## 1.7 BÀI TOÁN TỐI ƯU (OPTIMIZATION PROBLEMS)

Bài toán tìm cực trị có nhiều ứng dụng thực tế. Chẳng hạn vấn đề làm cực tiểu chi phí và cực đại lợi nhuận trong kinh doanh, vấn đề cực tiểu thời gian vận chuyển trong vận tải hàng hóa, … Để giải quyết các vấn đề thực tiễn như vậy thử thách lớn nhất thường là chuyển đổi vấn đề bằng lời sang vấn đề tối ưu hóa toán học bằng cách thiết lập các hàm số để tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

### ♦ CÁC BƯỚC GIẢI VẤN ĐỀ TỐI ƯU:

1. Hiểu vấn đề: Đầu tiên là đọc kỹ vấn đề cho đến khi hiểu rõ. Bạn tự hỏi rằng: Cái gì chưa biết? Các giá trị đã cho? Các điều kiện đặt ra?

2. Vẽ biểu đồ/đồ thị: Trong hầu hết các vấn đề, việc vẽ đồ thị và xác định các đại lượng đã cho và cần tìm trên đồ thị là hữu ích

3. Giới thiệu ký hiệu: Gán một kí hiệu ($Q$) cho đại lượng cần được cực đại hóa hay cực tiểu hóa. Đồng thời chọn các kí hiệu (*a, b, c, …, x, y*) cho các đại lượng chưa biết khác và kí hiệu chúng trên biểu đồ. Nên dùng các chữ cái đầu như là các kí hiệu có tính gợi ý – ví dụ như $A$ cho area (diện tích), $h$ cho height (chiều cao), $t$ cho time (thời gian).

4. Biểu diễn $Q$ theo các kí hiệu khác trong bước 3.

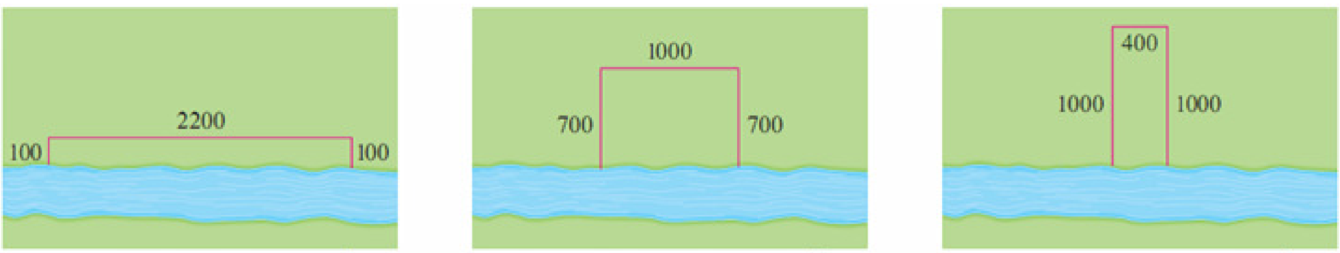
5. Nếu $Q$ được biểu diễn như là một hàm theo nhiều hơn một biến trong bước 4, dùng thông tin đã cho để tìm mối quan hệ (theo dạng các phương trình) giữa các biến. Rồi dùng các phương trình này để khử bớt các biến, chỉ còn lại 1 biến trong biểu thức của $Q$. Khi đó $Q$ sẽ được biểu diễn như là hàm số của một biến $x$: $Q = f(x)$. Viết ra miền xác định của hàm số này.

6. Sử dụng các phương pháp đã học để tìm giá trị cực đại và cực tiểu tuyệt đối của $f$. Trong trường hợp đặc biệt, nếu miền xác định của $f$ là một khoảng đóng thì ta sử dụng Closed Interval Method.

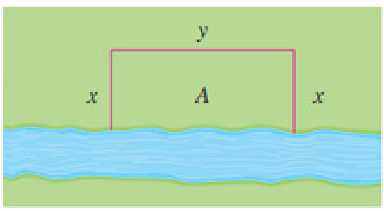
**Example 1:** A farmer has 2400 ft of fencing and wants to fence off a rectangular field that borders a straight river. He needs no fence along the river. What are the dimensions of the field that has the largest area?

**Giải:**

Hình sau đưa ra một số trường hợp khi sử dụng 2400 ft hàng rào.




Area = 100 · 2200 = 220,000 ft²   Area = 700 · 1000 = 700,000 ft²   Area = 1000 · 400 = 400,000 ft²




Gọi $A$ là diện tích hình chữ nhật với các cạnh có độ dài là $x$, $y$ với $x$, $y$ tính bằng feet (xem hình bên). Khi đó $A = xy$.
Vì tổng chiều dài của hàng rào là 2400 ft nên $2x + y = 2400$.
Bây giờ chuyển $A$ thành hàm theo một biến $x$:

$A = xy = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$, với $0 \le x \le 1200$ (nếu trái lại thì $A < 0$)

Bài toán trở thành: tìm giá trị cực đại tuyệt đối của: $A(x) = 2400x - 2x^2$ khi $0 \le x \le 1200$

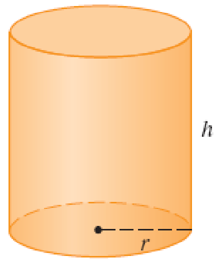
Ta có $A'(x) = 2400 - 4x$; $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 600.$

Tính các giá trị: $A(0) = 0$ $\quad A(600) = 720{,}000$ $\quad A(1200) = 0$

Theo Closed Interval Method ta nhận được giá trị cực đại tuyệt đối của $A$ là $A(600) = 720{,}000.$

Vậy để diện tích rào được lớn nhất ta phải rào chiều sâu là 600 ft và chiều ngang là 1200 ft.

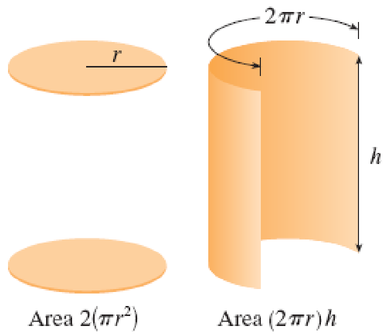
**Example 2:** A cylindrical can is to be made to hold 1L of oil. Find the dimensions that will minimize the cost of the metal to manufacture the can.




**Giải:**

Giả sử lon hình trụ có bán kính đáy $r$ và chiều cao $h$ (đơn vị: cm)

Để giảm tối thiểu chi phí kim loại dùng khi sản xuất, ta cần cực tiểu hóa diện tích bề mặt của hình trụ (gồm mặt trên, mặt dưới và mặt xung quanh). Hình vẽ bên cạnh cho ta thấy mặt xung quanh có thể xem như một tấm hình chữ nhật có các cạnh là $2\pi r$ và $h$.




Vậy diện tích bề mặt là: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Theo giả thuyết, lon hình trụ chứa 1 lít dầu do đó thể tích hình trụ:

$$\pi r^2 h = 1000 \left(cm^3\right) \text{ hay } h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Vậy $A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\dfrac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị cực tiểu tuyệt đối của:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \text{ khi } r > 0$$

Tính: $\quad A'(r) = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = \dfrac{4\left(\pi r^3 - 500\right)}{r^3}$;

$$A'(r) = 0 \leftrightarrow \pi r^3 = 500 \leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Ta có: $\quad A'(r) < 0$ với $0 < r < \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$

và $A'(r) > 0$ với $r > \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ nên $A$ đạt giá trị cực tiểu tuyệt đối tại $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$.

Khi đó: $\quad h = \dfrac{1000}{\pi r^2} = \dfrac{1000}{\pi \sqrt[3]{\left(\dfrac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = 2r$

Vậy, để giảm tối thiểu chi phí sản xuất cái lon, bán kính lon là $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ (cm) và chiều cao lon bằng 2 lần bán kính.

**Chú ý:**

Lý luận trong ví dụ 2 để kết luận về tính cực tiểu tuyệt đối là một biến thể của First Derivative Test (chỉ áp dụng cho cực đại và cực tiểu địa phương).

Bây giờ ta phát biểu kết quả này và nó sẽ được dùng về sau.

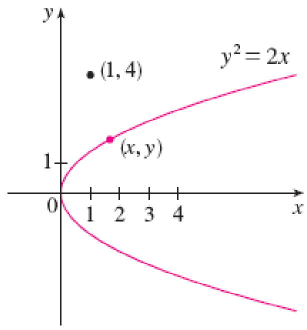
FIRST DERIVATIVE TEST FOR ABSOLUTE EXTREME VALUES: Giả sử $c$ là một số tới hạn của hàm liên tục $f$ được định nghĩa trên một khoảng

(a) If $f'(x) > 0, \forall x < c$ và $f'(x) < 0, \forall x > c$ thì $f(c)$ là giá trị cực đại tuyệt đối của $f$

(b) If $f'(x) < 0, \forall x < c$ và $f'(x) > 0, \forall x > c$ thì $f(c)$ là giá trị cực tiểu tuyệt đối của $f$

**Example 3:** Find the point on the parabola $y^2 = 2x$ that is closest to the point $(1,4)$.

**Giải:**




Khoảng cách giữa điểm $(1,4)$ và điểm $\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$ thuộc parabola $y^2 = 2x$ là:

$$d = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

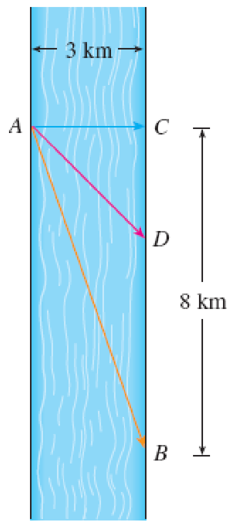
Bài toán của ta là cực tiểu hóa $d$, nhưng sẽ đơn giản hơn nếu ta tìm cách cực tiểu hóa $d^2$. Ta có: $d^2 = f(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2$

$$f'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8; \qquad f'(y) = 0 \leftrightarrow y = 2.$$

Ta có: $f'(y) < 0$ khi $y < 2$ và $f'(y) > 0$ khi $y > 2$.

Áp dụng First Derivative Test for Absolute Extreme Values, hàm đạt cực tiểu tuyệt đối khi $y = 2$.

Vậy điểm trên parabola $y^2 = 2x$ gần điểm $(1,4)$ nhất là điểm $\left(\frac{2^2}{2}, 2\right) = (2,2)$.




**Example 4:** A man launches his boat from point $A$ on a bank of a straight river, 3 km wide, and wants to reach point $B$, 8 km downstream on the opposite bank, as quickly as possible (see Figure). He could row his boat directly across the river to point $C$ and then run to $B$, or he could row directly to $B$, or he could row to some point $D$ between $C$ and $B$ and then run to $B$. If he can row $6\ km/h$ and run $8\ km/h$, where should he land to reach $B$ as soon as possible? (We assume that the speed of the water is negligible compared with the speed at which the man rows.)

**Giải:**

Gọi $x$ là khoảng cách từ $C$ đến $D$, thì đoạn đường trôi xuôi dòng là $|DB| = 8 - x$

Theo định lý Pythagorean, khoảng cách $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$

Vậy thời gian chèo là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ $(h)$ và thời gian trôi là $\frac{8-x}{8}$ $(h)$, do đó tổng thời gian $T$ là hàm theo $x$:

$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$, $\quad 0 \le x \le 8$ (nếu $x = 0$, ông ta chèo đến $C$ và nếu $x = 8$, ông ta chèo thẳng đến $B$)

Tính: $T'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$

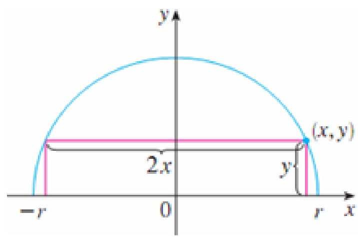
$T'(x)=0 \leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{1}{8} \leftrightarrow 7x^2=81 \rightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$ $(x\geq 0)$

Tính $T(0)=1.5$ $T\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right)\approx 1.33$ $T(8)\approx 1.42$.

Theo Closed Interval Method, $T$ đạt cực tiểu tuyệt đối khi $x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$. Tức là muốn đến $B$ nhanh nhất, người đàn ông phải chèo đến điểm $D$ cách $C$ một khoảng $\dfrac{9}{\sqrt{7}}\,km\ (\approx 3.4\,km)$ rồi xuôi dòng đến $B$.

**Example 5:** Find the area of the largest rectangle that can be inscribed in a semicircle of radius $r$.

**Giải:**




Có thể xem nửa đường tròn bán kính $r$ có phương trình: $x^2+y^2=r^2$ với tâm là gốc tọa độ. Khi đó hình chữ nhật nội tiếp (inscribed) trong nửa đường tròn phải có hai đỉnh nằm trên nửa đường tròn và hai đỉnh còn lại nằm trên trục hoành (xem hình).

Giả sử $(x,y)$ là đỉnh nằm trên cung phần tư thứ nhất. Khi đó hình chữ nhật có các cạnh có độ dài là $2x$ và $y$.

Diện tích hình chữ nhật: $A=2xy$.

Mặt khác $x^2+y^2=r^2$ nên $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Vậy $A=2x\sqrt{r^2-x^2}$.

Bài toán bây giờ là: Tìm cực đại tuyệt đối của

$$A(x)=2x\sqrt{r^2-x^2},\qquad 0\leq x\leq r$$

Ta có: $A'(x)=\dfrac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$; $A'(x)=0 \leftrightarrow x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ $(x\geq 0)$.

So sánh $A\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)=2\dfrac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2-\dfrac{r^2}{2}}=r^2$ với giá trị $A(0)=0$ và $A(r)=0$ ta nhận được diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp nửa đường tròn là $A\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)=r^2$.

## ♦ ỨNG DỤNG TRONG KINH DOANH VÀ KINH TẾ (APPLICATIONS TO BUSINESS AND ECONOMICS):

Ta đã biết trong mục 3.7, nếu $C(x)$ là hàm chi phí thì chi phí cận biên là $C'(x)$. Bây giờ ta xem xét trong lĩnh vực marketing.

Giả sử $p(x)$ là giá của đơn vị sản phẩm mà công ty có thể tính nếu bán $x$ đơn vị. Hàm $p$ gọi là hàm cầu (demand function) hay hàm giá (price function).

Nếu có $x$ đơn vị sản phẩm được bán và giá $p(x)$ thì công ty thu được: $R(x)=xp(x)$ (đơn vị giá). Hàm $R$ gọi là hàm doanh thu (revenue function).

Đạo hàm $R'$ gọi là hàm doanh thu cận biên (marginal revenue function), nó biểu thị tốc độ biến thiên của doanh thu đối với số đơn vị sản phẩm đã bán.

Nếu $x$ đơn vị sản phẩm đã được bán thì lợi nhuận mà công ty thu được là: $P(x) = R(x) - C(x)$

$P$ gọi là hàm lợi nhuận (profit function) và đạo hàm $P'$ gọi là hàm lợi nhuận cận biên (marginal profit function).

**Example 6:** A store has been selling 200 DVD burners a week at $\$350$ each. A market survey indicates that for each $\$10$ rebate offered to buyers, the number of units sold will increase by 20 a week. Find the demand function and the revenue function. How large a rebate should the store offer to maximize its revenue?

**Giải:**

Gọi $x$ là số đầu ghi DVD bán được trong tuần. Số lượng bán tăng thêm: $x - 200$

Theo giả thuyết, nếu giảm giá 10$, số đầu ghi DVD bán tăng thêm trong tuần là 20. Vậy mỗi đầu ghi DVD bán thêm, giá giảm là $\frac{1}{20} \times 10$.

Phương trình hàm cầu:

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{x}{2}$$

Hàm doanh thu: $R(x) = xp(x) = 450x - \frac{x^2}{2}$.

Vì $R'(x) = 450 - x$, $R'(x) = 0 \leftrightarrow x = 450$ và $R'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi $x = 450$ nên giá trị cực đại tuyệt đối của $R$ đạt được tại $x = 450$. Khi đó giá bán tương ứng:

$$p(450) = 450 - \frac{450}{2} = 225, \text{ giá giảm: } 350 - 225 = 125.$$

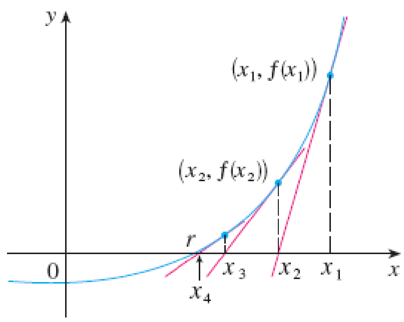
Vậy để cực đại doanh thu, cửa hàng nên đề nghị giảm 125$/sản phẩm

## 1.8 PHƯƠNG PHÁP NEWTON (NEWTON'S METHOD)

Đối với các phương trình $f(x) = 0$ không có phương pháp chung để tìm nghiệm, phương pháp Newton cho phép tính xấp xỉ nghiệm của phương trình.

Xét đồ thị hàm $y = f(x)$, với nghiệm ta đang cố gắng tìm là $r$. Chúng ta bắt đầu với xấp xỉ thứ nhất $x_1$ (bằng cách dự đoán).

Xét đường tiếp tuyến $L$ với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(x_1, f(x_1))$, tìm giao điểm $x_2$ của $L$ với $Ox$.




Vì tiếp tuyến là đường thẳng nên ta dễ dàng tìm giao điểm của $L$ với $Ox$. Hơn nữa, đường tiếp tuyến gần với đường cong nên giao điểm của tiếp tuyến với $Ox$ gần với giao điểm của đường cong với $Ox$ (gần nghiệm $r$). Tìm công thức liên quan giữa $x_1, x_2$:

Phương trình đường tiếp tuyến $L$: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$.

Giao điểm $x_2$ của $L$ với $Ox$ là: $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Ta dùng $x_2$ như là xấp xỉ thứ hai của $r$.

Lặp lại thủ tục như trên, dùng đường tiếp tuyến tại điểm $(x_2, f(x_2))$, cho ta xấp xỉ

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

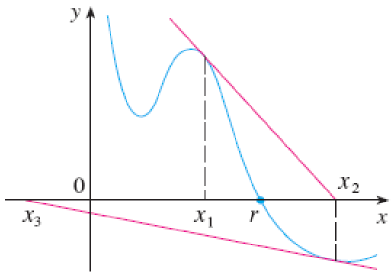
Lặp lại quá trình này, ta được một dãy các xấp xỉ $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$

Tổng quát, nếu xấp xỉ thứ *n* là $x_n$ và $f'(x_n) \neq 0$ thì xấp xỉ tiếp theo cho bởi công thức:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nếu $x_n$ càng gần với $r$ khi *n* càng lớn, ta nói dãy $x_n$ hội tụ tới $r$ và viết: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$

**Lưu ý:**




Xét trường hợp như hình bên cạnh, xấp xỉ $x_2$ tệ hơn $x_1$. Điều này có thể xảy ra khi $f'(x_1)$ gần 0, thậm chí có thể cho xấp xỉ (như giá trị $x_3$) nằm ngoài miền xác định của *f*. Khi đó phương pháp Newton không đem lại hiệu quả và tốt hơn nên chọn xấp xỉ ban đầu $x_1$.

**Example 1:** Starting with $x_1 = 2$, find the third approximation $x_3$ to the root of the equation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

**Giải:**

Áp dụng phương pháp Newton với $f(x) = x^3 - 2x - 5$ và $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Ta có: $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946 \text{ (chính xác đến 4 chữ số thập phân)}$$

**Example 2:** Use Newton's method to find $\sqrt[6]{2}$ correct to eight decimal places.

**Giải:**

Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tìm nghiệm của phương trình $x^6 - 2 = 0$.

Áp dụng phương pháp Newton với $f(x) = x^6 - 2$ và $f'(x) = 6x^5$.

Khi đó: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

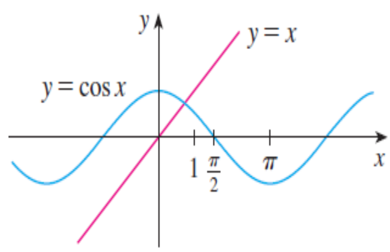
Nếu chọn $x_1 = 1$, ta được:

$x_2 = 1.16666667$; $x_3 \approx 1.12644368$; $x_4 \approx 1.12249707$; $x_5 \approx 1.12246205$; $x_6 \approx 1.12246205$.

Vì $x_5$ và $x_6$ giống nhau đến 8 chữ số thập phân, khi đó ta dừng lại và kết luận $\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$

**Example 3:** Find, correct to six decimal places, the root of the equation $\cos x = x$.

**Giải:**




Đặt $f(x) = \cos x - x$; $f'(x) = -\sin x - 1$.

Áp dụng phương pháp Newton ta được:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1}$$

Hình bên chỉ ra rằng nghiệm của phương trình $f(x)=0$ (tức hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\cos x$ và $y=x$) là gần 1, vì vậy ta thử chọn $x_1=1$. Khi đó ta tính được:

$x_2 \approx 0.75036387$ $x_3 = 0.73911289$ $x_4 \approx 0.73908513$ $x_5 \approx 0.73908513$ Vì $x_4$ và $x_5$ giống nhau đến 8 chữ số thập phân nên ta kết luận nghiệm của phương trình đúng đến sáu chữ số thập phân là 0.739085

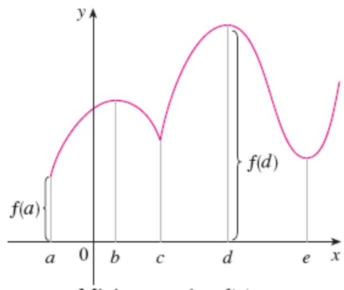
## 1.9 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT (MAXIMUM AND MINIMUM VALUES)

DEFINITION: Cho hàm $y=f(x)$ có miền xác định $D$

- Hàm $f$ có một cực đại tuyệt đối/toàn cục (absolute/global maximum) tại $c$ nếu $f(c)\ge f(x), \forall x\in D$. Khi đó, $f(c)$ gọi là giá trị lớn nhất (maximum value) của $f$ trên $D$
- Hàm $f$ có một cực tiểu tuyệt đối/toàn cục (absolute/global minimum) tại $c$ nếu $f(c)\le f(x), \forall x\in D$. Khi đó $f(c)$ gọi là giá trị nhỏ nhất (minimum value) của $f$ trên $D$.
- Các giá trị cực đại và cực tiểu của $f$ gọi là các giá trị cực trị (extreme values) của $f$

Trong hình bên, $f$ có *cực đại tuyệt đối* tại $d$ (điểm $(d, f(d))$ là điểm cao nhất trong đồ thị) và $f$ có *cực tiểu tuyệt đối* tại $a$ (điểm $(a, f(a))$) là điểm thấp nhất trong đồ thị). Nếu ta chỉ xét những giá trị của $x$ gần $b$, ví dụ như

$x\in(a,c)$ thì $f(b)$ là lớn nhất trong tất cả các giá trị của $f(x)$ trên $(a,c)$. Khi đó $f(b)$ gọi là giá trị *cực đại địa phương*.



Minimum value $f(a)$, maximum value $f(d)$

Tương tự, $f$ có *cực tiểu địa phương* tại $c$ nếu ta xét giá trị của $f$ tại những điểm thuộc $(b,d)$.

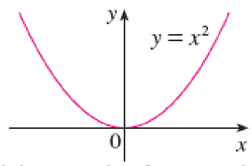
DEFINITION:

- Hàm $f$ có một cực đại địa phương (local maximum) tại $c$ nếu $f(c)\ge f(x)$ với mọi $x$ gần $c$.
- Hàm $f$ có một cực tiểu địa phương (local minimum) tại $c$ nếu $f(c)\le f(x)$ với mọi $x$ gần $c$

**Lưu ý:** Cụm từ "với mọi $x$ gần $c$" có nghĩa "với mọi $x$ thuộc khoảng mở chứa $c$"

**Example 1:** Hàm số $f(x)=\cos x$ nhận giá trị 1 là giá trị cực đại (địa phương và tuyệt đối) vô hạn lần vì $\cos 2n\pi = 1$ với mọi số nguyên n và $-1\le \cos x\le 1, \forall x$.

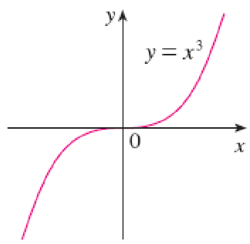
Tương tự $\cos(2n+1)\pi = -1$ là giá trị cực tiểu với $n$ là số nguyên.



Minimum value 0, no maximum

**Example 2:** Xét hàm $y=x^2$. Vì $x^2\ge 0, \forall x$ do đó $f(0)=0$ là giá trị nhỏ nhất (và cực tiểu địa phương) của $f$.

Hàm không có giá trị lớn nhất (hình vẽ)



No minimum, no maximum

**Example 3:** Xét đồ thị hàm $y=x^3$, hàm không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (hàm cũng không có các giá trị cực trị địa phương).

**Example 4:** Xét đồ thị của hàm số:

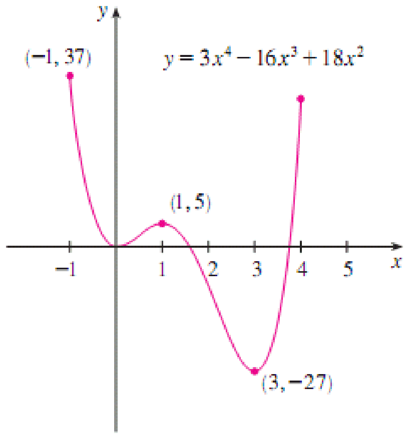
$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad -1 \le x \le 4$.

Ta thấy, cực đại địa phương: $f(1) = 5$

Cực đại tuyệt đối: $f(-1) = 37$.

Hơn nữa, $f(0) = 0$ là cực tiểu địa phương và $f(3) = -27$ vừa là cực tiểu địa phương vừa là cực tiểu tuyệt đối.

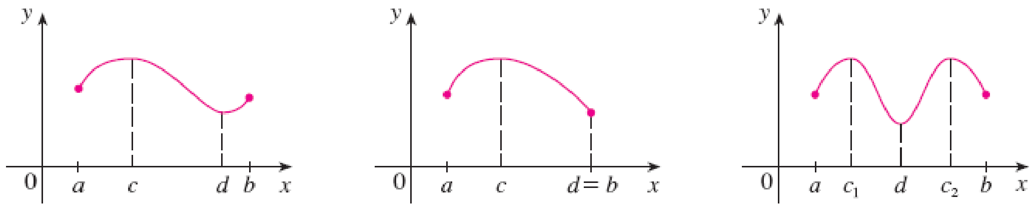
Chú ý, $f$ không có cực đại địa phương và cực đại tuyệt đối tại $x = 4$.



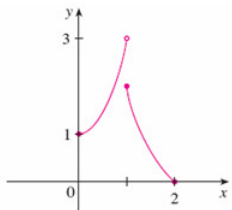

THE EXTREME VALUE THEOREM:

Nếu $f$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng $[a,b]$ thì $f$ đạt một giá trị cực đại tuyệt đối $f(c)$ và một giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(d)$ tại các điểm $c$, $d$ thuộc $[a,b]$

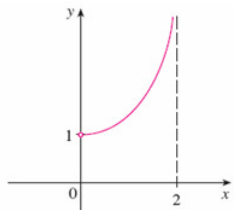
Các hình vẽ sau minh họa định lý giá trị cực trị, chú ý rằng giá trị cực trị có thể nhận nhiều hơn một lần.




Đồ thị của hai hàm sau không đạt kết quả của định lý trên vì chúng không thỏa một trong hai điều kiện của định lý.

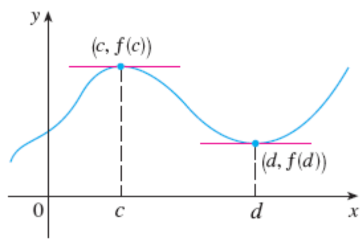


This function has minimum value $f(2) = 0$, but no maximum value.



This continuous function $g$ has no maximum or minimum.

FERMAT'S THEOREM: Nếu $f$ có một cực đại hay cực tiểu địa phương tại $c$ và nếu $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$

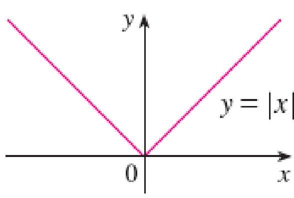



**Lưu ý:** Chiều ngược lại của định lý không đúng, xem ví dụ sau.

**Example 5:** Xét hàm $y = x^3$, ta có

$y' = 3x^2$, $y' = 0 \leftrightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$, nhưng $y$ không đạt cực đại hay cực tiểu tại $x = 0$

**Example 6:** Xét hàm $y = |x|$, hàm này có giá trị cực tiểu tại 0 nhưng $f'(0)$ không tồn tại




DEFINITION: Một số tới hạn (critical number) của hàm $f$ là một số $c$ thuộc miền xác định của hàm $f$ thỏa $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không tồn tại

**Example 7:** Find the critical numbers of $f(x)=x^{\frac{3}{5}}(4-x)$.

**Giải:**

Ta có $f'(x)=x^{\frac{3}{5}}(-1)+(4-x)\left(\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)=\frac{12-8x}{5x^{\frac{2}{5}}}$

$f'(x)=0 \leftrightarrow 12-8x=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$ và $f'(0)$ không tồn tại.

Vậy *y* có 2 số tới hạn là 3/2, 0

**Lưu ý:** Nếu $f$ có một *cực đại hay cực tiểu địa phương* tại *c* thì *c* là một số tới hạn của $f$

THE CLOSED INTERVAL METHOD: Phương pháp này để tìm giá trị cực đại và cực tiểu tuyệt đối của một hàm $f$ liên tục trên khoảng đóng $[a,b]$:

1. Tìm giá trị của $f$ tại các số tới hạn của $f$ trong $(a,b)$
2. Tìm $f(a), f(b)$
3. Giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của $f$ tìm được trong 2 bước trên là giá trị cực đại/cực tiểu tuyệt đối của $f$

**Example 8:** Find the absolute maximum and minimum values of the function

$$f(x)=x^3-3x^2+1, \quad -\frac{1}{2}\le x\le 4.$$

**Giải:** Ta có $f$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2},4\right]$, sử dụng phương pháp khoảng đóng:

Xét $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, $f'(x)=0 \leftrightarrow x=0, x=2$.

$\rightarrow$ *f* có 2 điểm tới hạn là $x=0$ và $x=2$

Tính $f(0)=1$, $f(2)=-3$, $f(-1/2)=1/8$, $f(4)=17$. So sánh 4 giá trị này của *f*, ta có: giá trị cực đại tuyệt đối: $f(4)=17$, giá trị cực tiểu tuyệt đối: $f(2)=-3$

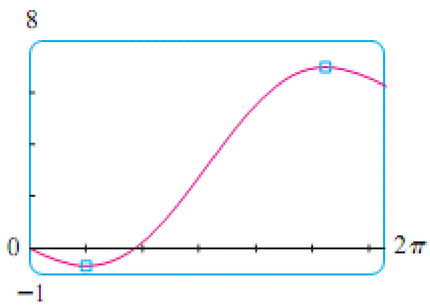
**Example 9:**

(a) Use a graphing device to estimate the absolute minimum and maximum values of the function $f(x)=x-2\sin x$, $0\le x\le 2\pi$.

(b) Use calculus to find the exact minimum and maximum values.

**Giải:**

(a) Ta chọn hình chữ nhật quan sát là $[0,2\pi]$ by $[-1,8]$.




Bằng đồ thị, ta dự đoán được giá trị cực đại tuyệt đối khoảng 6.97 khi $x\approx 5.2$.

Tương tự, giá trị cực tiểu tuyệt đối là -0.68 khi $x\approx 1.0$.

(b) Hàm số $f(x)=x-2\sin x$ liên tục trên $[0,2\pi]$.

Ta có: $f'(x)=1-2\cos x$,

$f'(x)=0 \leftrightarrow \cos x = 1/2 \rightarrow x=\pi/3,\ x=5\pi/3$

Tính: $f(\pi/3)=\dfrac{\pi}{3}-2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\approx -0.684853$

$$f(5\pi/3)=\frac{5\pi}{3}-2\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 6.968039$$

Giá trị của hàm số $f$ tại các điểm biên: $f(0)=0,\ f(2\pi)=2\pi\approx 6.28$

Vậy giá trị cực tiểu tuyệt đối là: $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ và giá trị cực đại tuyệt đối là:

$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$.

**Example 10:** The Hubble Space Telescope was deployed on April 24, 1990, by the space shuttle *Discovery*. A model for the velocity of the shuttle during this mission, from liftoff at $t=0$ until the solid rocket boosters were jettisoned at $t=126\,s$, is given by

$$v(t)=0.001302t^3-0.09029t^2+23.61t-3.083$$

(in feet per second). Using this model, estimate the absolute maximum and minimum values of the acceleration of the shuttle between liftoff and the jettisoning of the boosters.

**Giải:** Gia tốc của tàu con thoi:

$$a(t)=v'(t)=0.003906t^2-0.18058t+23.61$$

Áp dụng phương pháp khoảng đóng cho hàm liên tục a trên khoảng $0\le t\le 126$:

$$a'(t)=0.007812t-0.18058, \qquad a'(t)=0 \leftrightarrow t=\frac{0.18058}{0.007812}\approx 23.12$$

Tính giá trị $a(t)$ tại các điểm biên và điểm tới hạn:

$$a(0)=23.61,\quad a(23.12)=21.52,\quad a(126)\approx 62.87$$

Vậy gia tốc cực đại khoảng $62.87\,ft/s^2$ và gia tốc cực tiểu khoảng $21.52\,ft/s^2$.

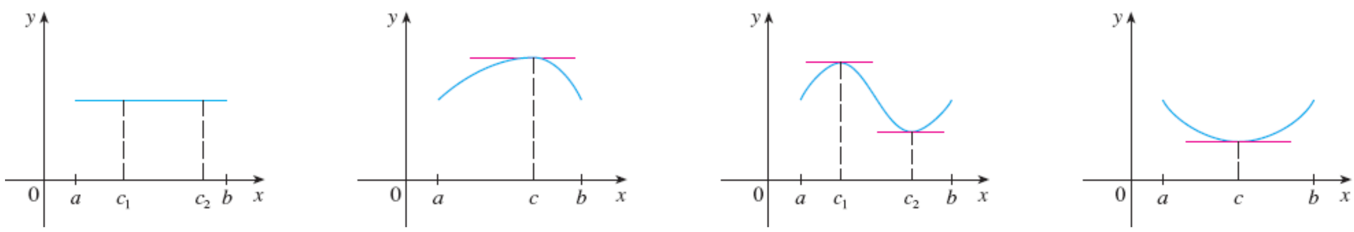
## ♦ ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH (THE MEAN VALUE THEOREM)

ROLLE'S THEOREM: Giả sử $f$ là một hàm thỏa mãn 3 giả thuyết dưới đây:

1. $f$ liên tục trên khoảng đóng $[a,b]$
2. $f$ khả vi trên khoảng mở $(a,b)$
3. $f(a)=f(b)$

Thì có một số $c$ thuộc khoảng $(a,b)$ thỏa $f'(c)=0$

Đồ thị của các kiểu hàm dưới đây thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle



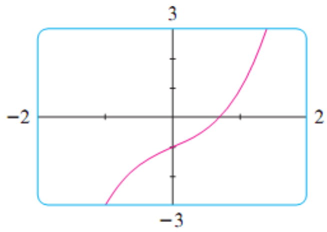
**Example 1:** Ứng dụng định lý Rolle cho hàm vị trí $s = f(t)$ của một vật chuyển động. Nếu vật có cùng một vị trí tại hai thời điểm khác nhau $t = a$, $t = b$, tức là: $f(a) = f(b)$ thì sẽ có một thời điểm $c \in (a,b)$ mà vận tốc của vật bằng không: $f'(c) = 0$. (Ví dụ khi ném thẳng một quả bóng lên trên)

**Example 2:** Prove that the equation $x^3 + x - 1 = 0$ has exactly one real root.

**Giải:**

Trước hết, ta sử dụng định lý giá trị trung gian để chỉ ra sự tồn tại nghiệm:

Đặt $f(x) = x^3 + x - 1$, ta có $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, vậy tồn tại $c \in (0,1)$ thỏa $f(c) = 0$, c là 1 nghiệm cuả phương trình.




Ta sẽ chứng minh phương trình không có nghiệm thực nào khác.

Giả sử phương trình có 2 nghiệm $a$, $b$ thì $f(a) = f(b) = 0$.

Vì $f$ là đa thức nên liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong $(a,b)$ nên theo định lý Rolle, tồn tại $d \in (a,b)$ thỏa $f'(d) = 0$, nhưng $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1,\ \forall x$ (mâu thuẫn).

Vậy phương trình có đúng 1 nghiệm thực.

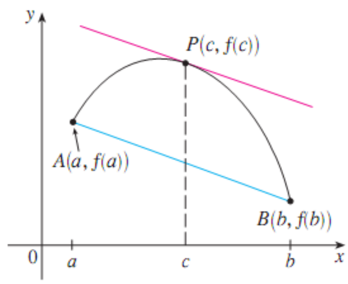
THE MEAN VALUE THEOREM: Giả sử $f$ là một hàm thỏa mãn các giả thuyết sau:

1. $f$ liên tục trên khoảng đóng $[a,b]$
2. $f$ khả vi trên khoảng mở $(a,b)$

Thì có một số $c$ thuộc khoảng $(a,b)$ thỏa $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ hay $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Lưu ý:** Xét 2 điểm $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ là 2 điểm thuộc đồ thị hàm $f$

Hệ số góc của cát tuyến $AB$ là $m_{AB} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

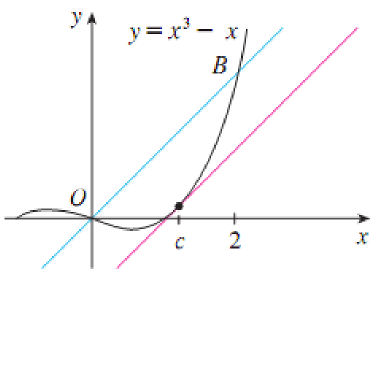



Vậy định lý khẳng định là có điểm $c \in (a,b)$ mà tiếp tuyến tại $(c, f(c))$ song song với cát tuyến $AB$

**Example 3:** Illustrate the Mean Value Theorem with a specific function $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$.

**Giải:**

Vì $f$ là đa thức nên $f$ liên tục và khả vi với mọi $x$. Do đó $f$ liên tục trên $[0,2]$, khả vi trong $(0,2)$.




Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $c \in (0,2)$ thỏa:

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \leftrightarrow 6 = (3c^2 - 1)2 \rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vì $c \in (0,2)$ nên $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Tiếp tuyến với đường cong $f$ tại $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ song song với $OB$.

**Example 4:** Một vật chuyển động thẳng có hàm vị trí $s = f(t)$, vận tốc trung bình giữa $t = a$, $t = b$ là: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, vận tốc tại thời điểm $t = c$ là $f'(c)$. Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho vận tốc tức thời $f'(c)$ bằng với vận tốc trung bình. Chẳng hạn, một ô tô đi được 180 km trong 2 giờ, khi đó đồng hồ đo vận tốc của xe phải đọc 90 km/h ít nhất một lần.

**Example 5:** Suppose that $f(0) = -3$, $f'(x) \le 5$ and for all values of $x$. How large can $f(2)$ possibly be?

**Giải:**

Ta có $f$ khả vi (do đó liên tục) với mọi $x$. Áp dụng định lý giá trị trung bình trên [0,2], tồn tại $c \in (0,2)$ thỏa: $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \leftrightarrow f(2) = -3 + 2f'(c) \le -3 + 2.5 = 7$. Vậy giá trị lớn nhất của $f(2)$ là 7.

> THEOREM: Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x$ thuộc $(a,b)$ thì $f$ là hằng số trên $(a,b)$

> COROLLARY: Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi $x$ thuộc $(a,b)$ thì $f - g$ là hằng số trên $(a,b)$ hay $f(x) = g(x) + c$, với $c$ là hằng số.

**Example 6:** Prove the identity $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

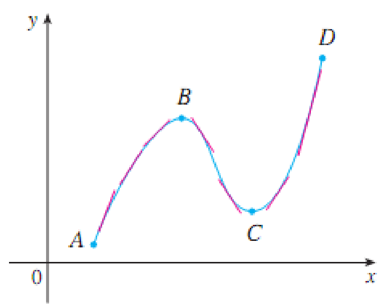
**Giải:** Xét $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0, \forall x$. Vậy $f(x) = c$ (hằng số).

Để xác định giá trị của $c$, cho $x = 1$ ta có: $c = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

## ♦ ĐẠO HÀM CÓ ẢNH HƯỞNG THẾ NÀO ĐẾN HÌNH DÁNG CỦA ĐỒ THỊ (HOW DERIVATIVES AFFECT THE SHAPE OF A GRAPH)

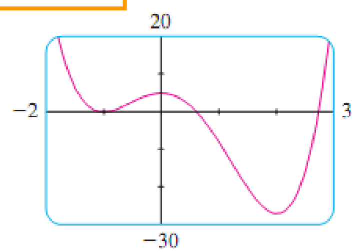
### ♦ WHAT DOES *f'* SAY ABOUT *f* ?

Xét hình vẽ bên là đồ thị của một hàm. Tại các điểm trong các khoảng giữa $A$, $B$ và $C$, $D$, các tiếp tuyến với đường cong có hệ số góc dương, do đó $f'(x) > 0$, đồ thị hàm số có dáng điệu đi lên từ trái sang phải (hàm $f$ tăng). Tại các điểm trong khoảng giữa $B$, $C$, các tiếp tuyến với đường cong có hệ số góc âm, do đó $f'(x) < 0$, đồ thị hàm số có dáng điệu đi xuống từ trái sang phải (hàm $f$ giảm).




> INCREASING/DECREASING TEST:
>
> a. Nếu $f'(x) > 0$ trên một khoảng thì $f$ tăng trên khoảng đó
>
> b. Nếu $f'(x) < 0$ trên một khoảng thì $f$ giảm trên khoảng đó

**Example 1:** Find where the function $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ is increasing and where it is decreasing.




**Giải:** Xét $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 2$$

Xét dấu $f'(x)$:

| Interval | $12x$ | $x-2$ | $x+1$ | $f'(x)$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x < -1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | decreasing on $(-\infty, -1)$ |
| $-1 < x < 0$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | increasing on $(-1, 0)$ |
| $0 < x < 2$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | decreasing on $(0, 2)$ |
| $x > 2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | increasing on $(2, \infty)$ |

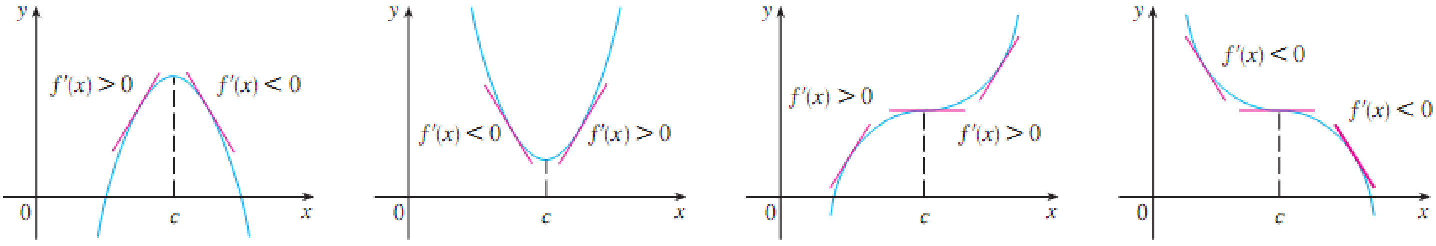
THE FIRST DERIVATIVE TEST (TIÊU CHUẨN ĐẠO HÀM CẤP 1):

Giả sử $c$ là một số tới hạn của hàm liên tục $f$

a. Nếu dấu của $f'(x)$ thay đổi từ dương sang âm qua $c$ thì $f$ có một cực đại địa phương tại $c$

b. Nếu dấu của $f'(x)$ thay đổi từ âm sang dương qua $c$ thì $f$ có một cực tiểu địa phương tại $c$

Các hình ảnh minh họa




(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

**Example 2:** Find the local minimum and maximum values of the function $f$ in Example 1.

**Giải:**

Ta có hàm $f(x)$ có 3 điểm tới hạn $x=0$, $x=-1$, $x=2$. Xem lại bảng xét dấu của ví dụ 1:

- $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương tại các giá trị $x=-1$ và $x=2$. Do vậy $f(-1)=0$ và $f(2)=-27$ là 2 giá trị cực tiểu địa phương của $f$.

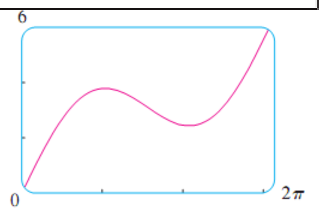
- $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm tại giá trị $x=0$. Do vậy $f(0)=5$ là giá trị cực đại địa phương của $f$.

**Example 3:** Find the local maximum and minimum values of the function $g(x)=x+2\sin x$, $0 \le x \le 2\pi$

**Giải:** Ta có $g'(x)=1+2\cos x$, để tìm các điểm tới hạn của $g$ ta giải phương trình: $g'(x)=0$, nghiệm của phương trình này là $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

| Interval | $g'(x) = 1 + 2\cos x$ | $g$ |
|---|---|---|
| $0 < x < 2\pi/3$ | $+$ | increasing on $(0, 2\pi/3)$ |
| $2\pi/3 < x < 4\pi/3$ | $-$ | decreasing on $(2/3, 4\pi/3)$ |
| $4\pi/3 < x < 2\pi$ | $+$ | increasing on $(4\pi/3, 2\pi)$ |

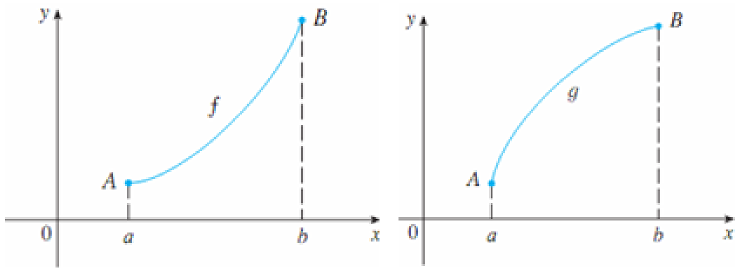



Tại $x=\dfrac{2\pi}{3}$, $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $g(x)$ đạt cực đại địa phương tại điểm này và giá trị cực đại là: $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\approx 3.83$.

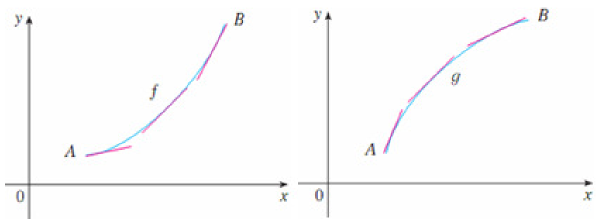
Tại $x=\frac{4\pi}{3}$, $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $g(x)$ đạt cực tiểu địa phương tại điểm này và giá trị cực tiểu là: $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\approx 2.46$.

## ♦ WHAT DOES *f''* SAY ABOUT *f* ?

Cho $f$ và $g$ là hai hàm tăng trên khoảng $(a,b)$ có đồ thị đều nối hai điểm $A$, $B$ (hình vẽ). Nhưng hình dáng của chúng lại khác nhau, làm thế nào để phân biệt chúng. Ta nhận thấy đồ thị của $f$ nằm trên tất cả các đường tiếp tuyến của nó trong khoảng $(a,b)$ và đồ thị của $g$ nằm dưới tất cả các đường tiếp tuyến của nó trong khoảng $(a,b)$, do đó ta có định nghĩa sau:

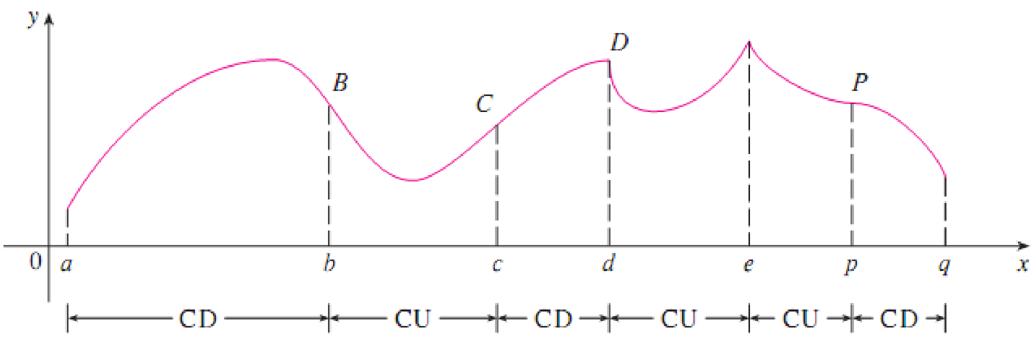



DEFINITION: Nếu đồ thị hàm $f$ nằm trên tất cả các đường tiếp tuyến của nó trên khoảng $I$, thì $f$ được gọi là lõm lên (concave upward) trên $I$. Nếu đồ thị hàm $f$ nằm dưới tất cả các đường tiếp tuyến của nó trên khoảng $I$, thì $f$ được gọi là lõm xuống (concave downward) trên $I$.




(a) Concave upward (b) Concave downward

Đồ thị của hàm như hình vẽ dưới đây lõm lên (CD) trên các khoảng: $(b,c)$, $(d,e)$, $(e,p)$, hàm lõm xuống (CU) trên các khoảng: $(a,b)$, $(c,d)$, $(p,q)$:



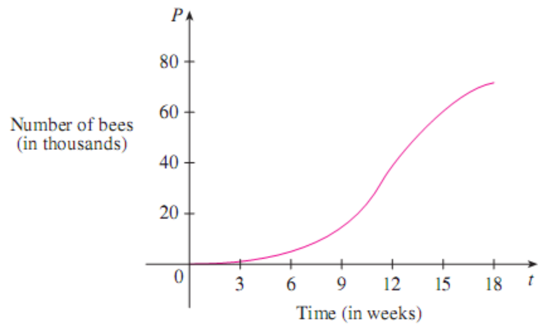

Đồ thị của hàm $f$ (hình a) đi từ trái sang phải ta thấy hệ số góc của các tiếp tuyến tăng, hay $f'$ là hàm tăng nên $f''$ dương, tương tự cho đồ thị của hàm $g$ (hình b), hệ số góc của các tiếp tuyến giảm hay $g'$ là hàm giảm nên $g''$ âm. Ta có kết quả sau:

CONCAVITY TEST:

a. Nếu $f''(x)>0, \forall x\in I$ thì đồ thị hàm $f$ lõm lên trên $I$

b. Nếu $f''(x)<0, \forall x\in I$ thì đồ thị hàm $f$ lõm xuống trên $I$

**Example 4:** Figure shows a population graph for Cyprian honeybees raised in an apiary. How does the rate of population increase change over time? When is this rate highest? Over what intervals is $P$ concave upward or concave downward?




**Giải:**

Nhìn vào hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị khi $t$ tăng, ban đầu tốc độ tăng của số lượng ong khá nhỏ, sau đó tăng nhanh hơn cho đến khi đạt cực đại tại thời điểm $t = 12$ tuần, sau 12 tuần thì tốc độ này lại giảm xuống. Khi số lượng ong tiến tới giá trị cực đại, khoảng 75,000, thì tốc độ tăng số lượng ong $P'(t)$ dần về 0. Đường cong cho biết $P$ lõm lên trên (0,12) và lõm xuống trên (12,18)

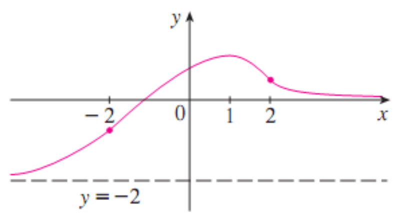
DEFINITION: Điểm $P$ trên đường cong $y = f(x)$ gọi là điểm uốn (inflection point) nếu $f$ liên tục tại đó và đường cong thay đổi từ lõm lên sang lõm xuống hoặc lõm xuống sang lõm lên tại P.

**Example 5:** Sketch a possible graph of a function $f$ that satisfies the following conditions:

(i) $f'(x) > 0$ on $(-\infty,1)$, $f'(x) < 0$ on $(1,+\infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ on $(-\infty,-2)$ and $(2,+\infty)$, $f''(x) < 0$ on $(-2,2)$

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

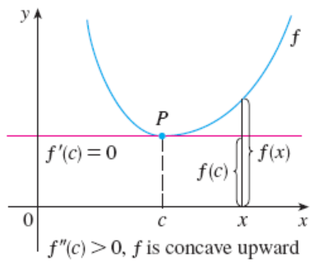



**Giải:**

Từ (i) ta có $f$ tăng trên khoảng $(-\infty,1)$, và giảm trên khoảng $(1,+\infty)$.

Từ (ii) ta có $f$ lõm lên trên trong các khoảng $(-\infty,-2)$ và $(2,+\infty)$, và lõm xuống trong $(-2,2)$.

Từ (iii) ta có $y = -2$ và $y = 0$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm $f$. Đồ thị của $f$ có dạng như hình vẽ.




THE SECOND DERIVATIVE TEST: Giả sử $f''$ liên tục trong khoảng mở chứa $c$

a. Nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) > 0$ thì $f$ có cực tiểu địa phương tại $c$

b. Nếu $f'(c) = 0$ và $f''(c) < 0$ thì $f$ có cực đại địa phương tại $c$

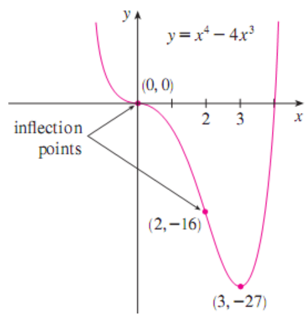
**Example 6:** Discuss the curve $y = x^4 - 4x^3$ with respect to concavity, points of inflection, and local maxima and minima. Use this information to sketch the curve.

**Giải:** Ta có $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, $f'(x) = 0$ tại $x = 0$, $x = 3$: là các số tới hạn của $f$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$, $f''(x) = 0$ tại $x = 0$, $x = 2$.

$f''(0) = 0$, $f''(3) = 36 > 0$.

Vì $f'(3) = 0$ và $f''(3) = 36 > 0$ nên $f(3) = -27$ là cực tiểu địa phương.



Vì $f''(x) < 0$ với $x < 0$ và $0 < x < 3$ nên $f$ không có cực đại hay cực tiểu địa phương tại 0

Từ bảng xét dấu của $f''$ ta có $f$ có hai điểm uốn: (0,0) và (2, –16).

| Interval | $f''(x) = 12x(x-2)$ | Concavity |
|---|---|---|
| $(-\infty, 0)$ | $+$ | upward |
| $(0, 2)$ | $-$ | downward |
| $(2, \infty)$ | $+$ | upward |

**Example 7:** Sketch the graph of the function $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

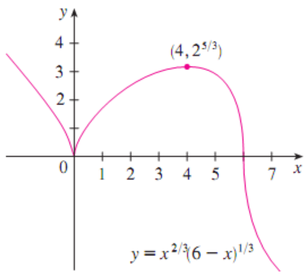
**Giải:** Ta có: $f'(x) = \dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$, $f''(x) = \dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$

$f'(x) = 0$ khi $x = 4$, và $f'(x)$ không xác định tại các điểm $x = 0$, $x = 6$. Các điểm tới hạn là: 0, 4, 6

| Interval | $4-x$ | $x^{1/3}$ | $(6-x)^{2/3}$ | $f'(x)$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x < 0$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | decreasing on $(-\infty, 0)$ |
| $0 < x < 4$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | increasing on $(0, 4)$ |
| $4 < x < 6$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | decreasing on $(4, 6)$ |
| $x > 6$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | decreasing on $(6, \infty)$ |

Từ bảng xét dấu của $f'$ ta có $f(0) = 0$ là giá trị cực tiểu địa phương, $f(4) = 2^{5/3}$ là giá trị cực đại địa phương. Tại $x = 6$, $f'$ không đổi dấu nên hàm không đạt cực trị địa phương.

Hơn nữa, $f''(x) < 0$ với $x < 0$, $0 < x < 6$ và $f''(x) > 0$ với $x > 6$ nên $f$ lõm xuống trên $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$ và lõm trên trên $(6, +\infty)$. Điểm $(6,0)$ là điểm uốn duy nhất của đồ thị. Đường cong có các tiếp tuyến thẳng đứng tại các điểm $(0,0)$ và $(6,0)$ vì $|f'(x)| \to \infty$ khi $x \to 0$ và khi $x \to 6$




**Example 8:** Use the first and second derivatives of $f(x) = e^{1/x}$, together with asymptotes, to sketch its graph.

**Giải:** Miền xác định của $f$ là: $\{x \mid x \neq 0\}$, ta tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị:

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} e^t = \infty$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = \lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$ do đó $y = 1$ là tiệm cận ngang.

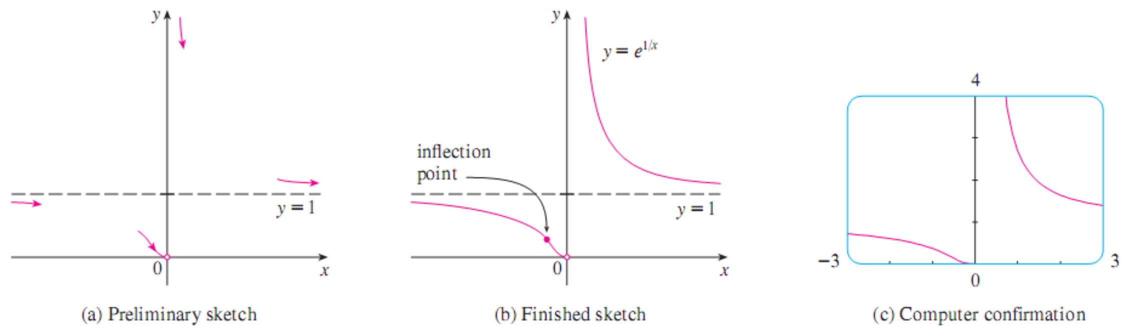
Đạo hàm cấp 1: $f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} < 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm $f$ giảm trên khoảng $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Hàm không có điểm tới hạn nên không có cực đại và cực tiểu.

Đạo hàm cấp 2: $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$, $f''(x) > 0$ khi $x > -\dfrac{1}{2}$ $(x \neq 0)$, và $f''(x) < 0$ khi $x < -\dfrac{1}{2}$

nên đường cong lõm xuống trên $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ và lõm lên trên $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

Điểm uốn $\left(-\dfrac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Đồ thị của hàm được phác họa như sau:




## ♦ TÓM TẮT VỀ CÁCH PHÁT HỌA ĐƯỜNG CONG (SUMMARY OF CURVE SKETCHING)

### ♦ NGUYÊN TẮC PHÁT HỌA ĐƯỜNG CONG (GUIDELINES FOR SKETCHING A CURVE)

Để vẽ đường cong $y = f(x)$ bằng tay, ta cần biết các thông tin dưới đây của đường cong:

A. Miền xác định (Domain) $D$

B. Các giao điểm (Intercepts) của đồ thị với các trục tọa độ

C. Tính đối xứng (Symmetry) của $y$

- Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$, thì $f$ là hàm chẵn trên $D$

- Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$, thì $f$ là hàm lẻ trên $D$

Đối với hàm chẵn hoặc lẻ trên $D$ ta chỉ cần vẽ đồ thị trên một nửa của miền xác định, nửa còn lại lấy đối xứng qua trục tung hoặc qua gốc tọa độ

- Nếu $f(x+p) = f(x), \forall x \in D$ ($p$ là hằng số dương) thì $f$ là hàm tuần hoàn (periodic function). Số $p$ nhỏ nhất được gọi là chu kỳ (period) của hàm tuần hoàn. Đối với hàm có tính chất này ta chỉ cần vẽ đồ thị trên 1 khoảng có độ dài $p$ rồi sử dụng phép tịnh tiến để có toàn bộ đồ thị

D. Các đường tiệm cận (Asymptotes)

- Tiệm cận ngang: Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ thì $y = L$ là đường tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(-\infty)$ ta không có đường tiệm cận ngang nhưng ta cũng có thông tin để phát họa đồ thị

- Tiệm cận đứng: Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$ nếu một trong các phát biểu sau là đúng $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

- Tiệm cận xiên (Slant Asymptote): Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (mx+b)\right] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (mx+b)\right] = 0$ thì đường thẳng $y = mx + b$ là đường tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$.

E. Khoảng tăng giảm (Intervals of Increase or Decrease)

Tính $f'(x)$, tìm các khoảng $f'(x) > 0$ ($f$ tăng) và các khoảng $f'(x) < 0$ ($f$ giảm)

F. Cực đại và cực tiểu địa phương (Local Maximum and Minimum Values)

Tìm các số tới hạn của $f$ [là những giá trị $c$ thỏa $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không tồn tại].

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $c$ thì $f(c)$ là cực đại địa phương.

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương tại $c$ thì $f(c)$ là cực tiểu địa phương.

Hoặc có thể dùng tiêu chuẩn đạo hàm cấp hai: nếu $f'(c)=0$ và $f''(c)\neq 0$ thì $f(c)$ là cực tiểu địa phương nếu $f''(c)>0$ và $f(c)$ là cực đại địa phương nếu $f''(c)<0$

G. Tính lõm và điểm uốn (Concavity and Points of Inflection)

Tính đạo hàm cấp hai và sử dụng Concavity Test, đường cong lõm lên khi $f''(x)>0$ và lõm xuống khi $f''(x)<0$. Điểm uốn xảy ra tại điểm có phương lõm thay đổi

H. Vẽ đường cong (Sketch the Curve)

Sử dụng các thông tin của hàm từ mục A – G để vẽ đồ thị.

**Example 1:** Use the guidelines to sketch the curve $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

**Giải:**

A. Miền xác định $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

B. Các điểm đồ thị giao với các trục tọa độ:

$f(0)=0 \to f$ cắt trục $Oy$ tại điểm có $y=0$;

$f(x)=0 \to x=0 \to f$ cắt trục $Ox$ tại điểm có $x=0$

C. Tính đối xứng của *y*:

Vì $f(-x)=f(x)$ nên hàm $f$ là hàm chẵn, đồ thị đối xứng qua trục *Oy*.

D. Các đường tiệm cận

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1}=2 \to$ $y=2$ là tiệm cận ngang của hàm số.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=\infty \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{x^2-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2}{x^2-1}=\infty$$

$\to$ $x=1$ và $x=-1$ là các đường tiệm cận đứng.

E. Khoảng tăng giảm

$$f'(x)=\frac{4x\left(x^2-1\right)-2x^2.2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Vì $f'(x)>0$ khi $x<0\,(x\neq-1)$ và $f'(x)<0$ khi $x>0\,(x\neq1)$ nên $f$ tăng trên các khoảng $(-\infty,-1)$ và $(-1,0)$, giảm trên các khoảng $(0,1)$ và $(1,\infty)$.

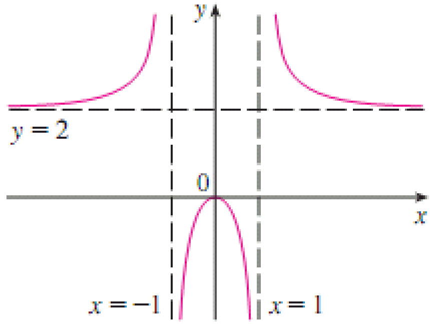
F. Cực đại và cực tiểu địa phương

Vì $f'(0)=0$ và $f'$ đổi dấu từ dương sang âm tại điểm $0 \to f(0)=0$ là giá trị cực đại địa phương của *f*.

G. Tính lõm và điểm uốn

$$f''(x)=\frac{-4\left(x^2-1\right)^2+4x.2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Vì $f''(x)>0 \leftrightarrow x^2-1>0 \leftrightarrow |x|>1$ và $f''(x)<0 \leftrightarrow |x|<1$ nên đường cong lõm lên trên các khoảng $(-\infty,-1)$ và $(1,\infty)$, lõm xuống trên khoảng $(-1,1)$.




Hàm số không có điểm uốn.

H. Vẽ đường cong

**Example 2:** Sketch the graph of $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

**Giải:**

A. Miền xác định $D=[-1,\infty)$.

B. Các điểm đồ thị giao với các trục tọa độ:

$f(0)=0 \rightarrow f$ cắt trục Oy tại điểm có $y=0$

$f(x)=0 \leftrightarrow x=0 \rightarrow f$ cắt trục Ox tại điểm có $x=0$

C. Tính đối xứng của y: hàm này không có tính đối xứng.

D. Các đường tiệm cận:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}=\infty \rightarrow f \text{ không có tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}=\infty \rightarrow x=-1 \text{ là tiệm cận đứng}$$

E. Khoảng tăng giảm :

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x+1}-\dfrac{x^2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$ Ta có $f'(x)=0$ khi $x=0$

$f'(x)<0$ khi $-1<x<0$ và $f'(x)>0$ khi $x>0$. Vậy $f$ giảm trên $(-1,0)$ và tăng trên $(0,\infty)$.

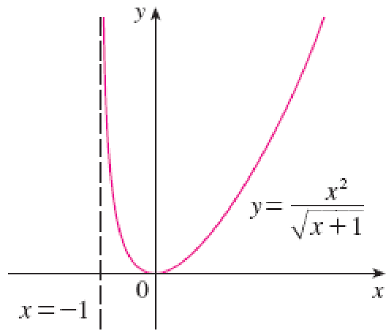
F. Cực đại và cực tiểu địa phương

Vì $f'(0)=0$ và $f'$ đổi dấu từ âm sang dương tại điểm 0 $\rightarrow f(0)=0$ là giá trị cực tiểu địa phương (và toàn cục) của $f$

G. Tính lõm và điểm uốn

$$f''(x)=\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}(6x+4)-\left(3x^2+4x\right)3(x+1)^{\frac{1}{2}}}{4(x+1)^3}=\frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}$$

Ta có, $f''(x)>0, \forall x\in D \rightarrow f$ lõm lên trên $D$, và $f$ không có điểm uốn




H. Vẽ đường cong

**Example 3:** Sketch the graph of $f(x) = xe^x$.

**Giải:**

A. Miền xác định: $D = \mathbb{R}$.

B. Các điểm đồ thị giao với các trục tọa độ: Đồ thị cắt trục tung và hoành tại điểm $(0,0)$.

C. Tính đối xứng của y: Đồ thị không có tính đối xứng.

D. Các đường tiệm cận: Dùng quy tắc L'Hospital ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

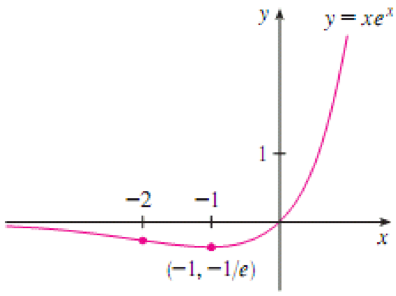
$\to$ trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

E. Khoảng tăng giảm: $f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$

$f'(x) > 0$ khi $x > -1$ và $f'(x) < 0$ khi $x < -1$ nên $f$ tăng trên $(-1,\infty)$, giảm trên $(-\infty,-1)$.

F. Cực đại và cực tiểu địa phương:

Vì $f'(-1) = 0$ và $f'$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = -1$, nên $f(-1) = -e^{-1}$ là cực tiểu địa phương (và tuyệt đối)




G. Tính lõm và điểm uốn: $f''(x) = (x+2)e^x$.

Vì $f''(x) > 0$ khi $x > -2$ và $f''(x) < 0$ khi $x < -2$, nên $f$ lõm lên trên $(-2,\infty)$, lõm xuống trên $(-\infty,-2)$. Điểm uốn là $(-2,-2e^{-2})$.

H. Vẽ đường cong:

**Example 4:** Sketch the graph of $f(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$.

**Giải:**

A. Miền xác định: $D = \mathbb{R}$.

B. Các điểm đồ thị giao với các trục tọa độ:

Giao điểm với trục tung tại điểm có $y = \frac{1}{2}$

Giao điểm với trục hoành tại điểm thỏa $\cos x = 0 \to x = (2n+1)\pi/2$ với $n$ nguyên.

C. Tính đối xứng của y: Hàm số không chẵn cũng không lẻ. Hàm $f$ tuần hoàn có chu kì là $2\pi$. Do đó ta chỉ cần xét hàm số trên khoảng $(0,2\pi)$ từ đó tịnh tiến để có toàn bộ đường cong.

D. Các đường tiệm cận: Không có

E. Khoảng tăng giảm: $f'(x) = -\dfrac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}$

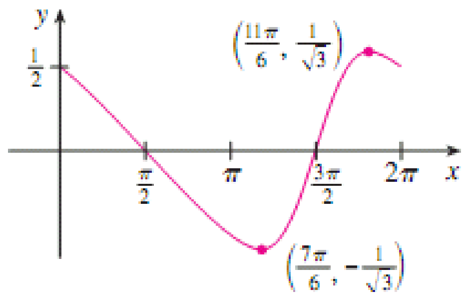
$f'(x) > 0 \leftrightarrow 2\sin x + 1 < 0 \leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \leftrightarrow 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Do đó $f$ tăng trên khoảng $(7\pi/6, 11\pi/6)$, giảm trên các khoảng $(0, 7\pi/6)$ và $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. Cực đại và cực tiểu địa phương: Giá trị cực tiểu địa phương là $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$, giá trị cực đại địa phương là $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Tính lõm và điểm uốn: $f''(x)=-\dfrac{2\cos x(1-\sin x)}{(2+\sin x)^3}$.

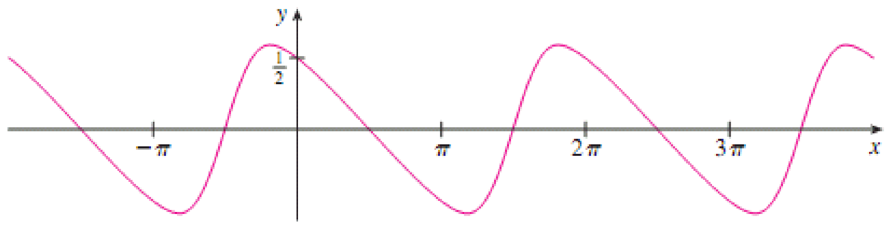
$f''(x)>0 \leftrightarrow \cos x<0 \leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

Vậy hàm số lõm lên trên $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$, lõm xuống trên các khoảng $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$. Điểm uốn là $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ và $\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$.




H. Vẽ đường cong: Đồ thị của hàm số trên khoảng $(0,2\pi)$:

Do chu kì của hàm số là $2\pi$ nên mở rộng đồ thị ta được:




**Example 5:** Sketch the graph of $y=\ln(4-x^2)$.

**Giải:**

A. Miền xác định: $D=(-2,2)$.

B. Các điểm đồ thị giao với các trục tọa độ:

Giao điểm với trục tung tại điểm có $y=\ln 4$. Giao điểm với trục hoành tại điểm có $x=\pm\sqrt{3}$.

C. Tính đối xứng của *y*:

Vì $f(-x)=f(x)$, nên $f$ là hàm chẵn, đường cong đối xứng qua trục tung.

D. Các đường tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(4-x^2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -2^+}\ln(4-x^2)=-\infty$

Do đó, $x=2, x=-2$ là các đường tiệm cận đứng.

E. Khoảng tăng giảm: $f'(x)=\dfrac{-2x}{4-x^2}$.

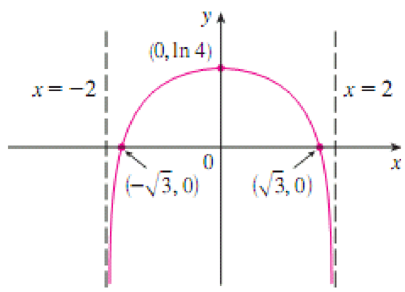
Vì $f'(x)>0\to -2<x<0$ và $f'(x)<0\to 0<x<2$ nên $f$ tăng trên $(-2,0)$, giảm trên $(0,2)$.

F. Cực đại và cực tiểu địa phương: Vì $f'$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua 0, nên $f(0)=\ln 4$ là cực đại địa phương.

G. Tính lõm và điểm uốn: $f''(x)=\dfrac{-8-2x^2}{(4-x^2)^2}$.

Vì $f''(x)<0,\forall x$ nên đường cong lõm xuống trên $(-2,2)$.
Hàm số không có điểm uốn.

H. Vẽ đường cong:



**Example 6:** Sketch the graph of $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

**Giải:**

A. Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

B. Các điểm đồ thị giao với các trục tọa độ: Đồ thị cắt các trục tại điểm $\left(0,0\right)$.

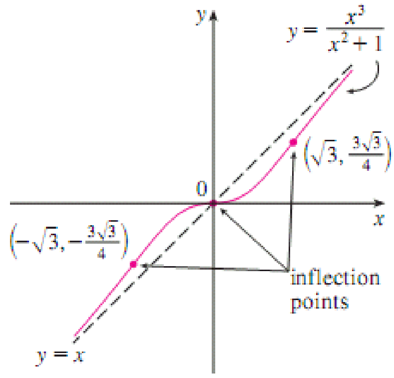
C. Tính đối xứng của y: Vì $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ nên $f$ là hàm số lẻ, đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. Các đường tiệm cận: Hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

$f\left(x\right)=x-\dfrac{x}{x^2+1}\to\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-\dfrac{x}{x^2+1}\right]=0$ nên $y=x$ là tiệm cận xiên của hàm số.

E. Khoảng tăng giảm: $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Vì $f'\left(x\right)>0,\forall x\neq 0$ nên hàm số tăng trên $\left(-\infty,\infty\right)$.




F. Cực đại và cực tiểu địa phương: Hàm số không có cực trị địa phương.

G. Tính lõm và điểm uốn: $f''\left(x\right)=\dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

$f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\pm\sqrt{3}$, ta có bảng xét dấu:

| Interval | $x$ | $3-x^2$ | $(x^2+1)^3$ | $f''(x)$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x<-\sqrt{3}$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | CU on $(-\infty,-\sqrt{3})$ |
| $-\sqrt{3}<x<0$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | CD on $(-\sqrt{3},0)$ |
| $0<x<\sqrt{3}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | CU on $(0,\sqrt{3})$ |
| $x>\sqrt{3}$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | CD on $(\sqrt{3},\infty)$ |

Các điểm uốn là: $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right),\left(0,0\right),\left(\sqrt{3},\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. Vẽ đường cong: