一. （本题满分 8 分）

在 1-2000 的整数中随机的取一个数，问取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

解：设 A 为事件“取到的整数能被 6 整除”， B 为取到的整数能被 8 整除”，则所求的概率为：

$$P(\bar{A}\ \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B),$$

其中 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

由于 $\left[\frac{2000}{6}\right] = 333$

所以能被 6 整除的整数为：6，12，18…1998 共 333 个，

所以 $P(A) = \frac{333}{2000}$

同理得： $P(B) = \frac{250}{2000}$, $P(AB) = \frac{83}{2000}$

其中 B ={8, 16, … 2000 }， AB = {24, 48 … 199 2 }，

AB 为“既被 6 整除又被 8 整除”或“能被 24 整除”，于是所求的概率为：

$$p = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

$$= 1 - \frac{333 + 250 - 83}{2000} = 1 - \frac{500}{2000} = \frac{3}{4}.$$

二. （本题满分 8 分）

有两箱同种类的零件。第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。求：

（1）第一次取到的零件是一等品的概率；

（2）第一次取到的零件是一等品的条件下 ，第二次取到的也是一等品的概率.

解 ： 设 A_i**表示“第 i 次取到一等品”(i=1,2)，**B_i**(i= 1,2)表示“取到的是第 i 箱中的产品”**

1）由全概率公式，有

$$P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10}{50} + \frac{18}{30}\right) = \frac{2}{5};$$

2）由全概率公式和条件概率公式，有

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_2|B_1)P(B_1) + P(A_1A_2|B_2)P(B_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{P_{10}^2}{P_{50}^2} + \frac{P_{18}^2}{P_{30}^2}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{49} + \frac{51}{29}\right)$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{49} + \frac{51}{29}\right) = 0.4856$$

三. （本题满分 8 分）

实验器皿中产生甲,乙两种细菌的机会是相等的,并且产生的细菌数 X 服从泊松分布,试求： (1)产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率；(2)在已知产生了细菌且没有甲类细菌的条件下,有两个乙类细菌的概率.

解：(1) B 表示产生了甲类细菌但没有乙类细菌，

$A_k(k=0,1,\cdots)$表示产生了k个细菌.

$$A_k=\{X=k\}\quad(k=0,1,\cdots).$$

$$P(A_k)=P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,\cdots.$$

$$P(B|A_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k,k=1,\cdots.\qquad P(B|A_0)=0.$$

由全概率公式得，

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)P(B|A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}-1\right)e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)$$

(2) C 表示产生了细菌且没有甲类细菌，

$$P(C)=e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)$$

由逆概公式,知

$$P(A_2|C)=\frac{P(A_2)P(C|A_2)}{P(C)}=\frac{\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{e^{-\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)}=\frac{\lambda^2}{8\left(e^{\frac{\lambda}{2}}-1\right)}$$

四．（本题满分 8 分）

某电子元件的寿命 X（单位：小时）是以

$$f(x)=\begin{cases}0,x\leq 100\\ \dfrac{100}{x^2},x>100\end{cases}$$

为密度函数的连续型随机变量．求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率.

解：设 A={任一元件在使用的前 150 小时内需要更换}

则 $p=P(A)=P\{X\leq 150\}=\int_{-\infty}^{150}f(x)dx=\frac{1}{3}$

B={ 5 个元件中恰有 2 个的使用寿命不超过 150 小时 }

={5 重 Bernoulli 试验中 A 恰好发生两次}

令：Y=“5 个元件中使用寿命不超过 150 小时的元件数”

则 $Y\sim B(5,\frac{1}{3})$。

$$P(B)=P\{Y=2\}=C_5^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

五．（本题满分 10 分）

设随机变量 X 具有概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{8}, 0<x<4\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

试求 $Y=2X+8$ 的概率密度。

解：(1) 先求 Y =2X+8 的分布函数 $F_Y(y)$：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

$$=P\{2X+8\le y\}=P\{X\le\frac{y-8}{2}\}$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)dx.$$

$$f_Y(y)=f_X(\frac{y-8}{2})\times(\frac{y-8}{2})'$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8}(\frac{y-8}{2})\times\frac{1}{2}, & 0<\frac{y-8}{2}<4,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

整理得 Y=2X+8 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(\frac{y-8}{2})\times\frac{1}{2}, & 0<\frac{y-8}{2}<4,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

六．（本题满分 10 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从圆域 $X^2+Y^2\le 1$ 上的均匀分布，求

（1）密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；（2）$P(X>\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{2})$.

解：二维随机变量的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

由此得，当$-1\le y\le 1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

所以，随机变量 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

由此得，当$-1<y<1$时，$f_Y(y)>0$

因此当 $-1<y<1$时，且 $-\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$$

所以，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ 0 & 其它\end{cases}$$

即当 $-1<y<1$时，X在$Y=y$下的条件分布是区间$\left[-\sqrt{1-y^2}\quad \sqrt{1-y^2}\right]$上的均匀分布.

$$f_{X|Y}\left(x\middle|y=\tfrac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} & -\sqrt{1-\frac{1}{4}}\le x\le\sqrt{1-\frac{1}{4}}\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(2) $P\{X>\frac{1}{2}\,|\,Y=\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y=\frac{1}{2})dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{3}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$$

七．（本题满分 10 分）

设随机变量(X,Y)具有概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-2x-y}, & 0<x,0<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求$Z=\max\{X,Y\}$的密度函数.

解：

当X, Y相互独立时，$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\infty} 2e^{-2x-y}dy=2e^{-2x}, & 0<x\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{\infty} 2e^{-2x-y}dx=e^{-y}, & 0<y\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

由于

$$f_X(x)f_Y(y)=f(x,\ y)$$

在 xoy 平面上几乎处处成立，所以X与Y独立。

Z=max{X,Y}的分布函数为

$$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-2z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}\qquad F_Y(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

Z=max{X,Y}的分布函数为

$$F_Z(z)=F_Y(z)F_X(z)$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-z})(1-e^{-2z}), & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

Z=max{X,Y}的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$$=\begin{cases}2e^{-2z}(1-e^{-z})+(1-e^{-2z})e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2e^{-2z}+e^{-z}-3e^{-3z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

八．（本题满分 12 分）

已知随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),D(X),D(Y),Cov(X,Y)$.

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}x(x+y)dy=\frac{7}{6}=E(Y)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,y)dy$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}x^2(x+y)dy=\frac{5}{3}=E(Y^2)$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{11}{36}=D(Y)$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{1}{8}xy(x+y)dy=\frac{4}{3}$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}$$

九．（本题满分 10 分）

根据以往的经验,某种电器元件的寿命服从均值为 100(小时)的指数分布,现随机的取 16 只,设他们的寿命是相互独立的.求这 16 只元件的寿命总和大于 1920 小时的概率. $\Phi(0.8)=0.7881$

解：

设 $X_k(k=1,2,\cdots,16)$ 是第 k 只元件的寿命，

由题意知，随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 独立同分布。

$\mu=EX_k=100$， $\sigma^2=DX_k=100^2,(k=1,2,\cdots,16)$

16只元件的寿命总和为：

$$\sum_{k=1}^{16}X_k \quad (n=16)$$

求：$P\{\sum_{k=1}^{16}X_k>1920\}$。

由于 $\dfrac{\sum_{k=1}^{16}X_k-16\times100}{100\sqrt{16}}$ 近似服从标准正态分布。

$$P\{\sum_{k=1}^{16}X_k>1920\}=1-P\{\sum_{k=1}^{16}X_k\le1920\}$$

$$=1-P\{\frac{\sum_{k=1}^{16}X_k-16\times100}{100\sqrt{16}}\le\frac{1920-16\times100}{100\sqrt{16}}\}$$

$$\approx1-\Phi\left(\frac{1920-16\times100}{100\sqrt{16}}\right)$$

$$=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$$

十．（本题满分 8 分）

设 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数，求 θ 的极大似然估计.

解：似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(x_i-\theta)} & \theta\le x_1,\cdots,x_n\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$\theta\le x_1,\cdots x_n \Leftrightarrow \theta\le\min x_i$$

当 $\theta\le\min x_i$ **时，** $L(\theta)=2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$$

$$\because\quad \frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=2n>0$$

可见 $L(\theta)$ **是** θ **的单增函数，又** $\theta\le\min x_i$

所以， $L(\theta)$ **在** $\min x_i$ **处取得最大值，**

$\therefore$ θ **的极大似然估计值** $\hat{\theta}=\min x_i$；

θ **的极大似然估计量** $\hat{\theta}=\min X_i$

十一．（本题满分 8 分）

某工厂生产一批钢索，其断裂强度 X（单位：$10^5 Pa$）服从正态分布 $N(\mu,40^2)$，从中抽取容量为 9 的样本，测得断裂强度值为

793，782, 795, 802, 797, 775, 768, 798, 809

据此样本值能否认为这批钢索的平均断裂强度为 $800\times10^5 Pa$（显著性水平 $\alpha=0.05$）？（$z_{0.975}=1.96$）

解：根据问题提出假设： $H_0:\mu=800$，$H_1:\mu\ne800$

检验统计量为 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$

拒绝域为 $\{|\frac{\bar{X}-800}{40}\sqrt{9}|\ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$，**查表有** $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$

根据样本值计算得统计量观测值为

$|\frac{791-800}{40}\sqrt{9}|=0.675<1.96$，**故不在拒绝域内，所以可以认为这批钢索的平均断裂强度为** $800\times10^5 Pa$.