

- 随机变量
- 离散型随机变量的概率分布
- 随机变量的分布函数
- 连续型随机变量的概率密度
- 随机变量的函数的分布



### § 1 随机变量

#### § 1 随机变量

#### 一. 随机变量的概念

##### 例 1

袋中有3只黑球，2只白球，从中任意取出3只球，观察取出的3只球中的黑球的个数.



#### 例 1 (续)

我们记取出的黑球数为  $X$ ，则  $X$  的可能取值为 1, 2, 3.

因此， $X$  是一个变量.

但是， $X$  取什么值依赖于试验结果，即  $X$  的取值带有随机性，

所以，我们称  $X$  为随机变量.



## 例 1 (续)

## § 1 随机变量

该随机试验的每一个结果都对应着变量  $X$  的一个确定的取值，因此变量  $X$  是样本空间  $S$  上的函数：

$$X = X(e) \quad (e \in S)$$

- 我们定义了随机变量后，就可以用随机变量的取值情况来刻画随机事件。例如

$$\{e: X(e) = 2\} = \{X = 2\}$$

表示取出2个黑球这一事件；

$$\{X \geq 2\}$$

表示至少取出2个黑球这一事件，等等。



# 随机变量的定义

## § 1 随机变量

设 $E$ 是一个随机试验， $S$ 是其样本空间。我们称样本空间上的函数

$$X = X(e) \quad (e \in S)$$

为一个随机变量。

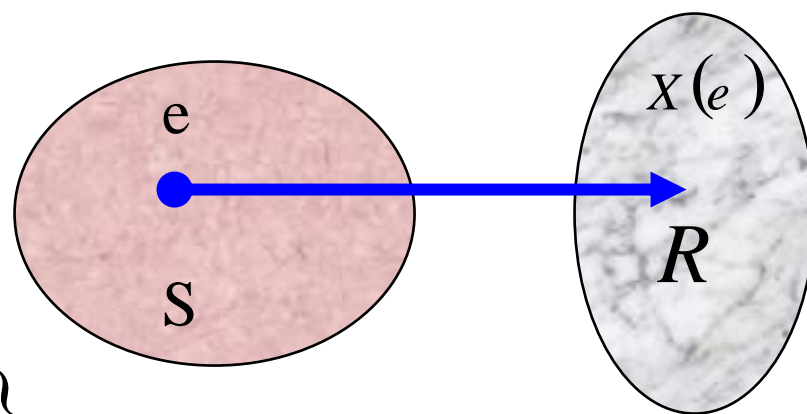
对于任意的实数  $x$ ，集合

$$\{e: X(e) \leq x\} = \{X \leq x\}$$

都是随机事件。

一般地随机事件：

$$B = \{e: X(e) \in L\} = \{X \in L\}$$



(1) 随机变量常用大写的英文字母

$X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 、 $\dots$

或希腊字母

$\xi$ 、 $\eta$ 、 $\varsigma$ 、 $\dots$

等来表示.

(2) 对于随机变量, 我们常常关心的是它的取值.

(3) 我们设立随机变量, 是要用随机变量的取值来描述随机事件.



#### 例 2

掷一颗骰子，令：

$X$ ：出现的点数.

则  $X$  就是一个随机变量. 它的取值为1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\{X \leq 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；

$$\{X \text{ 取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件.



#### 例 3

一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品．现从中取出 6 件，令：

$X$ ：取出 6 件产品中的次品数．

则  $X$  就是一个随机变量．它的取值为 0, 1, 2, ..., 6.

$$\{X = 0\}$$

表示取出的产品全是正品这一随机事件；

$$\{X \geq 1\}$$

表示取出的产品至少有一件次品这一随机事件．





#### 例 4

掷一枚硬币，令：

$$X = \begin{cases} 1 & \text{掷硬币出现正面} \\ 0 & \text{掷硬币出现反面} \end{cases}$$

则 $X$ 是一个随机变量.

#### 说 明

在同一个样本空间上可以定义不同的随机变量.



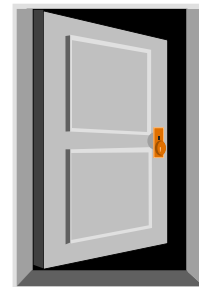
### § 2 离散型随机变量

### § 2 离散型随机变量

#### 一. 离散型随机变量的概念与性质

##### 离散型随机变量的定义

如果随机变量  $X$  的取值是有限个或可列无穷个，则称  $X$  为离散型随机变量。



## 离散型随机变量的分布律

设离散型随机变量  $X$  的所有可能取值为

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

并设  $P\{X = x_n\} = p_n \quad (n=1, 2, \dots)$

则称上式或

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots,$	$x_n$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots,$	$p_n$	$\dots$

为离散型随机变量  $X$  的分布律.

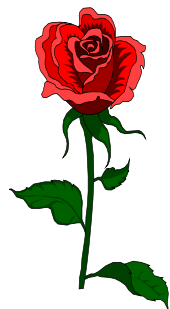
离散型随机变量可完全由其分布律来刻画.  
即离散型随机变量可完全由其的可能取值以及取这些值的概率唯一确定.

离散型随机变量分布律的性质:

(1). 对任意的自然数  $n$ , 有

$$p_n \geq 0$$

(2). 
$$\sum_n p_n = 1$$



## 例 1

从1~10这10个数字中随机取出5个数字，令：

$X$ ：取出的5个数字中的最大值。

试求  $X$  的分布律。

解：  $X$  的取值为5, 6, 7, 8, 9, 10. 并且

$$P\{X = k\} = \frac{C_{k-1}^4}{C_{10}^5} \quad (k = 5, 6, \dots, 10)$$

具体写出，即可得  $X$  的分布律：

$X$	5	6	7	8	9	10
$P$	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$



## 例 2

## § 2 离散型随机变量

将 1 枚硬币掷 3 次，令：

$X$ ：出现的正面次数与反面次数之差.

试求  $X$  的分布律.

解：  $X$  的取值为-3, -1, 1, 3. 并且

$X$	-3	-1	1	3
$P$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

#### 例 3

设离散型随机变量  $X$  的分布律为

$X$	0	1	2	3	4	5
$P$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$

则

$$\begin{aligned} P\{X \leq 2\} &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$



### 例 3 (续)

#### § 2 离散型随机变量

$$P\{X > 3\} = P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{7}{16}$$

$$P\{0.5 \leq X < 3\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$





设随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = n\} = c \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

试求常数  $c$ .

解：由随机变量的性质，得

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} c \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

该级数为等比级数，故有

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} c \left(\frac{1}{4}\right)^n = c \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

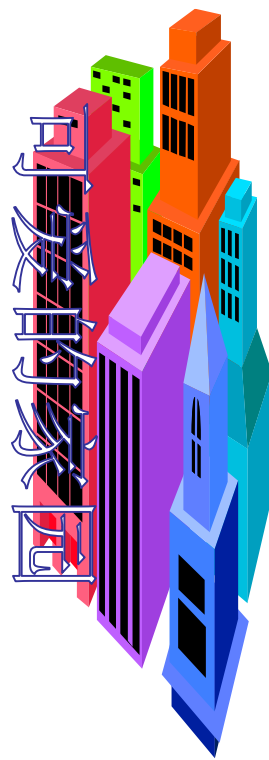
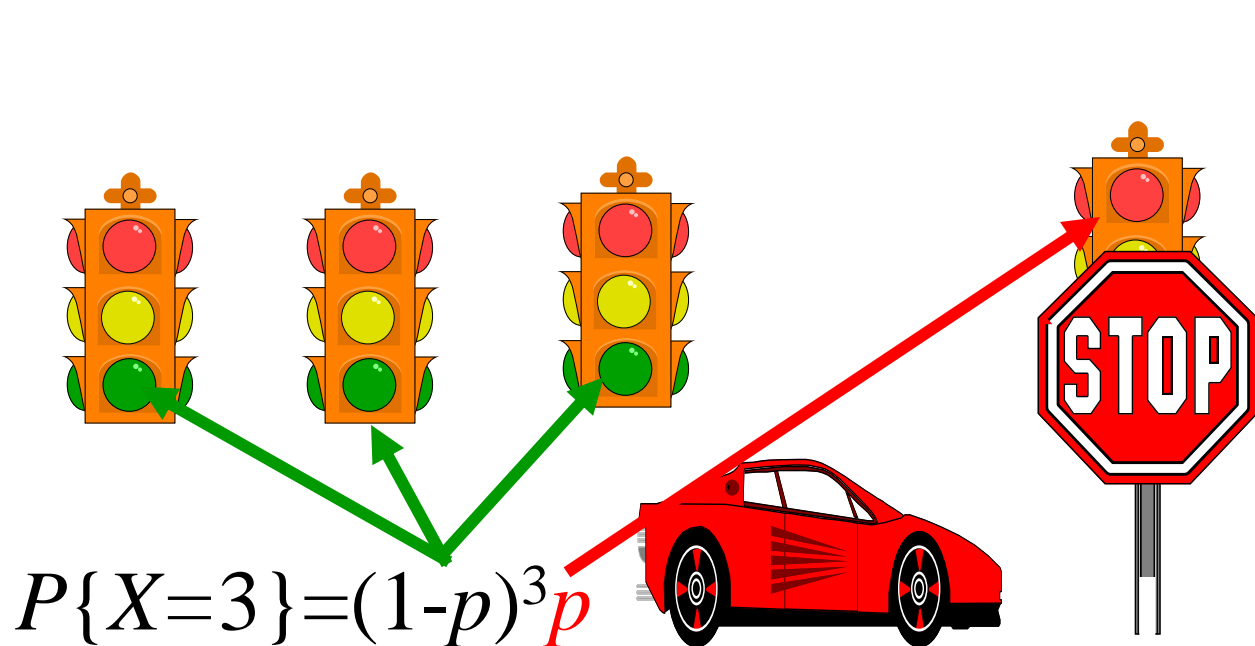
所以  $c = 3$ .



### 例 5

#### § 2 离散型随机变量

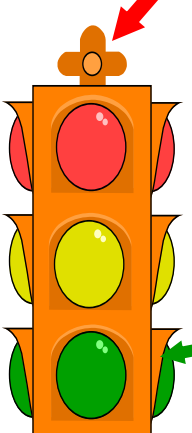
设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以  $1/2$  的概率允许或禁止汽车通过. 以  $X$  表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数，求  $X$  的分布律. (信号灯的工作是相互独立的).



## 例 5(续)

## § 2 离散型随机变量

解：以  $p$  表示每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则  $X$  的分布律为：



$X$	0	1	2	3	4
$p_k$	$p$	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4$

或写成  $P\{X=k\} = (1-p)^k p, k=0,1,2,3$

$$P\{X=4\} = (1-p)^4$$



### 例 5(续)

#### § 2 离散型随机变量

以  $p = 1/2$  代入得:

$X$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$p_k$	$0.5$	$0.25$	$0.125$	$0.0625$	$0.0625$

### 二、一些常用的离散型随机变量

#### § 2 离散型随机变量

#### 1) Bernoulli分布

如果随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p, \quad P\{X=1\}=p$$

或

<b>X</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>P</b>	<b>1-p</b>	<b>p</b>

则称随机变量  $X$  服从参数为  $p$  的 **Bernoulli分布**.

记作  $X \sim B(1, p)$  (其中  $0 \leq p \leq 1$  为参数)

Bernoulli分布也称作 0-1 分布或二点分布.

### Bernoulli分布的概率背景

进行一次Bernoulli试验, 设:

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

令:  $X$ : 在这次Bernoulli试验中事件A发生的次数.

或者说: 令

$$X = \begin{cases} 1 & \text{若事件A发生} \\ 0 & \text{若事件A不发生} \end{cases}$$

则  $X \sim B(1, p)$



### 例 6

15 件产品中有4件次品，11件正品．从中取出1件  
令

$X$ ：取出的一件产品中的次品数．则  $X$  的取值为 0 或者 1，并且

$$P\{X = 0\} = \frac{11}{15}, \quad P\{X = 1\} = \frac{4}{15}$$

$$\text{即: } X \sim B\left(1, \frac{4}{15}\right).$$



## 2) 二项分布

如果随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

则称随机变量  $X$  服从参数为  $(n, p)$  的二项分布，  
记作  $X \sim B(n, p)$

(其中  $n$  为自然数,  $0 \leq p \leq 1$  为参数)





显然，当  $n=1$  时

$$X \sim B(1, p)$$

此时， $X$  服从 *Bernoulli* 分布.

这说明，*Bernoulli* 分布是二项分布的一个特例.



### 二项分布的概率背景

进行 $n$ 重Bernoulli试验，设在每次试验中

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

令  $X$ : 在这次Bernoulli试验中事件 $A$ 发生的次数.

则  $X \sim B(n, p)$



(1). 由于  $0 \leq p \leq 1$  以及  $n$  为自然数, 可知

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \geq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

(2). 又由二项式定理, 可知

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

是分布律.



#### 例7

一张考卷上有**5**道选择题，每道题列出**4**个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对**4**道题的概率是多少？

解：每答一道题相当于做一次Bernoulli试验，

$$A = \{\text{答对一道题}\}, \text{ 则 } P(A) = \frac{1}{4}$$

则答**5**道题相当于做**5**重Bernoulli试验．

设：X：该学生靠猜测能答对的题数 则  $X \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)$



所以

$$P\{\text{至少能答对4道题}\} = P\{X \geq 4\}$$

$$= P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1}{64}$$



## 二项分布的分布形态

可知，二项分布的分布

$$P\{X = k\}$$

先是随着  $k$  的增大而增大，达到其最大值后再随着  $k$  的增大而减少。

这个使得  $P\{X = k\}$

达到其最大值的  $k_0$  称为该二项分布的最可能次数。



若  $X \sim B(n, p)$ , 则  $\frac{P\{X = k\}}{P\{X = k-1\}} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq} \quad (q = 1 - p)$   
可以证明:

如果  $(n+1)p$  不是整数, 则  $k_0 = [(n+1)p]$ ;

如果  $(n+1)p$  是整数, 则  $k_0 = (n+1)p$  或  $(n+1)p - 1$ ;



#### 例8

对同一目标进行300次独立射击，设每次射击时的命中率均为0.44，试求300次射击最可能命中几次？其相应的概率是多少？

解：对目标进行300次射击相当于做300重Bernoulli试验．令：

$X$ ： 300射击中命中目标的次数

则由题意  $X \sim B(300, 0.44)$ .

由于  $(300+1) \times 0.44 = 132.44$ ，它不是整数





## 例8 (续)

## § 2 离散型随机变量



因此，最可能射击的命中次数为

$$k_0 = [132.44] = 132$$

其相应的概率为

$$\begin{aligned} P\{X = 132\} &= C_{300}^{132} \times 0.44^{132} \times 0.56^{168} \\ &= 0.04636 \end{aligned}$$



### 3) Poisson 分布

如果随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(其中  $\lambda > 0$  为常数)

则称随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的 Poisson 分布.



(1) 由于  $\lambda > 0$  可知对任意的自然数  $k$ , 有

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} > 0$$

(2) 又由幂级数的展开式, 可知

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

所以

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

是分布律.



- Poisson分布是概率论中重要的分布之一.
- 自然界及工程技术中的许多随机指标都服从Poisson分布.
- 例如, 可以证明, 电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数, 放射物在某一时间间隔内发射的粒子数, 容器在某一时间间隔内产生的细菌数, 某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数, 等等, 在一定条件下, 都是服从Poisson分布的.



#### 例 9

设随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的Poisson分布, 且已知

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}$$

试求  $P\{X=4\}$ .

解:

随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

由已知  $P\{X=1\}=P\{X=2\}$



#### 例 9 (续)

得

$$\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$$

由此得方程

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

得解

$$\lambda = 2.$$

(另一个解 $\lambda = 0$ 不合题意, 舍去)

所以,

$$\begin{aligned} P\{X = 4\} &= \frac{2^4}{4!} e^{-2} = \frac{2}{3} e^{-2} \\ &= 0.09022 \end{aligned}$$



设一个人在一年内的感冒次数服从参数  $\lambda = 5$  的 *Poisson* 分布，现有一种预防感冒的药，它对 30% 的人来讲，可将上述参数  $\lambda$  降为  $\lambda = 1$ （疗效显著）；对另 45% 的人来讲，可将参数  $\lambda$  降为  $\lambda = 4$ （疗效一般）；而对其余 25% 的人来讲，则是无效的．现某人服用此药一年，在这一年中，他得了 3 次感冒，试求此药对他“疗效显著”的概率．



## 例 10 (续)

## § 2 离散型随机变量

解：设  $B = \{ \text{此人在一年中得3次感冒} \}$

$A_1 = \{ \text{该药疗效显著} \}$        $A_2 = \{ \text{该药疗效一般} \}$

$A_3 = \{ \text{该药无效} \}$       则由 Bayes 公式，得

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)} \\ &= \frac{0.30 \times \frac{1^3}{3!} e^{-1}}{0.30 \times \frac{1^3}{3!} e^{-1} + 0.45 \times \frac{4^3}{3!} e^{-4} + 0.25 \times \frac{5^3}{3!} e^{-5}} \\ &= 0.1301 \end{aligned}$$





设在 *Bernoulli* 试验中, 以  $p_n$  代表事件  $A$  在试验中发生的概率, 它与试验总数  $n$  有关. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$$

则 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明:

令:  $np_n = \lambda_n$

则 
$$\begin{aligned} & C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} \left( \frac{\lambda_n}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

### Poisson定理的证明(续)

#### § 2 离散型随机变量

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

对于固定的  $k$ , 有

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda \quad \text{得} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^k = \lambda^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}} \right]^{-\frac{n-k}{n} \cdot \lambda_n} = e^{-\lambda}$$



## Poisson定理的证明(续)

## § 2 离散型随机变量

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$



### Poisson定理的应用

#### § 2 离散型随机变量

由 Poisson 定理, 可知  
若随机变量  $X \sim B(n, p)$ ,

则当  $n$  比较大,  $p$  比较小时,

令:  $\lambda = np$

则有  $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$



### 例 11

#### § 2 离散型随机变量

设每次射击命中目标的概率为0.012，现射击600次，求至少命中3次目标的概率（用Poisson分布近似计算）。

解：设  $B = \{ \text{600次射击至少命中3次目标} \}$

进行600次射击可看作是一600重Bernoulli试验。

$X$ : 600次射击命中目标的次数  
则  $X \sim B(600, 0.012)$ .

用 *Poisson* 分布近似计算，

取  $\lambda = 600 \times 0.012 = 7.2$ .



### 例 11 (续)

#### § 2 离散型随机变量

所以,

$$P(B) = P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\}$$

$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-7.2} - 7.2e^{-7.2} - \frac{7.2^2}{2}e^{-7.2}$$

$$= 0.9745$$



#### 例 12

为了保证设备正常工作，需配备适量的维修工人，现有同类型设备 300 台，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01. 在通常情况下，一台设备的故障可有一人来处理. 问至少需配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01？

**解：**设需配备  $N$  人，记同一时刻发生故障的设备台数为  $X$ ，则  $X \sim b(300, 0.01)$ ，需要确定最小的  $N$  的取值，使得：

$$P\{X > N\} \leq 0.01.$$



$$P\{X > N\} \leq 0.01.$$

$$P\{X \leq N\} \approx \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} \geq 0.99.$$

$$1 - \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \leq 0.01.$$

查表可知，满足上式的最小的  $N$  是 8，因此至少需配备 8 个工人。





### 例 13

设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障能由一个人处理.考虑两种配备维修工人的方法：

其一，由 4 人维护，每人负责 20 台

其二，由 3 人,共同维护 80 台.

试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.



### 例 13(续)

#### § 2 离散型随机变量

解：按第一种方法. 以  $X$  记 “第 1 人负责的 20 台中同一时刻发生故障的台数”，则  $X \sim b(20, 0.01)$  .

以  $A_i$  表示事件 “第  $i$  人负责的台中发生故障不能及时维修”，则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\}.$$

$$\approx \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(0.2)^k e^{-0.2}}{k!} = 0.0175.$$



### 例 13(续)

#### § 2 离散型随机变量

按第二种方法. 以  $Y$  记 80 台中同一时刻发生故障的台数, 则  $Y \sim b(80, 0.01)$ . 故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为:

$$P\{Y \geq 4\} \approx \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(0.8)^k e^{-0.8}}{k!} = 0.0091.$$

第二种方法中发生故障而不能及时维修的概率小, 且维修工人减少一人。运用概率论讨论国民经济问题, 可以有效地使用人力、物力资源。



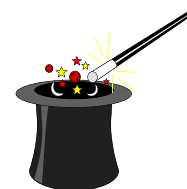
#### 4) 几何分布

若随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = q^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(其中  $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$ )

则称随机变量  $X$  服从参数为  $p$  的几何分布.



### 分布律的验证

(1) 由条件  $p \geq 0, q \geq 0$ , 可知对任意的自然数  $k$ ,  
有  $q^{k-1} p \geq 0$

(2) 由条件可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

综上所述, 可知

$$P\{X = k\} = q^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots)$$

是一分布律.



## 几何分布的概率背景

在Bernoulli试验中,

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = q = 1 - p$$

试验进行到  $A$  首次出现为止.

令:  $X$ : 所需试验次数.

则  $X$  服从参数为  $p$  的几何分布.

$$\text{即} \quad P\{X = k\} = q^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots)$$



#### 例 14

对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率为0.64，射击进行到击中目标时为止，令：

$X$ ：所需射击次数.

试求随机变量  $X$  的分布律，并求至少进行2次射击才能击中目标的概率.

解： $X$ 的取值为1, 2, ...,  $n$ , ...

$$P\{X = n\}$$

$$= P\{\text{前}n-1\text{次射击均未击中, 第}n\text{次射击时击中目标}\}$$

$$= P\{\text{前}n-1\text{次射击均未击中}\} \cdot P\{\text{第}n\text{次射击时击中目标}\}$$

## 例 14 (续)

由独立性，得  $X$  的分布律为：

$$P\{X = n\} = 0.36^{n-1} \times 0.64 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$P\{\text{至少射击2次才命中}\} = P\{X \geq 2\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} 0.36^{k-1} \times 0.64 = 0.64 \times \frac{0.36}{1-0.36} = 0.36$$





#### 5) 超几何分布

如果随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k = 0, 1, \dots, \min(M, n))$$

其中  $N, M, n$  均为自然数.

则称随机变量  $X$  服从参数为  $(N, M, n)$  的超几何分布.



#### 超几何分布的概率背景

一批产品有  $N$  件，其中有  $M$  件次品，其余  $N-M$  件为正品．现从中取出  $n$  件．

令：  $X$ ：取出  $n$  件产品中的次品数． 则  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k = 0, 1, \dots, \min(M, n))$$

此时，随机变量  $X$  服从参数为  $(N, M, n)$  的超几何分布

- 作业:2,4,5,6,9

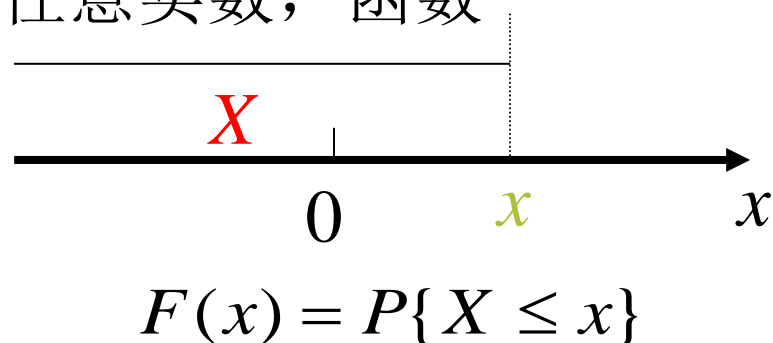
### § 3 随机变量的分布函数

#### 1. 概念

**定义** 设  $X$  是一个随机变量,  $x$  是任意实数, 函数

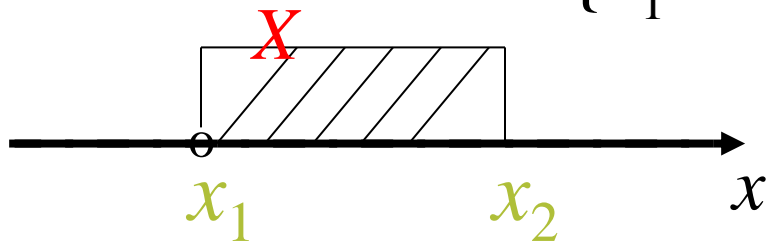
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

称为  $X$  的分布函数.



对于任意的实数  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 有:

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} \\ &= F(x_2) - F(x_1). \end{aligned}$$



### § 3 随机变量的分布函数

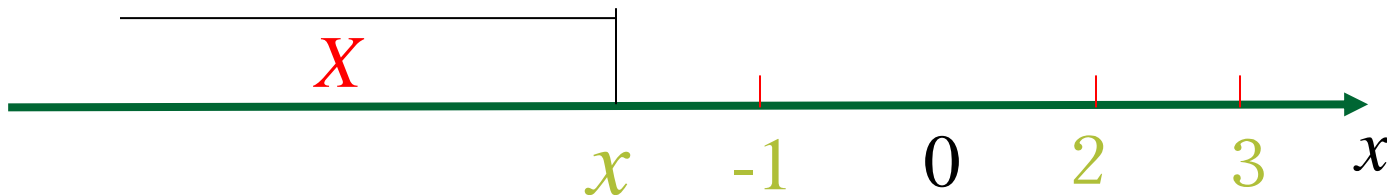
## 2. 例子

**例 1** 设随机变量  $X$  的分布律为：求  $X$  的分布函数。

$X$	-1	2	3
$p_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

**解：**当  $x < -1$  时，满足  $X \leq x$  的  $X$  的集合为  $\emptyset$ ，

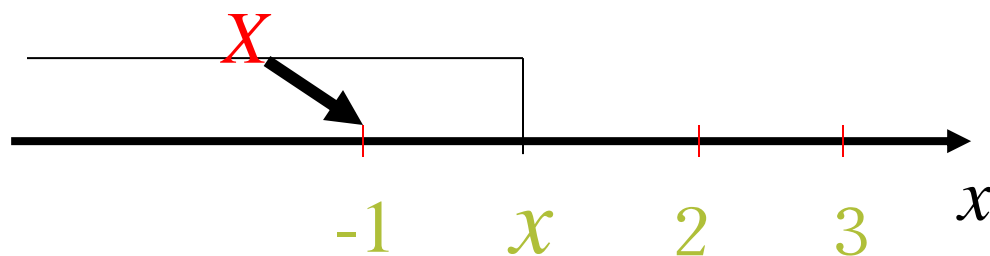
$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0.$$



### § 3 随机变量的分布函数

当  $-1 \leq x < 2$  时, 满足  $X \leq x$  的  $X$  取值为  $X = -1$ ,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}.$$



$X$	$-1$	$2$	$3$
$p_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

当  $2 \leq x < 3$  时, 满足  $X \leq x$  的  $X$  取值为  $X = -1$ , 或  $2$

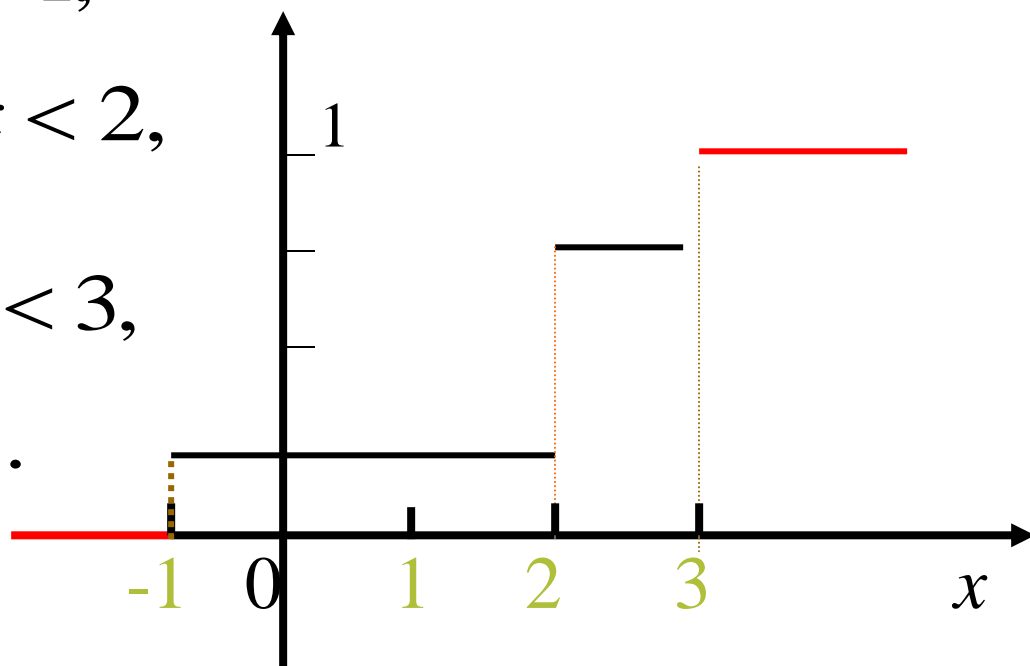
$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1 \text{ 或 } X = 2\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

### § 3 随机变量的分布函数

同理当  $3 \leq x$  时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1 \text{ 或 } X = 2 \text{ 或 } X = 3\} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$



[返回主目录](#)

### § 3 随机变量的分布函数

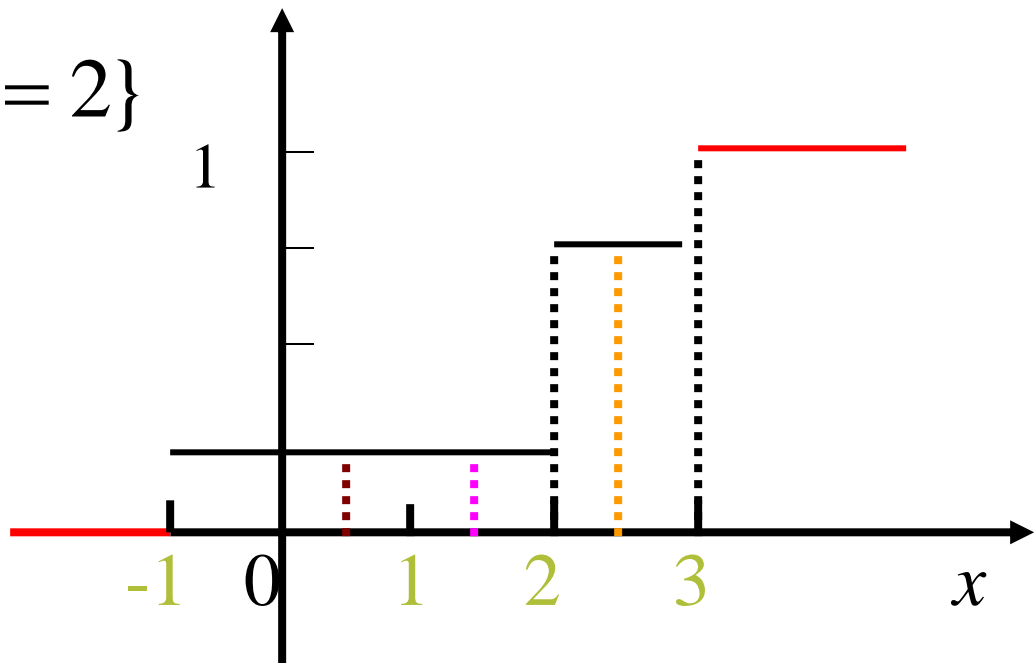
$$P\{X \leq \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$

$$P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \leq X \leq 3\}$$

$$= F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

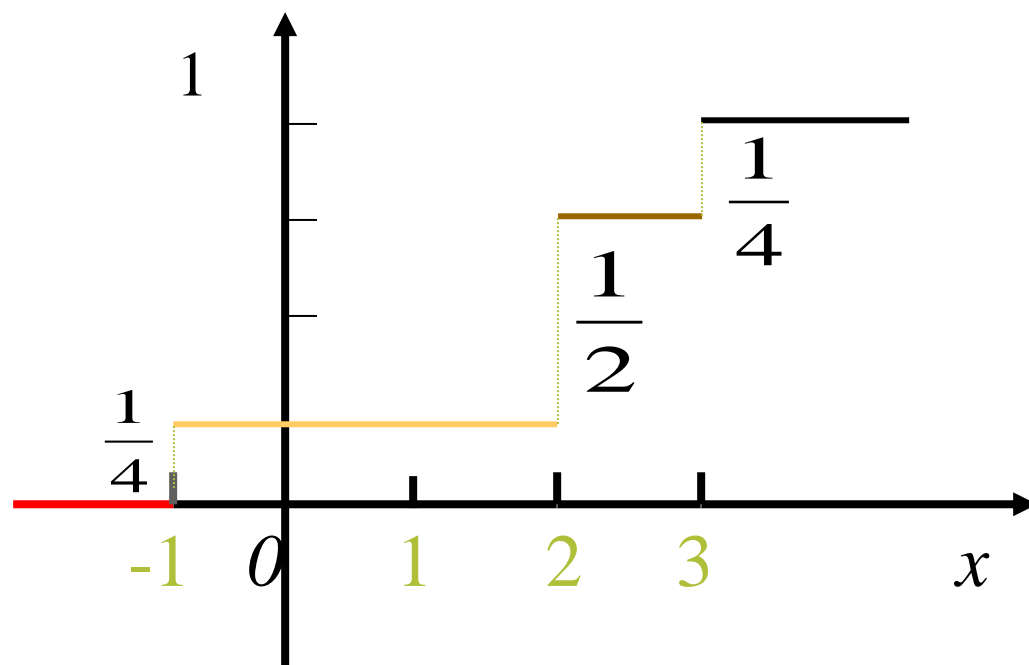




### § 3 随机变量的分布函数

分布函数  $F(x)$  在  $x = x_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 处有跳跃, 其跳跃值为  $p_k = P\{X = x_k\}$ .

$X$	-1	2	3
$p_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



### § 3 随机变量的分布函数

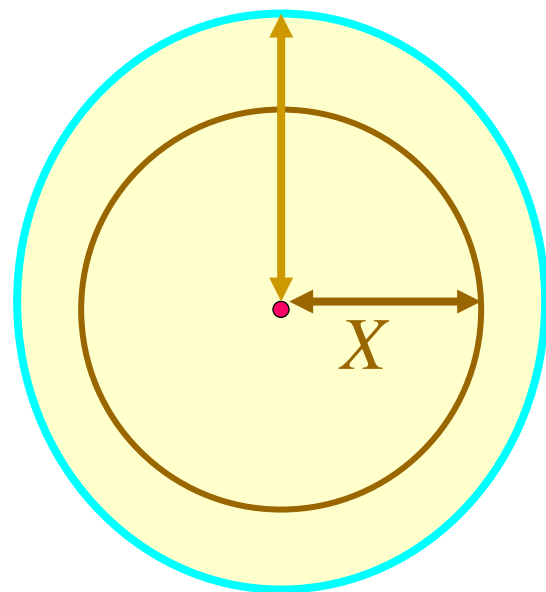
**例 2** 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以  $X$  表示弹着点与圆心的距离。试求随机变量  $X$  的分布函数。

**解：**(1) 若  $x < 0$ ，则  $\{X \leq x\}$  是不可能事件，于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P(\emptyset) = 0.$$

(2) 若  $0 \leq x \leq 2$ ，由题意，

$$P\{0 \leq X \leq x\} = k x^2,$$



### § 3 随机变量的分布函数

---

取 $x = 2$ , 由已知得 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$ , 与上式对比得 $k = 1/4$ , 即 $P\{0 \leq X \leq 2\} = \frac{x^2}{4}$ .

于是,  $0 \leq x \leq 2$ 时

$$\begin{aligned} F(X) &= P\{X \leq x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} \\ &= \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

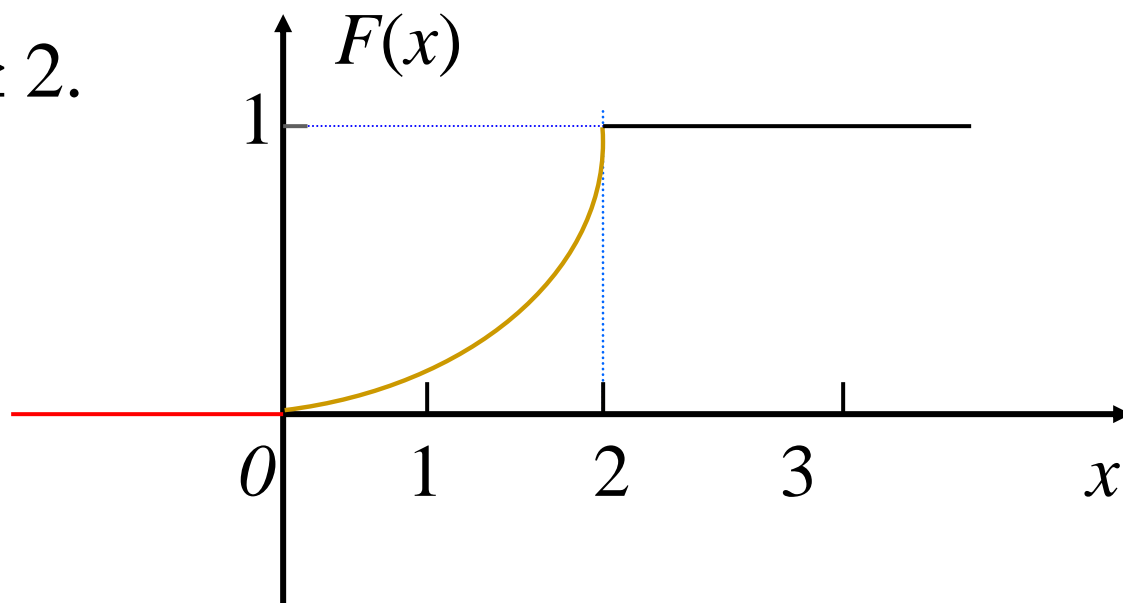
(3) 若  $x \geq 2$ , 则  $\{X \leq x\}$  是必然事件, 于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1.$$

### § 3 随机变量的分布函数

---

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$



## § 3 随机变量的分布函数

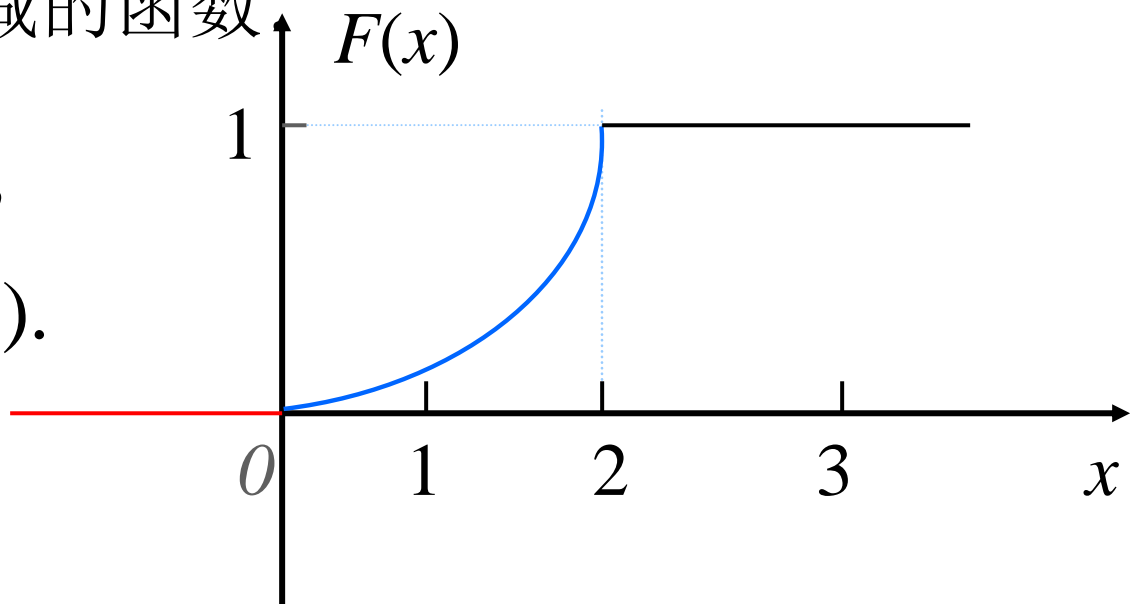
### 3. 分布函数的性质

分别观察离散型、连续型分布函数的图象，可以看出，分布函数  $F(x)$  具有以下基本性质：

1<sup>0</sup>  $F(x)$  是一个不减的函数

即当  $x_2 > x_1$  时，

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

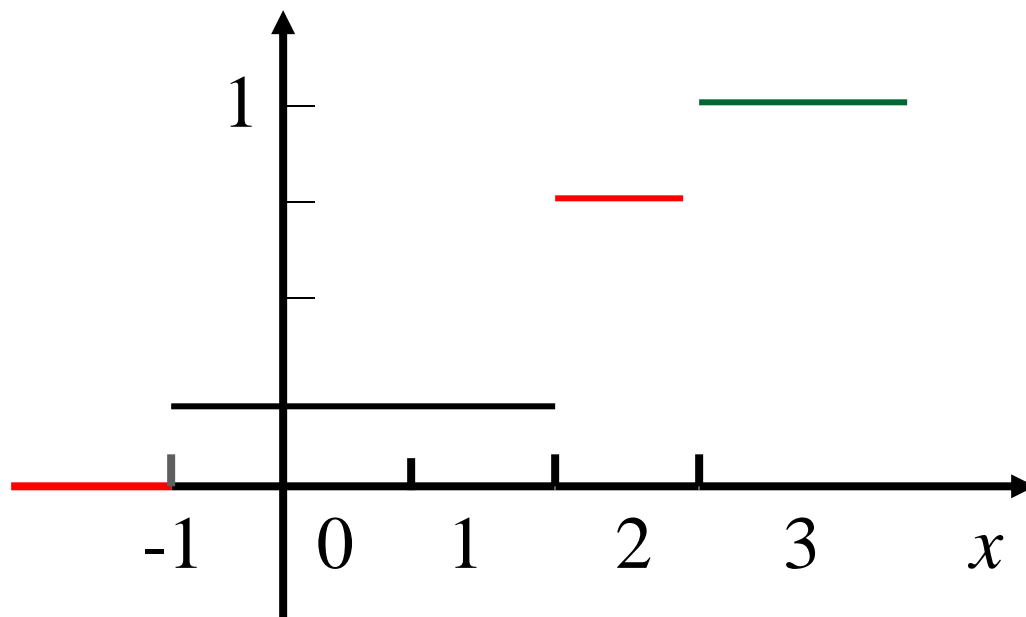


### § 3 随机变量的分布函数

2<sup>0</sup>  $0 \leq F(x) \leq 1$ , 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

3<sup>0</sup>  $F(x+0) = F(x)$ , 即  $F(x)$  是右连续的



## § 3 随机变量的分布函数

### 用分布函数计算某些事件的概率

设  $F(x) = P\{X \leq x\}$  是随机变量  $X$  的分布函数, 则

$$P\{X < a\} = F(a-0)$$

$$\begin{aligned} P\{X = a\} &= P\{X \leq a\} - P\{X < a\} \\ &= F(a) - F(a-0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



## § 3 随机变量的分布函数

### 用分布函数计算某些事件的概率

$$\begin{aligned}P\{a \leq X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X < a\} \\&= F(b) - F(a-0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{a < X < b\} &= P\{X < b\} - P\{X \leq a\} \\&= F(b-0) - F(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{a \leq X < b\} &= P\{X < b\} - P\{X < a\} \\&= F(b-0) - F(a-0)\end{aligned}$$





## § 3 随机变量的分布函数

用分布函数计算某些事件的概率

$$\begin{aligned}P\{X > b\} &= 1 - P\{X \leq b\} \\ &= 1 - F(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X \geq b\} &= 1 - P\{X < b\} \\ &= 1 - F(b-0)\end{aligned}$$



## § 3 随机变量的分布函数

例 3 设随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

试求: (1).  $P\{X \leq 3\}$

(2).  $P\{X < 3\}$

(3).  $P\{X = 1\}$

(4).  $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\}$

(5).  $P\{2 < X < 4\}$

(6).  $P\{1 \leq X < 3\}$



### 例 3 (续) § 3 随机变量的分布函数

解:

$$(1). P\{X \leq 3\} = F(3) = 1$$

$$(2). P\{X < 3\} = F(3-0) = \frac{11}{12}$$

$$(3). P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$(4). P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(5). P\{2 < X < 4\} = F(4-0) - F(2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

$$(6). P\{1 \leq X < 3\} = F(3-0) - F(1-0) = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$



## 例 4

## § 3 随机变量的分布函数

设随机变量  $X$  的分布函数为

$$F(x) = A + B \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

试求常数  $A$ 、 $B$ 。

解：

由分布函数的性质，我们有

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (A + B \arctan x) = A - \frac{\pi}{2} B$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (A + B \arctan x) = A + \frac{\pi}{2} B$$



## § 3 随机变量的分布函数

### 例 4 (续)

解方程组

$$\begin{cases} A - \frac{\pi}{2} B = 0 \\ A + \frac{\pi}{2} B = 1 \end{cases}$$

得解

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}.$$



---

- 作业:10,11

概率密度及其性质

指数分布

均匀分布

正态分布与标准正态分布



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 一. 连续型随机变量的概念与性质

定义 如果对于随机变量 $X$  的分布函数 $F(x)$ ,

存在非负函数  $f(x)$ , 使得对于任意

实数  $x$ , 有 
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

则称  $X$  为连续型随机变量, 其中函数  $f(x)$  称为 $X$  的概率密度函数, 简称概率密度.

**连续型随机变量  $X$  由其密度函数唯一确定.**



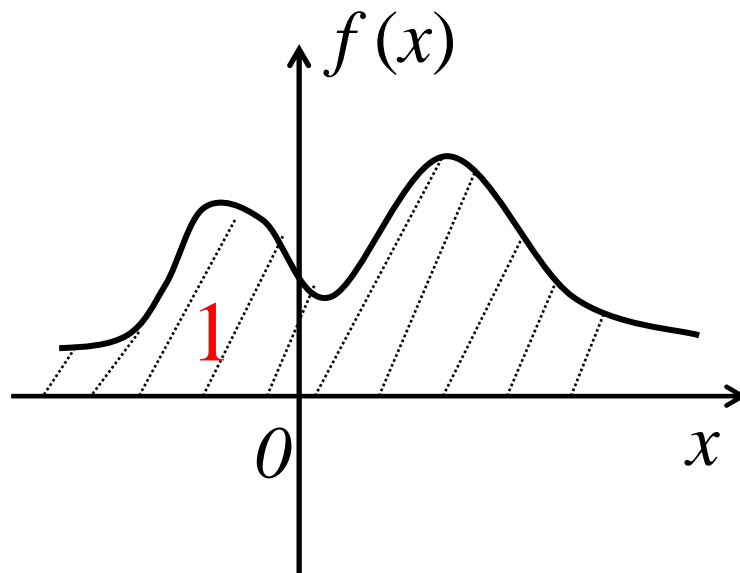


## § 4 连续型随机变量的概率密度

由定义知道，概率密度  $f(x)$  具有以下性质：

$$1^0 \quad f(x) \geq 0.$$

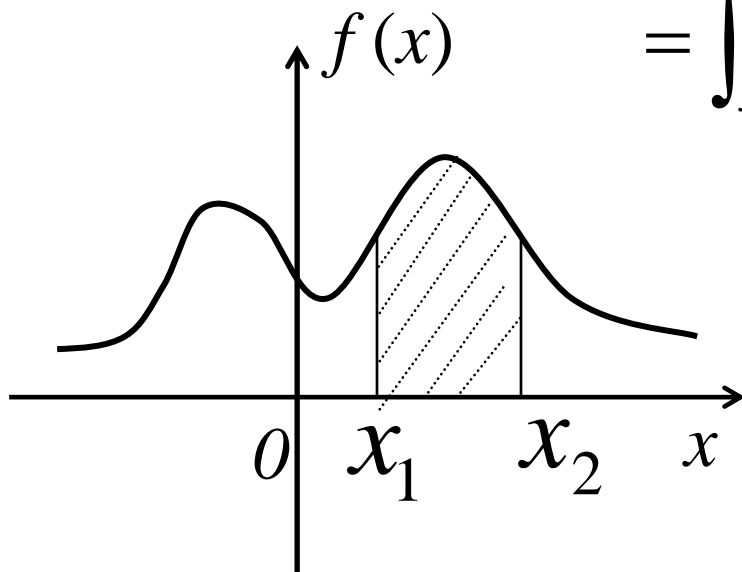
$$2^0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

$$3^0 \quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (x_1 \leq x_2)$$



4<sup>0</sup> 若 $f(x)$ 在点 $x$ 处连续, 则有

$$F'(x) = f(x).$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

注意

连续型随机变量密度函数的性质与离散型随机变量分布律的性质非常相似，但是，密度函数不是概率！

我们不能认为：

$$P\{X = a\} = f(a) !$$

连续型随机变量的一个重要特点

设  $X$  是连续型随机变量，则对任意的实数  $a$ ，  
有

$$P\{X = a\} = 0$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

---

证明:

$$\begin{aligned} P\{X = a\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{a - \frac{1}{n} < X \leq a\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a - \frac{1}{n}}^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

所以有

$$P\{X = a\} = 0$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 说 明

若已知连续型随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$ , 则 $X$ 在任意区间 $G$  ( $G$ 可以是开区间,也可以是闭区间,或半开半闭区间;可以是有限区间,也可以是无穷区间)上取值的概率为,

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

例 1

设  $X$  是连续型随机变量, 其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求: (1). 常数  $c$ ; (2).  $P\{X > 1\}$ .

解:

(1). 由密度函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 1 (续)

$$\begin{aligned}\text{得 } 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_0^2 c(4x - 2x^2)dx = c \left( 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}c\end{aligned}$$

所以, 
$$c = \frac{3}{8}$$

$$(2). \quad P\{X > 1\} = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 1 (续)

$$= \int_1^2 \frac{3}{8} (4x - 2x^2) dx$$

$$= \frac{3}{8} \left( 2x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}$$





## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 2

某电子元件的寿命（单位：小时）是以

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

为密度函数的连续型随机变量. 求 5 个同类型的元件在使用的前 150 小时内恰有 2 个需要更换的概率.

解:

设:  $A = \{ \text{某元件在使用的前 150 小时内需要更换} \}$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例2 (续)

$$\begin{aligned}\text{则 } P(A) &= P\{X \leq 150\} = \int_{-\infty}^{150} f(x) dx \\ &= \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2} dx = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

检验 5 个元件的使用寿命可以看作是在做一个5重Bernoulli试验.

$B = \{ \text{5 个元件中恰有 2 个的使用寿命不超过150小时} \}$

$$\text{则 } P(B) = C_5^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例3

设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

试求 $X$ 的密度函数.

解:

设 $X$ 的密度函数为 $f(x)$ , 则

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

例 4

设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求 $X$ 的分布函数.

解:

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 4 (续)

$$= \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 < x < 2 \text{ 时, } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 4 (续)

$$\begin{aligned}\text{当 } x > 2 \text{ 时, } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt \\ &= 1\end{aligned}$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 4 (续)

综上所述, 可得随机变量  $X$  的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 二. 一些常用的连续型随机变量

#### 1. 均匀分布

若随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则称随机变量  $X$  服从区间  $[a, b]$  上的均匀分布.

记作  $X \sim U[a, b]$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 密度函数的验证

设 $X \sim$  区间 $[a, b]$ 上的均匀分布,  $f(x)$ 是其密度函数, 则有:

(1). 对任意的 $x$ , 有 $f(x) \geq 0$ ;

$$(2). \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1.$$

由此可知,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$  确是密度函数.

## 说明 § 4 连续型随机变量的概率密度

---

(1). 类似地, 我们可以定义

区间 $(a, b)$ 上的均匀分布;

区间 $[a, b)$ 上的均匀分布;

区间 $(a, b]$ 上的均匀分布.



## § 4 连续型随机变量的概率密度

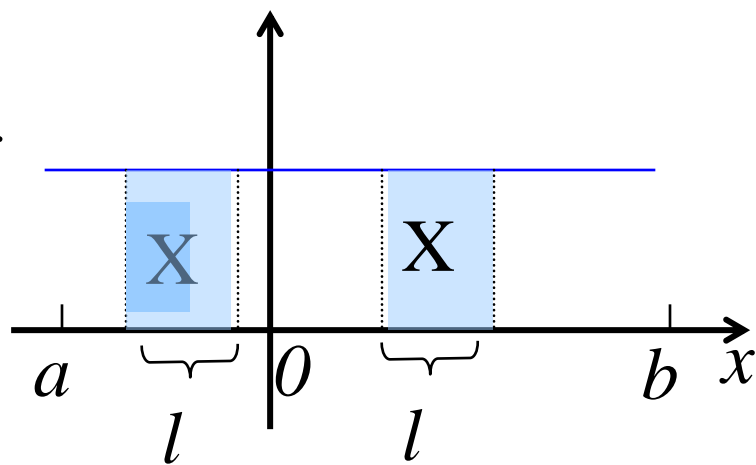
### 均匀分布的概率背景

如果随机变量  $X$  服从区间  $[a, b]$  上的均匀分布, 则随机变量  $X$  在区间  $[a, b]$  上的任意一个子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比, 而与该子区间的位置无关.

这时, 可以认为随机变量  $X$  在区间  $[a, b]$  上取值是等可能的.

$$P\{c < X \leq c + l\} = \int_c^{c+l} f(x) dx$$

$$= \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}.$$

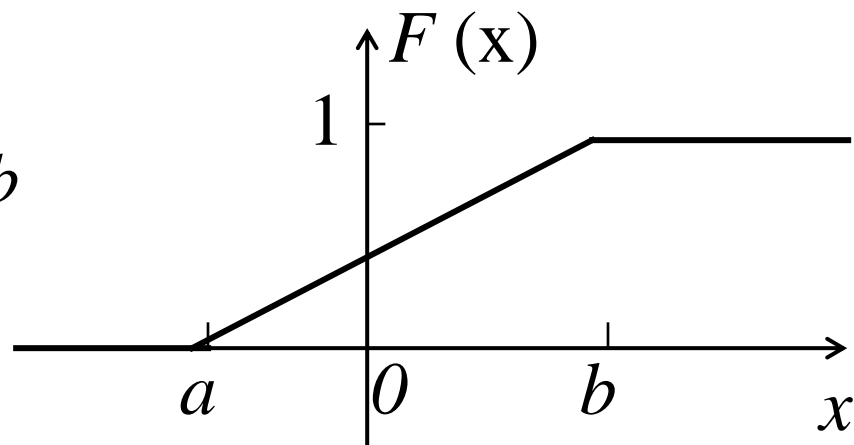


## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 均匀分布的分布函数

若随机变量  $X$  服从区间  $[a, b]$  上的均匀分布，  
则  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

例 5

设公共汽车站从上午7时起每隔15分钟来一班车,如果某乘客到达此站的时间是 7:00 到7:30之间的均匀随机变量. 试求该乘客候车时间不超过5分钟的概率.

解:

设该乘客于7时 $X$ 分到达此站.

则  $X$  服从区间 $[0, 30]$ 上的均匀分布.

其密度函数为 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 5 (续)

令:  $B = \{ \text{候车时间不超过5分钟} \}$

则 
$$P(B) = P\{10 \leq X \leq 15\} + P\{25 \leq X \leq 30\}$$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 6

设随机变量 $\xi$ 服从区间 $[-3, 6]$ 上的均匀分布,  
试求方程

$$4x^2 + 4\xi x + (\xi + 2) = 0$$

有实根的概率.

解:

随机变量 $\xi$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & -3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 6 (续)

设:  $A = \{ \text{方程 } 4x^2 + 4\xi x + (\xi + 2) = 0 \text{ 有实根} \}$

$$\text{则 } P(A) = P\{(4\xi)^2 - 4 \times 4 \times (\xi + 2) \geq 0\}$$

$$= P\{(\xi + 1)(\xi - 2) \geq 0\}$$

$$= P\{\xi \leq -1 \text{ 或 } \xi \geq 2\}$$

$$= \int_{-3}^{-1} \frac{1}{9} dx + \int_2^6 \frac{1}{9} dx$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 2. 指数分布

如果随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其中  $\lambda > 0$  为常数, 则称随机变量 服从  
参数为  $\lambda$  的指数分布.



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 密度函数的验证

设 $X \sim$  参数为 $\lambda$ 的指数分布,  $f(x)$ 是其密度函数, 则有

(1). 对任意的 $x$ , 有 $f(x) \geq 0$ ;

$$\begin{aligned} (2). \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

由此可知,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{确是一密度函数.}$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 指数分布的分布函数

若随机变量  $X$  服从参数  $\lambda$  指数分布,  
则  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 7

设打一次电话所用的时间  $X$ （单位：分钟）是以  $\lambda = \frac{1}{10}$  为参数的指数随机变量．如果某人刚好在你前面走进公用电话间，求你需等待10分钟到20分钟之间的概率．

解：

$X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 7 (续)

令：  $B = \{ \text{等待时间为} 10 \sim 20 \text{分钟} \}$   
则  $P(B) = P\{10 \leq X \leq 20\}$

$$\begin{aligned} &= \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -\frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} \Big|_{10}^{20} \\ &= e^{-1} - e^{-2} = 0.2325 \end{aligned}$$

### 3. 正态分布

#### § 4 连续型随机变量的概率密度

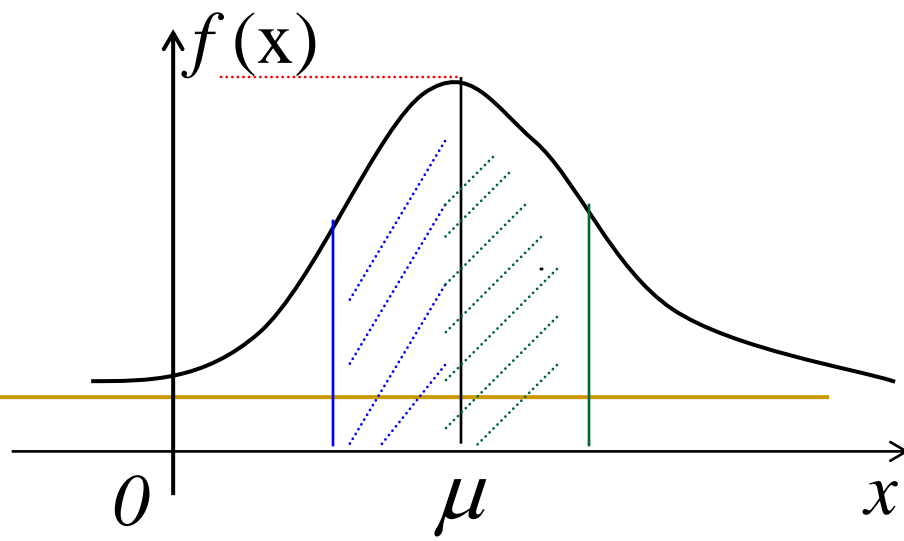
如果连续型随机变量  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

(其中  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$  为参数),

则称随机变量  $X$  服从, 参数为  $(\mu, \sigma^2)$  的正态分布. 记作

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 标准正态分布

若  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ , 我们称  $N(0, 1)$  为标准正态分布.

标准正态分布的密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度 密度函数的验证

设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $f(x)$  是其密度函数, 则有:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} > 0$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

下面验证:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 密度函数的验证(续)

下面验证:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

首先验证:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

或验证:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 密度函数的验证(续)

为此, 我们只需证明:

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = 2\pi$$

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \end{aligned}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 密度函数的验证(续)

作极坐标变换:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 则有

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \\ &= 2\pi \left( -e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = 2\pi \end{aligned}$$

因此,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$



## 密度函数的验证(续)

### § 4 连续型随机变量的概率密度

下面验证: 
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

作变换:  $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , 则  $du = \frac{dx}{\sigma}$

则有 
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \frac{dx}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 \end{aligned}$$



## §4 连续型随机变量的概率密度 密度函数的验证(续)

综上所述,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

满足密度函数的两项基本条件, 因此  $f(x)$  确是一个密度函数.

## § 4 连续型随机变量的概率密度 正态分布密度函数的图形性质

对于正态分布的密度函数

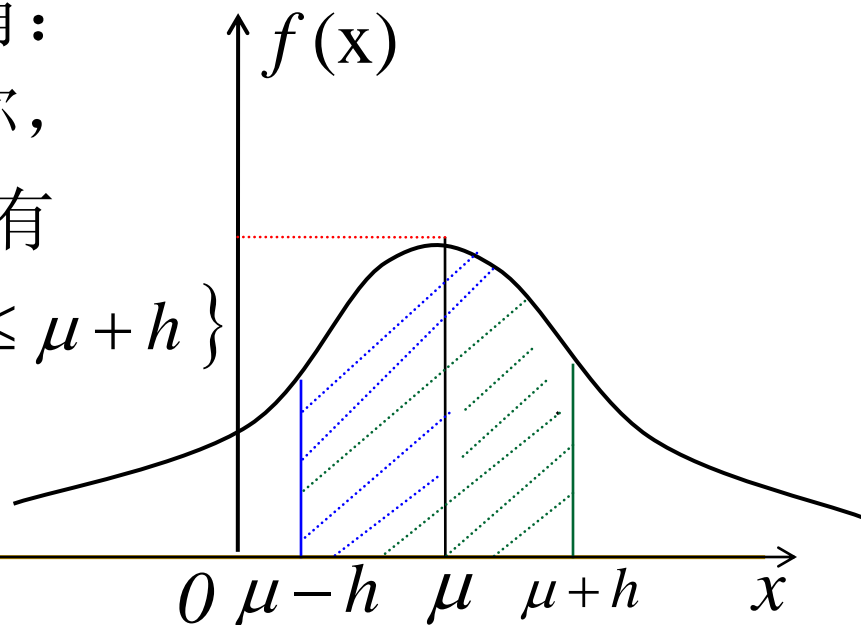
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

由高等数学中的知识，我们有：

(1). 曲线关于直线  $x = \mu$  对称，

这表明：对于任意的  $h > 0$ ，有

$$P\{\mu - h < X \leq \mu\} = P\{\mu < X \leq \mu + h\}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 正态分布密度函数的图形性质 (续)

(2). 当  $x = \mu$  时,  $f(x)$  取到最大值

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$x$  离  $\mu$  越远,  $f(x)$  的值就越小. 这表明, 对于同样长度的区间, 当区间离  $\mu$  越远时, 随机变量  $X$  落在该区间中的概率就越小.



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 正态分布密度函数的图形性质 (续)

(3). 曲线  $y = f(x)$  在  $x = \mu \pm \sigma$  处有拐点;  
曲线  $y = f(x)$  以  $Ox$  轴为渐近线.

(4). 若  $\sigma$  固定, 而改变  $\mu$  的值, 则  $f(x)$  的图形沿  $x$  轴平行移动, 但不改变其形状.  
因此  $y = f(x)$  图形的位置完全由参数  $\mu$  所确定.





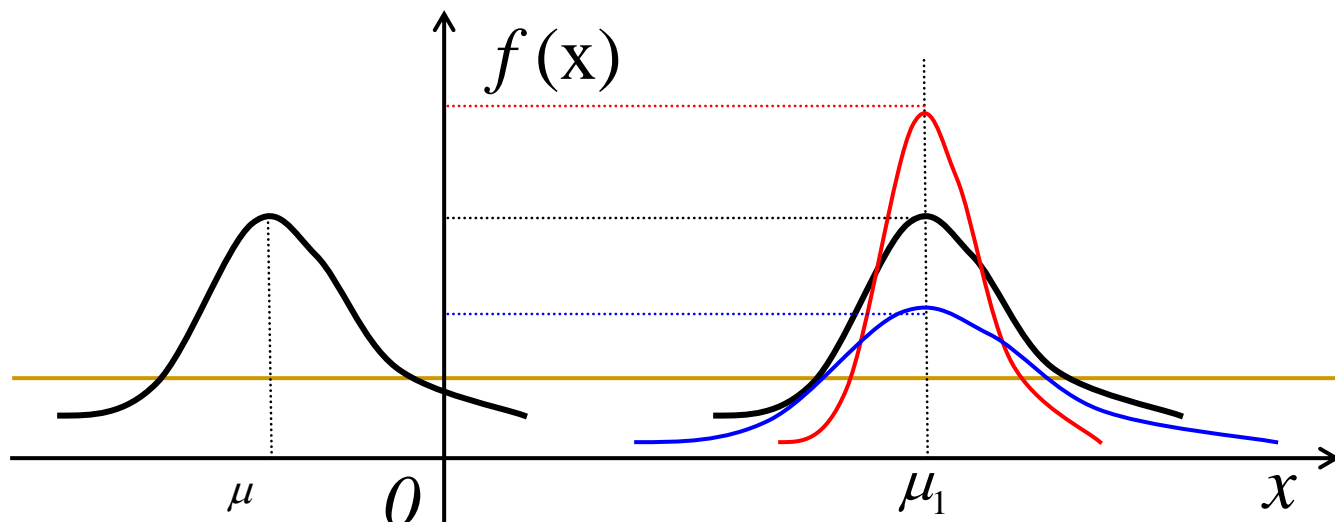
## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 正态分布密度函数的图形性质 (续)

(5). 若 $\mu$ 固定, 而改变 $\sigma$  的值, 由于 $f(x)$ 的最大值为

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

可知, 当 $\sigma$ 越小时,  $y = f(x)$ 图形越陡, 因而 $X$ 落在 $\mu$ 附近的概率越大; 反之, 当 $\sigma$ 越大时,  $y = f(x)$ 的图形越平坦, 这表明 $X$ 的取值越分散.



### 正态分布的重要性

正态分布是概率论中最重要的分布，这可以由以下情形加以说明：

- (1). 正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的. 可以证明，如果一个随机指标受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机指标一定服从或近似服从正态分布.
- (2). 正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的.
- (3). 正态分布可以作为许多分布的近似分布.

## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 标准正态分布的计算

如果随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 则其密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty, +\infty)$$

其分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (-\infty < x < +\infty)$$

教科书上第255页列出了标准正态分布表,



## 标准正态分布的计算 (续)

### § 4 连续型随机变量的概率密度

对于  $x \geq 0$  我们可直接查表求出  $\Phi(x) = P\{X \leq x\}$

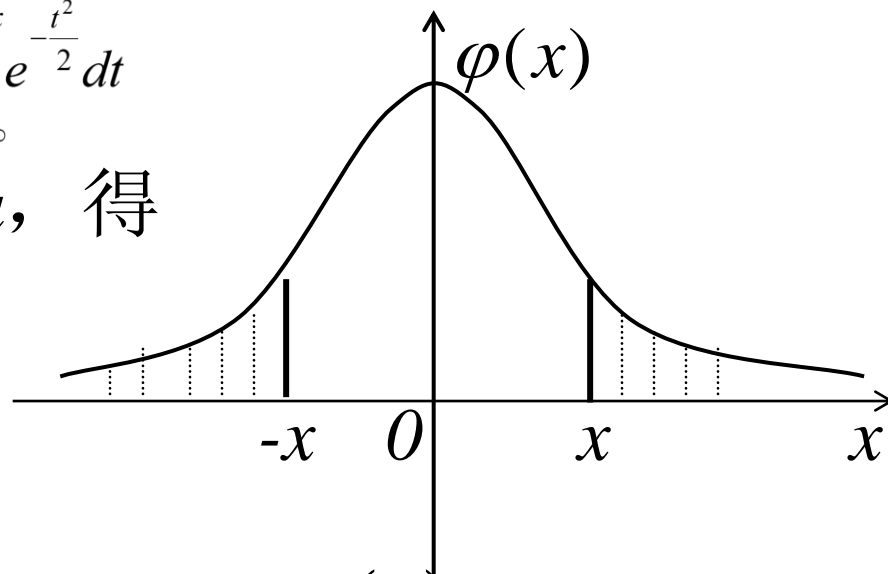
如果  $x < 0$ , 我们可由公式

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

作变换  $t = -u$ ,  $dt = -du$ , 得

$$\Phi(-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi(x)$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 一般正态分布的计算

设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq y\right\} \\ &= P\{X \leq \mu + \sigma y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu + \sigma y} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \end{aligned}$$

作变换  $u = \frac{t - \mu}{\sigma}$ , 则  $du = \frac{dt}{\sigma}$ , 代入上式, 得

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(y)$$

## 一般正态分布的计算 (续)

### § 4 连续型随机变量的概率密度

设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\therefore F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

其中,  $\Phi(x)$  是标准正态分布的分布函数.

故对任意的  $a < b$ , 有

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 8

设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ , 试求:

$$(1). P\{1 \leq X < 2\}; \quad (2). P\{-1 < X < 2\}.$$

解:

$$\begin{aligned} (1). P\{1 \leq X < 2\} &= \Phi(2) - \Phi(1) \\ &= 0.97725 - 0.84134 = 0.13591 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2). P\{-1 \leq X < 2\} &= \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 0.97725 - 1 + 0.84134 = 0.81859 \end{aligned}$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例9

设随机变量  $X \sim N(2, 9)$ , 试求:

$$(1). P\{1 \leq X < 5\}; \quad (2). P\{|X - 2| > 6\}; \quad (3). P\{X > 0\}.$$

解:

$$\begin{aligned} (1). P\{1 \leq X < 5\} &= F(5) - F(1) \\ &= \Phi\left(\frac{5-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0.84134 + 0.62930 - 1 \\ &= 0.47064 \end{aligned}$$





## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例9续

$$\begin{aligned}(2). \quad & P\{|X - 2| > 6\} = 1 - P\{|X - 2| \leq 6\} \\& = 1 - P\{-6 \leq X - 2 \leq 6\} \\& = 1 - P\{-4 \leq X \leq 8\} \\& = 1 - [\Phi(\frac{8-2}{3}) - \Phi(\frac{-4-2}{3})] = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] \\& = 2 \times [1 - \Phi(2)] = 2 \times (1 - 0.97725) = 0.0455\end{aligned}$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

例9续

$$(3). \quad P\{X > 0\} = 1 - P\{X \leq 0\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0-2}{3}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0.7486$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 例 10

某地区的月降水量服从  $\mu = 40$ ,  $\sigma = 4$  (单位:  $cm$ ) 的正态分布. 求从某月起连续10个月的月降水量都不超过 $50cm$ 的概率.

解:

设:  $X$ : 该地区的月降水量. 则  $X \sim N(40, 4^2)$

再设:  $A = \{ \text{月降水量不超过} 50cm \}$ .

$$\text{则: } P(A) = P\{X \leq 50\} = \Phi\left(\frac{50 - 40}{4}\right)$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

例 10 (续)

$$= \Phi(2.5) = 0.99379$$

所以,  $P\{\text{连续10个月降水量都不超过}50\text{cm}\}$

$$= 0.99379^{10}$$

$$= 0.9396$$

## § 4 连续型随机变量的概率密度

设  $X \sim N(0, 1)$ , 若  $z_\alpha$  满足条件

$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1,$$

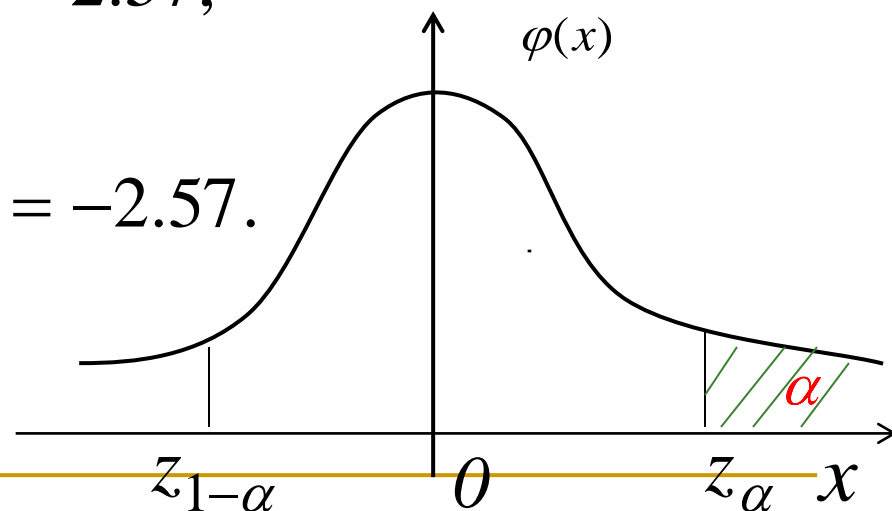
则称点  $z_\alpha$  为标准正态分布的上  $\alpha$  分位点。

查表可知

$$z_{0.05} = 1.645, \quad z_{0.005} = 2.57,$$

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha,$$

$$z_{0.95} = -1.645, \quad z_{0.995} = -2.57.$$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### 4. $\Gamma$ -分布.

如果连续型随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(其中 $r > 0, \lambda > 0$ 为参数)

则称随机变量  $X$  服从参数为 $(r, \lambda)$ 的 $\Gamma$ -分布.

记作:  $X \sim \Gamma(r, \lambda)$



## § 4 连续型随机变量的概率密度

### $\Gamma$ -函数

$\Gamma$ -函数的定义:

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$$

$\Gamma$ -函数的定义域:  $(0, +\infty)$ .

$\Gamma$ -函数的性质:  $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ .

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

如果 $n$ 为自然数, 则 $\Gamma(n) = (n-1)!$ .



## § 4 连续型随机变量的概率密度

**说明：**

如果  $r=1$ ，则由  $\Gamma(1)=1$ ，得 
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
这正是参数为  $\lambda$  的指数分布。

这说明指数分布是  $\Gamma$ -分布的一个特例。

如果  $r=n$ ，由  $\Gamma(n)=(n-1)!$  得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

我们称此分布为 *Erlang* (爱尔兰) 分布，

它是排队论中重要的分布之一。



## § 4 连续型随机变量的概率密度

**说明：**

如果  $r = \frac{n}{2}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ , 其中  $n$  为自然数, 则有

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

我们称此分布为自由度为  $n$  的  $\chi^2$ -分布, 记作  $\chi^2(n)$ .  
它是数理统计学中重要的分布之一.



- 
- 作业:13,14,16,18,20,22

# § 5 随机变量的函数的分布

---

⑩ 离散型

⑩ 连续型

⑩ 定理及其应用

## 随机变量的函数

设  $X$  是一随机变量,  $Y$  是  $X$  的函数,  $Y = g(X)$ , 则  $Y$  也是一个随机变量. 当  $X$  取值  $x$  时,  $Y$  取值  $y = g(x)$

本节的任务就是:

已知随机变量  $X$  的分布, 并且已知  $Y = g(X)$ , 要求随机变量  $Y$  的分布.

# 一、离散型随机变量的函数

设  $X$  是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_n\} = p_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

或

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots,$	$x_n$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots,$	$p_n$	$\dots$

$Y$ 是 $X$ 的函数:  $Y = g(X)$ , 则 $Y$ 也是离散型随机变量

## 例 1

设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

$X$	-3	-1	0	2	6	9
$P$	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

随机变量 $Y = 2X - 3$ , 试求 $Y$ 的分布律.

解:

随机变量 $Y = 2X - 3$ 的取值为

$-9, -5, -3, 1, 9, 15,$



例 1 (续)

这些取值两两互不相同. 由此得随机变量

$$Y = 2X - 3$$

的分布律为

Y	-9	-5	-3	1	9	15
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

例 2

设随机变量  $X$  具有以下的分布律，试求

$$Y = (X-1)^2$$

的分布律.

$X$	-1	0	1	2
$p_k$	0.2	0.3	0.1	0.4

解：  $Y$  有可能取的值为 0，1，4.

且  $Y=0$  对应于  $(X-1)^2=0$ ，解得  $X=1$ ，

所以，  $P\{Y=0\}=P\{X=1\}=0.1$ ，



## 例 2 (续)

$$Y=(X-1)^2$$

同理,

$X$	-1	0	1	2
$p_k$	0.2	0.3	0.1	0.4

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.3+0.4=0.7,$$

$$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2,$$

所以,  $Y=(X-1)^2$  的分布律为:

$Y$	0	1	4
$p_k$	0.1	0.7	0.2



设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

$X$	1	2	...	$n$	...
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

$$Y = g(X) = \begin{cases} -1 & \text{若 } X \text{ 为奇数} \\ 1 & \text{若 } X \text{ 为偶数} \end{cases}$$

试求随机变量 $Y$ 的分布律.

解:



## 例 3 (续)

$$P\{Y = -1\} = \sum_{n \text{ 为奇数}} P\{X = n\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 2k + 1\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}$$

$$P\{Y = 1\} = \sum_{n \text{ 为偶数}} P\{X = n\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 2k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3}$$

所以, 随机变量 $Y$ 的分布律为

Y	-1	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

## 二. 连续型随机变量函数的分布

设  $X$  是一连续型随机变量, 其密度函数为  $f_X(x)$ , 再设  $Y = g(X)$  是  $X$  的函数, 我们假定  $Y$  也是连续型随机变量. 我们要求的是  $Y = g(X)$  的密度函数  $f_Y(y)$ .

### 解题思路

(1). 先求  $Y = g(X)$  的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$$

(2). 利用  $Y = g(X)$  的分布函数与密度函数之间的关系求  $Y = g(X)$  的密度函数  $f_Y(y) = F'_Y(y)$

## 例 4

设随机变量  $X$  具有概率密度:

$$f_X(X) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试求  $Y=2X+8$  的概率密度.

解: (1) 先求  $Y=2X+8$  的分布函数  $F_Y(y)$ :

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

$$= P\{2X + 8 \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\}$$



## 例 4 (续)

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx.$$

(2) 利用  $F'_Y(y) = f_Y(y)$  可以求得:

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \times \left(\frac{y-8}{2}\right)',$$

$$f_X(X) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{y-8}{2}\right) \times \frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



例 4 (续)

整理得  $Y=2X+8$  的概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

### 例 5

设随机变量  $X$  具有概率密度  $f_X(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , 求  $Y = X^2$  的概率密度.

解: (1) 先求  $Y = X^2$  的分布函数  $F_Y(y)$ :

1<sup>0</sup> 由于  $Y = X^2 \geq 0$ , 故当  $y \leq 0$  时  $F_Y(y) = 0$ .

2<sup>0</sup> 当  $y > 0$  时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx. \end{aligned}$$



例 5 (续)

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx.$$

(2) 利用  $F'_Y(y) = f_Y(y)$  及变限定积分求导公式得:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

## § 5 随机变量的函数的分布

例如,设  $X \sim N(0,1)$ , 其概率密度为:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

则  $Y = X^2$  的概率密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

此时称  $Y$  服从自由度为1的  $\chi^2$  分布。



[返回主目录](#)

## 例 6

设随机变量  $X$  的密度函数为  $f_X(x)$ ,  $Y = |X|$ , 试求随机变量  $Y$  的密度函数  $f_Y(y)$ .

解:

设随机变量  $X$  的分布函数为  $F_X(y)$ , 随机变量  $Y$  的分布函数为  $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\}$$

(1). 若  $y < 0$ , 则

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P(\Phi) = 0$$



(2). 当  $y < 0$  时

1

$$= \int_{-y}^y f_X(x) dx$$

No  
Image

对上式

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \end{cases}$$



### 定理

设随机变量  $X$  具有概率密度  $f_X(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  
又设函数  $g(x)$  处处可导, 且有  $g'(x) > 0$  (或恒有  $g'(x) < 0$ ).  
则  $Y=g(X)$  是一个连续型随机变量  $Y$ , 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

其中  $h(y)$  是  $g(x)$  的反函数,  $\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$ ,  
即  $x = g^{-1}(y) = h(y)$   $\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$ .



证明:

设随机变量  $Y = g(X)$  的分布函数为  $F_Y(y)$ ,

则有  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$

由题设, 不妨假设  $g'(x) > 0$ , 则  $g(x)$  是严格增加的函数.

因此,  $F_Y(y) = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = P\{X \leq h(y)\}$

$$= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x) dx$$



## § 5 随机变量的函数的分布

### 定理的证明

因此, 当  $y \in (\alpha, \beta)$  时,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } f(y) = F'_Y(y) &= \frac{d}{dy} \left( \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x) dx \right) \\ &= f_X(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| \end{aligned}$$

其中,

$$\alpha = g(-\infty), \quad \beta = g(+\infty)$$



若  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  是严格减少的函数

因此, 当  $y \in (\alpha, \beta)$  时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \\ &= P\{X \geq g^{-1}(y)\} = P\{X \geq h(y)\} = \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{所以, } f(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy} \left( \int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x) dx \right)$$





$$= -f_X(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

综上所述，得 $Y = g(X)$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

## 例 7

设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $Y = e^X$ , 试求随机变量  $Y$  的密度函数  $f_Y(y)$ .

解:

由题设, 知  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

因为函数  $y = e^x$  是严格增加的, 它的反函数为  
 $x = \ln y$ .



并且当随机变量  $X$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上变化时,  $Y = e^X$  在区间  $(0, +\infty)$  上变化. 所以, 当  $y \in (0, +\infty)$  时,

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot |(\ln y)'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{1}{y}$$

由此得随机变量  $Y = e^X$  的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

## 例 8

设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 试证明  $X$  的线性函数  $Y = aX + b$  ( $a \neq 0$ ) 也服从正态分布.

**证**  $X$  的概率密度为:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$y = g(x) = ax + b, g'(x) = a$ , 满足定理的条件:

$y = g(x)$  的反函数为:  $x = h(y) = \frac{y-b}{a}$ , 且  $h'(y) = \frac{1}{a}$ .



## 例 8(续)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

由定理的结论得:  $x = h(y) = \frac{y-b}{a}$ , 且  $h'(y) = \frac{1}{a}$ .

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X[h(y)] |h'(y)| = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma |a|} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}. \end{aligned}$$

即有  $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$ .



例 9

设电压  $V = A \sin \Theta$ , 其中  $A$  是一个已知的正常数, 相角  $\Theta$  是一个随机变量, 在区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  上服从均匀分布, 试求电压  $V$  的概率密度.

解:

$v = g(\theta) = A \sin \theta$ , 在  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  上恒有

$g'(\theta) = A \cos \theta > 0$ , 且有反函数  $\theta = h(v) = \arcsin \frac{v}{A}$ ,

以及  $h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}$ ,

$\Theta$ 的概率密度为: 
$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

利用定理的结论: 
$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

得  $V = A \sin \Theta$  的概率密度为:

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}, & -A < v < A, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



- 1 引进了随机变量的概念，要求会用随机变量表示随机事件。
- 2 给出了分布函数的定义及性质，要会利用分布函数示事件的概率。
- 3 给出了离散型随机变量及其分布率的定义、性质，要会求离散型随机变量的分布率及分布函数，掌握常用的离散型随机变量分布：两点分布、二项分布、泊松分布。
- 4 给出了连续型随机变量及概率密度的定义、性质，要掌握概率密度与分布函数之间关系及其运算，掌握常用的连续型随机变量分布：均匀分布、指数分布和正态分布。
- 5 会求随机变量的简单函数的分布。

作业：



[返回主目录](#)



- 
- 作业:24,26,28,30,31