北 京 交 通 大 学

2021-2022-1 《概率论与数理统计 B》 期末考试 答案

一、单选题（每道小题 3 分，请选择你认为最准确的选项，填在指定位置）

1、图书馆新进 3 批新书，每批 100 本，其中每批都有 2 本概率论教材．现从 3 批新书中各抽取一本，这三本书恰有一本概率论教材的概率为【　　】.

（A）0.02×0.98^2　　（B）$3\times0.02\times0.98^2$

（C）$0.02^2\times0.98$　　（D）$3\times0.02^2\times0.98$.

解：（B）.

2、篮球游戏中，甲、乙两人投篮的命中率分别为 0.6 和 0.5．现两人各投球两次，每投中 1 次得 1 分．设甲得分多于乙得分的概率为 p，则有【　　】.

（A）$0\le p<0.25$　　（B）$0.25\le p<0.5$

（C）$0.5\le p<0.75$　　（D）$0.75\le p\le1$.

解：（B）.

3、在矩形区域 $D:-3\le x\le3,0\le y\le a$ 上，若使 $f(x,y)$ 构成均匀分布的概率密度函数，则正数 a 的值【　　】.

（A）$a=\frac{1}{2}$　　（B）$a=\frac{1}{3}$　　（C）$a=\frac{1}{6}$　　（D）a 不存在.

解：（D）.

因为 $f(x,y)$ 在矩形 $D:-3\le x\le3,0\le y\le a$ 上，是关于 x 的奇函数，因此

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{a}f(x,y)dydx=\int_{-3}^{3}xdx\int_{0}^{a}\frac{y}{1+y^2}dy=0,$$

所以，不存在满足条件的正数 a .

4、一批机器零件的寿命 X 在区间（0，40）上服从密度函数为 $f(x)$ 的连续分布，其中 $f(x)$ 与 $(10+x)^{-2}$ 成正比．则该批零件寿命小于 5 的概率为【　　】.

（A）$\frac{3}{10}$　　（B）$\frac{5}{12}$　　（C）$\frac{7}{12}$　　（D）$\frac{7}{10}$.

解：（B）.

设概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{(10+x)^2}, & x\in(0,\ 40)\\ 0, & otherwise\end{cases}$,

则由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{40}\frac{A}{(10+x)^2}dx=\frac{-A}{10+x}\Big|_0^{40}=A(\frac{1}{10}-\frac{1}{50})=\frac{2}{25}A=1$，

得 $A=\frac{25}{2}$，即 $f(x)=\begin{cases}\frac{25}{2(10+x)^2}, & x\in(0,\ 40)\\ 0, & otherwise\end{cases}$

因此，$P(X<5)=\int_0^5\frac{25}{2(10+x)^2}dx=-\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{10+x}\Big|_0^5=\frac{25}{2}(\frac{1}{10}-\frac{1}{15})=\frac{5}{12}$.

5、设随机变量X和Y相互独立，其分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(y)$，则随机变量$U=\max\{X,Y\}$的分布函数为$F(u)=$【　　】.

（A）$\max\{F_1(u),F_2(u)\}$　　　（B）$\min\{1-F_1(u),1-F_2(u)\}$

（C）$F_1(u)F_2(u)$　　　（D）$1-[1-F_1(u)][1-F_2(u)]$.

解：（C）.

由X和Y相互独立，知$U=\max\{X,Y\}$的分布函数为

$$F(u)=\mathrm{P}\{U\le u\}=\mathrm{P}\{\max(X,Y)\le u\}$$
$$=\mathrm{P}\{X\le u,Y\le u\}=\mathrm{P}\{X\le u\}\mathrm{P}\{Y\le u\}=F_1(u)F_2(u).$$

6、设随机变量X和Y的相关系数为0.7，令$U=3X+1,\ V=5-2Y$，则U和V的相关系数等于【　　】.

（A）-0.7　　（B）0.7　　（C）-0.3　　（D）0.3.

解：（A）.

由公式$\rho(aX+b,cY+d)=\frac{ac}{|ac|}\rho(X,Y)$，

所以，$\rho(3X+1,-2Y+5)=-\rho(X,Y)=-0.7$.

7、设随机变量$X\sim E(1),\ Y\sim B(2,\frac{1}{3})$，则$P(XY\le 2\ln 2)=$【　　】.

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{5}{6}$.

解：（D）.

$$\begin{aligned}P(XY\le 2\ln 2)&=P(Y=0)P(XY\le 2\ln 2\,|\,Y=0)\\&\quad+P(Y=1)P(XY\le 2\ln 2\,|\,Y=1)\\&\quad+P(Y=2)P(XY\le 2\ln 2\,|\,Y=2)\\&=P(Y=0)+P(Y=1)P(X\le 2\ln 2)+P(Y=2)P(X\le \ln 2)\end{aligned}$$

$$=(1-\frac{1}{3})^2+2\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times(1-e^{-2\ln 2})+(\frac{1}{3})^2\times(1-e^{-\ln 2})=\frac{5}{6}.$$

8、对于任意随机变量 X 和 Y，如果 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则【　　】.

（A） X 和 Y 独立　　　　（B） X 和 Y 不独立

（C） $DXY=DX\,DY$　　　　（D） $EXY=EX\,EY$.

解：（D）.

由 $D(X+Y)=D(X-Y)$ ，可知

$$DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y);$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EYEY=0;\quad EXY=EYEY.$$

9、随机变量 X 服从二项分布 $X\sim B(n,0.8)$, c 为任意实数，若 $E[(X-c)^2]$ 的最小值为 12，则 n 与以下哪一个数最接近【　　】.

（A）16　　（B）32　　（C）75　　（D）96 .

解：（C）.

$E[(X-c)^2]$ 的最小值，就是 X 的方差.

而 $D(X)=n\times0.8\times0.2=0.16=12$ ，则 $n=75$.

10、设 $X\sim N(0,3)$ ，$Y\sim U(0,\ 3)$ ，且 $D(X-Y)=3$ ，则 $\rho_{X,Y}=$【　　】.

（A） $\frac{1}{4}$　　（B） $\frac{1}{3}$　　（C） $\frac{1}{2}$　　（D） 1.

解：（A）.

显然，有 $EX=0,\quad DX=3,\quad EY=\frac{3}{2},\quad DY=\frac{3}{4}$ ，故由

$$D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)=3+\frac{3}{4}-2\operatorname{cov}(X,Y)=3$$

得 $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{3}{8}$ ，于是 $\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4}$. 故选

二、还是单选题（每道小题 4 分，请选择你认为最准确的选项，填在指定位置）

11、设 $X\sim N(3,9)$ ，以下论述① $P(X\le9)=\Phi(2)$ ；② $P(0<X\le6)=2\Phi(1)-1$ ；

③ $P(X>0)=\Phi(1)$；④ $P(|X-3|\geq 6)=2-2\Phi(2)$ 中，错误的个数是【　　】.

（A） 0　　（B） 1　　（C） 2　　（D） 3 .

解：（A）.

标准正态分布 $X\sim N(0,1)$，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ ，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$，$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.

因此，有 $P(X\leq a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$；

$$P(X\geq a)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(a\leq X\leq b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(|X-\mu|\leq a)=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)-1;$$

$$P(|X-\mu|>a)=1-P(|X-\mu|\leq a)=2\left(1-\Phi(\frac{a}{\sigma})\right).$$

12、随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 独立同分布，且方差存在． $U=X_1+\cdots+X_5+X_6$ 和 $V=X_5+X_6+\cdots+X_{10}$，则相关系数 $\rho_{U,V}=$【　　】.

（A） $\frac{1}{4}$　　（B） $\frac{1}{3}$　　（C） $\frac{1}{2}$　　（D） 1 .

解：（B）.

记 $\mathbf{E}X_i=a$，$\mathbf{D}X_i=b(i=1,2,\cdots,10)$.

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 独立，可见($X_1,\cdots,X_6$)和($X_7,\cdots,X_{10}$)独立，

以及($X_1,\cdots,X_4$)和(X_5,X_6)独立．因此

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(U,V)&=\mathrm{cov}(X_1+\cdots+X_6,X_5+\cdots+X_{10})\\&=\mathrm{cov}(X_1+\cdots+X_6,X_5+X_6)\\&=\mathrm{cov}(X_5+X_6,X_5+X_6)\\&=\mathbf{D}(X_5+X_6)=\mathbf{D}X_5+\mathbf{D}X_6=2b.\end{aligned}$$

于是，由 DU= DV= $6b$，因此 $\rho=\frac{2b}{\sqrt{\mathbf{D}U\,\mathbf{D}V}}=\frac{2b}{6b}=\frac{1}{3}$.

13、设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，为使 $D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 成为总体方差 σ^2 的无偏估计量，应取 $k=$【　　】

（A）$\dfrac{1}{n-1}$　　（B）$\dfrac{1}{n}$　　（C）$\dfrac{1}{2(n-1)}$　　（D）$\dfrac{1}{2n}$.

解：（C）.

由已知 $\mathbf{E}X^2=\sigma^2+\mu^2$．假设统计量 D 是总体方差 σ^2 的无偏估计量，

则 $\mathbf{E}D=k\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{E}(X_{i+1}-X_i)^2=k\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{E}(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_iX_{i+1})$

$=k\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)=2k(n-1)\sigma^2=\sigma^2$．故 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

14、设总体 X 的概率分布为 $P(X=1)=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P(X=2)=P(X=3)=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 $1,3,2,2,1,3,1,2$，可得 θ 的最大似然估计值为【　　】.

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{3}{8}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{5}{8}$.

解：（A）.

构造似然函数 $L(\theta)=\left(\dfrac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\dfrac{1+\theta}{4}\right)^5=\dfrac{(1-\theta)^3(1+\theta)^5}{2^{13}}$.

则 $\ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta)-13\ln 2$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{3}{\theta-1}+\dfrac{5}{\theta+1}=\dfrac{8\theta-2}{(\theta-1)(\theta+1)}=0$，得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

15、设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 $E[(\overline{X}-S^2)^2]=$【　　】.

（A）$\dfrac{7}{3}$　　（B）3　　（C）$\dfrac{16}{3}$　　（D）$\dfrac{25}{3}$.

解：（A）.

易知，$\overline{X}\sim N(0,\dfrac{1}{3})$，$2S^2\sim\chi^2(2)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，

因此，$E[(\overline{X}-S^2)^2]=E[(\overline{X}^2-2\overline{X}\cdot S^2+(S^2)^2]$

$=E(\overline{X}^2)-2E(\overline{X})\cdot E(S^2)+E[(S^2)^2]$

$=D(\overline{X})-0+D(S^2)+E[(S^2)^2]=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}D(2S^2)+1=\dfrac{7}{3}$.

三、（满分 10 分）　X 和 Y 分别表示甲、乙两公司 2021 年上半年度的利润（亿元）．某金融机构通过对 X 和 Y 的相关数据进行建模，获得如下函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{18}, & 0\le x\le 3, 0\le y\le 2\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

1）证明 $f(x,y)$ 是概率密度函数.

2）计算甲公司利润大于 2，乙公司利润大于 1 的概率.

3）计算乙公司利润大于 1 的概率.

解：1）因为 $f(x,y)\ge 0$，且

$$\int_0^3\int_0^2 f(x,y)dydx=\int_0^3\int_0^2\frac{x^2y}{18}dydx=\int_0^3\frac{x^2}{36}\left(y^2\right)_0^2dx=\int_0^3\frac{x^2}{9}dx=1,$$

所以，$f(x,y)$ 是一个概率密度函数. --4 分

2）$P(X>2,Y>1)=\int_2^3\int_1^2\frac{x^2y}{18}dydx$

$$=\int_2^3\frac{x^2}{36}\left(y^2\right)_1^2dx=\int_2^3\frac{3x^2}{36}dx=\frac{27-8}{36}=\frac{19}{36}.$$ --7 分

3）$P(Y>1)=\int_0^3\int_1^2\frac{x^2y}{18}dydx$

$$=\int_0^3\frac{x^2}{36}\left(y^2\right)_1^2dx=\int_0^3\frac{3x^2}{36}dx=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}.$$ --10 分

四、（满分 10 分） 平面区域 D 由直线 $y=x$，$y=0$，$x=1$，$x=2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布.

1）求二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,\ y)$.

2）求随机变量 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

3）求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

解：1）区域 D 的面积为 $A=\int_1^2 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\frac{3}{2}$，

所以，而为随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3} & (x,\ y)\in D\\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}.$$ --3 分

2）当$0<y\le 1$时， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx=\int_{1}^{2}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}$，

当$1<y<2$时， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx=\int_{y}^{2}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}(2-y)$，

所以，随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{3} & 0<y\le 1\\ \frac{2}{3}(2-y) & 1<y<2\\ 0 & 其它\end{cases}.$$ --6 分

3）当$0<y\le 1$时，$f_Y(y)=\frac{2}{3}>0$，此时条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}.$$

当$1<y<2$时，$f_Y(y)=\frac{2}{3}(2-y)>0$，此时条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2-y} & y<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$ --10 分

五、（满分 10 分） 某公司有 260 台电话分机．每台分机独立工作，且都有 4%的概率请求外部通信信道．利用中心极限定理，估计该公司应配备多少外部通信信道，以使信道请求得到满足的概率超过 95%．

解：设X_k表示第k台分机请求外部通信信道（$k=1,2,\ldots,260$）．

则$X_k\sim B(1,\ 0.04)$，因此，$E(X_k)=0.04$， $D(X_k)=0.0384$，而$X=\sum_{k=1}^{260}X_k$，

由独立分布的中心极限定理，随机变量

$$\frac{X-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}=\frac{\sum_{k=1}^{260}X_k-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}$$ --4 分

则 $$P(X\le n)=P(\frac{X-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}\le\frac{n-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}})$$

$$=\Phi(\frac{n-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}})\ge 0.95.$$ --8 分

即 $\dfrac{n-260\times 0.04}{\sqrt{260}\times\sqrt{0.0384}}\ge 1.645$，解，$n\ge 15.5978$，即 $n\ge 16$.　　　--10 分

六、（满分 10 分） 设来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，总体 X 的概率分布为

$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2\end{pmatrix}$，其中 $0<\theta<1$．分别以 ν_1,ν_2 表示 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 中 1，2 出现的次数，试求：

1）未知参数 θ 的最大似然估计量．

2）未知参数 θ 的矩估计量．

3）当样本值为（1,1,2,1,3,2）时的最大似然估计值和矩估计值．

解： (1) 求参数 θ 的最大似然估计量．样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 中 1，2 和 3 出现次数分别为 ν_1,ν_2 和 $n-\nu_1-\nu_2$，则似然函数和似然方程为

$$L(\theta)=\theta^{2\nu_1}\left[2\theta(1-\theta)\right]^{\nu_2}(1-\theta)^{2(n-\nu_1-\nu_2)}=2^{\nu_2}\theta^{2\nu_1+\nu_2}(1-\theta)^{2n-2\nu_1-\nu_2},$$

$$\ln L(\theta)=2^{\nu_2}+(2\nu_1+\nu_2)\ln\theta+(2n-2\nu_1-\nu_2)\ln(1-\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2\nu_1+\nu_2}{\theta}-\frac{2n-2\nu_1-\nu_2}{1-\theta}=0.$$

似然方程的惟一解，就是参数 θ 的最大似然估计量：$\hat{\theta}=\dfrac{2\nu_1+\nu_2}{2n}$.　　　--4 分

(2) 求参数 θ 的矩估计量．总体 X 的数学期望为

$$\mathbf{E}X=\theta^2+4\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2.$$

在上式中用样本均值 $\overline{X}$ 估计数学期望 $\mathbf{E}X$，可得 θ 的矩估计量：

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}(3-\overline{X}).$$　　　--8 分

(3) 对于样本值（1, 1, 2, 1, 3, 2），由上述一般公式，可得最大似然估计值

$$\hat{\theta}=\frac{2\nu_1+\nu_2}{2n}=\frac{2\times 3+2}{12}=\frac{2}{3};$$

矩估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{2}(3-\overline{X})=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{2}{3}$.　　　--10 分

七、(满分 10 分) 某批矿砂的镍含量（单位：%）的测定总值 X 服从正态分布，从中任意抽取 5 个样品，测得镍含量为：3.29，3.28，3.25，3.28，3.27．据此样本值，能否认为这批矿砂的镍含量均值为 3.25%（取显著性水平 $\alpha=0.01$．且 $t_{0.005}(4)=4.6041$，$t_{0.005}(5)=4.0322$，

$t_{0.005}(6)=3.7074$，$t_{0.01}(4)=3.7469$，$t_{0.01}(5)=3.3649$，$t_{0.01}(6)=3.1427$）.

解：由题意，可知本问题是在σ^2未知的情况下，均值μ的假设检验问题.

$H_0:\mu=\mu_0=3.25,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$. --2 分

取检验统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$. --4 分

则当显著性水平$\alpha=0.01$，检验的拒绝域为

$W=\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}$. --6 分

其中，$t_{0.005}(4)=4.6041$，$n=5,\overline{X}=3.274,S^2=2.3\times10^{-4},S=0.0152$.

将样本值代入算出统计量T的值

$|t|=\dfrac{3.274-3.25}{0.0152/\sqrt{5}}\approx0.3531<4.6041$. --8 分

因此，应接受$H_0:\mu=\mu_0=3.25$，

可以认为这批矿砂的镍含量的均值为3.25%. --10 分