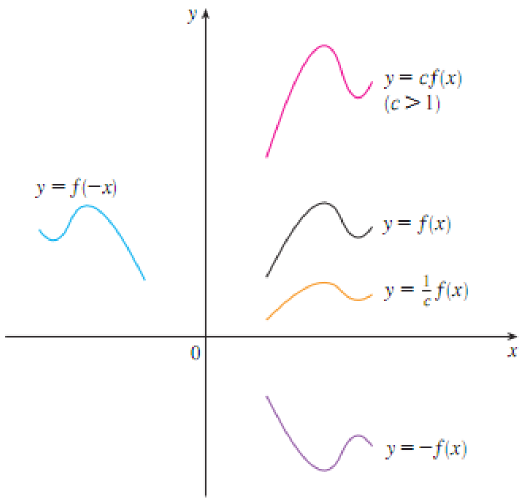
$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$: giãn (stretch) đồ thị hàm $y = f(x)$ theo chiều nằm ngang c lần

$y = -f(x)$: lấy đối xứng (reflect) đồ thị hàm $y = f(x)$ qua trục Ox

$y = f(-x)$: lấy đối xứng (reflect) đồ thị hàm $y = f(x)$ qua trục Oy



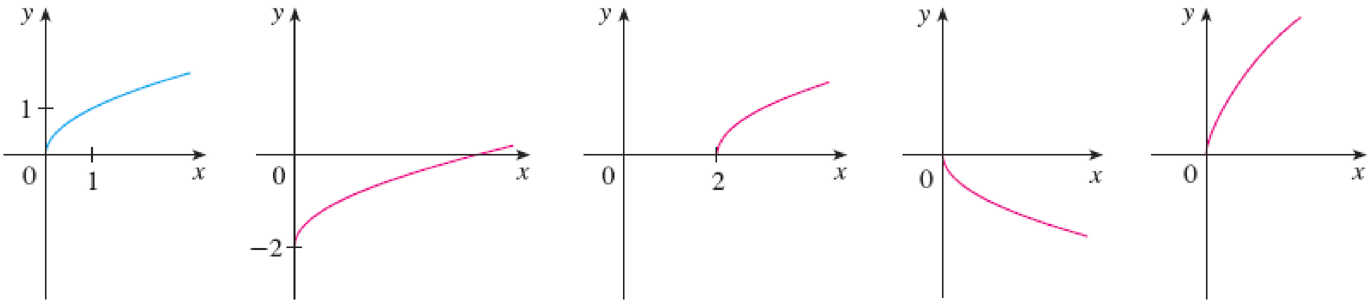




Stretching and reflecting the graph of f

Example 1: Given the graph of $y = \sqrt{x}$, use transformations to graph $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$

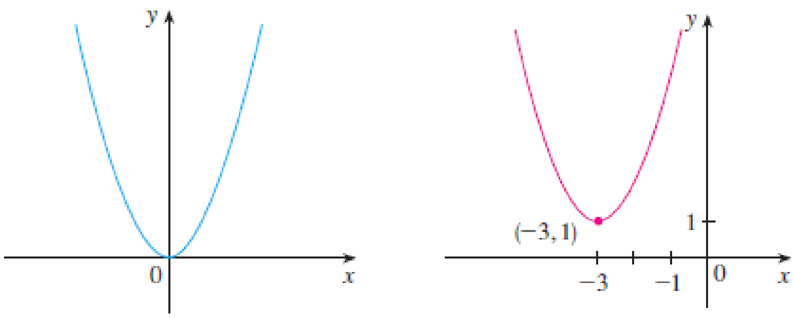
Giải:



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$

Example 2: Sketch the graph of the function $y = x^2 + 6x + 10$.

Giải:

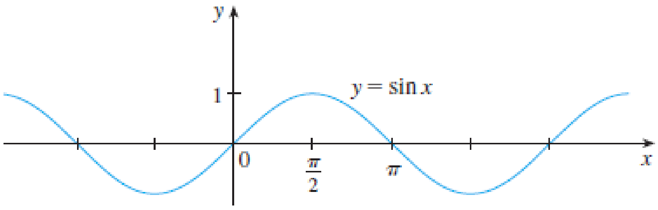


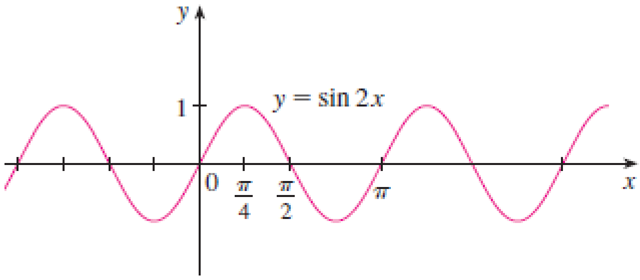
(a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

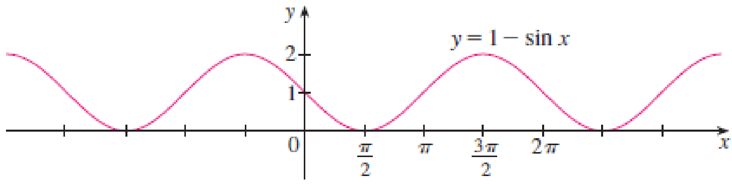
Example 3: Sketch the graphs of the following functions:

a. $y = \sin 2x$ b. $y = 1 - \sin x$

Giải:



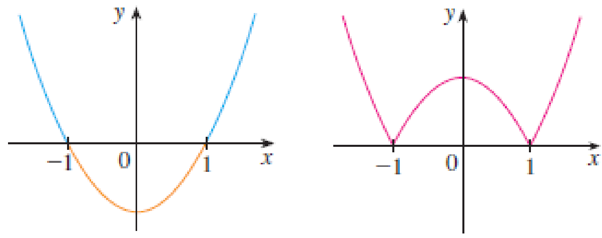




Example 4: Sketch the graph of the function: $y = |x^2 - 1|$

Giải:

Trước tiên ta vẽ đồ thị của hàm $y = x^2 - 1$ bằng cách dời đồ thị hàm $y = x^2$ xuống dưới 1 đơn vị. Tiếp theo ta lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị nằm dưới trục hoành tương ứng với $-1 < x < 1$ ta sẽ được đồ thị hàm $y = |x^2 - 1|$



(a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$

♦ SỰ PHỐI HỢP CÁC HÀM (COMBINATIONS OF FUNCTIONS):

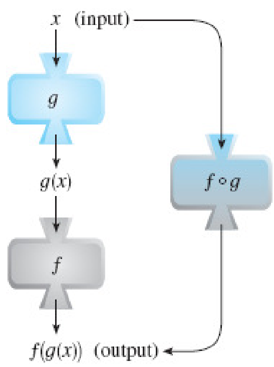
Cho 2 hàm $f(x)$, $g(x)$ có miền xác định lần lượt là A và B. Khi đó:

* Tổng (sum) và hiệu (difference) của f và g: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, có domain: $A \cap B$

* Tích (product) của hai hàm f và g: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, có domain: $A \cap B$

* Thương (quotient) của hai hàm f và g: $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có domain: $\{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$

* Hàm hợp (composition) của hai hàm f và g: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



The $f \circ g$ machine is composed of the g machine (first) and then the f machine.

Hàm hợp chỉ được xác định khi $g(x)$ thuộc domain của $f(x)$

Example 5: If $f(x) = \sqrt{x}$, and $g(x) = \sqrt{2 - x}$, find each funtion and its domain $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$

Giải: $f(x) = \sqrt{x}$ có miền xác định : $A = [0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{2 - x}$ có miền xác định : $B = [-\infty, 2)$

$(f \pm g)(x) = \sqrt{x} \pm \sqrt{2 - x}$ có miền xác định : $A \cap B = [0, +\infty) \cap [-\infty, 2) = [0, 2]$

$(fg)(x) = \sqrt{x}.\sqrt{2 - x}$ có miền xác định : $A \cap B = [0, 2]$

$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$ có miền xác định : $[A\cap B]\setminus\{x/g(x)=0\}=[0,2)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt[4]{2-x}$ có miền xác định : $\{x/2-x\geq 0\}=(-\infty,2]$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{2-\sqrt{x}}$ có miền xác định :

$$\{x/x\geq 0\}\cap\left\{x/2-\sqrt{x}\geq 0\right\}=[0,4]$$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt[4]{x}$ có miền xác định : $\{x/x\geq 0\}=[0,+\infty)$

$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ có miền xác định :

$$\{x/2-x\geq 0\}\cap\left\{x/2-\sqrt{2-x}\geq 0\right\}=[-2,2]$$

Example 7: Given $F(x)=\cos^2(x+9)$, find functions *f, g,* and h such that $F=f\circ g\circ h$.

Giải:

Đặt: $h(x)=x+9,\ \ g(x)=\cos x,\ \ f(x)=x^2$

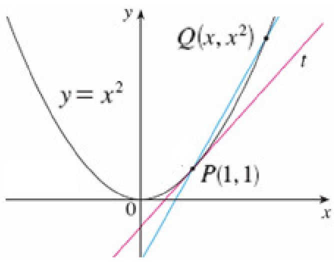
Khi đó: $f(g(h(x)))=f(g(x+9))=f(\cos(x+9))=\cos^2(x+9)=F(x)$

4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (THE LIMIT OF A FUNCTION)

4.1 BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN VÀ BÀI TOÁN VẬN TỐC (THE TANGENT AND VELOCITY PROBLEMS):

♦ BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN (TANGENT PROBLEM):

Example 1: Find an equation of the tangent line t to the parabola $y=x^2$ at the point $P(1,1)$.



Giải: Trước hết cần tìm hệ số góc (slope) m của tiếp tuyến t:

Lấy điểm $Q(x,x^2)$ thuộc parabola thì hệ số góc của cát tuyến (secant) PQ là $m_{PQ}=\frac{x^2-1}{x-1}$. Xem bảng tính giá trị của m_{PQ} tại các điểm x nhận giá trị gần với giá trị $x=1$ ta thấy khi $x\to 1$ (thì $Q\to P$ hay cát tuyến $PQ\to$ vị trí của tiếp tuyến t) thì $m_{PQ}\to m(\approx 2)$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Ta nói: hệ số góc của tiếp tuyến là giới hạn (limit) của hệ số góc của cát tuyến và viết:

$$\lim_{Q\to P} m_{PQ}=m \quad \text{hay} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

Vậy phương trình của đường tiếp tuyến t tại điểm $P(1,1)$ là:

$$y-1=2(x-1)\leftrightarrow y=2x-1$$

♦ BÀI TOÁN VẬN TỐC (THE VELOCITY PROBLEM)

Example 2: Suppose that a ball is dropped from the upper observation deck of the CN Tower in Toronto, 450 m above the ground. Find the velocity of the ball after 5 seconds.

Giải:

Theo định luật Galileo, khoảng cách rơi sau t giây của vật rơi tự do (không xét đến lực cản không khí) là: $s(t) = 4.9t^2$

Vấn đề của ta là tìm vận tốc của quả bóng sau 5 giây, tức là vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$

Trước hết ta tìm vận tốc trung bình trong một khoảng thời gian ngắn $\frac{1}{10}$s từ $t = 5$ đến $t = 5.1$:

$$v_{tb} = \frac{s(5.1) - s(5)}{5.1 - 5} = \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49\ m/s$$

Bảng bên là những kết quả tính toán tương tự cho vận tốc trung bình trong các khoảng thời gian khác rất gần thời điểm $t = 5$, ta thấy vận tốc trung bình trở nên gần với giá trị $49\ m/s$, điều đó cho ta kết luận vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$ là $v = 49\ m/s$.

Time interval	Average velocity (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

Giải quyết hai bài toán trên, đòi hỏi phải thực hiện các phép tính giới hạn. Trong các mục sau ta sẽ từng bước tìm hiểu rõ hơn về phép tính giới hạn

4.2 GIỚI HẠN HÀM SỐ (THE LIMIT OF A FUNCTION):

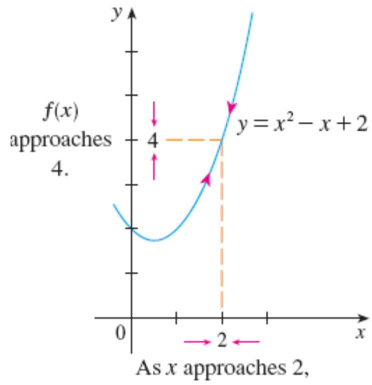
Để có cái nhìn trực quan về giới hạn hàm số, ta xét ví dụ:

Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$. Tính giá trị của $f(x)$ khi x gần 2.

Xem bảng tính giá trị của $f(x)$ khi x gần 2 nhưng x không bằng 2.

Từ bảng giá trị và đồ thị hàm f ta thấy, khi x dần về 2 (từ hai phía của 2) thì $f(x)$ dần về 4. Có nghĩa, giá trị của $f(x)$ có thể gần 4 một cách tùy thích nếu chọn x đủ gần 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001



Khi đó ta nói: "giới hạn của hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ khi x dần đến 2 bằng 4", viết:

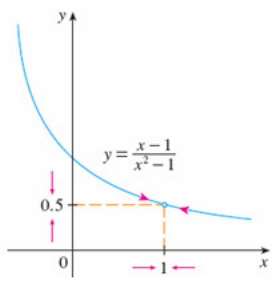
$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

DEFINITION: Giới hạn của hàm số $f(x)$, khi x dần đến a, bằng L nếu giá trị của $f(x)$ có thể gần L một cách tùy ý khi lấy giá trị của x đủ gần a (về cả hai phía của a) nhưng x không bằng a, và viết: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Lưu ý: trong định nghĩa trên ta chỉ quan tâm đến giá trị của hàm số $f(x)$ khi x nhận những giá trị gần a nhưng $x \neq a$. Vậy ta không cần quan tâm đến hàm số có xác định tại a hay không

Example 1: Guess the value of $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

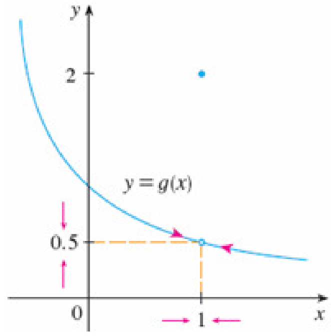
$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025



Giải: Hàm f không xác định khi $x=1$, tuy nhiên ta chỉ quan tâm đến giá trị của $f(x)$ khi x gần 1 và $x \neq 1$. Bảng bên là giá trị của $f(x)$

Dựa vào bảng ta dự đoán được $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975



Nếu thay đổi hàm f bởi hàm g như sau:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & khi\ x \neq 1 \\ 2 & khi\ x = 1 \end{cases}$$

Hàm g vẫn có giới hạn bằng 0.5 khi x dần đến 1 (xem hình bên)

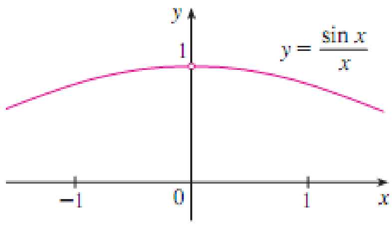
Một lần nữa ta thấy không cần quan tâm đến giá trị của hàm số tại điểm cần tính giới hạn.

Example 2: Guess the value of $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Giải: Hàm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ không xác định tại $x = 0$.

Bảng bên đưa ra những giá trị của f đúng đến tám chữ số thập phân. Dựa vào bảng ta dự đoán $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983



Example 3: Investigate $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{\pi}{x}$.

Giải: Hàm số $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$ không xác định tại $x = 0$.

Tính các giá trị của $f(x)$ khi x gần 0:

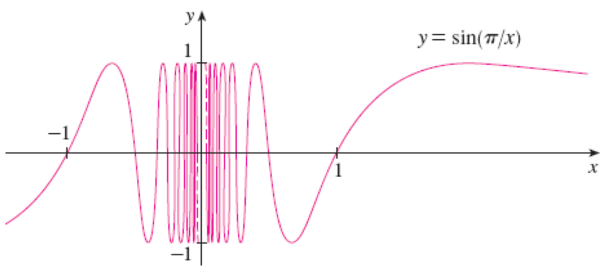
$$f(1) = \sin \pi = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin 2\pi = 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin 3\pi = 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \sin 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \sin 10\pi = 0, \quad f(0.01) = \sin 100\pi = 0, \quad f(0.001) = f(0.0001) = 0$$

Dựa vào các tính toán trên có thể dự đoán $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{\pi}{x} = 0$.

Tuy nhiên dự đoán này không đúng.
Lý do để dẫn đến dự đoán không đúng là vì ta chọn tính các giá trị của hàm f không bao quát,

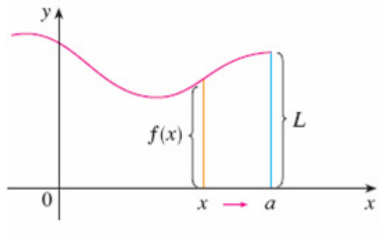
Xét thêm đồ thị của hàm f để thấy rõ điều này.



Nhìn vào đồ thị ta thấy có những đường gần như thẳng đứng và rất dày ở gần trục tung, có nghĩa các giá trị của $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ dao động giữa -1 và 1 vô hạn lần khi x dần đến 0. Vì giá trị của $f(x)$ không dần đến một số cố định khi x dần đến 0 nên $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{\pi}{x}$ không tồn tại.

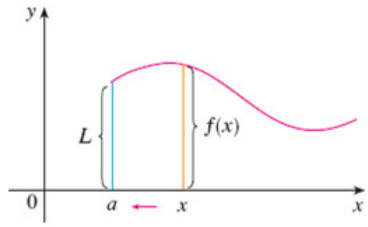
♦ GIỚI HẠN MỘT PHÍA (ONE-SIDED LIMITS)

DEFINITION: Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến a từ bên trái bằng L $\left[\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L\right]$ nếu giá trị của hàm số $f(x)$ có thể gần L một cách tùy ý khi lấy giá trị của x đủ gần a và x nhỏ hơn a



(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

DEFINITION: Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến a từ bên phải bằng L $\left[\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L\right]$ nếu giá trị của hàm số $f(x)$ có thể gần L một cách tùy ý khi lấy giá trị của x đủ gần a và x lớn hơn a

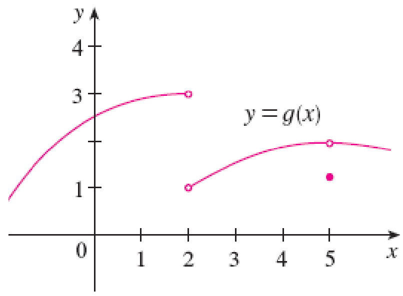


(b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

Một kết quả hiển nhiên suy từ các định nghĩa:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x\to a^-} f(x)=L \text{ và } \lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

Example 4: The graph of a function g is shown. Use it to state the values (if they exist) of the following:



a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ b. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ c. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

d. $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$

Giải: Dựa vào đồ thị ta có:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=3$ b. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=1$

c. Vì giới hạn bên trái và giới hạn bên phải của g là khác nhau nên $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ không tồn tại.

d. $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)=2$ e. $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)=2$ f. $\lim\limits_{x\to 5} g(x)=2$

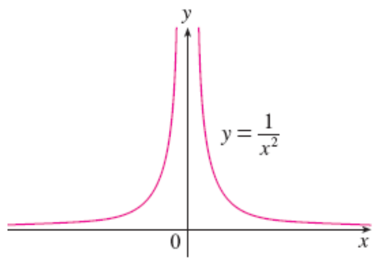
♦ GIỚI HẠN VÔ CÙNG (INFINITE LIMITS)

Example 5: Find $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ if it exists.

Giải:

Khi x dần đến 0 thì x^2 cũng dần đến 0 và $\frac{1}{x^2}$ trở nên rất lớn (xem bảng bên). Nhìn vào đồ thị của hàm $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ta thấy rằng giá trị của $f(x)$ có thể lớn một cách tùy ý khi x đủ gần 0. Vậy giá trị $f(x)$ không thể dần đến một số nào đó, ta nói $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ không tồn tại, và viết $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ [∞ không phải là một số, đẳng thức này chỉ là hình thức, nó mang ý nghĩa giới hạn không tồn tại và $\frac{1}{x^2}$ có thể trở nên lớn tùy ý khi x đủ gần 0]

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

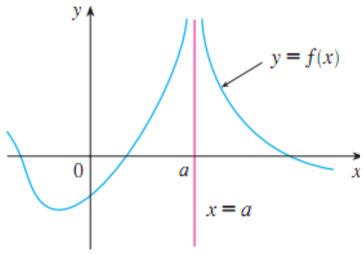


DEFINITION: Cho hàm f xác định về hai phía điểm a, trừ điểm a.

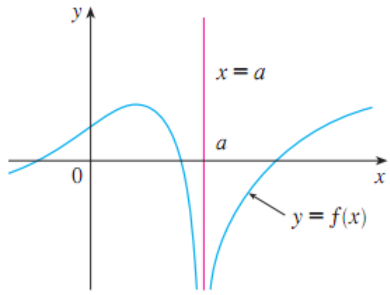
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ nếu giá trị $f(x)$ có thể lớn tùy ý khi x đủ gần a, $x\neq a$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ nếu giá trị $f(x)$ có thể âm, lớn tùy ý khi x đủ gần a, $x\neq a$

Chẳng hạn ta có ví dụ sau:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$



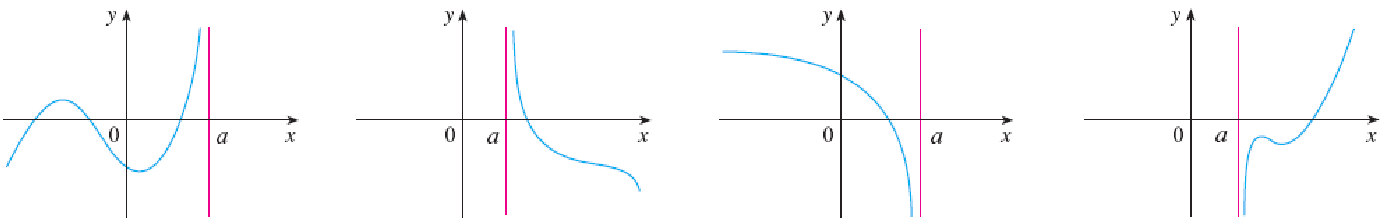
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Một cách tương tự ta có thể định nghĩa các giới hạn một phía:

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Các hình sau minh họa thêm cho các giới hạn trên:



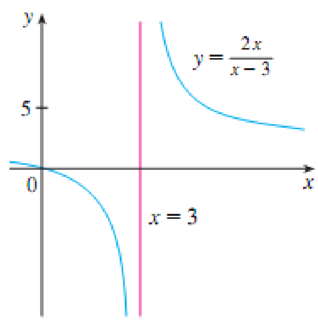
(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ $\quad$ (b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ $\quad$ (c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\quad$ (d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

DEFINITION: Đường thẳng $x=a$ gọi là tiệm cận đứng (vertical asymptote) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều sau xảy ra:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

Example 6: Find $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}$ and $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}$.



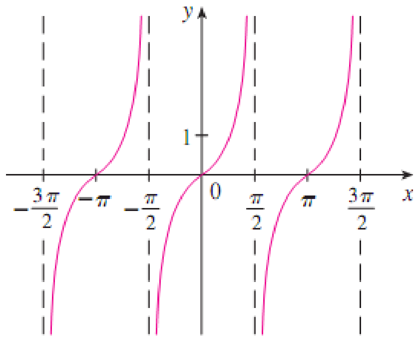
Giải:

Khi $x\to 3^+$ thì $x-3\to 0^+$ và $2x\to 6$. Vậy $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}=\infty$.

Tương tự, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}=-\infty$.

Đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm $y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}$

Example 7: Find the vertical asymptotes of $f(x)=\tan x$



Giải:

Vì $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ nên có khả năng có nhiều tiệm cận đứng tại các giá trị làm cho $\cos x$ bằng 0.

Ta có $\cos x\to 0^+$ khi $x\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$ và

$$\cos x \to 0^- \text{ khi } x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$$

Mặt khác $\sin x > 0$ khi x gần $\frac{\pi}{2}$.

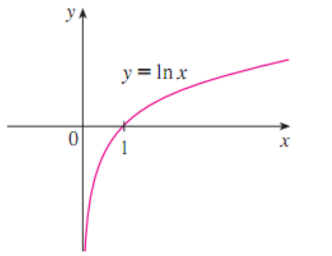
$\to \lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty$ và $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \tan x = -\infty$. Vậy đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ là tiệm cận đứng.

Tương tự, các đường thẳng $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ đều là các đường tiệm cận đứng của hàm số $y = \tan x$.

Một ví dụ khác, đồ thị hàm số $y = \ln x$ có tiệm cận đứng là trục Oy, có phương trình $x = 0$, vì

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Kết quả trên cũng đúng cho hàm $y = \log_a x$ với $a > 1$ tùy ý.



The y-axis is a vertical asymptote of the natural logarithmic function.

4.3 LUẬT TÍNH GIỚI HẠN (CALCULATING LIMITS USING THE LIMIT LAWS):

LIMIT LAWS: Giả sử tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ và c là một hằng số thì:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ *if* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$, $n \in \mathbb{N}$

6. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

7. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

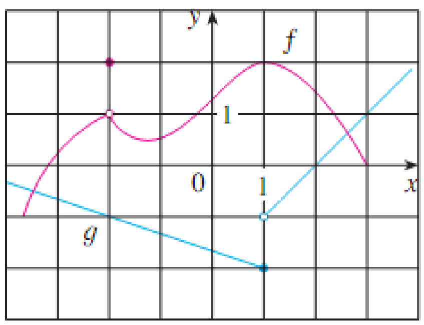
8. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n, n \in \mathbb{N}$

9. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$ [Nếu n chẵn, ta giả sử $a > 0$]

10. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $n \in \mathbb{N}$ [Nếu n chẵn, ta giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$]

♦ ***Lưu ý:*** các luật trên cũng đúng cho giới hạn một phía

Example 1: Use the Limit Laws and the graphs of f and g to evaluate the following limits, if they exist.



a. $\lim\limits_{x\to -2}[f(x) + 5g(x)]$ b. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Giải:

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = -1$, vậy

$$\lim_{x\to -2}[f(x) + 5g(x)] = \lim_{x\to 2^-} f(x) + \lim_{x\to 2^-}[5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) = 1 + 5(-1) = -4$$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ không tồn tại nên ta không thể áp dụng luật 3 trực tiếp được. Ta sẽ áp dụng luật 3 cho giới hạn một phía:

$$\lim_{x\to 1^-}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to 1^-} f(x).\lim_{x\to 1^-} g(x)=2.(-2)=-4$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to 1^+} f(x).\lim_{x\to 1^+} g(x)=2.(-1)=-2$$

Vì giới hạn bên trái và bên phải không bằng nhau nên $\lim_{x\to 1}\left[f(x)g(x)\right]$ không tồn tại.

c. Đồ thị chỉ ra rằng $\lim_{x\to 2} f(x)\approx 1.4,\ \lim_{x\to 2} g(x)=0$. Vậy ta không thể áp dụng luật 4.

Tuy nhiên ta kết luận được giới hạn không tồn tại vì mẫu số tiến đến 0 còn tử số tiến về một số khác 0.

Example 2: Evaluate the following limits and justify each step.

a. $\lim_{x\to 5}\left(2x^2-3x+4\right)$ b. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

Giải:

a. $\lim_{x\to 5}\left(2x^2-3x+4\right)=\lim_{x\to 5}\left(2x^2\right)-\lim_{x\to 5}(3x)+\lim_{x\to 5}4$ (luật 1)

$=2\lim_{x\to 5}x^2-3\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}4$ (luật 2)

$=2\left(5^2\right)-3(5)+4=39$ (luật 6, 7,8)

b. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\dfrac{\lim_{x\to -2}\left(x^3+2x^2-1\right)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)}$ (luật 4)

$=\dfrac{\lim_{x\to -2}x^3+2\lim_{x\to -2}x^2-\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}5-3\lim_{x\to -2}x}$ (luật 1, 2)

$=\dfrac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}=-\dfrac{1}{11}$ (luật 6, 7, 8)

DIRECT SUBSTITUTION PROPERTY: Nếu f là một đa thức hay một hàm hữu tỷ và a thuộc miền xác định của f thì $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Example 3: Find $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Giải:

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Đây là hàm hữu tỷ nhưng không thể tính giới hạn bởi việc thay thế giá trị $x=1$ vào hàm số được vì $f(1)$ không xác định.

Ta có $\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$ $(x-1\neq 0$ do $x\neq 1)$. Vậy $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$.

Nếu $f(x)=g(x),\ x\neq a$ và các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ tồn tại thì $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$

Example 4: Find $\lim_{x\to 1} g(x)$, where $g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{if } x\neq 1 \\ \pi & \text{if } x=1 \end{cases}$

Giải: Vì $g(x)=x+1,\ x\neq 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

Để ý với $x\neq 1$, hàm $g(x)$ là hàm $f(x)$ trong ví dụ 3 nên $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

Example 5: Evaluate $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$.

Giải:

Đặt $F(h)=\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$. Ta có $F(h)=\dfrac{(9+6h+h^2)-9}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=6+h \quad (h\neq 0)$

Vậy: $\lim\limits_{h\to 0}F(h)=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=6$

Example 6: Find $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

Giải: Vì:

$$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}.\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}\quad (t\neq 0)$$

Vậy: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t\to 0}(t^2+9)}+3}=\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$

Example 7: Show that $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

Giải:

Ta có $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

$\to\ \lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0,\ \ \lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$. Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

Example 8: Prove that $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ does not exist.

Giải: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1,\ \ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

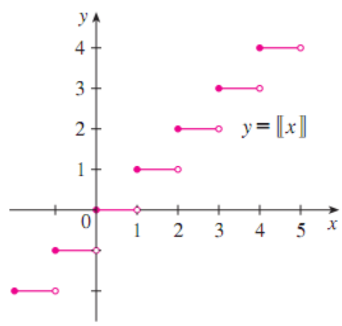
Example 9: If $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4} & \text{if } x>4\\ 8-2x & \text{if } x<4\end{cases}$, determine whether $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ exists.

Giải: Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=\sqrt{4-4}=0,\ \lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(8-2x)=8-2.4=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$

Example 10: The greatest integer function is defined by $[\![x]\!]=$ the largest integer that is less than or equal to x. (For instance, $[\![4]\!]=4,\ [\![4.8]\!]=4,\ [\![\pi]\!]=3,\ [\![\sqrt{2}]\!]=1,\ \left[\!\!\left[-\dfrac{1}{2}\right]\!\!\right]=-1$).

Show that $\lim\limits_{x\to 3}[\![x]\!]$ does not exist.



Greatest integer function

Giải:

Ta có $[\![x]\!]=3$ nếu $3\le x<4 \to \lim\limits_{x\to 3^+}[\![x]\!]=\lim\limits_{x\to 3^+}3=3$.

Và $[\![x]\!]=2$ nếu $2\le x<3 \to \lim\limits_{x\to 3^-}[\![x]\!]=\lim\limits_{x\to 3^-}2=2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 3}[\![x]\!]$ không tồn tại.

> THEOREM: Nếu $f(x)\le g(x)$ khi x gần a (có thể trừ điểm a) và $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ đều tồn tại thì: $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le \lim\limits_{x\to a}g(x)$

> THE SQUEEZE THEOREM: Nếu $f(x)\le g(x)\le h(x)$ khi x gần a (có thể trừ điểm a) và $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$ thì: $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$.

Example 11: Show that $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

Giải: Ta không thể viết $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2.\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Giới hạn này được tính như sau:

Vì $-1\le \sin\dfrac{1}{x}\le 1 \to -x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$. Mặt khác, $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0$.

Áp dụng định lý Squeeze Theorem ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

4.4 ĐỊNH NGHĨA CHÍNH XÁC GIỚI HẠN (THE PRECISE DEFINITION OF A LIMIT):

Định nghĩa giới hạn một cách trực giác như trong mục 2.2 là rất mơ hồ ở các thuật ngữ “$f(x)$ gần L một cách tùy ý” và “x đủ gần 2” và. Để đưa ra định nghĩa chính xác giới hạn, ta xét hàm:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\ne 3\\ 6, & x=3\end{cases}$$

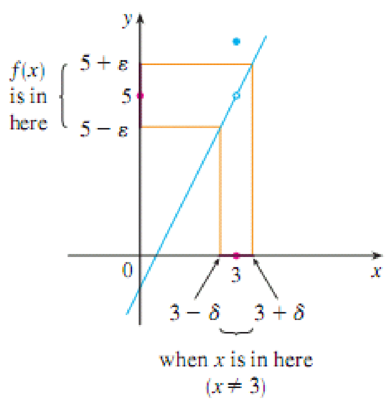
Trực giác nhận thấy khi x dần đến 3 nhưng $x\ne 3$ thì $f(x)$ dần đến 5, vì vậy $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=5$

Để biết chi tiết hơn $f(x)$ thay đổi như thế nào khi x dần đến 3, ta trả lời câu hỏi sau:

x gần 3 như thế nào để sai khác giữa $f(x)$ và 5 nhỏ hơn 0.1?

Khoảng cách từ x đến 3 là $|x-3|$, khoảng cách từ $f(x)$ đến 5 là $|f(x)-5|$, vậy vấn đề của chúng ta là tìm số δ sao cho:

$|f(x)-5|<0.1$ nếu $|x-3|<\delta$ và $x\ne 3$, hay nếu $0<|x-3|<\delta$



Ta có, với $0<|x-3|<(0.1)/2=0.05$ thì $|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=2|x-3|<2(0.05)=0.1$

Vậy nếu khoảng cách từ x đến 3 nhỏ hơn 0.05 thì khoảng cách từ $f(x)$ đến 5 nhỏ hơn 0.1, số δ cần tìm là 0.05

Nếu thay đổi số 0.1 bởi số nhỏ hơn 0.01, lập luận như trên ta có:

$$\left|f(x)-5\right|<0.01 \text{ nếu } 0<\left|x-3\right|<0.005$$

Tương tự,

$$\left|f(x)-5\right|<0.001 \text{ nếu } 0<\left|x-3\right|<0.0005$$

Những con số 0.1; 0.01; 0.001 ở trên thể hiện mức độ "$f(x)$ gần 5" hay đây chính là sai số giữa $f(x)$ và 5 mà ta tùy chọn. Để có thể nói chính xác giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến 3 là 5 ta không thể chỉ xét khoảng cách giữa $f(x)$ và 5 nhỏ hơn vài con số nhỏ cụ thể, mà cần xét tại bất kỳ một khoảng cách dương nhỏ nào. Nếu viết ε (epsilon) là số dương nhỏ tùy ý, với cách tìm như trên ta có:

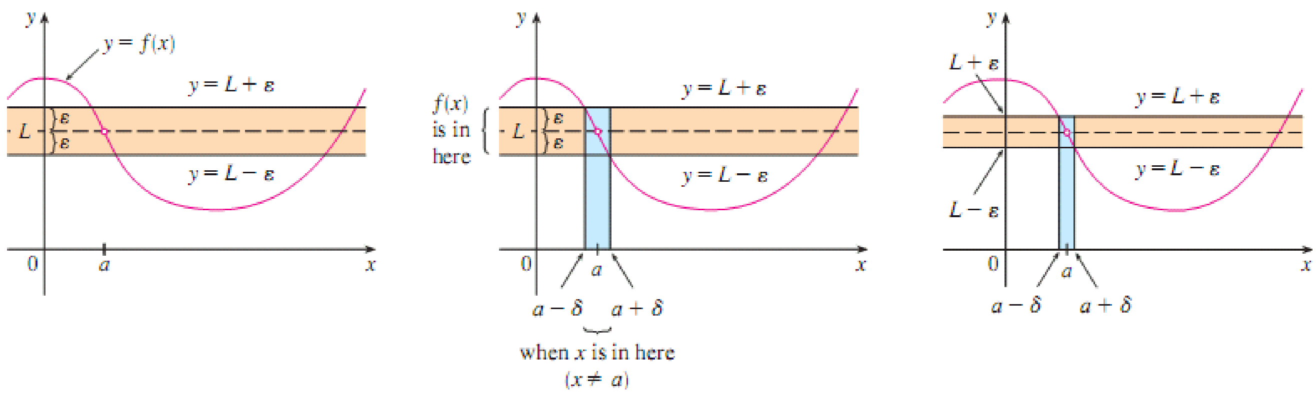
$$\left|f(x)-5\right|<\varepsilon \text{ nếu } 0<\left|x-3\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Đây là cách chính xác để nói rằng $f(x)$ dần đến 5 khi x dần đến 3 vì chúng ta có thể làm cho giá trị của $f(x)$ gần 5 một khoảng cách ε nhỏ tùy ý bằng cách lấy những giá trị của x cách 3 một khoảng ε/2 ($x \neq 3$).

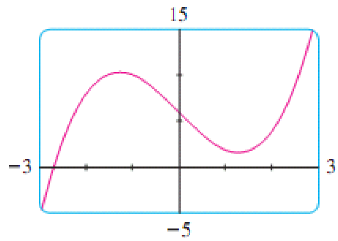
DEFINITION: Giả sử hàm f xác định trên khoảng mở chứa điểm a, có thể trừ điểm a.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ nếu với mỗi số $\varepsilon>0$, tồn tại số $\delta>0$ thỏa $0<\left|x-a\right|<\delta$ thì $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$.

Lưu ý: $\left|x-a\right|<\delta \leftrightarrow -\delta<x-a<\delta \leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$

và $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon \leftrightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$

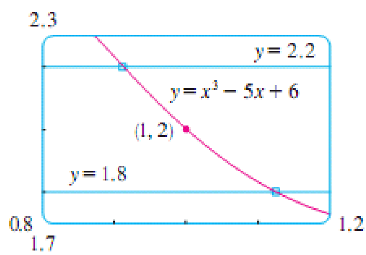


♦ Vậy ta có thể phát biểu lại định nghĩa giới hạn như sau: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ nếu với mỗi số $\varepsilon>0$, có thể tìm số $\delta>0$ để với x thuộc khoảng $(a-\delta, a+\delta)$ thì $f(x)$ thuộc khoảng $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$



Example 1: Use a graph to find a number δ such that

if $\left|x-1\right|<\delta$ then $\left|(x^3-5x+6)-2\right|<0.2$. In other words, find a number δ that corresponds to $\varepsilon=0.2$ in the definition of a limit for the function $f(x)=x^3-5x+6$ with $a=1$ and $L=2$.



Giải: Từ bất đẳng thức (inequality):

$$\left|(x^3-5x+6)-2\right|<0.2 \rightarrow 1.8<x^3-5x+6<2.2$$

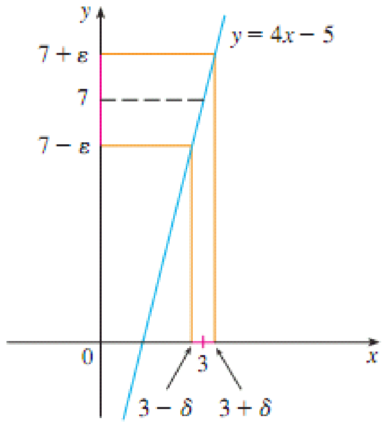
Vậy ta cần xác định giá trị của x để đường cong $y = x^3 - 5x + 6$ nằm giữa các đường nằm ngang $y = 1.8$ và $y = 2.2$

Hoành độ giao điểm của đường $y = 1.8$ và $y = x^3 - 5x + 6$ là $x \approx 0.911$ và của đường $y = 2.2$ và $y = x^3 - 5x + 6$ là $x \approx 1.1124$. Ta có thể nói nếu $0.92 < x < 1.12$ thì $1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$

Vì khoảng $(0.92, 1.12)$ không đối xứng qua điểm $x = 1$: khoảng cách từ 1 đến điểm cuối bên trái là $1 - 0.92 = 0.08$ và khoảng cách từ 1 đến điểm cuối bên phải là $1.12 - 1 = 0.12$, vậy ta chọn δ là số nhỏ hơn trong hai số 0.08 và 0.12 là 0.08, khi đó ta viết:

Nếu $|x-1| < 0.08$ thì $\left|\left(x^3 - 5x + 6\right) - 2\right| < 0.2$

Example 2: Prove that $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$.



Giải:

- Phân tích sơ bộ ban đầu để dự đoán δ:

Cho $\varepsilon > 0$, ta sẽ tìm số δ thỏa mãn:

nếu $0 < |x-3| < \delta$ thì $|(4x-5) - 7| < \varepsilon$

Vì $|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| < \varepsilon$ khi $|(x-3)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$

Đến đây ta dự đoán $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

- Chứng minh: Với $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$. Nếu $0 < |x-3| < \delta$ thì:

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|(x-3)| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon.$$

Vậy theo định nghĩa giới hạn: $\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7$.

♦ Tương tự ta chính xác các định nghĩa giới hạn một phía như sau:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ thỏa $a - \delta < x < a$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ thỏa $a < x < a + \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Example 3: Use Definition to prove that $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Giải:

- Phân tích để dự đoán δ:

Cho $\varepsilon > 0$, ở bài toán này $a = 0,\ L = 0$. Ta sẽ tìm số δ thỏa mãn: nếu $0 < x < \delta$ thì $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$

Có nghĩa nếu $0 < x < \delta$ thì $\sqrt{x} < \varepsilon$. Từ đây ta có nếu $0 < x < \delta$ thì $x < \varepsilon^2$. Dự đoán $\delta = \varepsilon^2$

- Chứng minh: Với $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \varepsilon^2$. Nếu $0 < x < \delta$ thì $\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$ ta có $\left|\sqrt{x} - 0\right| < \varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn bên phải điểm 0, ta có $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Example 4: Prove that $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Giải:

- Phân tích để dự đoán δ:

Cho $\varepsilon > 0$, ở bài toán này $a = 3,\ L = 9$. Ta sẽ tìm số δ thỏa: nếu $0 < |x-3| < \delta$ thì $|x^2 - 9| < \varepsilon$

hay $0 < |x-3| < \delta$ thì $|x+3||x-3| < \varepsilon$

Nếu $\delta < 1$ thì $|x-3| < 1$ hay $2 < x < 4$, khi đó $|x+3| < 7$, vậy ta dự đoán δ là số nhỏ hơn 1 và $\varepsilon/7$. Ta chọn $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$.

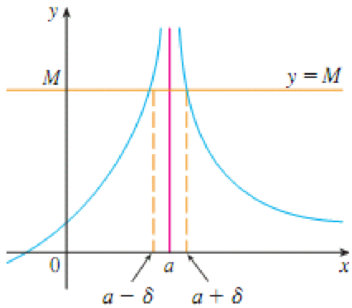
- Chứng minh: Với $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$.

Nếu $0 < |x-3| < \delta \to |x-3| < 1 \to 2 < x < 4 \to |x+3| < 7$.

Ta cũng có $|x-3| < \varepsilon/7$ nên $|x^2 - 9| = |x+3||x-3| < 7.\varepsilon/7 = \varepsilon$. Vậy $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

4.5 GIỚI HẠN VÔ HẠN (INFINITE LIMITS)

DEFINITION: Giả sử hàm f xác định trên khoảng mở chứa điểm a, có thể trừ điểm a. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ nếu với mỗi số $M > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ thỏa $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) > M$.

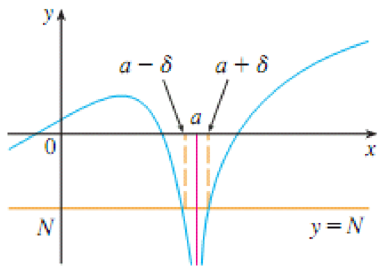


Example 5: Use Definition to prove that $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Giải: Cho $M > 0$, ta sẽ tìm số δ thỏa mãn: nếu $0 < |x| < \delta$ thì $\frac{1}{x^2} > M$

Vì $\frac{1}{x^2} > M \leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Vậy nếu chọn $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ và $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ thì $\frac{1}{x^2} > M$. Điều này nói rằng $\frac{1}{x^2} \to \infty$ khi $x \to 0$.

DEFINITION: Giả sử hàm f xác định trên khoảng mở chứa điểm a, có thể trừ điểm a. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ nếu với mỗi số $N < 0$, tồn tại số $\delta > 0$ thỏa $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) < N$.

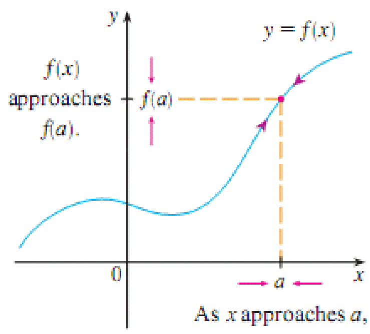


5. LIÊN TỤC (CONTINUITY):

DEFINITION: Hàm f liên tục tại điểm a (continuous at a number a) nếu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Lưu ý: có 3 điều kiện trong định nghĩa để hàm f liên tục tại a:

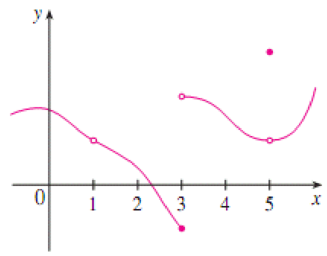
- $f(a)$ được xác định (a thuộc miền xác định của f);
- Tồn tại $\lim_{x\to a} f(x)$;
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.



Hàm số f không liên tục, ta nói f gián đoạn (*discontinuous*) tại a

Đồ thị của hàm số liên tục tại một điểm không bị đứt tại đó.

Example1: Figure shows the graph of a function *f*. At which numbers is *f* discontinuous? Why?



Giải:

- Hàm f không liên tục tại $x=1$ vì $f(1)$ không xác định (đồ thị bị đứt tại đó)

- Hàm f không liên tục tại $x=3$ vì không tồn tại $\lim_{x\to 3} f(x)$ $\left[\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)\right]$

- Hàm f không liên tục tại $x=5$ vì $\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$ ($f(5)$ và $\lim_{x\to 5} f(x)$ đều tồn tại).

Example 2: Where are each of the following functions discontinuous?

a. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, x \neq 2 \\ 1, \qquad\qquad x = 2 \end{cases}$ d. $f(x) = [\![x]\!]$(số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng x)

Giải:

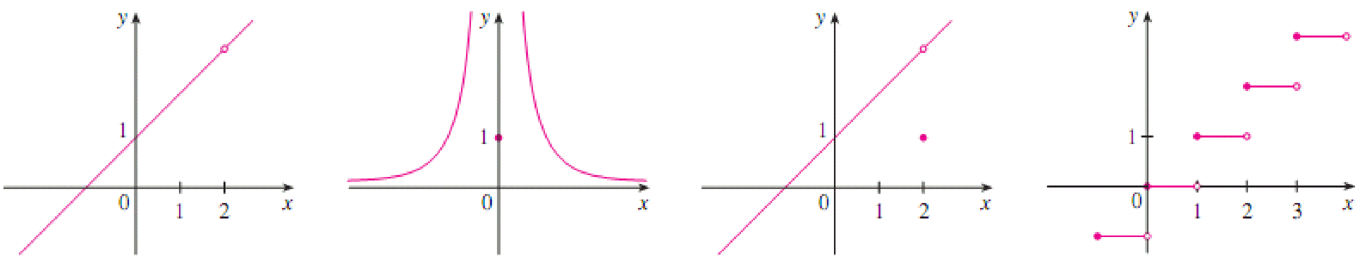
a. Hàm f không xác định tại $x=2$. Vậy f không liên tục tại $x=2$.

b. Ta có $f(0)=1$ nhưng $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ không tồn tại. Vậy *f* không liên tục tại $x=0$.

c. Ta có $f(2)=1$ và $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3$

Vì $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ do đó *f* không liên tục tại $x=2$.

d. Hàm $f(x) = [\![x]\!]$ không liên tục tại tất cả các số nguyên *n* vì $\lim_{x\to n} [\![x]\!]$ không tồn tại.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x \neq 2 \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

Quan sát đồ thị các hàm trên, ta thấy các đường biểu diễn đồ thị không liền, hoặc là nó có lỗ (hole), hoặc là nó bị đứt (break), hoặc là nó có bước nhảy (jump). Điểm không liên tục trong hình (a) và (c) gọi là gián đoạn bỏ được (removable) vì ta có thể bỏ nó bằng cách xây dựng lại hàm *f*. Gián đoạn trong hình (b) gọi là gián đoạn vô hạn (infinite discontinuity). Gián đoạn trong hình (d) gọi là gián đoạn có bước nhảy (jump discontinuity) vì hàm nhảy từ giá trị này sang giá trị khác.

DEFINITION: Hàm f liên tục bên phải điểm *a* nếu $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, liên tục bên trái điểm *a* nếu $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Example 3: Tại mỗi số nguyên n, hàm $f(x)=[\![x]\!]$ liên tục bên phải nhưng không liên tục bên trái vì $\lim\limits_{x\to n^+}[\![x]\!]=n=f(n)$, $\lim\limits_{x\to n^-}[\![x]\!]=n-1\neq f(n)$.

> DEFINITION: Hàm f liên tục trong một khoảng (interval) nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (Nếu f chỉ được xác định về 1 phía của điểm đầu/cuối của khoảng, ta hiểu sự liên tục tại các điểm ấy theo nghĩa liên tục bên phải/bên trái)

Example 4: Show that the function $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ is continuous on the interval $[-1,1]$.

Giải: Nếu $-1<a<1$, sử dụng luật giới hạn ta có:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=1-\lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{1-a^2}=f(a).$$

Vậy f liên tục tại a với $-1<a<1$

Ngoài ra, tính toán tương tự $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1=f(-1)$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$.

Vậy f liên tục bên phải điểm -1, bên trái điểm 1. Do đó f liên tục trên $[-1,1]$.

> THEOREM: Nếu f và g là các hàm liên tục tại a, và c là một hằng số thì các hàm sau cũng liên tục tại a:
>
> 1. $f\pm g$ 2. cf 3. fg 4. $\dfrac{f}{g}g(a)\neq 0\left[g(a)\neq 0\right]$

Chứng minh: Ta chứng minh kết luận 1, các kết luận khác chứng minh tương tự

Vì f, g liên tục tại a, ta có: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]+\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

Vậy $f+g$ liên tục tại a

> THEOREM: Các hàm sau liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó:
>
> Hàm đa thức, Hàm hữu tỷ, Hàm căn thức, Hàm lượng giác
>
> Hàm lượng giác ngược, Hàm mũ, Hàm logarithm

Example 5: Find $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$.

Giải: Xét hàm hữu tỷ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ có miền xác định là $\left\{x/x\neq\dfrac{5}{3}\right\}$

Vậy f liên tục tại điểm -2, do đó $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=f(-2)=\dfrac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}=-\dfrac{1}{11}$.

Example 6: Where is the function $f(x)=\dfrac{\ln x+\tan^{-1}x}{x^2-1}$ continuous?

Giải: Ta có hàm $y=\ln x$ liên tục với $x>0$, hàm $y=\tan^{-1}x$ liên tục trên $\mathbb{R}\to$ $y=\ln x+\tan^{-1}x$ liên tục trên $(0,\infty)$. Vậy hàm *f(x)* đã cho liên tục trên $(0,\infty)$, trừ các giá trị của x mà $x^2-1=0$ hay $x=1$. Nói cách khác f liên tục trên $(0,1)$ và $(1,\infty)$.

Example 7: Evaluate $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

Giải: Hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ xác định với mọi x nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}=\lim_{x\to\pi}f(x)=f(\pi)=0.$$

THEOREM: Nếu f liên tục tại b và $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ thì $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)=f(b)$

♦ Hệ quả: $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{g(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

Example 8: Evaluate $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

Giải: Vì arcsin là hàm liên tục, do đó:

$$\lim_{x\to 1}\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)=\arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)=\arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

THEOREM: Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại $g(a)$ thì hàm hợp $f\circ g$ liên tục tại a

Chứng minh: g liên tục tại a: $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

f liên tục tại $b=g(a)$: $\lim\limits_{x\to a}f\left[g(x)\right]=f\left[g(a)\right]\leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(a)$

Vậy hàm hợp $f\circ g$ liên tục tại a

Example 9: Where are the following functions continuous?

$(a)\;\; h(x)=\sin\left(x^2\right)$ $\qquad\qquad (b)\;\; F(x)=\ln(1+\cos x)$

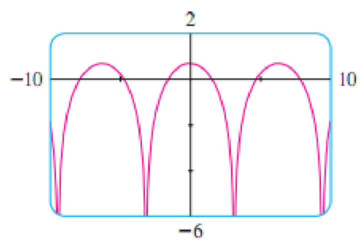
Giải:

(a) Ta có $h(x)=f(g(x))$, trong đó $g(x)=x^2$ và $f(x)=\sin x$

Vì g và f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(b) $\ln(1+\cos x)$ xác định khi $1+\cos x>0\ \rightarrow$ hàm không xác định khi $\cos x=-1\leftrightarrow x=\pm\pi,\pm3\pi,\ldots$

Vậy, $F(x)$ gián đoạn khi x là bội lẻ của π và liên tục trên các khoảng nằm giữa các giá trị này (xem hình bên).

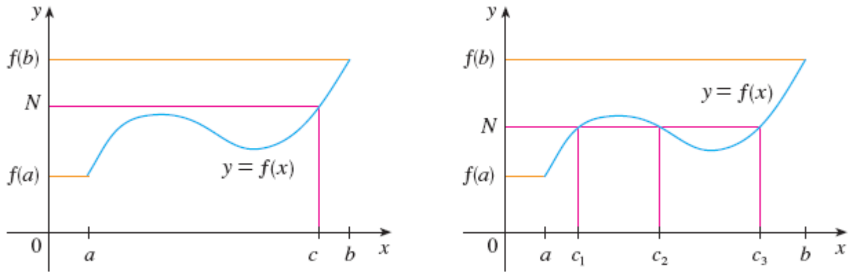


$y=\ln(1+\cos x)$

INTERMEDIATE VALUE THEOREM (ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG GIAN):

Giả sử f liên tục trên khoảng đóng $[a,b]$ và N là số bất kỳ ở giữa $f(a)$ và $f(b)$ với $f(a)\neq f(b)$. Khi đó tồn tại số $c\in(a,b)$ thỏa $f(c)=N$

Các hình vẽ bên mô hình cho định lý giá trị trung gian



Về mặt hình học, đồ thị của hàm số liên tục không có lỗ, không bị đứt nên bất kỳ đường thẳng nằm ngang $y = N$ nằm giữa $y = f(a)$ và $y = f(b)$ phải cắt đồ thị. Tính chất liên tục là cần thiết trong định lí trên, đối với hàm gián đoạn, định lí giá trị trung gian nói chung không đúng.

Example 10: Show that there is a root of the equation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ between 1 and 2.

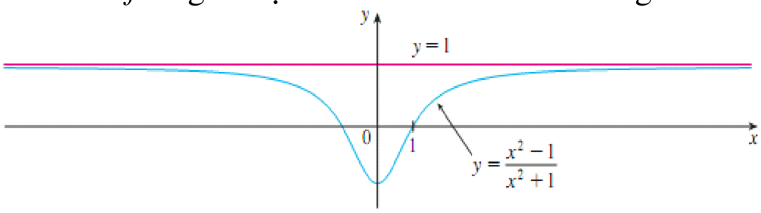
Giải: Xét $a = 1,\ b = 2$ và $N = 0$

Ta có: $f(1) = -1 < 0,\ f(2) = 12 > 0$ và $N = 0 \in (-1, 12)$, do đó theo định lý tồn tại $c \in (-1, 2)$ để $f(c) = 0$. Vậy c là một nghiệm của phương trình cần tìm.

6. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC; TIỆM CẬN NGANG (LIMITS AT INFINITY; HORIZONTAL ASYMPTOTES)

Bắt đầu với hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, quan sát hình vẽ và bảng giá trị của hàm f, ta nhận thấy khi x càng lớn, giá trị của hàm f càng tiến gần về 1, nói cách khác giá trị $f(x)$ có thể gần 1 tùy ý với x đủ lớn, ta nói hàm f có giới hạn là 1 khi x dần ra vô cùng

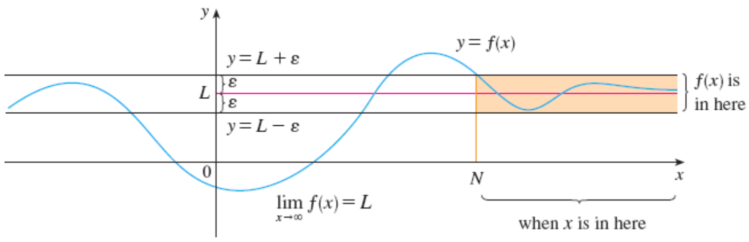
x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998



DEFINITON:

Cho hàm f xác định trên (a, ∞).

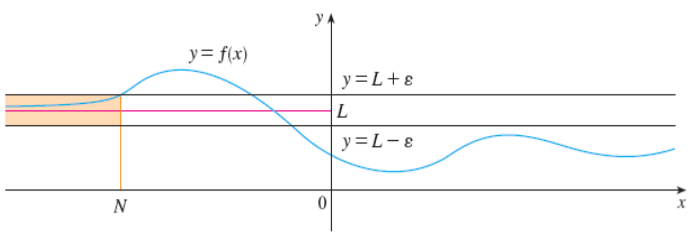
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại số N thỏa $x > N$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$



DEFINITION:

Cho hàm f xác định trên $(-\infty, a)$.

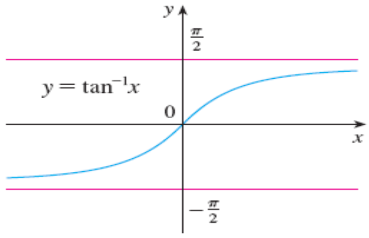
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ nếu với mỗi sô $\varepsilon > 0$, tồn tại số N thỏa $x < N$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$



DEFINITION: Đường $y = L$ gọi là tiệm cận ngang (horizontal asymptote) của đường cong $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

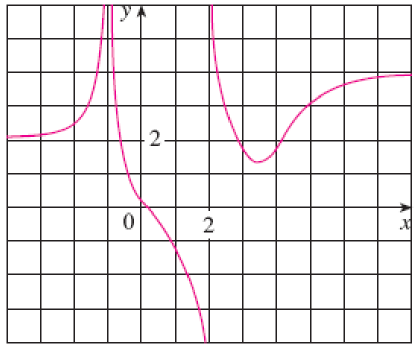
Đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ có đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$.

Một đường cong có thể có hai đường tiệm cận ngang, ví dụ đường cong $y=\tan^{-1}x$ có hai đường tiệm cận ngang $y=-\dfrac{\pi}{2}$ và $y=\dfrac{\pi}{2}$



$$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

Example 1: Find the infinite limits, limits at infinity, and asymptotes for the function f whose graph is shown.



Giải:

Giới hạn vô cùng

$\lim\limits_{x\to-1}f\left(x\right)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to2^-}f\left(x\right)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to2^+}f\left(x\right)=\infty$

$\to$ Các đường $x=-1, x=-2$ là tiệm cận đứng của f

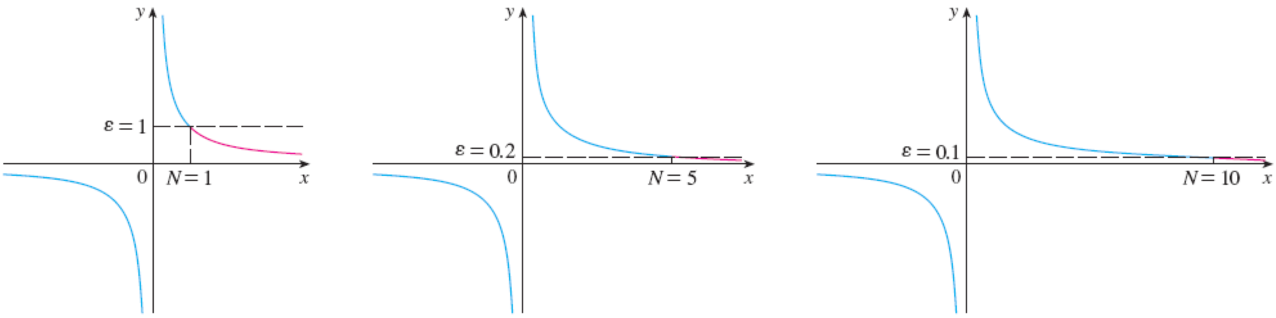
Giới hạn tại vô cùng $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=2,\quad \lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=4$

$\to$ Các đường $y=2, y=4$ là tiệm cận ngang của f

Example 2: Use Definition to prove that $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Giải: Cho $\varepsilon>0$, tìm N thỏa: nếu $x>N$ thì $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

Giả sử $x>0$, ta có $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \leftrightarrow \dfrac{1}{x}<\varepsilon \leftrightarrow x>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Vậy chọn $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, với $x>N=\dfrac{1}{\varepsilon}$ thì $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{x}<\varepsilon$. Theo định nghĩa ta được $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$



THEOREM:

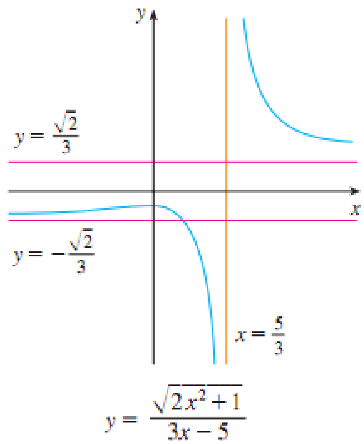
- Nếu r là số hữu tỷ dương thì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^r}=0$
- Nếu r là số hữu tỷ dương và x^r xác định với mọi x thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^r}=0$

Example 3: Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$.

Giải: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3-0-0}{5+0+0}=\dfrac{3}{5}$

Example 4: Find the horizontal and vertical asymptotes of the graph of the function $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.

Giải: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



Và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy các đường thẳng $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ và $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số f

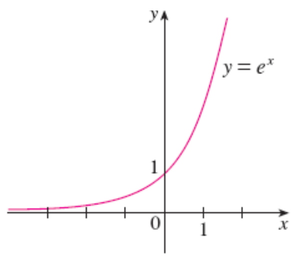
Hơn nữa, $\lim\limits_{x\to(5/3)^-}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(5/3)^+}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$, nên tiệm cận đứng của hàm số là $x=\dfrac{5}{3}$.

Example 5: Compute $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Giải: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

Đồ thị của hàm số mũ $y=e^x$ có tiệm cận ngang là $y=0$ (điều này cũng đúng cho mọi hàm số mũ có cơ số $a>1$).



$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Example 6: Evaluate $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}$.

Giải: Khi $x\to0^-$ thì $\dfrac{1}{x}\to-\infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$

Example 7: Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

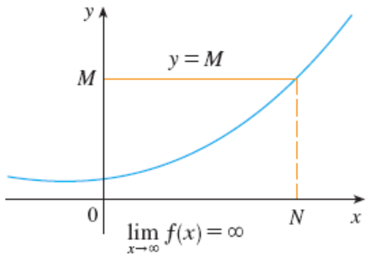
Giải: Khi x tăng, các giá trị của $\sin x$ dao động giữa -1 và 1, chúng không dần về 1 giá trị xác định. Do đó không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

♦ GIỚI HẠN VÔ CỰC TẠI VÔ CỰC (INFINITE LIMITS AT INFINITY):

Ký hiệu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ có nghĩa giá trị của $f(x)$ càng lớn khi x càng lớn.

Các ký hiệu sau có nghĩa tương tự:

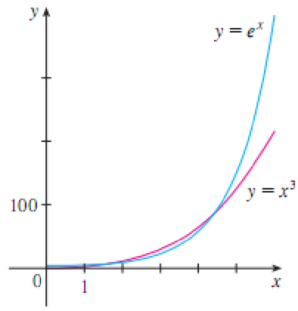
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$



DEFINITION: Cho f xác định trên (a,∞). Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ nếu với mỗi $M>0$, tồn tại số $N>0$ thỏa mãn $x>N$ thì $f(x)>M$

Các hàm $y=x^3$ và $y=e^x$ dần ra vô cùng khi x dần ra vô cùng, nhưng hàm $y=e^x$ dần ra vô cùng nhanh hơn khi x lớn

$$\lim_{x\to\infty} e^x=\infty$$



e^x is much larger than x^3 when x is large.

Example 8: Find $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)$.

Giải: Ta không được viết $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2-\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty-\infty$ vì các luật giới hạn không áp dụng cho các giới hạn vô cùng và $\infty-\infty$ cũng không được định nghĩa.
Tuy nhiên, ta có thể viết:

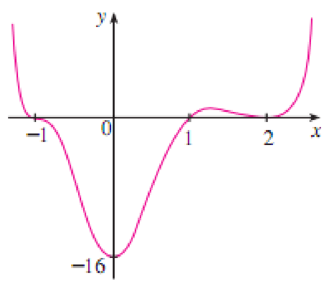
$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(x-1)=\infty$ vì khi x và $x-1$ lớn tùy ý thì tích $x(x-1)$ cũng vậy

Example 10: Find $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{3-x}$.

Giải: Ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)}{\left(\frac{3}{x}-1\right)}=-\infty \text{ vì } x+1\to\infty,\ \frac{3}{x}-1\to-1 \text{ khi } x\to\infty.$$

Example 11: Sketch the graph of $y=(x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ by finding its intercepts and its limits as $x\to\infty$ and $x\to-\infty$.



$y=(x-2)^4(x+1)^3(x-1)$

Giải: Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là $f(0)=-16$ và cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=2,-1,1$. Hàm số không đổi dấu khi qua $x=2$.Hơn nữa,

$$\lim_{x\to\infty}(x-2)^4(x+1)^3(x-1)=\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty}(x-2)^4(x+1)^3(x-1)=\infty.$$

Kết hợp các thông tin trên, ta sẽ phát họa được đồ thị của hàm số