北 京 交 通 大 学

2020-2021-2- 《概率论与数理统计 B》期末考试　试卷 A 参考答案

一、单选题（本题满分 60 分，共有 15 道小题，每道小题 4 分）

1、设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是【　D　】.

（A）若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$

（B）若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

（C）若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$

（D）若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

解：当 $0<P(B)<1$ 时，$P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(A|\overline{B})=P(A)$，因此（A）正确；

又 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)\Rightarrow P(AB)>P(A)\cdot P(B)$，因此，有

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&>1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)\\&=(1-P(A))(1-P(B))=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}).\end{aligned}$$

故 $P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}>P(\overline{A})$，因此（B）正确；

再由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})\Leftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

$\Leftrightarrow P(AB)>P(A)P(B)$，因此（C）正确；

但是，$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，

$P(\overline{A}|A\cup B)=\dfrac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，

所以，若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)-P(AB)$，

但不能保证 $P(A)>P(B)$.　　　　故选（D）.

2、随机事件 A、B，满足 $A\subset B, P(B)>0$，则下列选项中正确的是【　B　】.

（A）$P(A)<P(A|B)$　　　（B）$P(A)\le P(A|B)$

（C）$P(A)>P(A|B)$　　　（D）$P(A)\ge P(A|B)$

解：因为 $A\subset B, P(B)>0$，因此（C）、（D）不正确；

再若 $B=\Omega$，则 $P(A)=P(A|B)$，因此（A）亦不正确.　　　　故选（B）.

3、已知随机变量(X, Y)的联合概率密度$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x^2+y^2)e^{-x}, & |y|\le x\\ 0 & others\end{cases}$，则关于$X$的边缘概率密度$f_X(x)=$【 A 】.

（A）$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ （B）$\begin{cases}\frac{1}{2}x^3e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

（C）$\begin{cases}\frac{1}{3}x^2e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ （D）$\begin{cases}\frac{1}{2}x^2e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

解：由边缘密度函数定义，当$x>0$时，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-x}^{x}\frac{1}{8}(x^2+y^2)e^{-x}dy$$
$$=\frac{1}{4}e^{-x}\int_0^x(x^2+y^2)dy=\frac{1}{3}x^3e^{-x},$$

故，$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. 故选（A）.

4、随机变量$X\sim N(0,4^2),\quad Y\sim N(-1,5^2)$，记$p_1=P(X\le -4)$，$p_2=P(Y\ge 4)$，则下列描述完全正确的是【 A 】.

（A）$p_1=p_2$ （B）$p_1>p_2$

（C）$p_1<p_2$ （D）无法比较p_1与p_2的大小.

解：由于$P(X\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)$，因此

$p_1=P(X\le -4)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$；

$p_2=P(Y\ge 4)=1-P(Y<4)=1-\Phi(1)$. 故选（A）.

5、随机变量X是在区间$[0,\ 1)$内取值的连续型随机变量，令$Y=1-X$．又若$\mathrm{P}\{X\le 0.29\}=0.75$，则满足$\mathrm{P}\{Y\le k\}=0.25$的常数$k=$【 C 】.

（A）0.25 （B）0.29 （C）0.71 （D）0.75.

解：$\mathrm{P}\{Y\le k\}=\mathrm{P}\{1-X\le k\}=\mathrm{P}\{X\ge 1-k\}=1-\mathrm{P}\{X<1-k\}=0.25$；

$\mathrm{P}\{X<1-k\}=1-0.25=0.75;\quad 1-k=0.29,\ k=0.71$. 故选（C）.

6、设随机变量$X\sim N(0,1)$，对于任意给定的$\alpha\in(0,1)$，数$u(\alpha)$满足$P(X>u(\alpha))=\alpha$．若概率$P(|X|<x)=\alpha$，则x等于【 C 】.

（A）$u\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ （B）$u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ （C）$u\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$ （D）$u\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$.

解：对于任意$x\in(-\infty,\ +\infty)$，由$P(|X|<x)=1-2P(X>x)=\alpha$，得

$P(X > x) = \dfrac{1-\alpha}{2}$，即 $x = u(\dfrac{1-\alpha}{2})$.　　　　　　　　　　故选（C）.

7、设有 100 件产品中一、二、三等品率分别为 $0.8,\ 0.1$ 和 0.1．现从中随机地取 1 件，并记为

$X_k = \begin{cases} 1, & \text{取得}k\text{等品} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}\quad (k=1,\ 2,\ 3)$，则 $\rho_{X_1X_2} =$【　D　】.

（A）$\dfrac{1}{3}$　　　　（B）$-\dfrac{1}{3}$　　　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　　　（D）$-\dfrac{2}{3}$.

解：先求联合分布：

$P(X_1=0, X_2=0) = P(X_3=1) = 0.1$，$P(X_1=0, X_2=1) = P(X_2=1) = 0.1$，

$P(X_1=1, X_2=0) = P(X_1=1) = 0.8$，$P(X_1=1, X_2=1) = P(\varnothing) = 0$，

于是边缘分布为

$P(X_1=1) = 0.8$，$P(X_1=0) = 0.2$；　$P(X_2=1) = 0.1$，$P(X_2=0) = 0.9$，

因此，$E(X_1) = 0.8,\ D(X_1) = 0.16,\ E(X_2) = 0.1,\ D(X_2) = 0.09$，

从而，$\rho = \dfrac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)}} = \dfrac{E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)}} = -\dfrac{2}{3}$.　　　故选（D）.

8、设随机变量 X 与 Y 独立且同分布．又若 $P(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots$，$0 < p < 1$，则概率

$P(X \neq Y) =$【　D　】.

（A）$\dfrac{p}{2-p}$　　　　（B）$\dfrac{1}{2-p}$　　　　（C）$\dfrac{1-p}{2-p}$　　　　（D）$\dfrac{2-2p}{2-p}$.

解：由对称性，有 $P(X > Y) = P(X < Y) = \dfrac{1}{2}\big(1 - P(X=Y)\big)$，而

$$
\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot P(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}
$$

所以，$P(X \neq Y) = 1 - P(X=Y) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2-2p}{2-p}$.　　　　　　故选（D）.

9、设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，

$T = (\overline{X}+2)(S^2-2)$，则 $E(T) =$【　C　】.

（A）0　　　　（B）2　　　　（C）-2　　　　（D）4.

解：$E(\overline{X})=0,\quad E(S^2)=1$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，故

$$E(T)=E[(\overline{X}+2)(S^2-2)]$$

$$=E[(\overline{X}+2)]\cdot E[(S^2-2)]=2\times(1-2)=-2.$$ 故选（C）.

10、设总体 X 的概率分布为 $P(X=1)=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P(X=2)=P(X=3)=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 $1,3,2,2,1,3,1,2$，可得 θ 的最大似然估计值为【 A 】.

（A）$\dfrac{1}{4}$ （B）$\dfrac{3}{8}$ （C）$\dfrac{1}{2}$ （D）$\dfrac{5}{8}$.

解：构造似然函数 $L(\theta)=\left(\dfrac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\dfrac{1+\theta}{4}\right)^5=\dfrac{(1-\theta)^3(1+\theta)^5}{2^{13}}$.

则 $\ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta)-13\ln 2$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{3}{\theta-1}+\dfrac{5}{\theta+1}=\dfrac{8\theta-2}{(\theta-1)(\theta+1)}=0$，得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$. 故选（A）.

11、设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\ \sigma_1^2,\sigma_2^2;\ \rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则【 B 】.

（A）$E(\hat{\theta})=\theta,\ D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ （B）$E(\hat{\theta})=\theta,\ D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（C）$E(\hat{\theta})\neq\theta,\ D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ （D）$E(\hat{\theta})\neq\theta,\ D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

解：显然，$\overline{X}-\overline{Y}$ 服从正态分布，且

$E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，故（C）、（D）不正确；

再由 $D(\hat{\theta})=D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})-2Cov(\overline{X},\overline{Y})$，以及

$$D(\overline{X})=\frac{\sigma_1^2}{n},\quad D(\overline{Y})=\frac{\sigma_2^2}{n},$$

$$Cov(\overline{X},\overline{Y})=Cov(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}Y_l)=\frac{1}{n^2}Cov(\sum_{k=1}^{n}X_k,\sum_{l=1}^{n}Y_l)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}Cov(X_k,Y_l)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}Cov(X_k,Y_k)=\frac{1}{n}Cov(X_1,Y_1)$$

$$=\frac{1}{n}\sqrt{D(X_1)D(Y_1)}\rho_{X_1Y_1}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{n},$$ ----注意 X_k,Y_l 独立性

因此，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$. 故选（B）.

12、设 X 和 Y 独立且均服从 0-1 分布，并有 $\mathbf{P}\{X=1\}=\mathbf{P}\{Y=1\}=1/3$，则 $\mathbf{P}\{X=Y\}=$【 B 】.

（A）0　　　　　（B）$\dfrac{5}{9}$　　　　　（C）$\dfrac{7}{9}$　　　　　（D）1．

解：由全概率公式及 X 和 Y 相互独立，知

$$\mathbf{P}\{X=Y\}=\mathbf{P}\{X=0,Y=0\}+\mathbf{P}\{X=1,Y=1\}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.\quad \text{故选（B）.}$$

13、甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球．令 $X,\ Y$ 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数，则 X 与 Y 的相关系数为【　C　】.

（A）0　　　　　（B）0.1　　　　　（C）0.2　　　　　（D）0.3．

解：X 与 Y 的取值仅限于 0，1，因此，有

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1\,|\,X=1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10};$$

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)\cdot P(Y=0\,|\,X=1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{10};$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1\,|\,X=0)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{10};$$

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0\,|\,X=0)=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}.$$

则 (X,Y) 的联合分布律以及边缘分布律如下所示：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	0.3	0.2	0.5
1	0.2	0.3	0.5
$p_{\bullet j}$	0.5	0.5	

于是，$EX=EY=0.5,\quad DX=DY=0.25,\quad E(XY)=0.3$，

因此，$Cov(X,Y)=0.3-0.5\times0.5=0.05,\quad \rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\dfrac{1}{5}$.　　故选（C）.

14、总体 X 服从参数为 1 的指数分布，$X_1,X_2,\ldots,X_8$ 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，A_2 是样本二阶原点矩，则描述 $E(\overline{X})=1$、$D(\overline{X})=\dfrac{1}{8}$、$E(S^2)=1$、$E(A_2)=2$ 中正确的个数是【　D　】.

（A）1　　　　　（B）2　　　　　（C）3　　　　　（D）4．

解：由于 X 服从参数为 1 的指数分布，所以 $EX=1,\quad DX=1$，则

$$E(\overline{X}) = EX = 1, \quad D(\overline{X}) = \frac{DX}{n} = \frac{1}{8},$$

$$E(S^2) = DX = 1, \quad E(A_2) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} EX_i^2 = 2.$$ 故选（D）.

15、随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 独立同分布，且方差存在．求随机变量

$$U = X_1 + \cdots + X_5 + X_6 \text{ 和 } V = X_5 + X_6 + \cdots + X_{10}$$

的相关系数 $\rho_{U,V} =$【 B 】.

（A）$\frac{1}{5}$ （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{2}{3}$ （D）$\frac{4}{5}$.

解 记 $\mathbf{E}X_i = a$，$\mathbf{D}X_i = b(i = 1,2,\cdots,10)$.

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 独立，可见$(X_1, \cdots, X_6)$和$(X_7, \cdots, X_{10})$独立，

以及$(X_1, \cdots, X_4)$和(X_5, X_6)独立．因此

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(U,V) &= \mathrm{cov}(X_1 + \cdots + X_6, X_5 + \cdots + X_{10}) \\ &= \mathrm{cov}(X_1 + \cdots + X_6, X_5 + X_6) \\ &= \mathrm{cov}(X_5 + X_6, X_5 + X_6) \\ &= \mathrm{D}(X_5 + X_6) = \mathrm{D}X_5 + \mathrm{D}X_6 = 2b.\end{aligned}$$

于是，由 DU= DV=$6b$，因此 $\rho = \frac{2b}{\sqrt{\mathrm{D}U\,\mathrm{D}V}} = \frac{2b}{6b} = \frac{1}{3}$. 故选（B）.

二、（满分 10 分） 一商店有三箱同种类型（外形包装无区别）的零件，每箱 20 只，其中有一箱全是正品，一箱有 1 只残次品，另一箱有 2 只残次品．一顾客欲买一箱该零件，在购买时，售货员随意取出一箱，顾客随意察看其中的 4 只，若无残次品，则买下该箱零件，否则退回．试求顾客买下该箱零件的概率.

解： $A =$ “顾客买下该箱零件”，$B_i =$ “该箱有 i 件残次品”，$i = 0, 1, 2$.

$$P(B_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$P(A|B_0) = 1, \quad P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, \quad P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$$

$$P(A) = P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= \frac{1}{3}(1 + \frac{4}{5} + \frac{12}{19}) = \frac{77}{95}.$$

三、（满分 10 分） 甲、乙两电影院在竞争 100 名观众，假定每个观众随意地选一个影院，且观众间的选择彼此独立，问每个影院至少要设多少个座位，才能保证因缺少座位而使观众离去的概率小于 1%

$(\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(2)=0.9772)$.

解：设 $X=$"100 名观众中去甲电影院的人数"，$X \sim b(100,\frac{1}{2})$.

设甲电影院至少要设 n 个座位，则 $P\{X>n\}<1\%$.

$$P\{X>n\}=1-P\{X\le n\}=1-P\{\frac{X-100\times\frac{1}{2}}{\sqrt{100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}\le\frac{n-50}{5}\}$$

$$=1-\Phi(\frac{n-50}{5})<0.01;$$

$$\Phi(\frac{n-50}{5})>0.99=\Phi(2.33),$$

$$\frac{n-50}{5}>2.33,\quad n>50+2.33\times5=66065，所以，\ n\ge67.$$

四、(满分 10 分) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1,\cdots,x_n$ 是一组样本值，又设 θ 为未知参数，总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\le\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$.

（1）求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_1$；

（2）求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_2$；

（3）试证 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计量.

解：1）似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n} & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$\max x_i\le\theta$，$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}$ 是 θ 的单减函数，

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_1=\max X_i$

2）$\mu_1=E(X)=\frac{\theta}{2}$，令 $\overline{X}=\frac{\theta}{2}$，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_2=2\overline{X}$.

3）$E(\hat{\theta}_2)=E(\overline{X})=E(\frac{\theta}{2})=\theta$.

五、(满分 10 分) 检验某批矿砂中的含镍量，随机抽取 7 份样品，测得含镍量百分比分别为：2.67，3.33，3.69，3.01，3.98，3.15，3.69. 假设这批矿砂中的含镍量的百分比服从正态分布，试在 $\alpha=0.05$ 下检验这批矿砂中的含镍量的百分比能否认为是 3.25，并给出你的证明. 附表：t 分布的分位点表：$t_{0.05}(6)=1.9432$，$t_{0.025}(6)=2.4469$，$t_{0.05}(7)=1.8946$，$t_{0.025}(7)=2.3646$.

解：设 X 表示这批矿砂中的含镍量的百分比，则 $X\sim N\left(\mu,\ \ \sigma^2\right)$.

$$H_0:\ \ \mu=3.25 \qquad\qquad \left(H_1:\ \ \mu\neq 3.25\right)$$

由于总体方差未知，故用检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-3.25}{S}\sqrt{n}$.

当 H_0 成立时，$T=\dfrac{\overline{X}-3.25}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right)$.

由于显著性水平 $\alpha=0.05$，$n=7$，所以 $t_{0.025}\left(6\right)=2.4469$.

因此检验的拒绝域为 $W_1=\left\{\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \cdots,\ \ x_7\right):\ \ \dfrac{\left|\overline{x}-3.25\right|}{s}\sqrt{n}\geq 2.4469\right\}$

由样本观测值，得 $\overline{x}=3.36$，$s=0.455668007$.

所以，$\dfrac{\left|\overline{x}-3.25\right|}{s}\sqrt{n}=\dfrac{\left|3.36-3.25\right|}{0.455668007}\sqrt{7}=0.638694486<2.4469$.

所以，不拒绝 H_0，可以认为这批矿砂中的含镍量的百分比为 3.25 .