北 京 交 通 大 学

2018-2019 学年第二学期概率论与数理统计期末测验试卷

学院____________ 专业____________________ 班级____________

学号____________ 姓名___________ ☞请考生答题前，先阅读“考生须知”

考生须知：⑴ 本试卷共有 11 道题，满分 100 分．如不对，请马上与监考教师调换试卷！

⑵ 每道题的解答必须写出文字说明、证明过程或演算步骤．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	总分
得分												
阅卷人												

一.（本题满分 8 分）

一袋中装有 10 个号码球，分别标有 1~10 号，现从袋中任取 3 个球，记录其号码，求：（1）最小号码为 5 的概率;（2）最大号码为 5 的概率;（3）中间号码为 5 的概率.

解：样本空间所含元素个数为C_{10}^3

（1）记 A=“最小号码为 5”，故$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$

（2）记 B=“最大号码为 5”，故$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$

（3）记 C=“中间号码为 5”，利用乘法原理，有$P(C)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$.

二.（本题满分 8 分）

玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率相应为 0.8, 0.1 和 0.1，一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时售货员随意取一箱，而顾客开箱随机地查看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求:

（1）顾客买下该箱的概率α; （2）在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率β.

解：令A表示事件“顾客买下所查看的一箱玻璃杯”，B_i表示事件“箱中恰有i件残次品”，$i=0,1,2$.

根据题意

$$P(B_0)=0.8,\qquad P(B_1)=P(B_2)=0.1$$

$$P(A|B_0)=1,P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

（1）由全概率公式

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(A|B_i)P(B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.94$$

（2）由贝叶斯公式

$$\beta=P(B_0|A)=\frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)}=\frac{1\times0.8}{0.94}\approx0.85$$

三.（本题满分 8 分）

已知自动车床生产的零件长$X\sim N(50,0.75^2)$ (单位：mm)，若规定零件长度在$50\pm1.5mm$ 之间为合格品，试求 10 个零件中恰有 1 个不合格的概率.

解：先求“某个零件合格”这一事件的概率，即$\{50-1.5<X<50+1.5\}$的概率.

$$P(50-1.5<X<50+1.5)=F_X(50+1.5)-F_X(50-1.5)=\Phi\left(\frac{50+1.5-50}{0.75}\right)-\Phi\left(\frac{50-1.5-50}{0.75}\right)$$
$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=0.9546$$

则不合格的概率为$1-0.9546=0.0454$. 设 10 个零件中不合格品的个数为$Y\sim B(10,0.0454)$，于是 10 个零件中恰有一个不合格的概率为

$$P(Y=1)=C_{10}^{1}(0.0454)(0.9546)^9=0.2988\approx 0.3$$

四.（本题满分 8 分）

设二维随机变量（X,Y）的概率密度为

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}e^{-x},0<y<x\\ 0,\text{其他}\end{cases}}$$

（1）求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；（2）求条件概率$P(X\le 1|Y\le 1)$.

解:（1）X 的概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}xe^{-x},x>0\\ 0,x\le 0\end{cases}$$

当$x>0$时，Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<y<x\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

（2）Y 的概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}e^{-y},y>0\\ 0,y\le 0\end{cases}$$

$$P(X\le 1|Y\le 1)=\frac{P(X\le 1,Y\le 1)}{P(Y\le 1)}=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1}f(x,y)\,dxdy}{\int_0^1 e^{-y}\,dy}=\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$$

五.（本题满分 8 分）

随机变量 X 与 Y 独立且均服从[0,1]上均匀分布，求$Z=min\{X,Y\}$的概率密度.

解：1.当$z<0$时，$F_Z(z)=0$.

2.当$0\le z\le 1$时，

$F_Z(z)=1-P(\min\{X,Y\})=1-P(X>z,y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)=2z-z^2$.

3.当$z>1$时，$P(\min\{X,Y\}\le z)=1$.

由 1.~3.得 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)\begin{cases}0,z<0\\ 2z-z^2,0\le z\le 1\\ 1,z>1\end{cases}$$

故 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2-2z,0\le z\le 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

六.（本题满分 10 分）

设二维随机变量（X,Y）的概率密度为

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}2-x-y,0<x<1,0<y<1\\ 0,\qquad\text{其他}\end{cases}}$$

（1）求$P(X>2Y)$；（2）求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解:

（1）$P(X>2Y)=\iint_{x>2y}f(x,y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\,dy=\int_0^1\left(x-\frac{5}{8}x^2\right)dx=\frac{7}{24}$.

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$，其中

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z,0<x<1,0<z-x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当$z\le 0$或$z\ge 2$时，$f_Z(z)=0$；

当$0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)\,dx=z(2-z)$

当$1\le z<2$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1}(2-z)\,dx=(2-z)^2$

即 Z 的概率密度为$f_Z(z)=\begin{cases} z(2-z), 0<z<1 \\ (2-z)^2, 1\le z<2 \\ 0, 其他 \end{cases}$

七.（本题满分 10 分）

设二维随机变量（X,Y）的概率密度为

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

解：由于$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, -1<x\le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$

由 X 和 Y 的对称性，同理可得

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, -1<y\le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

显然，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 和 Y 不是相互独立的。

又$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=0$，同理$E(Y)=0$

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xydy=0$$

从而$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，故$\rho_{XY}=0$，X 和 Y 不相关.

八.（本题满分 10 分）

现有一大批种子，其中良种占 1/6，现从中任取 6000 粒. 试分别（1）用切比雪夫不等式估计;（2）用中心极限定理计算：6000 粒中良种所占的比例与 1/6 之差的绝对值不超过 0.01 的概率.

解：设 6000 粒中的良种数量为 X，则$X\sim B(6000,\frac{1}{6})$.

（1）要估计的概率为

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right\}=P\{|X-1000|<60\}$$

相当于在切比雪夫不等式中去$\varepsilon=60$，于是由切比雪夫不等式可得

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right\}=P\{|X-1000|<60\}\ge 1-\frac{D(X)}{60^2}=1-\frac{5}{6}\times 1000\times\frac{1}{3600}=0.7685$$

即用切比雪夫不等式估计此概率值不小于 0.7685

（2）由拉普拉斯中心极限定理，二项分布$B(6000,\frac{1}{6})$可用正态分布$N(1000,\frac{5}{6}\times 1000)$ 近似，于是，所求概率为

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right\}=P\{|X-1000|<60\}=P\left\{\left|\frac{X-1000}{\sqrt{\frac{5}{6}\times 1000}}\right|<\frac{60}{\sqrt{\frac{5}{6}\times 1000}}\right\}\approx 2\Phi(2.08)-1=0.9774.$$

九.（本题满分 10 分）

设总体 X 的概率函数为

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} \lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0 \\ 0,\quad 其他 \end{cases}}$$

其中参数$\lambda(\lambda>0)$未知，$X_1,X_2,\dots,X_n$是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求参数λ的矩估计量；　（2）求参数λ的极大似然估计量.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda}$

令$\bar{X}=E(X)$，即$\bar{X}=\frac{2}{\lambda}$，得$\lambda$的矩估计量为$\hat{\lambda}=\frac{2}{\bar{X}}$.

（2）设$x_1,x_2,\dots,x_n(x_i>0,i=1,2,\dots,n)$为样本观测值，则似然函数为

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n;\lambda)=\lambda^{2n}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i$$

$$lnL=2nln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_i$$

由$\frac{dlnL}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得$\lambda$的最大似然估计量为$\hat{\lambda}=\frac{2}{\bar{X}}$.

十.（本题满分 10 分）

设X_1,X_2,X_3,X_4是来自均值为θ的指数分布总体的样本，其中θ未知. 设有估计量

$$T_1=\frac{X_1+X_2}{6}+\frac{X_3+X_4}{3};\ T_2=\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{5};\ T_3=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$$

（1）试指出T_1,T_2,T_3中哪几个是θ的无偏估计量;

（2）在上述θ的无偏估计量中指出哪一个较为有效.

解:（1）$\mathrm{E}(T_1)=E\left(\frac{X_1+X_2}{6}+\frac{X_3+X_4}{3}\right)=\theta$

$E(T_2)=E\left(\frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{5}\right)=2\theta$

$E(T_3)=E\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right)=\theta$

故T_1,T_3是θ的无偏估计量

（2）$\mathrm{D}(T_1)=\frac{DX_1+DX_2}{36}+\frac{DX_3+DX_4}{9}=\frac{8}{15}\theta^2$

$D(T_3)=\frac{DX_1+DX_2+DX_3+DX_4}{16}=\frac{1}{4}\theta^2$

$\mathrm{D}(T_1)>\mathrm{D}(T_3)$，故$T_3$比$T_1$有效.

十一.（本题满分 10 分）

设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

解：设该次考试的考生成绩为 X，则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且σ^2未知.

根据题意建立假设$H_0:\mu=70,H_1:\mu\neq70$，选取检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

当H_0成立时，有$T=\frac{\bar{X}-70}{\frac{S}{\sqrt{36}}}=-1.4$.

查表可得$t_{0.025}(35)=2.0301$，因为$|t|=1.4<2.0301$，所以接受H_0.

即在显著性水平 0.05 下可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70.

参考标准正态分布函数值:

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

参考 t 分布表（上分位）:

n	α = 0.10	α = 0.05	α = 0.025	α = 0.01
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377
36	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345