2020-2021-1- 《概率论与数理统计 B》期末考试 试卷 A 参考答案

一、单选题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、设 A,B 是任意两个概率不为零的不相容事件，下列结论肯定正确的是【 】.

（A） $P(\overline{A}\overline{B})=0$ （B） $P(\overline{A}\overline{B})>0$

（C） $P(AB)=P(A)P(B)$ （D） $P(A\overline{B})=P(A)$.

解： $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$. 故选（D）.

2、设 A,B 是两个随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是【 】.

（A） $P(B|A)=P(B)$ （B） $P(AB)=P(A)$

（C） $P(A-B)=P(A)-P(B)$ （D） $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

解： $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)$. 故选（C）.

3、一项工作需 5 名工人共同完成，但必须至少有 2 名熟练工人．现有 10 名工人，其中有 4 名熟练工人，从中选派 5 名去完成该项任务，有多少种选法【 】.

（A） 148 （B） 186 （C） 210 （D） 420 .

解：恰含 2 名熟练工人的选法：$C_4^2C_6^3=120$；

恰含 3 名熟练工人的选法：$C_4^3C_6^2=60$；

恰含 4 名熟练工人的选法：$C_4^4C_6^1=6$，

故，共有$120+60+6=186$种方法. 故选（B）.

4、袋中有 5 个球，其中白球 2 个，黑球 3 个．甲、乙两人依次从袋中各取一球，记 $A=$“甲取到白球”，$B=$“乙取到白球”．若取后放回，此时记 $p_1=P(A)$，$p_2=P(B)$；若取后不放回，此时记 $p_3=P(A)$，$p_4=P(B)$，则【 】.

（A） $p_1\ne p_2\ne p_3\ne p_4$ （B） $p_1=p_2\ne p_3\ne p_4$

（C） $p_1=p_2=p_3\ne p_4$ （D） $p_1=p_2=p_3=p_4$.

解：显然，$p_1=p_2=p_3$，而 $p_4=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{2}{5}=p_3$. 故选（D）.

5、 X 是连续型随机变量，$Y\sim B(1,\ p)$，则随机变量 $X-Y$ 的分布函数是【 】.

（A）分段函数　　　　　　　　　　（B）连续函数

（C）分段函数且恰有一个间断点　　（D）分段函数且至少有两个间断点.

解：对于任意实数 t，由概率性质，有

$$\begin{aligned}0 &\le P(X-Y=t)=P(X-Y=t,Y=a)+P(X-Y=t,Y=b)\\ &=P(X=t+a,Y=a)+P(X=t+b,Y=b)\\ &\le P(X=t+a)+P(X=t+b)=0.\end{aligned}$$

而 $P(X-Y=t)=0 \Leftrightarrow X-Y$ 的分布函数连续.　　　　　　故选（B）.

6、设随机变量 $X \sim N(0,1)$，对于任意给定的 $\alpha \in (0,1)$，数 $u(\alpha)$ 满足 $P(X>u(\alpha))=\alpha$．若概率 $P(|X|<x)=\alpha$，则 x 等于【　　】.

（A）$u\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$　　（B）$u\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$　　（C）$u\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)$　　（D）$u\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)$.

解：由 $P(|X|<x)=1-2P(X>x)=\alpha$，得

$P(X>x)=\dfrac{1-\alpha}{2}$，即 $x=u\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)$.　　　　　　故选（C）.

7、小明经营一家饮料店，使用 $A,\ B$ 两种设备．令 X 与 Y 分别表示 A 与 B 两种设备使用的时间比例，(X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+2y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & other\end{cases}$，则 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=$【　　】.

（A）$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}(x+1), & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$　　（B）$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+1, & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$

（C）$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}x+1, & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$　　（D）$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+1), & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+1), & 0\le x\le 1\\ 0, & other\end{cases}$.　　　　　　故选（D）.

8、随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 $X \sim N(-2,3)$，则 (X,Y)、$X+Y$、$X-Y$、XY、X/Y 中服从正态分布的个数是【　　】.

（A）2　　　（B）3　　　（C）4　　　（D）5.

解：由定义知 (X,Y)、$X\pm Y$ 均服从正态分布，XY、X/Y 不服从正态分布．故选（B）.

9、随机变量(X,Y)在$D=\{(x,y)\,|\,-1<x<1,\ -1<y<1\}$上服从均匀分布，则【 】.

（A）$P(X+Y\ge 0)=\frac{1}{4}$　　（B）$P(X-Y\ge 0)=\frac{1}{4}$

（C）$P(\max\{X,Y\}\ge 0)=\frac{1}{4}$　　（D）$P(\min\{X,Y\}\ge 0)=\frac{1}{4}$.

解：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & other\end{cases}$，所以

$$P(X+Y\ge 0)=\iint\limits_{x+y\ge 0} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{y\ge -x}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{2};$$

$$P(X-Y\ge 0)=\iint\limits_{x-y\ge 0} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{y\le x}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{2};$$

$$P(\min\{X,Y\}\ge 0)=P(X\ge 0,Y\ge 0)\ \iint\limits_{x\ge 0,y\ge 0} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4};$$

$$P(\max\{X,Y\}\ge 0)=1-P(\max\{X,Y\}<0)=1-P(X<0,Y<0)$$

$$=1-\iint\limits_{x<0,y<0} f(x,y)dxdy=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$　　故选（D）.

10、随机变量X与Y独立同分布，记$U=X+Y,\ \ V=X-Y$，则U与V必然【 】.

（A）$P(UV)=0$　（B）$P(UV)\ne 0$　（C）$\rho_{UV}=0$　（D）$\rho_{UV}\ne 0$.

解：
$$\begin{aligned}Cov(U,V)&=E(UV)-EU\cdot EV\\&=E(X^2-Y^2)-E(X-Y)\cdot E(X+Y)\\&=E(X^2)-E(Y^2)-E^2(X)+E^2(Y)=DX-DY=0.\end{aligned}$$

则 $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=0$.　　故选（C）.

二、选择题（本题满分 20 分，共有 5 道小题，每道小题 4 分）

11、设随机变量$X\sim t(n)\ (n\ge 2)$，$Y=\frac{1}{X^2}$，则【 】.

（A）$Y\sim\chi^2(n)$　（B）$Y\sim\chi^2(n-1)$　（C）$Y\sim F(n,\ 1)$　（D）$Y\sim F(1,\ n)$.

解：由$X\sim t(n)$，故$X=\frac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中$U\sim N(0,1),\ V\sim\chi^2(n)$.

于是$Y=\frac{1}{X^2}=\frac{V/n}{U^2/1}\sim F(n,\ 1)$.　　故（C）正确.

12、$X_1,X_2,...,X_n$ 为取自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

$T=(\overline{X}+2)(S^2-2)$，则 $E(T)=$【　　】.

（A）0　　　（B）2　　　（C）-2　　　（D）4.

解：$E(\overline{X})=0,\quad E(S^2)=1$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，故

$$E(T)=E[(\overline{X}+2)(S^2-2)]$$

$$=E[(\overline{X}+2)]\cdot E[(S^2-2)]=2\times(1-2)=-2.$$　　故（C）正确.

13、设总体 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,...,X_n\ (n\geq 2)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有【　　】.

（A）$E(T_1)>E(T_2),\quad D(T_1)>D(T_2)$　（B）$E(T_1)>E(T_2),\quad D(T_1)<D(T_2)$

（C）$E(T_1)<E(T_2),\quad D(T_1)>D(T_2)$　（D）$E(T_1)<E(T_2),\quad D(T_1)<D(T_2)$.

解：总体 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的泊松分布，故 $E(X_i)=\lambda,\quad D(X_i)=\lambda,\quad i=1,2,...,n$.

$$E(T_1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n\lambda}{n}=\lambda,\quad D(T_1)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n\lambda}{n^2}=\frac{\lambda}{n};$$

$$E(T_2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i)+\frac{\lambda}{n}=(1+\frac{1}{n})\lambda,$$

$$D(T_2)=\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1}D(X_i)+\frac{\lambda}{n^2}=(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2})\lambda.$$

所以，$E(T_1)<E(T_2),\quad D(T_1)<D(T_2)$.　　故（D）正确.

14、设 $\overline{X}$ 是取自总体 X 中的简单随机样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的样本均值，则 $\overline{X}$ 是 μ 的**矩估计**的充分条件是【　　】.

（A）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$　　（B）X 服从参数为 μ 的指数分布

（C）$P(X=m)=\mu(1-\mu)^{m-1},m=1,2,...$　　（D）X 服从 $[0,\quad\mu]$ 上的均匀分布.

解：若 X 服从参数为 μ 的指数分布，则 $E(X)=\frac{1}{\mu},\quad \mu$ 的矩估计 $\hat{\mu}=\frac{1}{\overline{X}}$，故（B）错误；

若 X 服从参数为 μ 的几何分布，则 $E(X)=\frac{1}{\mu},\quad \mu$ 的矩估计 $\hat{\mu}=\frac{1}{\overline{X}}$，故（C）错误；

若 X 服从 $[0,\quad\mu]$ 上的均匀分布，则 $E(X)=\frac{\mu}{2},\quad \mu$ 的矩估计 $\hat{\mu}=2\overline{X}$，故（D）错误.

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(X)=\mu,\quad \mu$ 的矩估计 $\hat{\mu}=\overline{X}$.　　故（A）正确；

15、设总体 X 服从参数为 1 的指数分布，$X_1,X_2,...,X_8$ 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，A_2 是样本二阶原点矩，则描述 $E(\overline{X})=1$、$D(\overline{X})=\frac{1}{8}$、$E(S^2)=1$、$E(A_2)=2$

中正确的个数是【　　】.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4.

解：由于 X 服从参数为 1 的指数分布，所以 $EX=1$， $DX=1$，则

$$E(\overline{X})=EX=1,\quad D(\overline{X})=\frac{DX}{n}=\frac{1}{8},$$

$$E(S^2)=DX=1,\quad E(A_2)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}EX_i^2=2.$$

故（D）正确.

三、(满分 10 分) 甲、乙、丙三人独立地破译一份密码．已知甲、乙、丙三人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$．（1）求密码能被破译的概率．（2）已知密码已经被破译，求破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一个人的概率．

解：（1）设 $A=\{$甲破译密码$\}$，$B=\{$乙破译密码$\}$，$C=\{$丙破译密码$\}$，$D=\{$密码被破译$\}$．则 $D=A\cup B\cup C$．因此，

$$P(D)=P(A\cup B\cup C)=1-P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right)$$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

... 5 分

（2）$D_1=\{$破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一人$\}$，则

$D_1=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$，所以

$$P(D_1)=P\left(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\right)=P\left(A\overline{B}\,\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\,\overline{B}C\right)$$

$$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30}.$$

... 8 分

注意到 $D_1\subset D$，所求概率为

$$P(D_1|D)=\frac{P(D_1D)}{P(D)}=\frac{P(D_1)}{P(D)}=\frac{13}{18}.$$

... 10 分

四、(满分 10 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（1）求 $E(X)$，$E(Y)$ 及 $E(XY)$；

（2）分别求出求 X 与 Y 的边缘密度函数；

（3）判断随机变量 X 与 Y 是否相关？是否相互独立？

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\ y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3ydy=\frac{21}{8}\int_{-1}^{1}x^3\left(1-x^4\right)dx=0$，

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,\ y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2y^2dy=\frac{7}{2}\int_{0}^{1}x^2\left(1-x^6\right)dx=\frac{7}{9},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\ y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3y^2dy=\frac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^3\left(1-x^6\right)dx=0.$$ ... 4 分

（2）当 $-1\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\frac{21}{4}\int_{x^2}^{1}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right)$

所以，随机变量 X 的边缘密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right) & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$；

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dx=\frac{21}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2ydx=\frac{7}{2}yx^3\Big|_0^{\sqrt{y}}=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$

所以，随机变量 X 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ ... 8 分

（3）由于 $\mathrm{cov}(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，所以 X 与 Y 不相关.

$f(x,\ y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立. ... 10 分

五、(满分 10 分) 某商品每周的需求量 $\boldsymbol{X}$ 服从区间[10，20]上的均匀分布；经销商进货的数量 $\boldsymbol{Y}$ 也服从区间[10，20]上的均匀分布，且 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ 相互独立．商店每销售出一单位商品可得利润 1000 元；若供不应求，商店可从外部调剂供应，每单位商品仅获利润 500 元．求商店获利的期望值.

解：（1）设 $\boldsymbol{Z}$ 为商店所获利润，则

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\begin{cases}1000\boldsymbol{Y}+500(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}), & \boldsymbol{X}\ge\boldsymbol{Y}\\ 1000\boldsymbol{X}, & \boldsymbol{X}<\boldsymbol{Y}\end{cases}$$ ... 2 分

$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的概率密度函数分别为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\frac{1}{10},10\le\boldsymbol{x}\le 20\\ 0, \quad \text{其它；}\end{cases},\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\begin{cases}\frac{1}{10},10\le\boldsymbol{y}\le 20\\ 0, \quad \text{其它；}\end{cases}$$ ... 4 分

$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立，（$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$）的联合概率密度函数为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\frac{1}{100}, & 10\le\boldsymbol{x}\le 20,10\le\boldsymbol{y}\le 20\\ 0, & \text{其它；}\end{cases}$$ ... 6 分

（2）商店所获利润的期望值为

$$\boldsymbol{EZ}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy}$$

$$=\int_{10}^{20}\boldsymbol{dx}\int_{10}^{x}\frac{500\boldsymbol{y}+500\boldsymbol{x}}{100}\boldsymbol{dy}+\int_{10}^{20}\boldsymbol{dx}\int_{x}^{20}\frac{1000\boldsymbol{x}}{100}\boldsymbol{dy}=14166.66\cdots$$ ... 10 分

六、(满分 10 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x},x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求参数 λ 的矩估计量;

（2）求参数 λ 的最大似然估计量.

解：（1）因为 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda^2 xe^{-\lambda x}dx = -\lambda\int_{0}^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x}$

$$= -\lambda\left[x^2 e^{-\lambda x}\big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right] = \frac{2}{\lambda}$$

所以由 $EX = \overline{X}$，可得参数 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = 2/\overline{X}$. ... 4 分

（2）似然函数为 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i} = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$

取对数，可得 $\ln L(\lambda) = \ln \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i} = 2n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$.

令其关于 λ 的导数等于 0，即

$$\frac{d}{d\lambda}[\ln L(\lambda)] = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解，得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$，

所以，λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \dfrac{2}{\overline{X}}$. ... 10 分

七、(满分 10 分) 某工厂生产一批钢索，其断裂强度 X（单位：$10^5\,Pa$）服从正态分布 $N(\mu, 40^2)$，从中任意抽取容量为 9 的样本，测得断裂强度值为：793，782，795，802，797，775，768，798，809. 据此样本值能否认为这批钢索的平均断裂强度为 $800\times10^5\,Pa$？（取显著性水平 $\alpha = 0.05$. $z_{0.025} = 1.96$）.

解：设在 $\alpha = 0.05$ 下的检验假设为

$$H_0: \mu = 800, \quad H_1: \mu \neq 800$$ ... 2 分

取检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$，则有 ... 4 分

检验的拒绝域为

$$W = \left\{ \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{40}\sqrt{9} \geq z_{\alpha/2} \right\}.$$ ... 6 分

其中，$z_{\alpha/2} = 1.96$，将样本值代入算出统计量 T 的值

$$\left|\frac{791 - 800}{400}\right|\sqrt{9} = 0.675 < 1.96.$$

显然不在拒绝域内.

所以，可以认为这批钢索的平均断裂强度为 $800\times10^5\,Pa$. ... 10 分