§1 二维随机变量

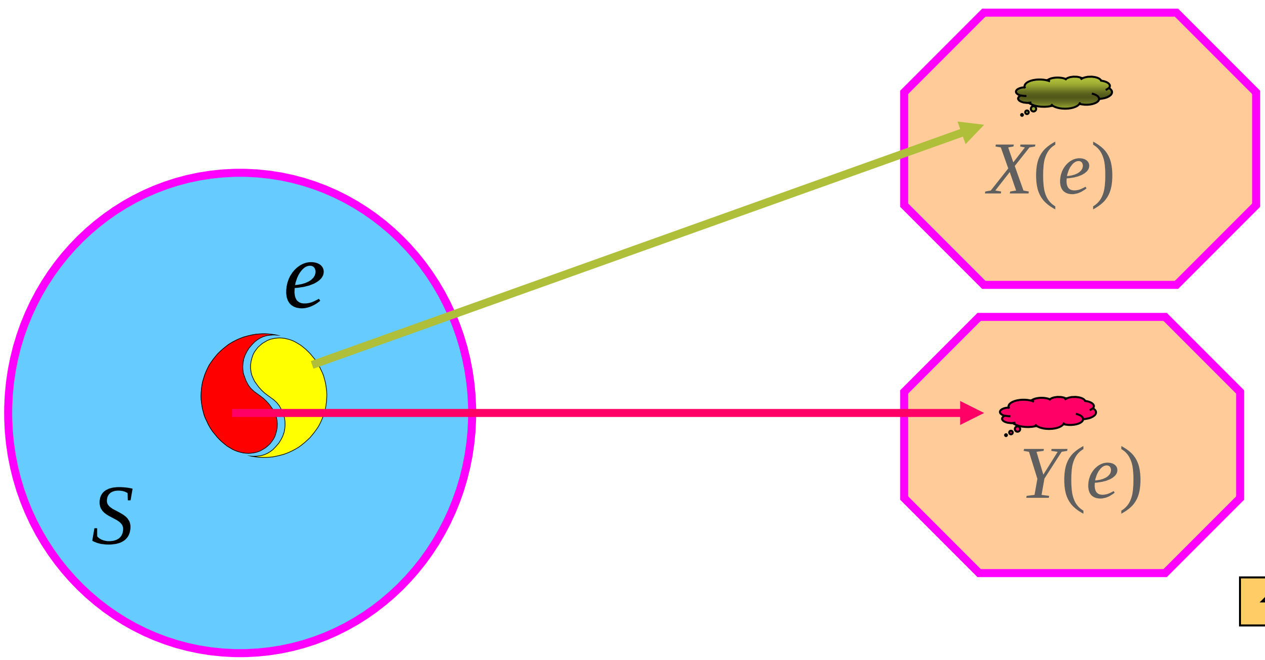
- ♣ 二维随机变量
- ♣ 联合分布函数
- ♣ 联合分布律
- ♣ 联合概率密度

返回主目录

§1 二维随机变量

定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量。由它们构成的一个向量 (X, Y)，叫做二维随机向量，或二维随机变量。



返回主目录

注 意 事 项

(1) 二维随机变量也称为二维随机向量；

(2) 我们应把二维随机变量

$$(X, \ Y) = (X(e), \ Y(e)) \qquad (e \in S)$$

看作一个整体，因为 X 与 Y 之间是有联系的；

(3) 在几何上，二维随机变量 $(X, \ Y)$ 可看作平面上的随机点.

§1 二维随机变量

二维随机变量的例子

1. 考察某地区成年男子的身体状况，令

X：该地区成年男子的身高；

Y：该地区成年男子的体重.

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

2. 对一目标进行射击，令：

X：弹着点与目标的水平距离；

Y：弹着点与目标的垂直距离；

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

返回主目录

§1 二维随机变量

二维随机变量的例子

3. 考察某地区的气候状况. 令:

X: 该地区的温度;

Y: 该地区的湿度.

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

4. 考察某钢厂钢材的质量. 令:

X: 钢材的含碳量;

Y: 钢材的含硫量;

则(X, Y)就是一个二维随机变量.

返回主目录

§1 二维随机变量

定 义

设$(X, \ Y)$是一个二维随机变量，则对于任意一对实数$(x, \ y)$,

$$F(x, \ y) = P\{X \le x, \ Y \le y\}$$

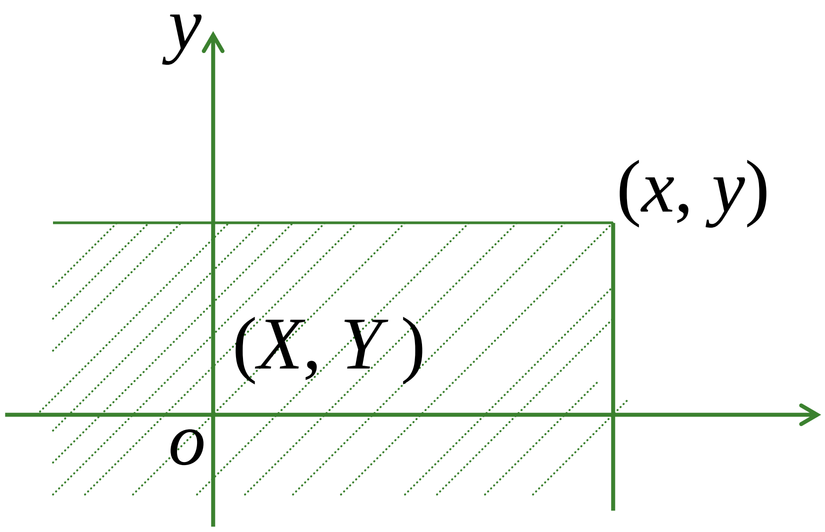
是$(x, \ y)$的函数．我们称此函数为二维随机变量$(X, \ Y)$的分布函数.

返回主目录

§1 二维随机变量

二元分布函数的几何意义

二元分布函数的几何意义是：$F(x,\ y)$ 表示平面上的随机点 $(X,\ Y)$ 落在以 $(x,\ y)$ 为右上顶点的无穷矩形中的概率.



§1 二维随机变量

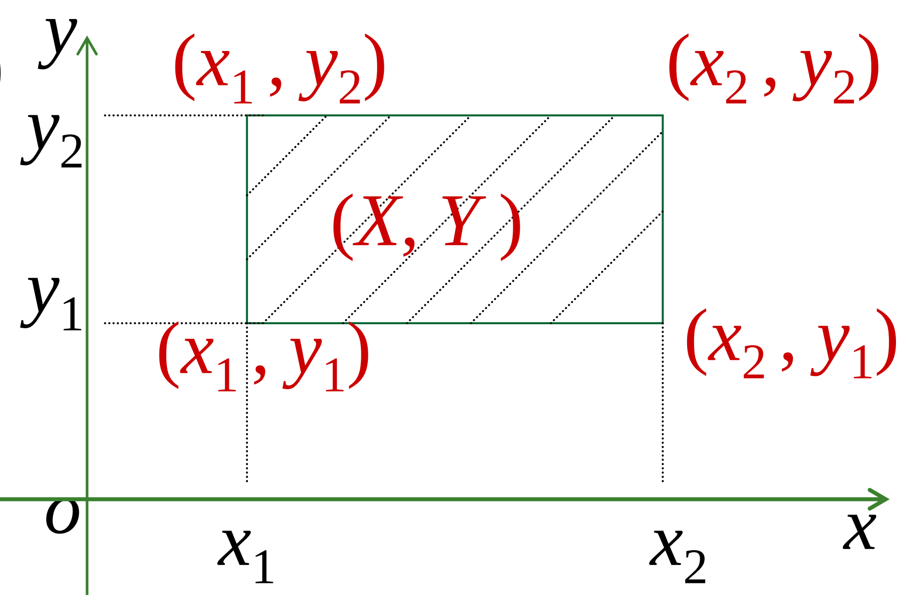
一个重要的公式

设：$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，则

$$P\{x_1 < X \le x_2,\quad y_1 < X \le y_2\}$$

$$= F(x_2,\quad y_2) - F(x_2,\quad y_1)$$

$$- F(x_1,\quad y_2) + F(x_1,\quad y_1)$$



§1 二维随机变量

分布函数具有以下的基本性质：

1) $F(x,y)$是变量 x，y 的不减函数，即

对于任意固定的 y，当 $x_1 < x_2$时， $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$;

对于任意固定的 x，当 $y_1 < y_2$时， $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$;

2） $0 \le F(x,y) \le 1$, 且

对于任意固定的 Y， $F(-\infty, y) = 0$;

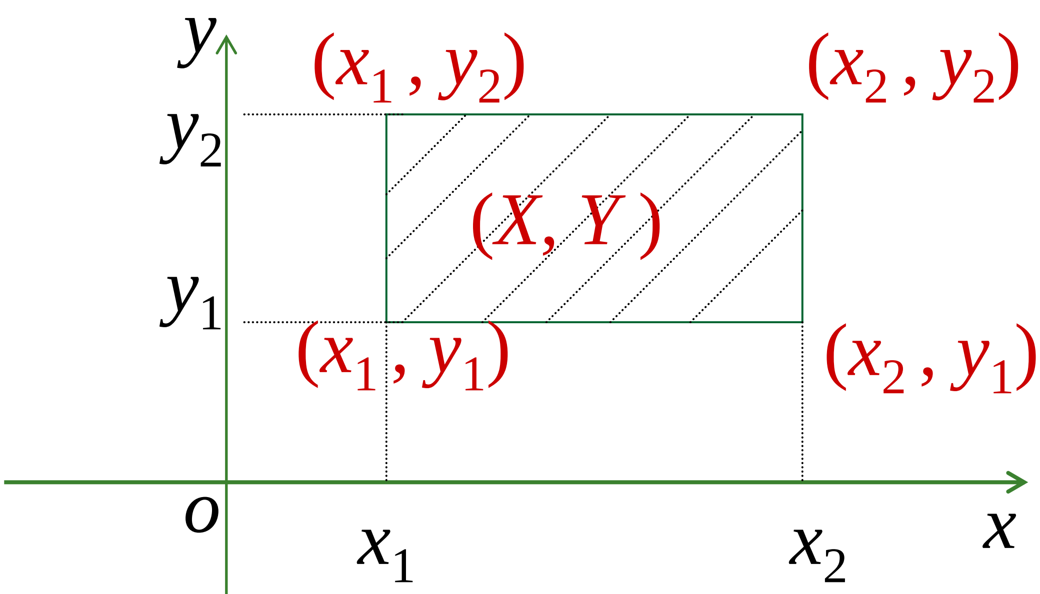
对于任意固定的 X， $F(x,-\infty) = 0$;

$$F(-\infty,-\infty) = 0; \quad F(+\infty,+\infty) = 1.$$

3) $F(x,y)=F(x+0,y)$, $F(x,y)=F(x,y+0)$, 即

$F(x,y)$关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

4) $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$



说 明

上述四条性质是二维随机变量分布函数的最基本的性质，即任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；

更进一步地，我们还可以证明：如果某一二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某一二维随机变量的分布函数（证明略）.

n 维随机变量

设 E 是一个随机试验，S是其样本空间，

$$X_i = X_i(e) \quad (e \in S) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是该样本空间上的n个随机变量.

则称

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) = (X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)) \quad (e \in S)$$

为样本空间S上的n维随机变量.

n维随机变量的分布函数

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个n维随机变量，则对于任意一n维实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

我们称此函数为n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数.

§1 二维随机变量

二维离散型随机变量

若二维随机变量(X, Y)的取值是有限个或可列无穷个，则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

设(X, Y)二维离散型随机变量 X的取值为

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_i, \quad \cdots$$

Y的取值为

$$y_1, \quad y_2, \quad \cdots, \quad y_j, \quad \cdots$$

则称

$$P_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \quad (i, \ j = 1, \quad 2, \quad \cdots)$$

为二维离散型随机变量(X, Y)的（联合）分布律.

二维离散型随机变量的联合分布律

$(X,\ Y)$的联合分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

二维离散型随机变量联合分布律的性质

性质 1：

对任意的$(i, \ j)$，$(i, \ j = 1, \ 2, \ \cdots)$

有 $$p_{ij} = P\left\{X = x_i, \ Y = y_j\right\} \geq 0$$

性质 2： $$\sum_{i, \ j} p_{ij} = 1$$

返回主目录

例 1

将两个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中.

令：X：放入1号盒中的球数；

Y：放入2号盒中的球数.

试求(X, Y)的联合分布律.

解：

X的可能取值为0, 1, 2；

Y的可能取值为0, 1, 2.

$$P\{X=0, \quad Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

返回主目录

例 1（续）

$$P\{X=0,\ Y=1\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9} \qquad P\{X=1,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{X=0,\ Y=2\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9} \qquad P\{X=2,\ Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=1,\ Y=0\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9} \qquad P\{X=2,\ Y=1\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9} \qquad P\{X=2,\ Y=2\}=P(\varnothing)=0$$

例 1（续）

由此得(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

例 2

将一枚均匀的硬币抛3次，令：

X：3次抛掷中正面出现的次数；

Y：3次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值.

试求(X, Y)的联合分布律.

解：

X的可能取值为$0, 1, 2, 3$；

Y的可能取值为$1, 3$.

返回主目录

例 2（续）

$$P\{X=0,\ Y=1\}=0;\qquad P\{X=0,\ Y=3\}=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{3}{8};\qquad P\{X=1,\ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=2,\ Y=1\}=\frac{3}{8};\qquad P\{X=2,\ Y=3\}=0;$$

$$P\{X=3,\ Y=1\}=0;\qquad P\{X=3,\ Y=3\}=\frac{1}{8}.$$

由此得随机变量$(X,\ Y)$的联合分布律为

例 2（续）

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

例 3

设随机变量 X 在 1,2,3,4四个数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在1~X 中等可能地取一整数值。试求 (X,Y) 的分布律。

解:

由题意知，{X=i， Y=j}的取值情况是：i=1,2,3,4， 且是等可能的；然后 j 取不大于 i 的正整数。由乘法公式求得 (X,Y) 的分布律。

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\bullet\frac{1}{4},$$

其中 $i=1,2,3,4,\quad j\le i.$

返回主目录

例 3（续）

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

二维离散型随机变量的联合分布函数

设$(X, \ Y)$二维离散型随机变量 其(联合)分布律为

$$P_{ij}=P\{X=x_i, \ Y=y_j\} \ (i, \ j=1, \ 2, \ \cdots)$$

则$(X, \ Y)$的联合分布函数为

$$F(x, \ y)=\sum_{x_i\le x, \ y_j\le y} p_{ij}$$

返回主目录

二维连续型随机变量

对于二维随机变量 (X,Y) 分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)$，使得对于任意的 x，y有：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv,$$

则称 (X,Y) 是**连续型的二维随机变量**，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y)的**概率密度**，或称为 X 和 Y 的**联合概率密度**。

返回主目录

按定义，概率密度 $f(x,y)$ 具有以下性质：

1^0 $f(x,y) \geq 0$;

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$;

3^0 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

返回主目录

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y)落在 G 内 的概率为： $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy.$

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面，上式即表示 $P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$为顶的柱体体积

例 4

设二维随机变量$(X, \ Y)$的密度函数为

$$f(x, \ y)=\begin{cases} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right) & x^2+y^2<R^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1). 求常数c;

(2). 求$(X, \ Y)$落入圆$x^2+y^2 \le r^2 \ (0<r<R)$内的概率.

解:

(1). 由密度函数的性质，得

例 4（续）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad y)dxdy=\iint_{x^2+y^2<R^2}c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

作极坐标变换$x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，得

$$1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R c(R-\rho)\rho\, d\rho=\frac{1}{3}\pi R^3\cdot c$$

所以，$c=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

例 4（续）

$$P\left\{(X,\quad Y)\in\left\{x^2+y^2\le r^2\right\}\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,\quad y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2}\frac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

作极坐标变换$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得

$$P\left\{(X,\quad Y)\in\left\{x^2+y^2\le r^2\right\}\right\}$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r(R-\rho)\rho\,d\rho=\frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

例 5

设二维随机变量$(X, \quad Y)$的密度函数为

$$f(x, \quad y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0, \ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数c;

(2) 求$(X, \quad Y)$的联合分布函数

(3) 求$P\{0<X<1, \quad 0<Y<2\}$.

解:

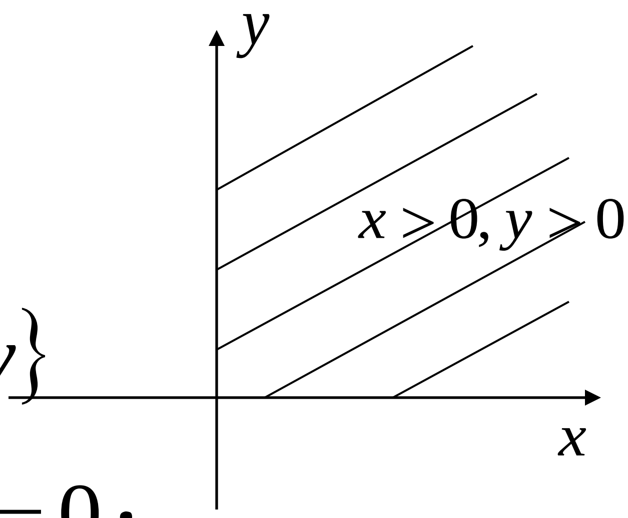
(1)由密度函数的性质，得

例 5（续）

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad y)dxdy = c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$= c\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\,dy = \frac{c}{12}$$

所以，$c=12.$



(2) $F(x,\quad y)=P\{X\le x,\quad Y\le y\}$

当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,\quad y)=0$；

例 5（续）

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,\ v)dudv=12\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} e^{-(3u+4v)}dudv$$

$$=12\int_{0}^{x} e^{-3u}du\cdot\int_{0}^{y} e^{-4v}\,dv\ =\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，
$$F(x,\ y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 5（续）

(3). $P\{0 < X < 1,\quad 0 < Y < 2\}$.

$$= \iint\limits_{0<x<1,\quad 0<y<2} f(x,\quad y)dxdy$$

$$= 12\int_0^1 \int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$= 12\int_0^1 e^{-3x}dx \cdot \int_0^2 e^{-4y}\, dy$$

$$= \left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

返回主目录

例 6

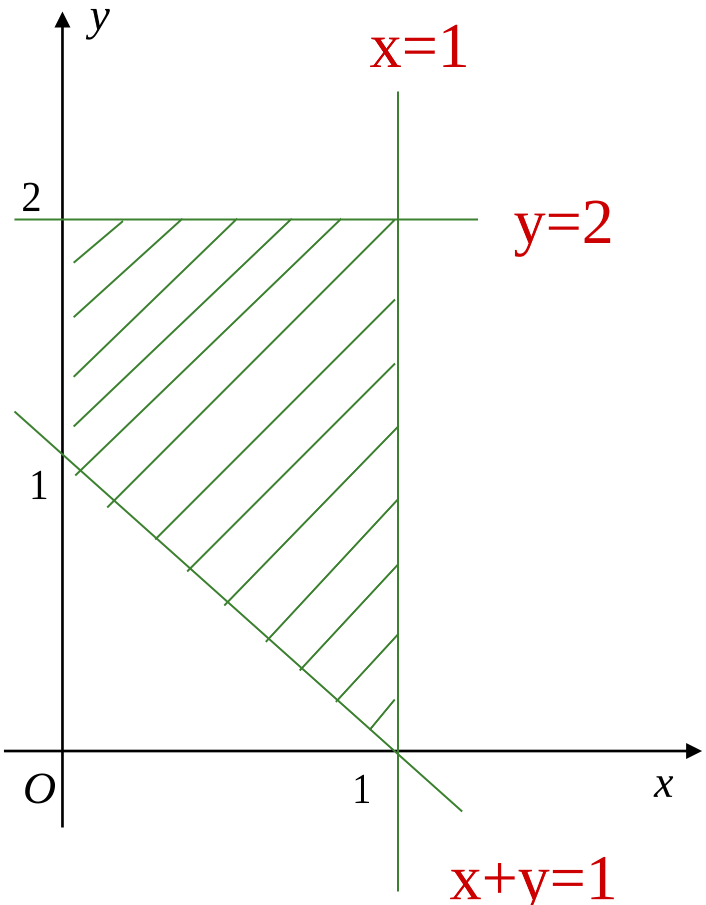
设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求概率 $P\{X+Y\ge 1\}$.

解：

积分区域如图所示，



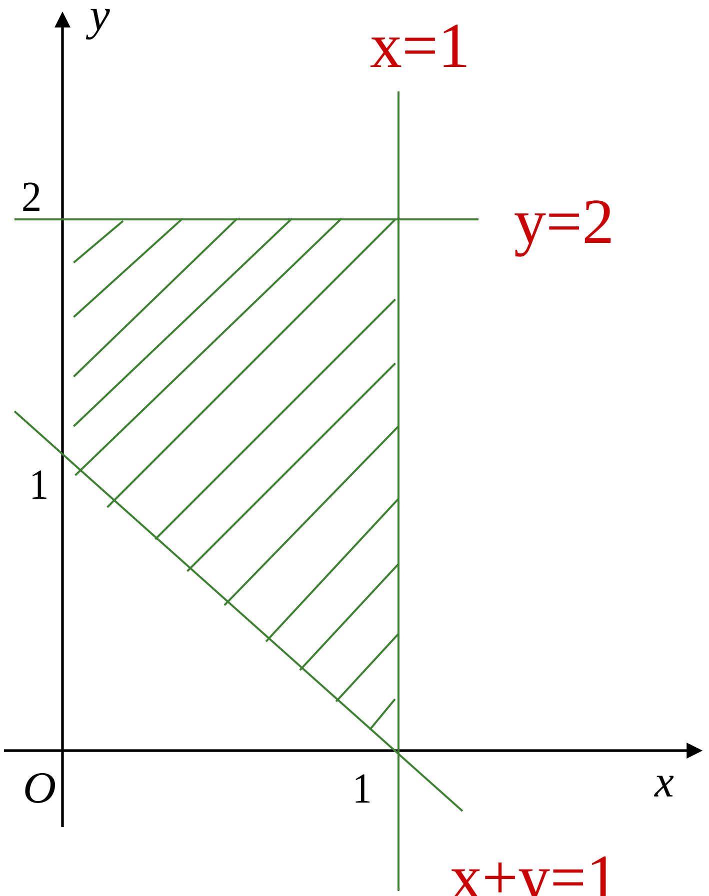
例 6（续）

$$P\{X+Y\geq 1\}.$$

$$=\iint\limits_{x+y\geq 1} f(x,\quad y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx \quad =\frac{65}{72}$$



二维均匀分布

设D是平面上的有界区域，其面积为A

如果二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x, y)\in D\\ 0 & (x, y)\notin D\end{cases}$$

则称二维随机变量(X, Y)服从区域D上的均匀分布.

二维均匀分布几何意义

如果二维随机变量 $(X, \ Y)$ 服从区域 D 上的均匀分布，我们可以认为随机点 $(X, \ Y)$ 只落在区域 D 内；并且落在 D 内任一个子区域 D_1 内的概率与该子区域的面积成正比，而与 D_1 的形状以及 D_1 在 D 中的位置无关.

二元正态分布

设二维随机变量$(X, \ Y)$的密度函数为

$$f(x, \ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$

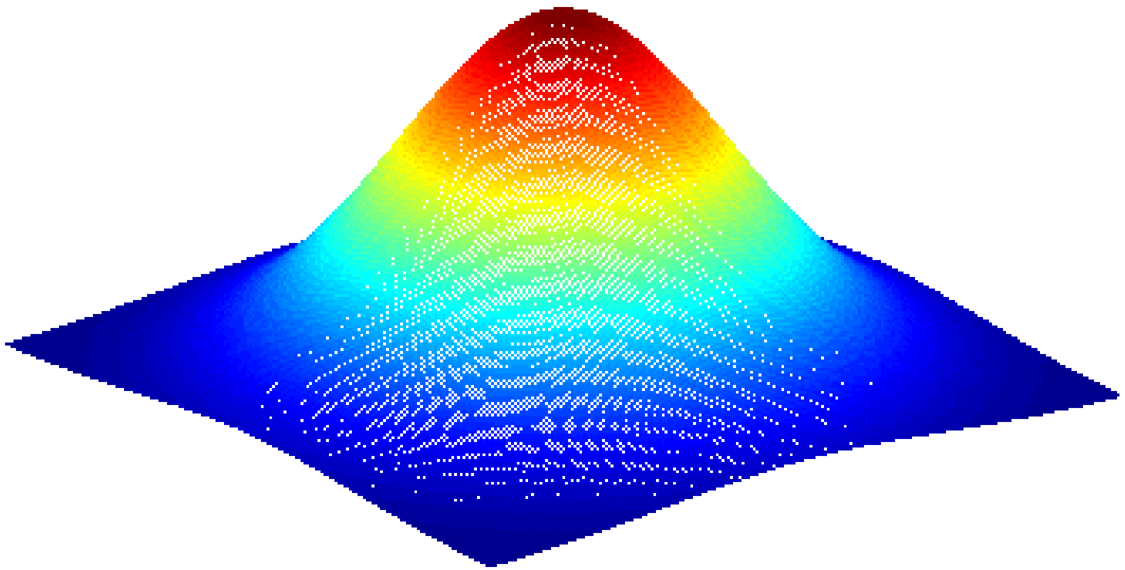
$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则称随机变量$(X, \ Y)$服从参数为$(\mu_1, \ \mu_2, \ \sigma_1^2, \ \sigma_2^2 \ \ r)$的正态分布，记作

$$(X, \ Y) \sim N(\mu_1, \ \mu_2, \ \sigma_1^2, \ \sigma_2^2 \ \ r)$$

$$-\infty < \mu_i < +\infty \ (i=1, \ 2) \qquad \sigma_i > 0 \ (i=1, \ 2) \qquad -1 < r < 1$$

返回主目录



- 作业:1,2,3

§2 边缘分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

返回主目录

设二维随机变量$(X,\ Y)$的分布函数为$F(x,\ y)$，则关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x,\ -\infty < Y < +\infty\}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} F(x,\ y) = F(x,\ +\infty)$$

同理，关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{-\infty < Y < +\infty,\ Y \le y\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} F(x,\ y) = F(+\infty,\ y)$$

边缘分布也称为边沿分布或边际分布.

例1

设二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$\left(-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty\right)$$

试求：(1). 常数A、B、C；

(2). X 及Y的边缘分布函数.

解： (1). 由分布函数的性质，得

$$1 = F(+\infty, +\infty) = A\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right)$$

例 1（续）

$$0=F(x,\quad -\infty)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0=F(-\infty,\quad y)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

由以上三式可得，$A=\dfrac{1}{\pi^2}$，$B=\dfrac{\pi}{2}$，$C=\dfrac{\pi}{2}$.

(2). X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,\quad y)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\qquad\left(x\in(-\infty,\quad+\infty)\right)$$

例 1（续）

同理，Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,\ y)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$\left(y\in(-\infty,\ +\infty)\right)$$

已知联合分布律求边缘分布律

对于二维离散型随机变量(X, Y)，已知其联合分布律为

$$P_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

现求随机变量X的分布律：

$$P_{i.} = P\{X = x_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

$$P_{i.} = P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} = \sum_j p_{ij}$$

同理，随机变量Y的分布律为：

$$P_{.j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}$$

已知联合分布律求边缘分布律

X以及Y的边缘分布律也可以由下表表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

例 2

从1, 2, 3, 4 这4个数中随机取出一个， 记所取的数为 X，再从1到 X 中随机地取出一个数， 记所取的数为 Y，试求 $(X, \ Y)$ 的联合分布律与 X 及 Y 各自的边缘分布律.

解: X 与 Y 的取值都是 1, 2, 3, 4, 而且 $Y \le X$,

所以，当 $i < j$ 时，$P\{X = i, \ Y = j\} = 0$

当 $i \ge j$ 时，由乘法公式，得

$$P_{ij} = P\{X = i, \ Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j | X = i\} = \frac{1}{4} \ \frac{1}{i} = \frac{1}{4i}$$

再由 $p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$ 及 $p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$

返回主目录

例 2（续）

可得$(X,\ Y)$与X及Y的边缘分布律为

Y \ X	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

例 3

一批产品共50件，其中一等品占30%，二等品占50%，三等品占20%．现从这批产品中每次取出一件，共抽取5次．试在(1)．有放回场合，(2)．不放回场合这两种情况下，分别计算取出的5件产品中的一等品数与二等品数的联合分布律及它们各自的边缘分布律．

解：

令：X：取出的5件产品中的一等品数；

Y：取出的5件产品中的二等品数．

例 3（续）

X与Y的取值都是 0, 1， 2， 3， 4， 5，

(1). 在有放回场合下

若 $i+j>5$，有 $P\{X=i,\ Y=j\}=0$

若 $i+j\le 5$，有 $P\{X=i,\ Y=j\}$

$$=\frac{5!}{i!\,j!\,(5-i-j)!}(0.3)^i(0.5)^j(0.2)^{5-i-j}$$

得$(X,\ Y)$的联合分布律及 X、Y的边缘分布律为

例 3（续）

X \ Y	0	1	2	3	4	5	$p_{i\cdot}$
0	**0.00032**	**0.00400**	**0.02000**	**0.05000**	**0.06250**	**0.03125**	**0.16807**
1	**0.00240**	**0.02400**	**0.09000**	**0.15000**	**0.09375**	**0**	**0.36015**
2	**0.00720**	**0.05400**	**0.13500**	**0.11250**	**0**	**0**	**0.3087**
3	**0.01080**	**0.05400**	**0.06750**	**0**	**0**	**0**	**0.1323**
4	**0.00810**	**0.02025**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0.02835**
5	**0.00243**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0.00243**
$p_{\cdot j}$	**0.03125**	**0.15625**	**0.3125**	**0.3125**	**0.15625**	**0.03125**	

例 3（续）

(2). 在不放回场合下

若 $i+j>5$，有 $P\{X=i,\quad Y=j\}=0$

若 $i+j\leq 5$，

有 $$P\{X=i,\quad Y=j\}=\frac{C_{15}^{i}C_{25}^{j}C_{10}^{5-i-j}}{C_{50}^{5}}$$

得 $(X,\quad Y)$ 的联合分布律及 X、Y 的边缘分布律为

例 3（续）

Y \ X	0	1	2	3	4	5	$p_{i\cdot}$
0	0.0001	0.0025	0.0170	0.0488	0.0597	0.0250	0.1531
1	0.0015	0.0212	0.0956	0.1628	0.0896	0	0.3707
2	0.0059	0.0558	0.1487	0.1140	0	0	0.3244
3	0.0097	0.0537	0.0644	0	0	0	0.1278
4	0.0064	0.0161	0	0	0	0	0.0225
5	0.0014	0	0	0	0	0	0.0014
$p_{\cdot j}$	0.025	0.1493	0.3257	0.3256	0.1493	0.025	

已知联合密度函数求边缘密度函数

对于二维连续型随机变量(X, Y)，已知其联合密度函数为 $f(x, y)$

现求随机变量X的边缘密度函数：$f_X(x)$

由 $$F_X(x) = P\{X \le x\} = F(x, +\infty)$$
$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)dy\right]du$$

得 $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

已知联合密度函数求边缘密度函数

同理，由

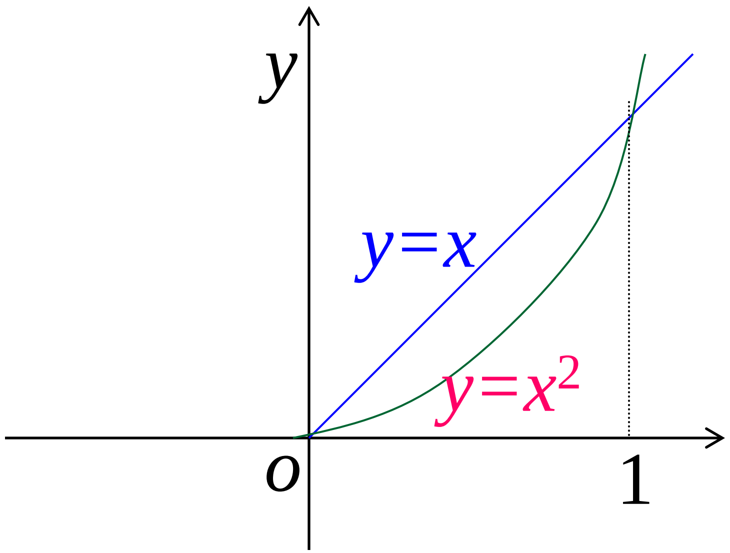
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=F(+\infty,\quad y)$$

$$=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad v)dx\right]dv$$

得 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad y)dx$$

例 4

设平面区域 D 是由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围，随机变量 $(X, \ Y)$ 服从区域 D 上的均匀分布．试求随机变量 $(X, \ Y)$ 的联合密度函数及 X、Y 各自的边缘密度函数．



例 4（续）

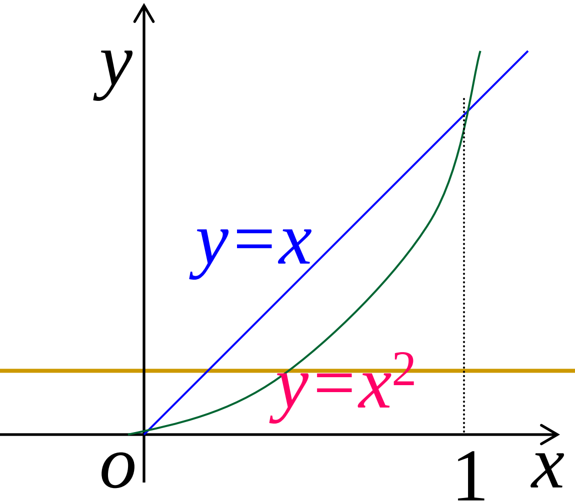
解：

(1). 区域D的面积为

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x}dy\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

所以，二维随机变量$(X,\ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}6 & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$



例 4（续）

(2). 随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}6 & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$

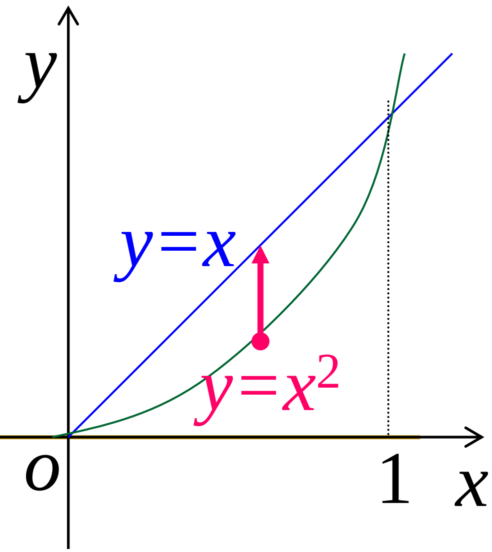
当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dy=\int_{-\infty}^{x^2}+\int_{x^2}^{x}+\int_{x}^{+\infty}$$

$$=\int_{x^2}^{x}6dy=6\left(x-x^2\right)$$

所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}6\left(x-x^2\right) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



例 4（续）

同理，随机变量Y的边缘密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}6 & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$

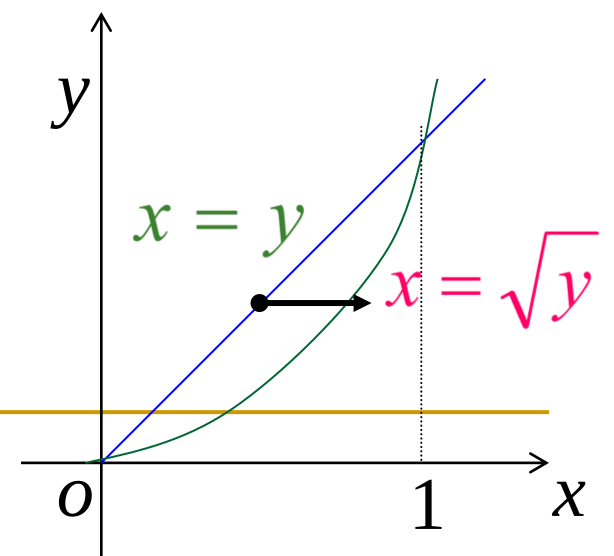
当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx=\int_{-\infty}^{y}+\int_{y}^{\sqrt{y}}+\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}$$

$$=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx=6\left(\sqrt{y}-y\right)$$

所以，

$$f_Y(y)=\begin{cases}6\left(\sqrt{y}-y\right) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

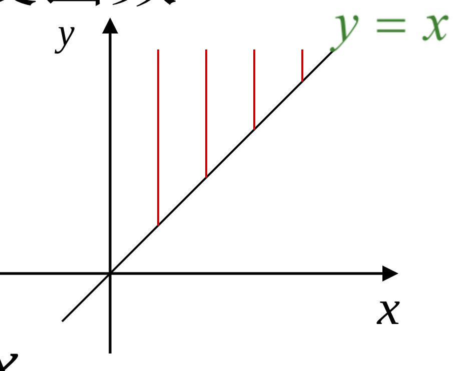


例 5

设二维连续型随机变量$(X, \quad Y)$的联合密度函数为

$$f(x, \quad y) = \begin{cases} cxe^{-y} & 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求：(1). 常数c；(2). X 及Y的边缘密度函数.



解：

(1). 由密度函数的性质，得

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dxdy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{y} cxe^{-y}\, dx$$

返回主目录

例5（续）

$$= \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{c}{2} \quad 2 = c$$

$$f(x,\quad y) = \begin{cases} xe^{-y} & 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

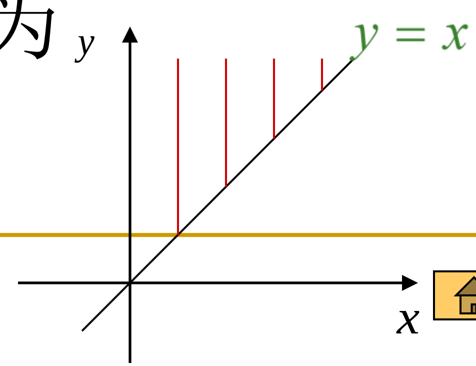
所以，　　$c = 1$

(2). 当 $x > 0$ 时，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad y) dy = \int_x^{+\infty} xe^{-y} dy = xe^{-x}$$

所以，X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



返回主目录

例5（续）

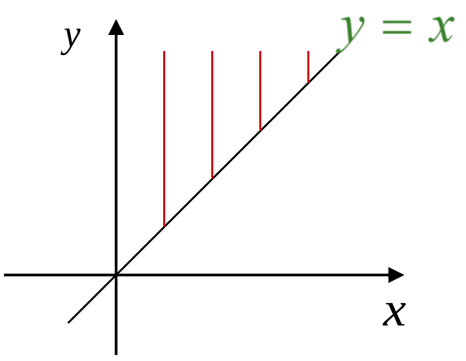
$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y} & 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3). 当 $y > 0$ 时，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^y xe^{-y}\,dx = \frac{1}{2}y^2e^{-y}$$

所以，Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$



例 6

设二维随机变量$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$
试求 X 及 Y 的边缘密度函数.

解:

(X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

例 6（续）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad y)dy$$

在$-\dfrac{1}{2(1-r^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$中，

对y进行配方，得

$$-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-r\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}$$

例 6（续）

所以，

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-r\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2\right\}dy$$

作变换，令： $u=\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-r\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$

则， $du=\dfrac{dy}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$

例 6（续）

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

这表明，$X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$

例 6（续）

由(X, Y)的密度函数可知，X 与Y的地位是对称的，因此有

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

这表明，$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$

通过本题，我们有以下 几条结论：

结 论 （一）

二元正态分布的边缘分布是一元正态分布.

即若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$ 则有,

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

结 论 （二）

上述的两个边缘分布中的参数与二元正态分布中的常数r无关.

结 论 （三）

结论（二）表明：如果

$$(X_1, \quad Y_1) \sim N(\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2, \quad \sigma_2^2, \quad r_1)$$

$$(X_2, \quad Y_2) \sim N(\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2, \quad \sigma_2^2, \quad r_2)$$

（其中$r_1 \neq r_2$），

则，$(X_1, \quad Y_1)$与$(X_2, \quad Y_2)$的分布不相同，

但是X_1与X_2的分布相同，Y_1与Y_2的分布相同．

这表明，一般来讲，我们不能由边缘分布求出联合分布．

- 作业:4,5,6

§3 条件分布

- 条件分布律
- 条件分布函数
- 条件概率密度

§3条件分布

一、离散型随机变量的条件分布律

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\ldots$$

(X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为:

$$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j=1,2,\cdots$$

由条件概率公式自然地引出如下定义：

定义： 设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律。

条件分布律具有分布律的以下特性：

1^0 $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0$；

2^0 $\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}=\frac{1}{p_{\bullet j}}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}}=1.$

§3条件分布

同样对于固定的 i, 若$P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量Y 的条件分布律。

例 1

一射手进行射击，击中目标的概率为 p，射击到击中目标两次为止。设以 X 表示首次击 中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行 的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律以及条件分布律。

解:

Y的取值是 2, 3, 4, …; X的取值是 1, 2, …,

并且 $X<Y$.

返回主目录

X,Y 的联合分布律为

$$P\{X=m,\quad Y=n\}$$

$$=P\{第m次射击时首次击中目标，并且共射击n次\}$$

$$=P\{第m次射击时首次击中目标，且第n次射击时第二次命中目标\}$$

由独立性，可得

$$P\{X=m,\quad Y=n\}=q^{m-1}\times p\times q^{n-m-1}\times p=q^{n-2}\times p^{2}$$

$$(其中q=1-p)(n=2,\ 3,\ \cdots;\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

X 的边缘分布律为

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^{2}q^{n-2}$$

$$=p^{2}\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}=p^{2}\bullet\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},\quad m=1,2,\cdots$$

§3条件分布

Y的边缘分布律为

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},$$

$n=2,3,\cdots$

在Y=n 条件下随机变量 X 的条件分布律为

当 n=2,3,... 时，

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\cdots,n-1;$$

$$\boxed{\begin{gathered}P\{X=m,\quad Y=n\}=q^{m-1}\times p\times q^{n-m-1}\times p=q^{n-2}\times p^2\\ (n=2,\quad 3,\quad \ldots;\quad m=1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n-1)\end{gathered}}$$

在 $X=m$ 条件下随机变量Y 的条件分布律为

当$m=1,2,3,\ldots$ 时，

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}$$

$$=pq^{n-m-1},\qquad n=m+1,m+2,\cdots$$

$$\boxed{\begin{gathered}P\{X=m,\quad Y=n\}=q^{m-1}\times p\times q^{n-m-1}\times p=q^{n-2}\times p^2\\ (n=2,\quad 3,\quad \ldots;\quad m=1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n-1)\end{gathered}}$$

二、条件分布函数

设（X, Y）是二维连续型随机变量，由于

$$P\{X=x_i\}=0,\quad P\{Y=y_j\}=0,$$

不能直接代入条件概率公式，我们利用极限的方法来引入条件分布函数的概念。

定义： 给定 y，设对于任意固定的正数ε，

$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 若对于任意实数 x，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X\le x \mid y<Y\le y+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x, y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

存在，则称为在条件$Y=y$下X的条件分布函数，写成 $P\{X\le x \mid Y=y\}$，或记为 $F_{X|Y}(x|y)$.

§3条件分布

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{X\le x, y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)]/\varepsilon}{\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)]/\varepsilon}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{d}{dy}F_Y(y)}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv\right)}{f_Y(y)}\ne\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)},$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)},$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du,$$

称为在条件$Y=y$下X的条件分布函数，

三、连续型随机变量的条件密度函数

则当 $f_Y(y) > 0$时，可得随机变量 X 在$Y = y$的条件下的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,\quad y)}{f_Y(y)}$$

当 $f_X(x) > 0$时，可得随机变量Y在 $X = x$的条件下的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,\quad y)}{f_X(x)}$$

设$(X, \quad Y)$是二维连续型随机变量 其联合密度函数为

$$f(x, \quad y)$$

又随机变量X的边缘密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dy$$

随机变量Y的边缘密度函数为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dx$$

条件密度函数的性质

性质 1. 对任意的x，有 $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$

性质 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1$

简言之，$f_{X|Y}(x|y)$是密度函数.

对于条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$也有类似的性质.

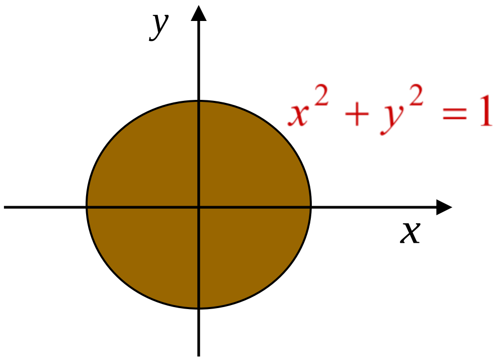
例 2

设二维随机变量(X, Y)服从圆域：$x^2+y^2\le 1$上的均匀分布，试求条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$.

解：

二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



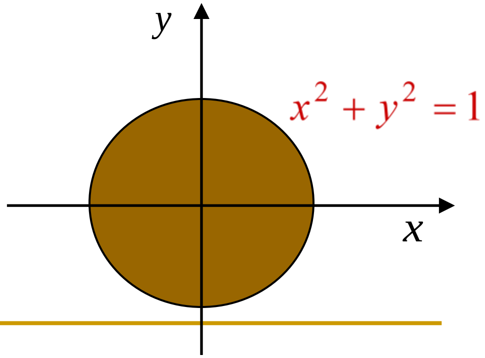
例 2（续）

由此得，当$-1\le y\le 1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

所以，随机变量Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



由此得，当$-1<y<1$时，$f_Y(y)>0$

例 2（续）

因此当 $-1 < y < 1$时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, \quad y)}{f_Y(y)}$$

所以，

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

即当 $-1 < y < 1$时，X 在$Y = y$下的条件分布是区间 $\left[-\sqrt{1-y^2} \quad \sqrt{1-y^2}\right]$上的均匀分布.

例 3

设二维随机变量(X, Y)服从二元正态分布：

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$$

则(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

例 3（续）

又随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

因此，对任意的y，$f_Y(y)>0$，所以，对任意的y，有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2(1-r^2)}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-r^2)}\left[x-\left(\mu_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

例 3（续）

这表明，二元正态分布的条件分布是一元正态分布：

$$N\left(\mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\quad \sigma_1^2\left(1-r^2\right)\right)$$

例 4

设随机变量 X 服从区间 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，当 $0<x<1$ 时，随机变量 Y 在 $X=x$ 的条件下服从区间 $(x,\ 1)$ 上的均匀分布．试求随机变量 Y 的密度函数．

解：

随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 4（续）

又由题设，知当$0 < x < 1$时，随机变量Y在条件$X = x$下的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & x < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

所以，由公式

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}$$

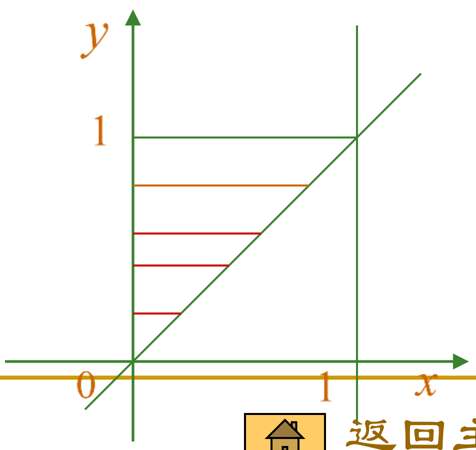
例 4（续）

§3条件分布

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以，当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx=\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y)$$



所以，随机变量Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

§3条件分布

例 5

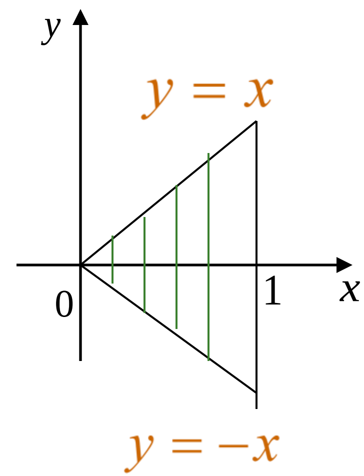
设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1,\\ 0, 其它.\end{cases}$$

试求:(1) $f_X(x),\ f_Y(y)$;(2) $f_{X|Y}(x|y),\ f_{Y|X}(y|x)$;

(3) $P\{X>\frac{1}{2}|Y>0\}$.

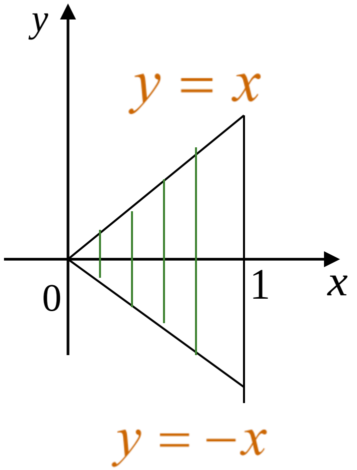
解:



(1) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy=2x, 0<x<1,\\ 0, \qquad 其它.\end{cases}$$

例 5（续）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1 dx=1-y,\ 0\le y<1,\\ \displaystyle\int_{-y}^1 dx=1+y,\ -1\le y<0,\\ 0, \qquad\qquad 其它.\end{cases}$$



$$=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

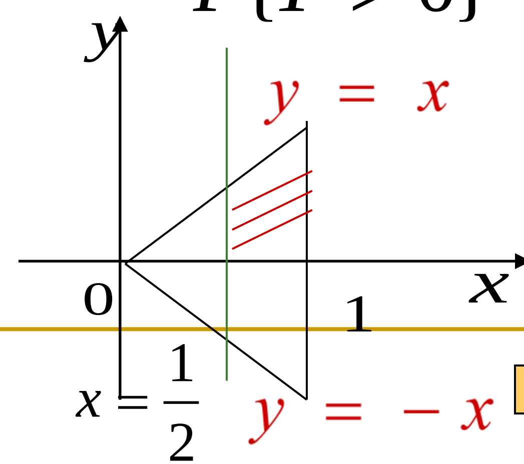
(2) 当 $|y|<1$，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & 其它。\end{cases}$

例 5（续）

当$0 < x < 1$, $\quad f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & |y| < x \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$

$$(3).\ P\{X > \frac{1}{2} \mid Y > 0\} = \frac{P\{X > \frac{1}{2}, Y > 0\}}{P\{Y > 0\}}$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} \div 2}{\frac{1}{2} \times 1 \times 1} = \frac{3}{4}$$



- 作业:7,9,10

设$(X, \ Y)$是二维随机变量，其联合分布函数为$F(x, \ y)$，又随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$．如果对于任意的$x, \ y$，有

$$F(x, \ y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称$X, \ Y$是相互独立的随机变量．

说　明

(1). 由于

$$F(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$

以及 $F_X(x)=P\{X\le x\},\quad F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

可知，随机变量X与Y相互独立，实际上是指：

对于任意的x，y，随机事件

$$\{X\le x\}\quad 与\quad \{Y\le y\}$$

相互独立.

说 明

(2). 如果随机变量X与Y相互独立，则由

$$F(x,\ y)=F_X(x)F_Y(y)$$

可知，

二维随机变量$(X,\ Y)$的联合分布函数$F(x,\ y)$可由其边缘分布函数$F_X(x)$与$F_Y(y)$唯一确定.

例 1

设二维随机变量$(X, \ Y)$的联合分布函数为

$$F(x, \ y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty)$$

试判断 X 与 Y 是否相互独立？

解：

X 的边缘分布函数为

例 1（续）

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,\quad y)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\qquad\left(x\in(-\infty,\quad+\infty)\right)$$

Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,\quad y)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

例 1（续）

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)\qquad \left(y\in(-\infty,\quad +\infty)\right)$$

所以，对于任意的实数 x， y，有

$$F(x,\quad y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{5}\right)\times\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{10}\right)=F_X(x)F_Y(y)$$

所以 X 与 Y 是相互独立的随机变量.

离散型随机变量的独立性

设(X, Y)是二维离散型随机变量 其联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, \quad Y = y_j\} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

又随机变量X的分布律为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

随机变量Y的分布律为

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

如果对于任意的i, j

$$p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$$

则称X, Y是相互独立的随机变量

例 2

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

试确定常数α，β使得随机变量X与Y相互独立.

解：

由表，可得随机变量X与Y的边缘分布律为

例 2（续）

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

如果随机变量X与Y相互独立，则有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j} \qquad (i=1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3)$$

由此得

例 2（续）

$$\frac{1}{9}=P\{X=1,\quad Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)$$

由此得 $\alpha=\dfrac{2}{9}$；

又由

$$\frac{1}{18}=P\{X=1,\quad Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{18}+\beta\right)$$

由此得 $\beta=\dfrac{1}{9}$.

而当 $\alpha=\dfrac{2}{9}$， $\beta=\dfrac{1}{9}$ 时，联合分布律及边缘 分布律为

例 2（续）

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

可以验证，此时有

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j} \qquad (i=1,\ 2;\quad j=1,\ 2,\ 3)$$

因此当$\alpha=\dfrac{2}{9}$，$\beta=\dfrac{1}{9}$时，X与Y相互独立.

例 3

将两个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中.

令：X： 放入1号盒中的球数；

Y： 放入2号盒中的球数.

试判断随机变量X与Y是否相互独立？

解：

X的可能取值为0，1，2；Y的可能取值为0，1，2.

由 §3.1知X与Y的联合分布律及边缘分布律为

例 3（续）

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

$$P\{X=1,\quad Y=2\}=0\neq P\{X=1\}P\{Y=2\}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$$

随机变量X与Y不独立.

连续型随机变量的独立性

设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$,

又随机变量X的边缘密度函数为$f_X(x)$,随机变量Y的边缘密度函数为$f_Y(y)$, 如果对于几乎所有的x, y有，

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则称X, Y是相互独立的随机变量

特别地，上式对$f(x, y)$的所有连续点(x, y)必须成立.

说 明

这里所谓的“对几乎所有的x，y”是指：

那些使得等式

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$$

不成立的全体点$(x,\ y)$所成集合的“面积”为0.

例 4

设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试判断随机变量X与Y是否相互独立？

解：

当$0\le x\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy=2x^2+\frac{2}{3}x$$

例 4（续）

所以，随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} 2x^2+\dfrac{2}{3}x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当$0\le y\le 2$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad y)dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$$

所以，随机变量Y的密度函数为

例 4（续）

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2}{3}x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,\ y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由于当$0<x<1,\quad 0<y<2$时，

$$f(x,\ y)\ne f_X(x)f_Y(y)$$

所以，随机变量X与Y不独立.

例 5

甲、乙两人约定在某地相会，假定每人的到达时间是相互独立的，且均服从中午12时到下午1时的均匀分布．试求先到者需等待10分钟以内的概率．

解:

设甲于12时 X 分到达，设乙于12时 Y 分到达．

则随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,\ 60]$ 上的均匀分布．

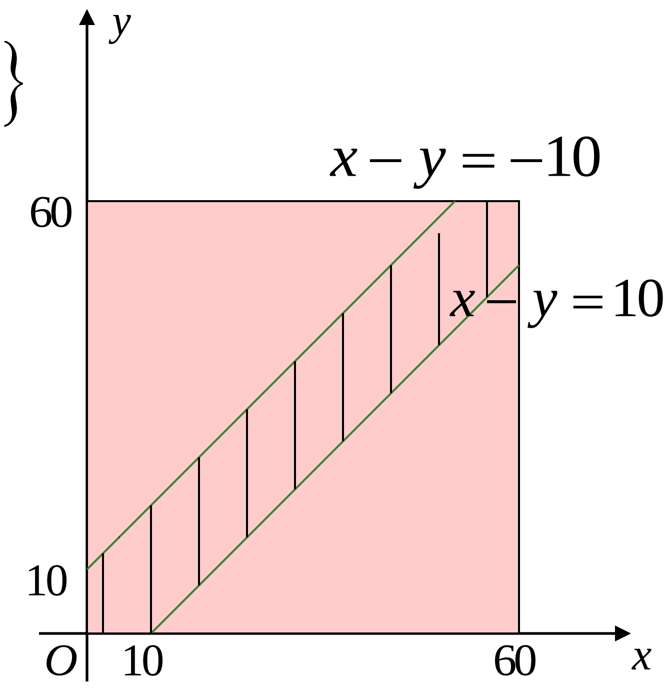
所以, $(X,\ Y)$的联合密度函数为

例 5（续）

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3600} & 0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设：$A=\{$先到者等待时间不超过10分钟$\}$

则有，　$A=\{|X-Y|\le 10\}$



满足上述条件的点为图 中直线

$$x-y=10$$

与直线

$$x-y=-10$$

之间的部分.

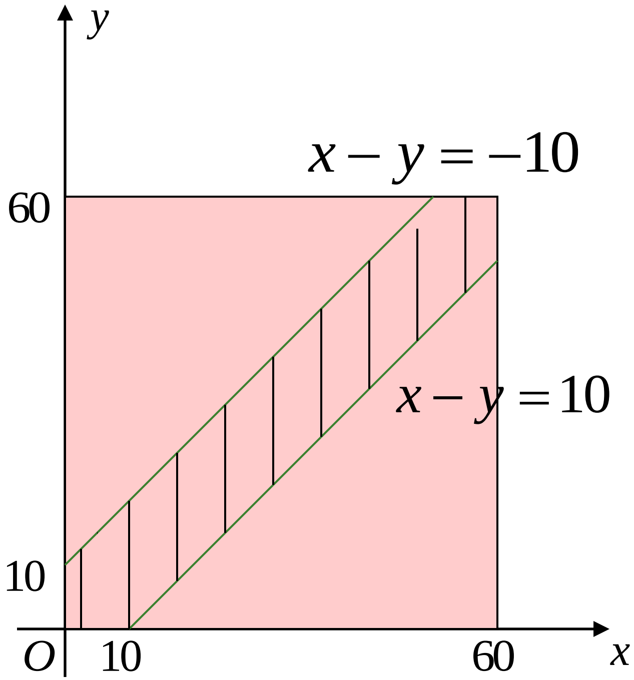
例 5（续）

所以，所求概率为

$$P(A)=P\{|X-Y|\le 10\}$$

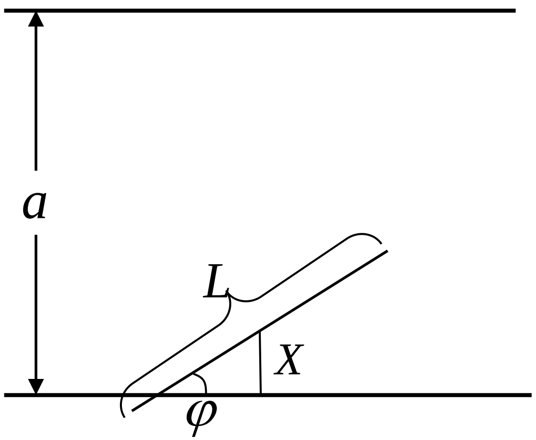
$$=\iint\limits_{|x-y|\le 10} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\frac{3600-50\times 50}{3600}=\frac{11}{36}$$



例6（Buffon投针问题）

平面上画有等距离为 a 的一些平行线，向此平面上任意投一根长度为 $L\left(L<a\right)$ 的针，试求该针与任一平行直线相交的概率.



解：

设：X：针的中心到最近一条平行线的距离；

φ：针与 X 所在投影线的夹角

~~例 6（续）~~

则随机变量 X 服从区间 $\left[0,\ \dfrac{a}{2}\right]$ 上的均匀分布；

随机变量 φ 服从区间 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布；

并且随机变量 X 与 φ 相互独立.

所以二维随机变量 $(X,\ \varphi)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi a} & 0\le x\le \dfrac{a}{2},\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例 6（续）

设：$A=\{针与任一直线相交\}$

则 $A=\left\{\dfrac{X}{\sin\varphi}<\dfrac{L}{2}\right\}=\left\{X<\dfrac{L}{2}\sin\varphi\right\}$

所以，

$$P(A)=P\left\{X<\frac{L}{2}\sin\varphi\right\}=\iint\limits_{x<\frac{L}{2}\sin y} f(x,\quad y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{\frac{L}{2}\sin y}\frac{4}{\pi a}dx=\frac{4}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{L}{2}\sin y\,dy=\frac{2L}{\pi a}$$

说　　明

由本题的答案 $P(A)=\dfrac{2L}{\pi a}$

我们有圆周率π的近似计算公式

$$\pi=\frac{2L}{a}\cdot\frac{1}{P(A)}$$

若我们投针 N 次，其中有 n 次与平行线相交，则以

$\dfrac{n}{N}$ 作为$P(A)$的近似值代入上式，得

$$\pi\approx\frac{2L}{a}\cdot\frac{N}{n}$$

说　　明

历史上，确有些学者做过此项实验，下表就是一些有关资料（其中把 a 折算为 1）：

实验者	年　份	针　长	投掷次数	相交次数	π 的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218.5	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382.5	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1759

说　　明

上述的计算方法就是一种概率方法，它概括起来就是：

首先建立一个概率模型，它与我们感兴趣的某些量（如上面的常数 π）有关.

然后设计适当的随机试验，并通过这个试验的结果来确定这些量.

现在，随着计算机的发展，已按上述思路建立起一类新的计算方法——$Monte-Carlo$方法.

例 7（正态随机变量的独立性）

设二维随机变量$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

则(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

又随机变量 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

例 7（续）

随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

所以，当 $r=0$ 时，$(X,\ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

这表明，随机变量X 与Y相互独立；

例 7（续）

反之，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则对任意的实数 x， y，有

$$f(x,\quad y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

特别地，我们有

$$f(\mu_1,\quad \mu_2)=f_X(\mu_1)\cdot f_Y(\mu_2)$$

即，

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}$$

例 7（续）

由此得， $r = 0$.

综上所述，我们有以下 重要结论：

二元正态随机变量 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$ 相互独立的充分必要条件为：

$$r = 0.$$

n维随机变量的独立性

§4随机变量的独立性

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维随机变量，其联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，又随机变量 X_i 的分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$. 如果对于任意的 n 维实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量.

注意： 若 X,Y 独立，f(x),g(y) 是连续函数，则 f(X),g(Y) 也独立。

- 作业:11,13,14,16

§5 多维随机变量函数的分布

一．和的分布

例 1　设二维离散型随机变量$(X, \ Y)$的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

令：$Z = X + Y$，试求随机变量Z的分布律.

例 1（续）解：

由于 X 与 Y 的取值都是 $1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,$

可知随机变量 $Z=X+Y$ 的取值为 $2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8.$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,\quad Y=1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=1,\quad Y=2\}+P\{X=2,\quad Y=1\}=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8};$$

$$P\{Z=4\}$$

$$=P\{X=1,\quad Y=3\}+P\{X=2,\quad Y=2\}+P\{X=3,\quad Y=1\}$$

$$=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24};$$

例 1（续）

$$P\{Z=5\}$$

$$=P\{X=1,\quad Y=4\}+P\{X=2,\quad Y=3\}$$

$$+P\{X=3,\quad Y=2\}+P\{X=4,\quad Y=1\}$$

$$=0+0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=6\}$$

$$=P\{X=2,\quad Y=4\}+P\{X=3,\quad Y=3\}+P\{X=4,\quad Y=2\}$$

$$=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{7}{48};$$

$$P\{Z=7\}=P\{X=3,\quad Y=4\}+P\{X=4,\quad Y=3\}=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16};$$

例 1（续）

$$P\{Z=8\}=P\{X=4,\quad Y=4\}=\frac{1}{16}.$$

由此得$Z=X+Y$的分布律为

Z	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从 参数为 λ_1 与 λ_2 的 Poisson 分布，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的分布律.

解：

由随机变量 X 与 Y 的取值都是 0， 1， 2， $\cdots$，

可知随机变量 $Z = X + Y$ 的取值也是 0， 1， 2， $\cdots$，

而且，

$$P\{Z = n\} = P\{X + Y = n\} = P\left\{\bigcup_{k=0}^{n}(X = k,\ Y = n - k)\right\}$$

例 2（续）

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k,\quad Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}\quad (\text{随机变量}X\text{与}Y\text{的独立性})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

例 2（续）

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

即，

$$P\{Z=n\}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$(n=0,\quad 1,\quad 2,\quad \cdots)$$

由Poisson 分布的定义，知 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布.

连续型随机变量和的分布

设$(X,\ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x,\ y)$,

令：$Z = X + Y$,

下面计算随机变量$Z = X + Y$的密度函数$f_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z = X + Y$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,\ y)dxdy$$

连续型随机变量和的分布

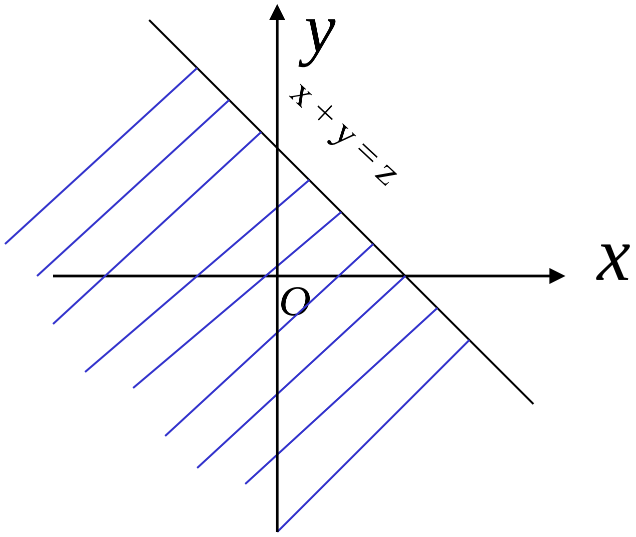
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,\quad y)dy$$

作变换：$y=u-x$

则有

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}f(x,\quad u-x)du$$

$$=\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\quad u-x)dx$$



连续型随机变量和的分布

由分布函数与密度函数之间的关系，上式对 z 求导，可得 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z} g(u)du\right)=g(z)$$

即

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\quad z-x)dx$$

通过类似的计算，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,\quad y)dy$$

连续型随机变量和的分布

特别地，如果随机变量X 与Y 相互独立，则有

$$f(x, \quad y) = f_X(x) f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

或者

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

连续型随机变量和的分布

我们称上式为函数$f_X(x)$与$f_Y(y)$的卷积，记作

$$f_X(x) * f_Y(y)$$

因此，我们有以下结论：

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则它们的和 $Z=X+Y$ 的密度函数等于 X 与 Y 密度函数的卷积：

$$f_Z(z)=f_X(x)*f_Y(y)$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从区间 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

由题意，可知

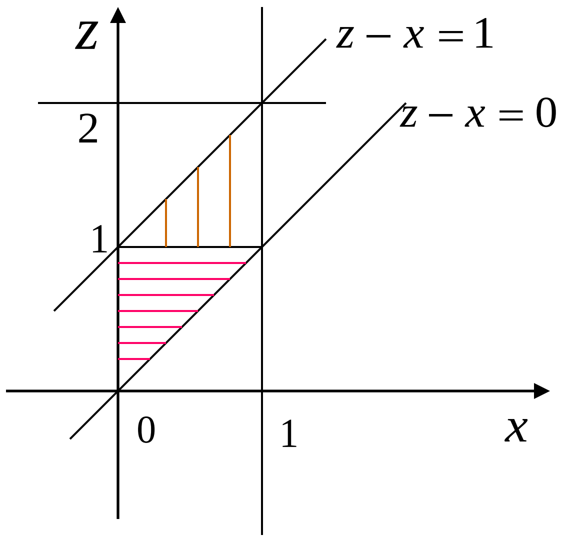
$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例 3（续）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$



$$0<x<1,\ 0<z-x<1$$

(1). 若 $z\le 0$，或 $z\ge 2$， $f_Z(z)=0$

(2). 若 $0<z\le 1$， $f_Z(z)=\int_0^z 1dx = z$

(3). 若 $1<z<2$， $f_Z(z)=\int_{z-1}^1 1dx = 2-z$

综上所述，我们可得

$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z & 0<z\le 1 \\ 2-z & 1<z<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

例 4

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，Y 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，令 $Z=X+Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解:

由题意，可知

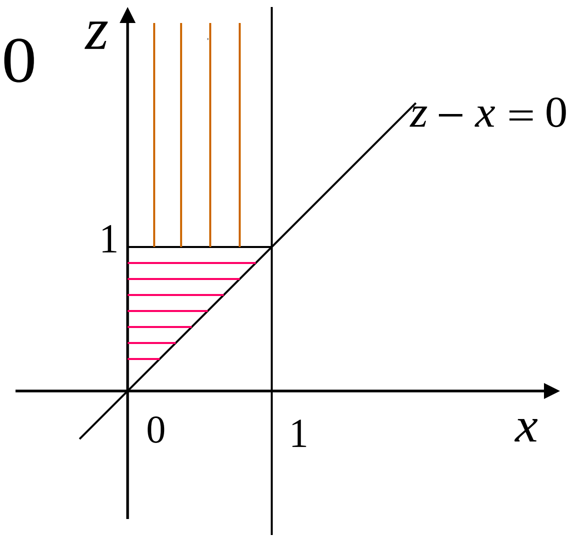
$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

设随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例 4（续）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx,\quad 0<x<1,\ \ z-x>0$$



(1). 若$z\le 0$，　$f_Z(z)=0$

(2). 若$0<z\le 1$，

$$f_Z(z)=\int_0^z 1*e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^z e^x dx=1-e^{-z}$$

(3). 若$z>1$，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=e^{-z}\int_0^1 e^x dx=e^{-z+1}-e^{-z}$$

例 4（续）

综上所述，我们可得 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 < z \le 1 \\ e^{-z+1} - e^{-z} & z > 1 \end{cases}$$

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

设随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

例 5（续）

在上式中e的指数上对x作配方法，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作积分变换 $\frac{u}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}$，则有 $\frac{du}{\sqrt{2}}=dx$，代入上式，有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

这表明，$Z\sim N(0,\ 2)$.

一般地，我们有如下结 论：

如果随机变量X与Y相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$$

$$Z = X + Y,$$

则 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

更一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 $X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n$ 相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \quad \sigma_i^2\right) \qquad \left(i=1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n\right)$$

又 $a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n$ 为 n 个实常数，

令： $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i,$

则 $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$

例 6

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，令 $Z = X + Y$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

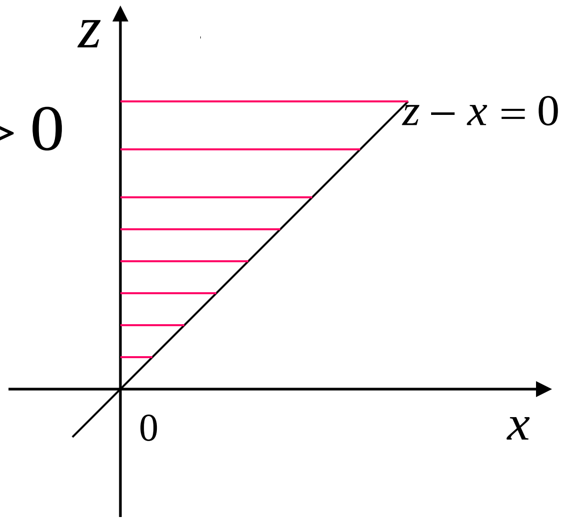
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

例 6（续）

设随机变量$Z = X + Y$的密度函数为$f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \qquad x>0,\ z-x>0$$



(1) 当 $z \le 0$, $f_Z(z) = 0.$

(2) 当 $z > 0$, $f_Z(z) =$

$$=\int_0^z \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z-x}{2}} dx$$

例 6（续）

$$f_Z(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}(z-x)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^z x^{\frac{m}{2}-1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

作积分变换 $t=\dfrac{x}{z}$，$dt=\dfrac{dx}{z}$

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=z$ 时，$t=1$.

例 6（续）

$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1(tz)^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}z\,dt$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1}(1-t)^{\frac{n}{2}-1}dt$$

由数学中$\beta-$函数的定义：

$$\mathrm{B}(s,\ t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx\quad(s>0,\ t>0)$$

以及$\beta-$函数与$\Gamma-$函数之间的关系：$\mathrm{B}(s,\ t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

例 6（续）

可知，$$f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)$$

$$=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

综上所述，我们有

例 6（续）

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{m+n}{2}-1} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

由此，我们得

如果随机变量X与Y相互独立，且

$$X\sim\chi^2(m),\ Y\sim\chi^2(n),$$

$$Z=X+Y,$$

则
$$Z\sim\chi^2(m+n)$$

二．商的分布

连续型随机变量商的分布

设$(X, \ Y)$是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, \ y)$，令：$Z = \dfrac{X}{Y}$，

下面计算随机变量$Z = \dfrac{X}{Y}$的密度函数 $f_Z(z)$.

首先计算随机变量$Z = \dfrac{X}{Y}$的分布函数$F_Z(z)$.

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\left\{\frac{X}{Y} \le z\right\}$$

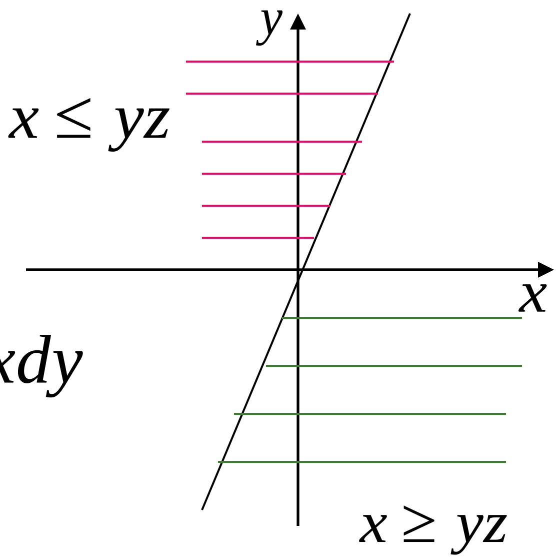
连续型随机变量商的分布

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z} f(x,\ y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z,\ y>0} f(x,\ y)\,dxdy + \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z,\ y<0} f(x,\ y)\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{x \le zy,\ y>0} f(x,\ y)\,dxdy + \iint\limits_{x \ge zy,\ y<0} f(x,\ y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,\ y)\,dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx$$



连续型随机变量商的分布

在第一个积分 $\int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, \ y) dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = y du$，当 $x = zy$ 时，$u = z$；

当 $x \to -\infty$ 时，注意到 $y > 0$，因而有 $u \to -\infty$；

$$\int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, \ y) dx = \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z} f(uy, \ y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} y f(uy, \ y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} |y| f(uy, \ y) dy$$

连续型随机变量商的分布

同理，在第二个积分 $\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \quad y) dx$ 中，作变换 $x = uy$，

则 $dx = ydu$，　当$x = zy$时，$u = z$；

当$x \to +\infty$时，注意到$y < 0$，因而有$u \to -\infty$；

$$\int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, \quad y) dx = \int_{-\infty}^{0} dy \int_{z}^{-\infty} f(uy, \quad y) y du$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} (-y) f(uy, \quad y) dy = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{0} |y| f(uy, \quad y) dy$$

连续型随机变量商的分布

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}|y|f(uy,\quad y)dy+\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{0}|y|f(uy,\quad y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(uy,\quad y)dy\right)du$$

所以，由密度函数的定义有

故

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,\quad y)dy$$

连续型随机变量商的分布

特别地，如果随机变量X与Y相互独立，则有

$$f(x,\quad y)=f_X(x)f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$$

例 7

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的指数分布，令 $Z=\dfrac{X}{Y}$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

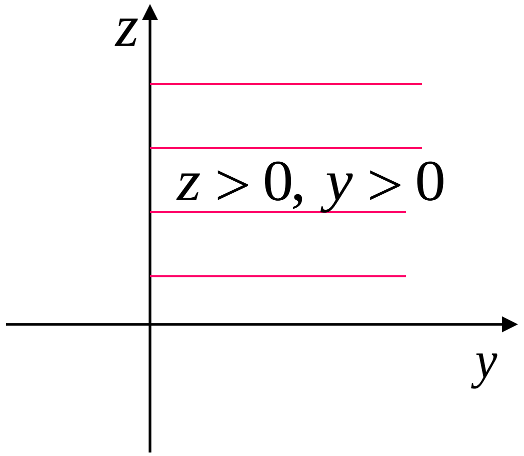
例7（续）

设：$Z=\dfrac{X}{Y}$ 由随机变量X与Y相互独立性，我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy \qquad yz>0,\ y>0$$

(1). 若$z\le 0$, $f_Z(z)=0$.

(2). 若$z>0$,



$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}y\lambda_1 e^{-\lambda_1 yz}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy$$

例7（续）

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{+\infty} y e^{-(\lambda_2 + \lambda_1 z) y} dy = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 + \lambda_1 z)^2}$$

所以，$Z = \dfrac{X}{Y}$的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 + \lambda_1 z)^2} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

补充结论：

（1）设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$,令：$Z = X - Y$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)dy$$

（2）设(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x, y)$，令：$Z = XY$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\frac{1}{|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{y}, y\right)\frac{1}{|y|}dy$$

三．其它的分布

本节的解题步骤

先求随机变量函数$Z=g(X,\ Y)$的分布函数$F_Z(z)$,

再求随机变量函数$Z=g(X,\ Y)$的密度函数$f_Z(z)=F_Z'(z)$,

例 8

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，令 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$，试求随机变量 Z 的密度函数.

解：

由题意，可知

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

由于 X 与 Y 是相互独立的，所以，$(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

例 8（续）

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (-\infty < x, y < +\infty)$$

所以，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$$

若 $Z\le 0$，则 $F_Z(z)=0$

若 $Z>0$，则 $F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x, y)dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

例 8（续）

作极坐标变换 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$， 则有

$$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

所以， $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

例 9

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim B(1,\quad p)$，$Y\sim B(1,\quad p)$ $(0<p<1)$，令 $\xi=\min(X,\quad Y)$，$\eta=\max(X,\quad Y)$，试求随机变量 ξ 与 η 的联合分布律及 ξ 与 η 各自的边缘分布律，并判断 ξ 与 η 是否相互独立？

解：

由随机变量 X 与 Y 的取值都为 0 与 1，知

$$\xi=\min(X,\quad Y),\quad \eta=\max(X,\quad Y)$$

的取值也为 0 与 1.

例 9（续）

$$P\{\xi=0,\quad \eta=0\}=P\{X=0,\quad Y=0\}$$
$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$$

$$P\{\xi=0,\quad \eta=1\}=P\{X=0,\quad Y=1\}+P\{X=1,\quad Y=0\}$$
$$=P\{X=0\}P\{Y=1\}+P\{X=1\}P\{Y=0\}$$
$$=2p(1-p)$$

$$P\{\xi=1,\quad \eta=0\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{\xi=1,\quad \eta=1\}=P\{X=1,\quad Y=1\}$$
$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$$

例 9（续）

随机变量ξ与η的联合分布律及ξ与η各自的边缘分布律为

$\xi \backslash \eta$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$1-p^2$
1	0	p^2	p^2
$p_{\cdot j}$	$(1-p)^2$	$1-(1-p)^2$	

由于$0<p<1$，　所以，

$$P\{\xi=1,\quad \eta=0\}=0 \neq P\{\xi=1\}P\{\eta=0\}=p^2\times(1-p)^2$$

这表明，随机变量ξ与η不独立.

例 10

设 $X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n$ 是独立同分布的连续型 随机变量，X_1 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$．令：

$$X_{(1)} = \min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n),$$

试求随机变量 $X_{(1)}$ 与 $X_{(n)}$ 的密度函数．

解：

设随机变量 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x)$，密度函数为 $f_{(1)}(x)$．

例 10（续）

设随机变量 $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x)$，密度函数为 $f_{(n)}(x)$. 则

$$
\begin{aligned}
F_{(n)}(x) &= P\{X_{(n)} \le x\} \\
&= P\{\max(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \le x\} \\
&= P\{ X_1 \le x,\ X_2 \le x,\ \cdots,\ X_n \le x \} \\
&= P\{X_1 \le x\}P\{X_2 \le x\}\cdots P\{X_n \le x\} \\
&= [F(x)]^n
\end{aligned}
$$

例10（续）

所以， $$f_{(n)}(x)=F'_{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left\{[F(x)]^n\right\}$$

$$=n[F(x)]^{n-1}F'(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$F_{(1)}(x)=P\{X_{(1)}\le x\}$$

$$=P\{\min(X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_n)\le x\}$$

$$=1-P\{\min(X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_n)>x\}$$

$$=1-P\{X_1>x,\quad X_2>x,\quad \cdots,\quad X_n>x\}$$

例 10（续）

$$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$$

$$=1-[1-P\{X_1\le x\}][1-P\{X_2\le x\}]\cdots[1-P\{X_n\le x\}]$$

$$=1-[1-F(x)]^n$$

所以，
$$f_{(1)}(x)=F'_{(1)}(x)=\frac{d}{dx}\left\{1-[1-F(x)]^n\right\}$$

$$=n[1-F(x)]^{n-1}F'(x)$$

$$=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$$

例 11

设系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 $L_1, \quad L_2, \quad \cdots, \quad L_n$ 并联而成，并且 L_i 的寿命为 X_i，它们都服从参数为 λ 的指数分布，试求系统 L 的寿命 Z 的密度函数.

解：

由于系统 L 是由 n 个相互独立的子系统 $L_1, \quad L_2, \quad \cdots, \quad L_n$ 并联而成，故有

$$Z = \max\left(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n\right),$$

又因为子系统 L_i 的寿命 X_i 服从参数为 λ 的指数分布，因此 X_i 的密度函数为

例 11（续）

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

X_i 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

所以，由例10知，

$$Z=\max(X_1,\quad X_2,\quad \cdots,\quad X_n),$$

的密度函数为

$$f_Z(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}n\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

1 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质。
2 要理解二维随机变量的边缘分布以及与联合分布的关系，了解条件分布。
3 掌握二维均匀分布和二维正态分布。
4 要理解随机变量的独立性。
5 要会求二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布和函数的分布。

重点： 随机变量的独立性、二维随机变量的和、商分布及多维随机变量的极值分布函数的分布。

作业：

- 作业:17,19,22,24,26,28