Chương 4: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (DIFFERENTIAL EQUATIONS)

4.1 VÀI MÔ HÌNH DẪN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1) Chuyển động rơi tự do:

- Theo Định luật II Newton, công thức của chuyển động rơi tự do là: $F = ma$. Trong đó: m là khối lượng của vật, a là gia tốc chuyển động, F là hợp lực (*giả sử gồm lực hấp dẫn và lực cản của không khí*).

- Mặt khác ta có: $a = \dfrac{dv}{dt}$

- Do đó ta có: $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \gamma v \quad (I)$;

với $g \approx 9,8\, m/s^2$ (là gia tốc trọng trường); và γ là hệ số cản của không khí.

- Như vậy hàm vận tốc v thỏa phương trình *(I)*, trong phương trình này xuất hiện đạo hàm của v.

☞ *Những phương trình có dạng như phương trình (I) được gọi là phương trình vi phân.*

2) Khối lượng của các chất trong dung dịch hóa học:

- Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = t_0$, một thùng chứa x_0 *(kg)* muối hòa tan trong 1000 *(l)* nước.

- Cho chảy vào thùng một loại nước muối nồng độ a (kg/l), với lưu lượng r *(l/phút)*, khuấy đều. Cho hỗn hợp trong thùng đồng thời chảy ra ngoài với tốc độ trên.

- Gọi $x = x(t)$ là lượng muối trong thùng tại thời điểm *t*.

- Ta có: $\dfrac{dx}{dt}$ là tỉ lệ thay đổi lượng muối trong thùng.

- Như vậy: $\dfrac{dx}{dt} = ar - \dfrac{rx}{1000}$ *(II)*, trong đó ar là tỉ lệ muối chảy vào và: $\dfrac{rx}{1000}$ là tỉ lệ muối chảy ra tại thời điểm đang xét.

☞ *Vậy ta có phương trình (II), phương trình này được gọi là phương trình vi phân với dữ kiện ban đầu là* $x(t_0) = x_0$

4.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TỔNG QUÁT (GENERAL DIFFERENTIAL EQUATIONS):

*** Phương trình vi phân** là phương trình có chứa một hàm số chưa biết và một hay nhiều đạo hàm của nó.

*** Cấp (order)** của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình vi phân đó.

*** Nghiệm (solution):** Hàm số $y = f(x)$ là một nghiệm của phương trình vi phân nếu hàm số y và các đạo hàm của nó thỏa mãn phương trình vi phân

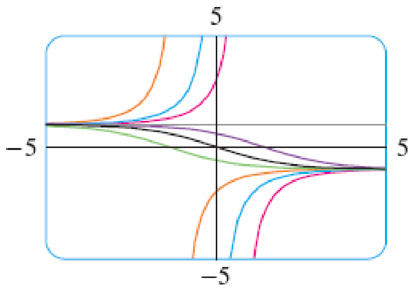
*** Giải** một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm thỏa mãn phương trình vi phân

Example 1: Xét phương trình $y' = xy$: đây là phương trình vi phân cấp 1, y là một hàm số chưa biết của x. Hàm số $y = f(x)$ là nghiệm của phương trình trên nếu thỏa $f'(x) = xf(x)$ với mọi giá trị của x trên một khoảng nào đó.

Example 2: Find the general solution of the differential equation: $y' = x^3$

Giải: $y = \frac{x^4}{4} + C$ là nghiệm của phương trình vi phân vì $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$.

Example 3: Show that every member of the family of functions $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ is a solution of the differential equation $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$



The differential equation shows that if $y \approx \pm 1$, then $y' \approx 0$. That is borne out by the flatness of the graphs near $y = 1$ and $y = -1$.

Giải: Lấy đạo hàm của y ta được:

$$y' = \frac{(1-ce^t)ce^t - (1+ce^t)(-ce^t)}{(1-ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2}$$

Vế phải của phương trình vi phân:

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+ce^t}{1-ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{2ce^t}{(1-ce^t)^2} = y'$$

Vậy với mỗi giá trị của c, hàm đã cho là nghiệm của phương trình vi phân

* Trong các ứng dụng của phương trình vi phân, ta thường tìm nghiệm đặc biệt của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$. Đây được gọi là điều kiện ban đầu (initial condition) và bài toán như thế được gọi là bài toán giá trị ban đầu (initial-value problem)

Example 4: Find a solution of the differential equation $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ that satisfies the initial condition $y(0) = 2$.

Giải: Thay thế giá trị $t = 0$ và $y = 2$ vào nghiệm tổng quát $y = \frac{1+ce^t}{1-ce^t}$ của phương trình đã cho ta được:

$$2 = \frac{1+ce^0}{1-ce^0} = \frac{1+c}{1-c} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}.$$

Vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là: $y = \frac{1+(1/3)e^t}{1-(1/3)e^t} = \frac{3+e^t}{3-e^t}$

4.3 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 (FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS)

4.3.1 PHƯƠNG TRÌNH TÁCH BIẾN (SEPARABLE EQUATIONS):

♦ **Phương trình vi phân cấp 1 tách biến** có dạng:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

Nếu $f(y) \neq 0$, phương trình trên có thể viết tương đương: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$, với $h(y) = \frac{1}{f(y)}$

Để giải phương trình trên, ta viết dưới dạng vi phân

$$h(y)dy = g(x)dx \qquad (1)$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình ta được:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \qquad (2)$$

Ngược lại, nếu h và g thỏa mãn (2), khi đó:

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)dx\right) \to \frac{d}{dy}\left(\int h(y)dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x) \to h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Vậy (1) thỏa mãn.

Example 1:

(a) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$.

(b) Find the solution of this equation that satisfies the initial condition $y(0) = 2$.

Giải:

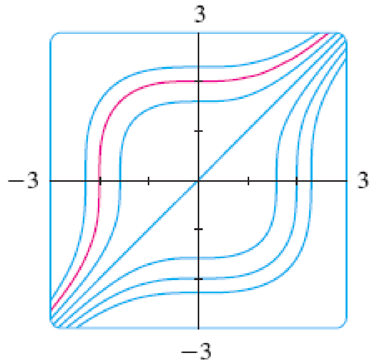
(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \leftrightarrow y^2dy = x^2dx \leftrightarrow \int y^2dy = \int x^2dx$

$$\leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in R$$

Vậy $y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$ hay $y = \sqrt[3]{x^3 + K}$, với $K = 3C$

(b) Nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu:

$y(0) = 2 \leftrightarrow \sqrt[3]{K} = 2 \leftrightarrow K = 8$. Vậy nghiệm của bài toán trong trường hợp này là: $y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$



graphs of several members of the family of solutions of the differential equation. The solution of the initial-value problem in part (b) is shown in red.

Example 2: Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$.

Giải: Phương trình đã cho tương đương với:

$$(2y + \cos y)dy = 6x^2dx \leftrightarrow \int (2y + \cos y)dy = \int 6x^2dx \leftrightarrow y^2 + \sin y = 2x^3 + C, \quad C \in R.$$

Nghiệm của phương trình trong trường hợp này ở dạng ẩn (implicitly), ta không thể biểu diễn y như một hàm đối với x.

Example 3: Solve the equation $y' = x^2 y$.

Giải:

+ Nếu $y \neq 0$, viết lại phương trình vi phân dưới dạng:

$$\frac{dy}{y} = x^2dx \leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^2dx \leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^3}{3} + C \leftrightarrow |y| = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3} \leftrightarrow y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

+ $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình vi phân đã cho. Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = Ae^{x^3/3}, \quad A \in R.$$

4.3.2 PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP (THUẦN NHẤT)

a) Định nghĩa:

- Hàm số f(x, y) được gọi là thuần nhất bậc d nếu: $\forall(x,y)\in D_f$ và $\forall t\in\mathbb{R}$, ta có:

$$f(tx,ty)=t^d f(x,y)$$

- Phương trình vi phân $y'=f(x,y)$ được gọi là thuần nhất (đẳng cấp), nếu hàm số f(x, y) là hàm thuần nhất bậc 0, tức là $f(tx,ty)=f(x,y)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

b) Cách giải:

- Vì f(x, y) thuần nhất bậc 0, nên ta có thể viết lại phương trình đã cho:

$$\boxed{y'=f(x,y)=f(x.1,\frac{y}{x}.x)=f(1,\frac{y}{x})} \qquad (*)$$

- Đặt: $u=\dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y=u.x$, với u là một hàm số theo biến x.

$\Rightarrow$ $y'=u+x.u'$ $\Rightarrow dy=udx+xdu$. Ta lại có: $f(x,y)=f(1,u)$. Vậy ta có: $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}=f(1,u)$

♦ TH1: Nếu $f(1,u)=u$, xét xem có phải là nghiệm phương trình đã cho không?

♦ TH2: Nếu $f(1,u)-u\neq 0$, ta đưa phương trình đã cho về phương trình có biến phân ly như sau:

$$\boxed{\frac{dx}{x}=\frac{du}{f(1,u)-u}} \qquad (**)$$

Lấy tích phân 2 vế của (***) ta được: $\displaystyle\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln\left|\frac{x}{C}\right|$

Hay: $$\boxed{x=C.e^{\int\frac{du}{f(1,u)-u}},C\neq 0} \qquad (***)$$

Thay: $u=\dfrac{y}{x}$ vào lại biểu thức (***) ở trên, ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất đã cho.

c) Ví dụ:

i) Giải phương trình: $\left(x^2+y^2\right)dx+xydy=0$

Giải: Phương trình đã cho có thể viết lại: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$

Vế phải của phương trình trên là 1 hàm thuần nhất bậc 0. Đặt y = ux, ta có:

- Cách 1: $u+x\dfrac{du}{dx}=-u-\dfrac{1}{u}$ hay $x\dfrac{du}{dx}+u+u+\dfrac{1}{u}=0$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{udu}{1+2u^2}$

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\ln\left|\dfrac{x}{C}\right|=-\dfrac{1}{4}\ln(1+2u^2)$

Thay $u=\dfrac{y}{x}$ vào, ta được nghiệm tổng quát của PT đã cho là: $x^4=\dfrac{C^4x^2}{x^2+2y^2}$, $C\neq 0$.

- Cách 2: ta có $f(x,y)=-\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$ $\Rightarrow$ $f(1,u)=-\dfrac{u}{1}-\dfrac{1}{u}=-\left(u+\dfrac{1}{u}\right)=-\dfrac{u^2+1}{u}$

$$\Rightarrow f(1,u)-u=-\frac{u^2+1}{u}-u=-\frac{2u^2+1}{u}$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{f(1,u)-u}=-\int\frac{udu}{1+2u^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(1+2u^2)}{1+2u^2}=-\frac{1}{4}\ln(1+2u^2)$$

$\Rightarrow$ $x=C.e^{\int\frac{du}{f(1,u)-u}}=Ce^{-\frac{1}{4}\ln(1+2u^2)}$. Thay $u=\dfrac{y}{x}$ vào biểu thức này, ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $x^4 = \dfrac{C^4 x^2}{x^2 + 2y^2}$, $C \neq 0$.

ii) Tìm nghiệm của phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ thỏa y(1) = 0.

<u>Giải:</u> Ta có: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$. Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow$ $y = u.x$,$\Rightarrow$ $y' = u + x.u'$

Phương trình đã cho được viết lại: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{1-u}{1+u^2}du$

$\Leftrightarrow$ $\ln|x| = arctgu - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + \ln|C|$ $\Leftrightarrow$ $\ln|x|.\sqrt{1+u^2} = arctgu + \ln|C|$

$\Leftrightarrow$ $|x|\sqrt{1+u^2} = C.e^{arctgu}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctg\frac{y}{x}}$.

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Vì y(1)= 0 nên: x = 1, y = 0 phải thỏa nghiệm tổng quát.

Do đó thay x = 1, y = 0 vào nghiệm trên, ta có: $C = 1$

Vậy nghiệm riêng của phương trình thỏa điều kiện đã cho là: $\sqrt{x^2+y^2} = e^{arctg\frac{y}{x}}$

4.3.3 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN:

<u>a) Định nghĩa:</u> Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng:

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \qquad (*)$$

Trong đó vế trái của (*) là vi phân toàn phần của hàm nào đó, tức là tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho: $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

<u>*) Nhận xét:</u>

i) Giả sử các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên miền D, khi đó phương trình (*) là vi phân toàn phần khi và chỉ khi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

ii) Khi phương trình (*) là vi phân toàn phần, tích phân 2 vế của (*) ta sẽ được: $u(x,y) = C$.

<u>b) Cách giải:</u>

- ***Bước 1:*** Ta kiểm tra đẳng thức: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ có đúng hay không?

+ Nếu không đúng thì đây không phải là phương trình vi phân toàn phần, ta đi giải theo cách khác.

+ Nếu đúng thì đây là phương trình vi phân toàn phần, ta chuyển sang bước 2 để giải.

- ***Bước 2:*** Ta có thể tìm hàm $u(x,y)$ dưới dạng:

$$\boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \quad \text{hoặc} \quad u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy} \quad (**)$$

Trong đó $(x_0, y_0) \in D$ là một điểm nào đó sao cho tồn tại các tích phân trên.

<u>c) Ví dụ:</u> giải phương trình $\left(x^3 + xy^2\right)dx + \left(x^2y + y^3\right)dy = 0$

<u>Giải:</u> Ta có: $p(x,y) = x^3 + xy^2$; $q(x,y) = x^2y + y^3$; Và: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Do đó phương trình đã cho là ptvptp, với hàm $u(x,y)$ có thể chọn như sau:

$$u(x,y)=\int_0^x\left(x^3+xy^2\right)dx+\int_0^y\left(0.y+y^3\right)dy \;=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $\left(x^2+y^2\right)^2=4C_1:=C^2$ (hay: $x^2+y^2=C$, với $C\geq 0$)

d) Thừa số tích phân:

- Có những trường hợp phương trình (*) chưa phải là phương trình vi phân toàn phần.
- Ta có thể tìm được hàm số $\mu(x,y)$ sao cho phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần: $\mu(x,y)\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]=0$
- Hàm $\mu(x,y)$ như trên được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình (*).
- Để $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân thì $\mu(x,y)$ phải thỏa điều kiện: $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)} \quad (***)$$

- Không có phương pháp tổng quát để giải phương trình (***) (đây là phương trình đạo hàm riêng). Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt ta có thể giải được $\mu(x,y)$ như sau:

i) Trường hợp 1: $\mu(x,y)$ chỉ phụ thuộc vào x.

Giả sử $\mu>0$, chia 2 vế (***) cho μ ta được: $\dfrac{d\ln\mu}{dx}=\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi \quad (****)$

Trường hợp này chỉ thỏa mãn khi vế phải của đẳng thức (****) không phụ thuộc vào *y*. Khi đó: $\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$.

ii) Trường hợp 2: $\mu(x,y)$ chỉ phụ thuộc vào y.

Làm tương tự như trên, ta được: $\mu(y)=e^{\int\psi(y)dy}$, với $\psi(y):=\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}$ không phụ thuộc vào *y*.

Ví dụ: Tìm thừa số tp rồi giải phương trình: $\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$

Giải: Ta có: $P(x,y)=2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}$; $Q(x,y)=x^2+y^2$ $\Rightarrow \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1$

Do đó ta chọn $\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$

$\Rightarrow$ phương trình $e^x\left[\left(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy\right]=0$ là phương trình vi phân toàn phần

Tính tích phân trên theo công thức (**), ta được nghiệm tổng quát: $ye^x\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}\right)=C$

4.3.4 PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (LINEAR EQUATIONS)

♦ **Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng**

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ ,$$ với *P* và *Q* là các hàm liên tục.

♦ **Phương pháp giải:**

- Tìm một nhân tử tích phân (integrating factor) $I(x)$ thỏa mãn: $I(x)\left(y'+P(x)y\right)=\left(I(x)y\right)'$

Khai triển hai vế ta được: $I(x)P(x)=I'(x) \rightarrow \int\frac{dI}{I}=\int P(x)dx \rightarrow I=Ae^{\int P(x)dx}, \quad A=\pm e^{C}$

Chọn $A=1$, ta được $I(x)=e^{\int P(x)dx}$.

- Phương trình vi phân tuyến tính đã cho tương đương với:

$$\left(I(x)y\right)'=I(x)Q(x) \leftrightarrow I(x)y=\int I(x)Q(x)dx+C \leftrightarrow y=\frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx+C\right]$$

Example 1: Solve the differential equation $\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x^2$.

Giải:

- Tìm một hàm nhân tử tích phân $I(x)$ thỏa: $I(x)\left(y'+3x^2y\right)=\left(I(x)y\right)'$

$$\leftrightarrow I(x)y'+I(x)3x^2y=I'(x)y+I(x)y' \rightarrow I(x)3x^2=I'(x)$$

Vậy $\int\frac{dI}{I}=\int 3x^2dx=x^3+C \rightarrow I(x)=Ae^{x^3}$

- Nhân 2 vế của phương trình vi phân đã cho cho e^{x^3} :

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx}+3x^2e^{x^3}y=6x^2e^{x^3} \leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right)=6x^2e^{x^3}$$

Lấy tích phân 2 vế :

$$e^{x^3}y=\int 6x^2e^{x^3}dx=2\int e^{x^3}d\left(x^3\right)=2e^{x^3}+C \leftrightarrow y=2+Ce^{-x^3}$$

Example 2: Find the solution of the initial-value problem

$$x^2y'+xy=1 \qquad x>0 \qquad y(1)=2$$

Giải: Viết lại phương trình đã cho có dạng phương trình vi phân tuyến tính

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}, \quad x>0 \text{ (chia hai vế cho } x^2\text{)}$$

- Tìm một hàm nhân tử tích phân $I(x)$ thỏa: $I(x)\left(y'+\frac{1}{x}y\right)=\left(I(x)y\right)'$

$$\leftrightarrow I(x)y'+I(x)\frac{1}{x}y=I'(x)y+I(x)y' \rightarrow \frac{I(x)}{x}=I'(x)$$

$$\rightarrow \int\frac{dI}{I}=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C \rightarrow I(x)=Ax$$

- Nhân 2 vế của phương trình vi phân đã cho cho x:

$$\left(y'+\frac{1}{x}y\right)x=\frac{1}{x} \leftrightarrow \frac{d}{dx}(xy)=\frac{1}{x}$$

Lấy tích phân 2 vế :

$xy=\ln x+C \leftrightarrow y=\frac{\ln x+C}{x}$. Với điều kiện đầu $y(1)=2$, ta có: $C=2$

Vậy nghiệm cần tìm của phương trình đã cho là: $y=\frac{\ln x+2}{x}$.

4.4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2 (SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS)

4.4.1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP HAI THUẦN NHẤT (SECOND-ORDER HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS):

♦ **Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai** có dạng:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=G(x)$$, với *P, Q, R, G* là các hàm liên tục

Nếu $G(x)=0$, với mọi *x* ta có **phương trình tuyến tính thuần nhất** (homogeneous linear equation): $P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \quad (1)$

THEOREM: Nếu $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (1) thì $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

THEOREM: Nếu $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính $\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const\right]$ của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (1) và $P(x)\neq 0,\ \forall x$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (1) là: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Nếu *P, Q, R* là các hằng số, khi đó phương trình (1) có dạng:

$$ay''+by'+cy=0,\ a\neq 0,\ a,b,c\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Nhận xét:

Nếu $y=e^{rx},\ r\in\mathbb{R}\ \rightarrow\ y'=re^{rx},\ y''=r^2e^{rx}$, thay vào phương trình (2):

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0 \leftrightarrow \left(ar^2+br+c\right)e^{rx}=0$$

Vậy $y=e^{rx}$ là một nghiệm của phương trình (2) nếu *r* là nghiệm của phương trình đặc trưng *(characteristic equation):* $ar^2+br+c=0 \quad (3)$

♦ **TRƯỜNG HỢP 1:** Nếu phương trình đặc trưng (3) có hai nghiệm thực phân biệt r_1 *và* r_2 thì $y_1=e^{r_1x}$ và $y_2=e^{r_2x}$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2)

Nếu phương trình đặc trưng $ar^2+br+c=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $r_1,\ r_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình $ay''+by'+cy=0$ là $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$

♦**TRƯỜNG HỢP 2:** Nếu phương trình đặc trưng (3) có một nghiệm kép $r=-\frac{b}{2a}\leftrightarrow 2ar+b=0$ thì $y_1=e^{rx}$ là một nghiệm của phương trình (2). Ta chứng minh $y_2=xe^{rx}$ cũng là một nghiệm của (2):

$$ay''+by'+cy=a\left(2re^{rx}+r^2xe^{rx}\right)+b\left(e^{rx}+rxe^{rx}\right)+cxe^{rx}$$

$$=(2ar+b)e^{rx}+\left(ar^2+br+c\right)xe^{rx}=0\left(e^{rx}\right)+0\left(xe^{rx}\right)=0$$

Nếu phương trình đặc trưng $ar^2+br+c=0$ chỉ có một nghiệm thực r thì nghiệm tổng quát của phương trình $ay''+by'+cy=0$ là $y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$

♦TRƯỜNG HỢP 3: Nếu phương trình đặc trưng (3) có hai nghiệm phức dạng $r_1=\alpha+i\beta,\ r_2=\alpha-i\beta$

Nghiệm của phương trình vi phân (2) là:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}=C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

$$=e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x\right]=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

Nếu nghiệm của phương trình đặc trưng $ar^2+br+c=0$ là các số phức: $r_1=\alpha+i\beta,\ r_2=\alpha-i\beta$ thì nghiệm tổng quát của phương trình $ay''+by'+cy=0$ là

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

Example 1: Solve the equation $y''+y'-6y=0$

Giải: Phương trình đặc trưng: $r^2+r-6=0$ có hai nghiệm phân biệt $r_1=2,\ r_2=-3$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$

Example 2: Solve the equation $4y''+12y'+9y=0$

Giải: Phương trình đặc trưng: $4r^2+12r+9=0$ có nghiệm kép $r_1=r_2=-\dfrac{3}{2}$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=c_1e^{-3/2x}+c_2xe^{-3/2x}$

Example 3: Solve the equation $y''-6y'+13y=0$

Giải: Phương trình đặc trưng: $r^2-6r+13=0$ có hai nghiệm phức $r_1=3+2i,\ r_2=3-2i$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

♦ BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BAN ĐẦU VÀ GIÁ TRỊ BIÊN (INITIAL-VALUE AND BOUNDARY-VALUE PROBLEM)

♦ **Bài toán giá trị ban đầu** của phương trình vi phân cấp hai là tìm nghiệm y của phương trình thỏa mãn điều kiện ban đầu dạng: $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1$, với $y_0,\ y_1$ là các hằng số cho trước

Example 4: Solve the initial-value problem $y''+y'-6y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

Giải: Từ ví dụ 1 ta có nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$

Để nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_2=1 \\ 2c_1-3c_2=0 \end{cases} \leftrightarrow c_1=\frac{3}{5}, c_2=\frac{2}{5}$$

Vậy nghiệm của bài toán thỏa điều kiện ban đầu là: $y=\dfrac{3}{5}e^{2x}+\dfrac{2}{5}e^{-3x}$

♦ **Bài toán giá trị biên** của phương trình vi phân cấp hai là tìm nghiệm y của phương trình thỏa mãn điều kiện biên : $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$, với $y_0,\ y_1$ là các hằng số cho trước

Example 5: Solve the boundary-value problem $y''+2y'+y=0,\quad y(0)=1,\quad y(1)=3$

Giải: Phương trình đặc trưng: $r^2+2r+1=0$ có nghiệm kép $r_1=r_2=-1$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

Để nghiệm thỏa mãn điều kiện biên:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_1e^{-1}+c_2e^{-1}=3 \end{cases} \leftrightarrow c_1=1,\ c_2=3e-1$$

Vậy nghiệm của bài toán thỏa điều kiện biên là: $y=e^{-x}+(3e-1)xe^{-x}$

4.4.2 PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH KHÔNG THUẦN NHẤT (NONHOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS)

♦ **Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất hệ số hằng** *(A second-order nonhomogeneous linear differential equation with constant coefficient)* có dạng:

$ay''+by'+cy=G(x)$, với a, b, c là các hằng số và G là hàm liên tục

ĐỊNH LÍ: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất là $y(x)=y_c(x)+y_p(x)$, với y_c là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $ay''+by'+cy=0$ và y_p là một nghiệm riêng của phương trình $ay''+by'+cy=G(x)$

♦ PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH (THE METHOD OF UNDETERMINED COEFFICIENTS)

♦ **Trường hợp 1:** Nếu G(x) là một đa thức thì một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất là đa thức cùng bậc với *G(x)*. Thay đa thức này vào phương trình vi phân để tìm các hệ số của đa thức.

Example 1: Solve the equation $y''+y'-2y=x^2$

Giải:

- Giải phương trình thuần nhất tương ứng: $y''+y'-2y=0$

Phương trình đặc trưng: $r^2+r-2=0$ có nghiệm phân biệt $r_1=1,\ r_2=-2$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y_c=c_1e^x+c_2e^{-2x}$

- Tìm một nghiệm riêng: Vì *G(x)* = x^2 nên nghiệm riêng có dạng: $y_p(x)=Ax^2+Bx+C$

Ta có: $y_p'=2Ax+B,\ y_p''=2A$. Thay vào phương trình vi phân đã cho:

$$(2A)+(2Ax+B)-2(Ax^2+Bx+C)=x^2 \leftrightarrow -2Ax^2+(2A-2B)x+(2A+B-2C)=x^2$$

Cân bằng hệ số ta được: $A=-\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=-\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ nghiệm riêng $y_p(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

♦ **Trường hợp 2:** Nếu $G(x)=Ce^{kx}$, với C và k là các hằng số thì ta thử tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất dạng $y_p(x)=Ae^{kx}$

Example 2: Solve the equation $y''+4y=e^{3x}$

Giải:

- Giải phương trình thuần nhất tương ứng: $y''+4y=0$

Phương trình đặc trưng: $r^2+4=0$ có 2 nghiệm $r_1=2i,\ r_2=-2i$

$\rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

- Tìm một nghiệm riêng: Vì *G(x)* = e^{3x} nên ta thử tìm nghiệm riêng có dạng: $y_p(x)=Ae^{3x}$

Ta có: $y_p'=3Ae^{3x},\ y_p''=9Ae^{3x}$. Thay vào phương trình vi phân đã cho:

$9Ae^{3x}+4\left(Ae^{3x}\right)=e^{3x} \leftrightarrow A=\dfrac{1}{13}$ $\rightarrow$ nghiệm riêng $y_p(x)=\dfrac{1}{13}e^{3x}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y=y_c+y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{13}e^{3x}$

♦ **Trường hợp 3:** Nếu $G(x)=C\cos kx$ hoặc $G(x)=C\sin kx$, với C và k là các hằng số thì ta thử tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất dạng
$y_p(x)=A\cos kx+B\sin kx$

Example 3: Solve the equation $y''+y'-2y=\sin x$

Giải:

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y''+y'-2y=0$ là
$y_c=c_1e^x+c_2e^{-2x}$

- Tìm một nghiệm riêng: Vì *G(x)* = *sinx* nên ta thử nghiệm riêng dạng: $y_p(x)=A\cos x+B\sin x$

Ta có: $y_p'=-A\sin x+B\cos x,\ y_p''=-A\cos x-B\sin x$. Thay vào phương trình vi phân đã cho:

$$(-A\cos x-B\sin x)+(-A\sin x+B\cos x)-2(A\cos x+B\sin x)=\sin x$$

$$\leftrightarrow (-3A+B)\cos x+(-A-3B)\sin x=\sin x \ \rightarrow\ A=-\tfrac{1}{10},\ B=-\tfrac{3}{10}$$

$\rightarrow$ nghiệm riêng $y_p(x)=-\tfrac{1}{10}\cos x-\tfrac{3}{10}\sin x$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\tfrac{1}{5}e^{3x}-\tfrac{1}{10}(\cos x+3\sin x)$$

♦ **Trường hợp 4:**

- Nếu *G(x)* là tích của các hàm trong các trường hợp trên thì ta thử tìm nghiệm riêng là tích của các hàm có cùng kiểu, ví dụ một nghiệm riêng của phương trình $y''+2y'+4y=x\cos 3x$ có dạng $y_p(x)=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x$

- Nếu *G(x)* là tổng của các hàm trong các trường hợp trên: Nếu $y_{p_1}(x),\ y_{p_2}(x)$ là các nghiệm riêng của các phương trình: $ay''+by'+cy=G_1(x)$ và $ay''+by'+cy=G_2(x)$ thì $y_{p_1}+y_{p_2}$ là nghiệm riêng của phương trình $ay''+by'+cy=G_1(x)+G_2(x)$

Example 4: Solve the equation $y''-4y=xe^x+\cos 2x$

Giải:

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $y''-4y=0$ là $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$
- Tìm một nghiệm riêng:

+ Với phương trình $y''-4y=xe^x$ $(*)$, ta thử tìm nghiệm riêng dạng: $y_{p_1}(x)=(Ax+B)e^x$

Ta có: $y'_{p_1}(x)=(Ax+A+B)e^x$, $y''_{p_1}(x)=(Ax+2A+B)e^x$. Thay vào phương trình (*):

$(Ax+2A+B)e^x-4(Ax+B)e^x=xe^x \leftrightarrow (-3Ax+2A-3B)e^x=xe^x \rightarrow A=-\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{2}{9}$

$\rightarrow$ nghiệm riêng $y_{p_1}(x)=\left(-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{9}\right)e^x$

+ Với phương trình $y''-4y=\cos 2x$ $(**)$, ta thử tìm nghiệm riêng dạng:
$y_{p_2}(x)=C\cos 2x+D\sin 2x$

Ta có: $y'_{p_2}(x)=-2C\sin 2x+2D\cos 2x$, $y''_{p_2}(x)=-4C\cos 2x-4D\sin 2x$. Thay vào pt (**):

$(-4C\cos 2x-4D\sin 2x)-4(C\cos 2x+D\sin 2x)=\cos 2x$

$\leftrightarrow -8C\cos 2x-8D\sin 2x=\cos 2x \rightarrow C=-\dfrac{1}{8}, D=0 \rightarrow$ nghiệm riêng $y_{p_2}(x)=-\dfrac{1}{8}\cos 2x$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y=y_c+y_{p_1}+y_{p_1}=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)e^x-\frac{1}{8}\cos 2x$$

TÓM TẮT PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

1. Nếu $G(x)=e^{kx}P(x)$ với P là đa thức bậc n thì nghiệm riêng $y_p(x)=e^{kx}Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức bậc n
2. Nếu $G(x)=e^{kx}P(x)\cos mx$ hoặc $G(x)=e^{kx}P(x)\sin mx$ với P là đa thức bậc n thì nghiệm riêng $y_p(x)=e^{kx}Q(x)\cos mx+e^{kx}R(x)\sin mx$ với Q, R là các đa thức bậc n

Lưu ý: Nếu nghiệm riêng y_p là một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng, ta cần nhân y_p với x hoặc x^2

Example 5: Determine the form of the trial solution of the differential equation
$y''-4y'+13y=e^{2x}\cos 3x$

Giải:

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_c(x)=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$
- Vì $G(x)=e^{2x}\cos 3x$ nên có thể dự đoán nghiệm riêng có dạng

$y_p(x)=e^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$, đây là một nghiệm trong họ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất nên ta sẽ tìm nghiệm riêng dạng $y_p(x)=xe^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$

♦ PHƯƠNG PHÁP BIẾN THIÊN THAM SỐ (THE METHOD OF VARIATION OF PARAMETERS)

Giả sử giải phương trình thuần nhất $ay''+by'+cy=0$ có nghiệm: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, với $c_1,\ c_2$ là các hằng số (tham số) tùy ý.

Xem $c_1,\ c_2$ là 2 hàm số $u_1(x),\ u_2(x)$, tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $ay''+by'+cy=G(x)$ (*) dạng $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ (cách làm này gọi là phương pháp biến thiên tham số). Ta có:

$$y_p'=(u_1'y_1+u_2'y_2)+(u_1y_1'+u_2y_2')$$

Chọn $u_1,\ u_2$ sao cho $u_1'y_1+u_2'y_2=0$, khi đó:

$y_p''=u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1y_1''+u_2y_2''$, thay vào phương trình (*) ta được:

$$u_1(ay_1''+by_1'+cy_1)+u_2(ay_2''+by_2'+cy_2)+a(u_1'y_1'+u_2'y_2')=G$$

Từ đó $a(u_1'y_1'+u_2'y_2')=G$, vì $ay_1''+by_1'+cy_1=0$ và $ay_2''+by_2'+cy_2=0$

Hàm số $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (*) nếu $u_1,\ u_2$ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2=0 \\ a(u_1'y_1'+u_2'y_2')=G \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này tìm $u_1',\ u_2'$, rồi từ đây tìm $u_1,\ u_2$ và kết luận nghiệm

Example 6: Solve the equation $y''+y=\tan x,\ 0<x<\pi/2$

Giải:

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng: $y''+y=0$ là:

$$y_c(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$$

- Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $y_p(x)=u_1(x)\sin x+u_2(x)\cos x$

$$y_p'=(u_1'\sin x+u_2'\cos x)+(u_1\cos x-u_2\sin x)$$

Chọn $u_1,\ u_2$ sao cho $u_1'\sin x+u_2'\cos x=0$, khi đó:

$y_p''=u_1'\cos x-u_2'\sin x-u_1\sin x-u_2\cos x$, thay vào phương trình đề bài ta được:

$$u_1'\cos x-u_2'\sin x=\tan x$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1'\sin x+u_2'\cos x=0 \\ u_1'\cos x-u_2'\sin x=\tan x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1'=\sin x \\ u_2'=\cos x-\sec x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=-\cos x \\ u_2=\sin x-\ln(\sec x+\tan x) \end{cases}$$

Vậy một nghiệm riêng của phương trình vi phân là:

$$y_p(x)=-\cos x\sin x+(\sin x-\ln(\sec x+\tan x))\cos x=-\cos x\ln(\sec x+\tan x)$$

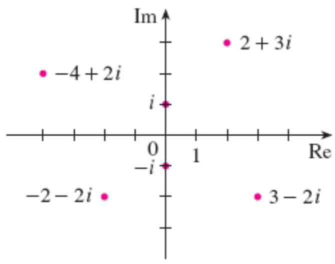
Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là:

$$y(x)=y_c(x)+y_p(x)=c_1\sin x+c_2\cos x-\cos x\ln(\sec x+\tan x)$$

4.5 BỔ TÚC VỀ SỐ PHỨC (COMPLEX NUMBERS)

1. Dạng của số phức:

$$\boxed{z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}}$$



Complex numbers as points in the Argand plane

Trong đó:

- a: phần thực (the real part),
- b: phần ảo (the imaginary part) của số phức ,
- và i là số thỏa: $i^2 = -1$

♦ Modulus của số phức: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

♦ Số phức liên hợp (complex conjugate) của số phức z là $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

Có thể biểu diễn số phức dưới dạng: $\boxed{z = a + bi = (a, b)}$

♦ Số phức bằng nhau:

$$a + bi = c + di \leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

2. Các phép toán:

a. Tổng (Sum) và hiệu (difference) hai số phức:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

b. Tích(Product) hai số phức:

$$(a+bi)(c+di) = a(c+di)+(bi)(c+di) = ac+adi+bc+bdi = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Example 1: $(-1+3i)(2-5i) = (-1)(2-5i)+3i(2-5i) = 13+11i$

c. Chia (Division) hai số phức:

Để tìm thương hai số phức ta nhân tử và mẫu với số phức liên hợp của mẫu

Example 2: Biểu diễn số phức $\dfrac{-1+3i}{2-5i}$ dưới dạng $a+bi$

Giải: $\dfrac{-1+3i}{2-5i} = \dfrac{-1+3i}{2-5i}.\dfrac{2+5i}{2+5i} = \dfrac{13+11i}{2^2+5^2} = \dfrac{13}{29}+\dfrac{11}{29}i$

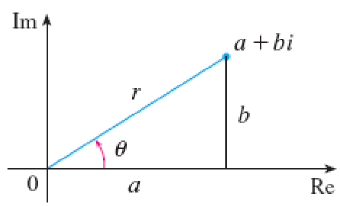
Example 3: Tìm nghiệm của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$

Giải: $\Delta = 1 - 4 = -3 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$. Nghiệm: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

3. Dạng cực (Polar form) của số phức:

Xét $z = (a,b) = a + bi$.

Tọa độ cực của điểm (a,b) là (r, θ), với $r \geq 0$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$



→ Dạng cực:

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ r = |z| = \sqrt{a^2+b^2},\ \tan\theta = \frac{b}{a}}$$

Góc θ gọi là argument của z, viết $\theta = arg(z)$.

Lưu ý: $arg(z)$ không duy nhất, chúng sai khác nhau một số nguyên của 2π

Example 4: Viết dạng cực của số phức $z = 1+i$

Giải: Ta có: $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = 1 \to \theta = \dfrac{\pi}{4}$

Dạng cực của số phức z là $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

4. Các phép toán của số phức ở dạng cực:

a. Tích, thương hai số phức:

Cho hai số phức $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Khi đó: $z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

Vậy $\boxed{z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]}$

Tương tự $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right],\ z_2 \neq 0}$

Example 5: Tìm tích của số phức $1+i$ và $\sqrt{3}-i$ ở dạng cực

Giải: Ta có: $1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$, $\sqrt{3}-i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

Vậy $(1+i)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

Hệ quả: Nếu $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ và n nguyên dương thì:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Example 6: Tìm $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{10}$

Giải: Ta có $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{1}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Vậy $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\dfrac{10\pi}{4} + i\sin\dfrac{10\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{32}i$

b. Căn bậc n (nth root) của số phức:

Nếu w là căn bậc n (*nth root*) của số phức z thì $w^n = z$.

Giả sử:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Ta có: $s^n\left(\cos n\phi + i\sin n\phi\right) = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \to \begin{cases} s^n = r \\ \cos n\phi = \cos\theta \\ \sin n\phi = \sin\theta \end{cases} \to \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$

Vậy nếu $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ và n là số nguyên dương thì căn bậc n của z là:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}}$$

Example 7: Tìm căn bậc 8 của số phức *z* = *-8*

Giải: Ta có $z = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) \to \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{6}\right),\ k = \overline{0,5}$

Với *k = 0*: $w_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

k=1: $w_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i$

k=2: $w_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

k=3: $w_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$

k=4: $w_4 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}i$

k=5: $w_3 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$

♦ Số mũ phức (Complex exponential):

Xét số phức *z* = *iy*, sử dụng khai triển Taylor hàm e^{iy}:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = \cos y + i\sin y$$

Vậy ta có công thức Euler: $\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y}$

Example 8: Tính $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$

Giải: Ta có $e^{-1+i\frac{\pi}{2}} = e^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{i}{e}$