§4.1 数学期望

例 1：某班有 N 个人，其中有 n_i 个人为 a_i 分，$i=1,2,\cdots k$，

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N,$$ 若用X表示成绩, 求平均成绩。

解：

平均成绩为: $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} a_i n_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{n_i}{N}$$

若用X表示成绩，则 $P\{X=a_i\} \approx \dfrac{n_i}{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n_i}{N} \approx \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P\{X = a_i\}$$

1、数学期望定义

(1) 离散型

设离散型随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots \quad ,$$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，

则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望。

记为 EX，即 $EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 。

数学期望也称为均值。

(2)、连续型

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$ ，

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

的值为 X 的数学期望。记为 EX= $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ ，

数学期望也称为均值。

说　明

(1) X 的数学期望刻划了 X 变化的平均值.

(2)由于随机变量 X 的数学期望表示的是随机变量 X 变化的平均值，因此，只有当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 绝对收敛时，才能保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 的和与其级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$ 的求和顺序无关.

例2

甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出：

X：甲击中的环数；

Y：乙击中的环数；

X	8	9	10
P	0.1	0.3	0.6

Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

试问哪一个人的射击水平较高？

例2（续）

解:

甲、乙的平均环数可写为

$$EX = 8\times 0.1 + 9\times 0.3 + 10\times 0.6 = 9.5$$

$$EY = 8\times 0.2 + 9\times 0.5 + 10\times 0.3 = 9.1$$

因此，从平均环数上看，甲的射击水平要比乙的好.

例3

设随机变量 X 服从Cauchy分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=+\infty$$

这表明积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 不绝对收敛，因而 EX 不存在.

例 4

设离散型随机变量 X 的分布律为:

X	0	1	2
P	0.1	0.2	0.7

则 $EX = 0*0.1+1*0.2+2*0.7 = 1.6$

若离散型随机变量 X 的分布律为:

X	0	1	2
P	0.7	0.2	0.1

则 $EX = 0*0.7+1*0.2+2*0.1 = 0.4$

此例说明了数学期望更完整地刻化了x的均值状态。

例 5

按规定，火车站每天 8:00~9:00，9:00~10:00 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立，其规律为：

到站时间	8:10,9:10	8:30,9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

(1) 旅客 8:00 到站，求他候车时间的数学期望。

(2) 旅客 8:20 到站，求他候车时间的数学期望。

解：设旅客的候车时间为 X（以分记）

(1) X 的分布律：

X	10	30	50
P	1/6	3/6	2/6

EX=10*(1/6)+30*(3/6)+50*(2/6)=33.33(分)

（2）旅客8: 20分到达

X的分布率为

X	10	30	50	70	90
P	3/6	2/6	(1/6)*(1/6)	(3/6)*(1/6)	(2/6)*(1/6)

EX=10*(3/6)+30*(2/6)+50*(1/36) +70*(3/36) +90*(2/36)
=27.22(分)

到站时间	8:10,9:10	8:30,9:30	8:50,9:50
概率	1/6	3/6	2/6

2、随机变量函数的数学期望

定理 1:

设 Y=g(X), g(x) 是连续函数,

（1）若 X 的分布率为 $P_k = P\{X = x_k\}$　$k = 1,2,\cdots$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} P_k g(x_k)$ 绝对收敛，则　EY=$\sum_{k=1}^{\infty} P_k g(x_k)$

(2).若 X 的概率密度为$f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx$ 绝对收敛,

则 EY=$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx$ 。

定理 2:

若(X,Y)是二维随机变量， $g(x,y)$是二元连续函数，

$$Z=g(x,y)$$

(1). 若(X,Y)的分布律为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P_{ij}$，

且$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)P_{ij}$绝对收敛；则 EZ=$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)P_{ij}$。

(2). 若(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，

且 $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$绝对收敛,

则：EZ=$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$。

例 6

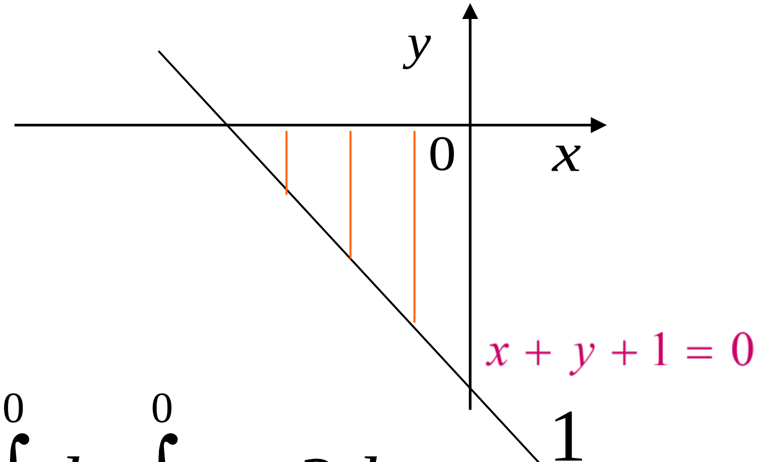
设风速 V 在(0,a)上服从均匀分布，又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数：$W = kV^2$，(k>0)；求 EW。

解：
$$f_V(v) = \begin{cases} 1/a, 0 < v < a; \\ 0, \text{其它}; \end{cases}$$

$$EW = \int_{-\infty}^{\infty} k v^2 f_V(v) dv = k\int_0^a v^2 (1/a) dv = \frac{1}{3} k a^2$$

例 7

设(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A为x轴，y轴和直线x+y+1=0所围成的区域。求EX，E(-3X+2Y)，EXY。



解：

$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A\\ 0,\text{其它};\end{cases}$$

$$\text{EX}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2dy=-\frac{1}{3}$$

$$\text{E(-3X+2Y)}=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{3}$$

$$\text{EXY}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2ydy=\frac{1}{12}$$

例 8

设在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X（吨），它在[2000,4000]上服从均匀分布，又设每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇 3 万元，但假如销售不出而囤积在仓库，则每吨需浪费保养费 1 万元。问需要组织多少货源，才能使国家收益最大。

解：设 y 为预备出口的该商品的数量，这个数量可只介于 2000 与 4000 之间，

用 Z 表示国家的收益（万元）

$$Z=\begin{cases}3y, & X\ge y\\ 3X-(y-X), & X<y\end{cases}$$

（例8续）

$$z = g(x) = \begin{cases} 3y, & x \geq y \\ 3x - (y - x), & x < y \end{cases} \qquad 2000 \leq y \leq 4000$$

下面求 EZ，并求使 EZ 达到最大的 y 值，

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{2000}^{y} \frac{3x - (y - x)}{2000} dx + \int_{y}^{4000} \frac{3y}{2000} dx$$

$$= -\frac{1}{1000}[y^2 - 7000y + 4*10^6]$$

$$= -\frac{1}{1000}[(y - 3500)^2 - 3500^2 - 4*10^4]$$

$$= -\frac{1}{1000}(y - 3500)^2 + 8250$$

即，组织 3500 吨此种商品是最佳的决策。

3、数学期望的性质

I)　　Ec=c，c 是常数，若$a \le X \le b$，

则$a \le EX \le b$，

II)　　EcX=cEX，　c 是常数，

III)　　E(aX+bY)=aEX+bEY

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i EX_i$$

IV)　　若x , y独立，则 EXY=EXEY

例 9　对N个人进行验血，有两种方案：

（1）对每人的血液逐个化验，共需N次化验；

（2）将采集的每个人的血分成两份，然后取其中的一份，按k个人一组混合后进行化验（设N是k的倍数），若呈阴性反应，则认为k个人的血都是阴性反应，这时k个人的血只要化验一次；如果混合血液呈阳性反应，则需对k个人的另一份血液逐一进行化验，这时k个人的血要化验k+1次；

假设所有人的血液呈阳性反应的概率都是 P，且各次化验结果是相互独立的。

试说明适当选取 k 可使第二个方案减少化验次数。

（例 9续）

解：设X表示第二个方案下的总化验次数，X_i 表示第i个组的化验次数，则

$$X=\sum_{i=1}^{N/k}X_i\text{，且 }EX=\sum_{i=1}^{N/k}EX_i$$

EX表示第二种方案下总的平均化验次数，EX_i表示第i个组的平均化验次数。

下面求EX_i：

X_i 只可能取两个值 1 或 k+1，

$$P\{X_i=1\}=q^k\quad,\qquad q=1-p\ ;$$

$$P\{X_i=k+1\}=1-q^k\quad;$$

（例 9续）

$$EX_i = q^k + (k+1)(1-q^k) = k+1-kq^k \quad ,$$

$$i = 1,2,\cdots, N/k \;;$$

所以 $$EX = \frac{N}{k}(k+1-kq^k) = N(1+\frac{1}{k}-q^k)$$

只要选 k 使 $1+1/k-q^k<1$，即$1/k<q^k$，就可使第二个方案减少化验次数；当 q 已知时，若选 k 使 $f(k)=1+1/k-q^k$ 取最小值，就可使化验次数最少。

例如：当p=0.1，q=0.9时，可证明k=4可使最小；这时，

$$EX = N(1+1/4-0.9^4) = 0.5939N$$

工作量将减少40%.

例 10

一民航送客载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数。

求 EX（设每个旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）。

解：设 $X_i=\begin{cases}0,\text{第}i\text{站没人下车}\\1,\text{第}i\text{站有人下车}\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,10$，

易见 $X=X_1+\cdots+X_{10}$，$EX=\sum_{i=1}^{10}EX_i$，

$P\{X_i=0\}=(9/10)^{20}$，$P\{X_i=1\}=1-(9/10)^{20}$，$i=1,\cdots,10$，

$EX_i=1-(9/10)^{20}$，$i=$

$EX=10[1-(9/10)^{20}]=8.784($

此时，X_i $i=1,2,\cdots,10$

不是相互独立的

例 11

用某台机器生产某种产品，已知正品率随着该机器所用次数的增加而指数下降，即

$$P\{\text{第k次生产出的产品是正品}\}= e^{-\lambda k}, k = 1,2,\cdots,\lambda > 0.$$

假设每次生产100件产品，试求这台机器前10次生产中平均生产的正品总数。

解：设X是前10次生产的产品中的正品数，并设

$$X_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{第}k\text{次生产的第}i\text{件产品是正品;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$k = 1,2,\cdots,10,\ i = 1,2,\cdots,100$$

$$\text{则}\quad X = \sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100} X_{ki}.$$

例 11（续）

而X_{ki}服从 $p=e^{-\lambda k}$ 的$(0—1)$分布，$E(X_{ki})=e^{-\lambda k}$.

$i=1,2,\cdots,100$, 所以

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{100}E(X_{ki})=\sum_{k=1}^{10}100e^{-k\lambda}=100\sum_{k=1}^{10}e^{-k\lambda}$$

$$=\frac{100\mathrm{e}^{-\lambda}(1-e^{-10\lambda})}{1-e^{-\lambda}}$$

例 12

对产品进行抽样，只要发现废品就认为这批产品不合格，并结束抽样。若抽样到第n件仍未发现废品则认为这批产品合格。

假设产品数量很大，抽查到废品的概率是p，试求平均需抽查的件数。

解：设X为停止检查时，抽样的件数，则X的可能取值为1,2,…,n，且

$$P\{X=k\}=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1,2,\cdots,n-1; \\ q^{n-1}, & k=n. \end{cases}$$

其中$q=1-p$，于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}p+nq^{n-1}$$

例 12（续）

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}(1-q)+nq^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k}+nq^{n-1}$$

$$=(1+2q+3q^2+\cdots+(n-1)q^{n-2})$$

$$-(q+2q^2+\cdots+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1})+nq^{n-}$$

$$=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$$

$$=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-(1-p)^n}{p}$$

- 作业:1,3,5,7,

§4.2　方差

在实际问题中常关心随机变量与均值的偏离程度，可用 E|X-EX|，但不方便；所以通常用$E(X-EX)^2$来度量随机变量 X 与其均值 EX 的偏离程度。

1、定义

设 X 是随机变量，若$E(X-EX)^2$存在，称其为随机变量 X 的方差，记作 DX，Var(X)，即：DX=Var(X)= $E(X-EX)^2$。$\sqrt{DX}$ 称为标准差。

$$DX = E(X-EX)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - EX)^2 \cdot p_i \text{，}\qquad \text{离散型。}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 f(x)dx \text{，}\qquad \text{连续型。}$$

注：方差描述了随机变量的取值与其均值的偏离程度。

方差也可由下面公式求得：

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

证明：

$$DX = E(X - EX)^2$$

$$= E\left(X^2 - (2EX)X + (EX)^2\right)$$

$$= EX^2 - (2EX)EX + (EX)^2$$

$$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2$$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

例13

甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出：

X：甲击中的环数；

Y：乙击中的环数；

X	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5

Y	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

试问哪一个人的射击水平较高？

例13（续）

解：

比较两个人的平均环数．

甲的平均环数为

$$EX = 8\quad 0.3 + 9\quad 0.2 + 10\quad 0.5 = 9.2\quad (\text{环})$$

乙的平均环数为

$$EY = 8\quad 0.2 + 9\quad 0.4 + 10\quad 0.4 = 9.2\quad (\text{环})$$

因此，从平均环数上看，甲乙两人的射击水平是一样的，但两个人射击环数的方差分别为

例13（续）

$$DX=(8-9.2)^2\quad 0.3+(9-9.2)^2\quad 0.2+(10-9.2)^2\quad 0.5$$

$$=0.76$$

$$DY=(8-9.2)^2\quad 0.2+(9-9.2)^2\quad 0.4+(10-9.2)^2\quad 0.4$$

$$=0.624$$

由于 $DY<DX$,

这表明乙的射击水平比甲稳定.

§2　方差

2、方差的性质　$DX = E(X - EX)^2$

1) DX≥0， 若 C 是常数， 则 DC=0

2) $D(CX) = C^2 DX$

3) $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X - EX)(Y - EY)$，

a， b 是常数。若 X， Y 独立，

则 $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY$

证：$D(aX+bY) = E[aX+bY-E(aX+bY)]^2$

$$= E[a(X-EX)+b(Y-EY)]^2$$

$$= E[a^2(X-EX)^2] + E[b^2(Y-EY)^2]$$

$$+2E[ab(X-EX)(Y-EY)]$$

$$= a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X-EX)(Y-EY)$$

若X,Y独立，则

E(X-EX)(Y-EY)=E (X-EX)E (Y-EY)=0

故：

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abE(X-EX)(Y-EY),$$

$$=a^2DX+b^2DY$$

4) DX=0 $\Leftrightarrow$ P{X=c}=1， c=EX

注：

令， $Y=(X-EX)/\sqrt{DX}$ 则 EY=0,DY=1。
称Y是随机变量X的标准化了的随机变量。

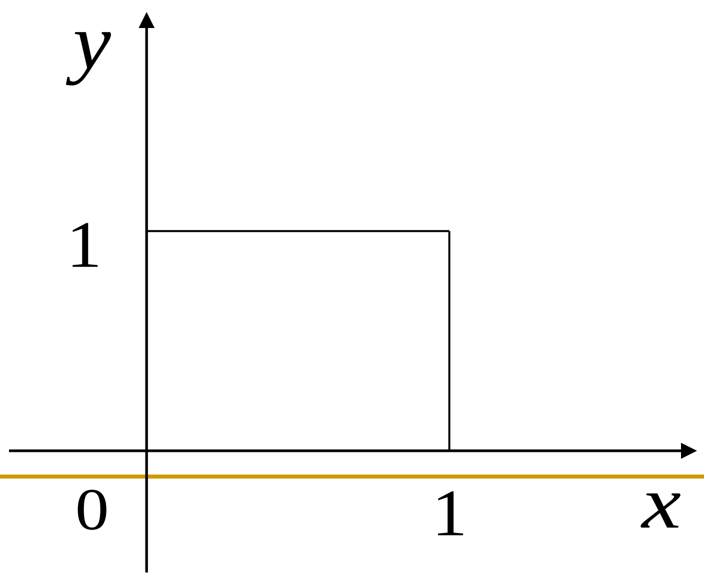
例 14

设$X,Y \sim U[0,1]$，且相互独立。求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

解：

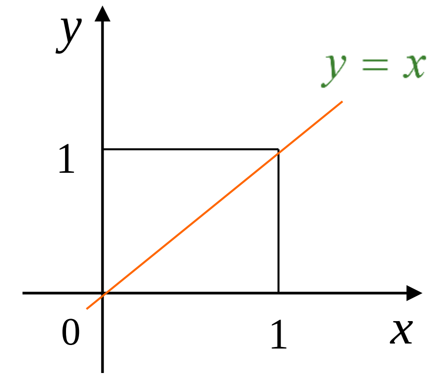
$$f_X(x)=1 \quad 0<x<1,\ f_Y(y)=1 \quad 0<y<1,$$

$$f(x,y)=1 \quad 0<x<1, 0<y<1.$$



例 14续

$$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1|x-y|dxdy$$



$$= \int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy + \int_0^1 dy\int_0^y (y-x)dx$$

$$= 2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy \;= 2\int_0^1 (x^2 - \frac{x^2}{2})dx \;= \frac{1}{3}$$

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

先求：

$$E|X-Y|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^2 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1|x-y|^2 dxdy$$

§2　方差

例 14（续）

$$=\int_0^1\int_0^1 (x-y)^2 dxdy = \int_0^1\int_0^1 (x^2-2xy+y^2)dxdy = \frac{1}{6}$$

则:

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

$$=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$$

3、定理

定理：（切比晓夫不等式）(Chebyshev不等式)

设随机变量X有数学期望$EX=\mu$，方差$DX=\sigma^2$，对任意$\varepsilon>0$，不等式$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\sigma^2/\varepsilon^2$成立，

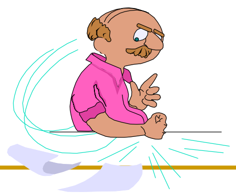
或

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

证明：（只证 X 是连续型）

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\frac{DX}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad。$$



这个不等式给出了随机变量 X 的分布未知情况下，事件$\{|X-\mu|<\varepsilon\}$的概率的一种估计方法。

$$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\sigma^2/\varepsilon^2$$

例如：在上面不等式中，取$\varepsilon=3\sigma,4\sigma$，有：

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geq 0.8889$$

$$P\{|X-\mu|<4\sigma\}\geq 0.9375$$

例15

假设一批种子的良种率为$\frac{1}{6}$，从中任意选出600粒，试用切比晓夫（Chebyshev）不等式估计：这600粒种子中良种所占比例与$\frac{1}{6}$之差的绝对值不超过0.02的概率。

解：设 X 表示600粒种子中的良种数,则 $X \sim B(600,\frac{1}{6})$

$$EX = 600 \times \frac{1}{6}, \qquad DX = 600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}.$$

由切比晓夫不等式有

$$P\{\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| \le 0.02\} = P\{\left|\frac{X-100}{600}\right| \le 0.02\}$$

$$= P\{|X-100| \le 12\} \ge 1 - \frac{DX}{12^2} = 1 - \frac{600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{144} = 0.4213$$

例16

利用Chebyshev不等式证明：若$DX=0$，则$P\{X=EX\}=1$.

证明：

$$P\{X=EX\}=P\{X-EX=0\}=P\{|X-EX|=0\}$$
$$=1-P\{|X-EX|\neq 0\}$$

而　$$P\{|X-EX|\neq 0\}=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|X-EX|\geq\frac{1}{n}\right\}\right)$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{|X-EX|\geq\frac{1}{n}\right\}$$　(概率的次可列可加性)

由概率的非负性及Chebyshev不等式，得

例16（续）

$$0 \le P\left\{\left|X - EX\right| \ge \frac{1}{n}\right\} \le \frac{DX}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0$$

所以， $P\left\{\left|X - EX\right| \ge \frac{1}{n}\right\} = 0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

所以， $0 \le P\{\left|X - EX\right| \ne 0\} \le \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

所以， $P\{\left|X - EX\right| \ne 0\} = 0$ 因此， $P\{X = EX\} = 1.$

由此例及方差的性质，我们有：

$$P\{X = C\} = 1 \quad (C\text{为常数})$$

的充分必要条件为 $DX = 0.$

- 作业:8,9,10,11

几种重要随机变量的数学期望及方差

1.两点分布

X	0	1
p_k	$1-p$	p

EX=p， $DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = pq$ 。

2. 二项分布

方法1：

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n \text{ 。}$$

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)}$$

$$EX=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}=np\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}p^{i}q^{n-1-i}$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=p\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=p\sum_{k=1}^{n}(k-1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}+p\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}p^{k-2}q^{n-2-(k-2)}+np$$

$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np=n^2p^2-np^2+np$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=n^2p^2-n\ p^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq$$

方法2：

X_i 服从（0-1）分布，$P\{X_i=0\}=q, P\{X_i=1\}=p, i=1,2,\cdots,n$

且 $X_1,\cdots,X_n$ 独立，令 $X=X_1+\cdots+X_n$，则 X 的可能取值为 0,1,…n,

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,\cdots,n$$

$$EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=np, \qquad DX=\sum_{i=1}^{n}DX_i=npq,$$

3. 泊松分布

设 X 服从参数为λ泊松分布，

其分布律为 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，k=0,1,...

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

4.均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a),a<x<b\\0,\text{其它}\end{cases}$$ 。

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

5. 正态分布　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\left(\frac{x-\mu}{\sigma}=t\right)$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

$$DX=E(X-\mu)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,\left(\frac{x-\mu}{\sigma}=t\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^2t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

$$P\{|X-\mu|\le\sigma\}=P\{\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma\}$$

$$=\Phi(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma})\ =\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|\le 2\sigma\}=P\{\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma\}$$

$$=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|\le 3\sigma\}=\ P\{\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma\}$$

$$=2\Phi(3)-1=0.9974$$

因此，对于正态随机变量来说，它的值落在区间$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$内几乎是肯定的。

在上一节用切比晓夫不等式估计概率有：

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}\ge 0.8889$$

6. 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数

$$EX=\frac{1}{\lambda} \qquad DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

- 作业:12,15,16

§4.3协方差及相关系数

1、定义

称COV(X,Y)= E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY

为随机变量X,Y的协方差. 而 COV(X,X)=DX.

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{DX}.\sqrt{DY}}$$ 为随机变量X,Y的相关系数。

ρ_{XY}是一个无量纲的量；若ρ_{XY}=0,

称 X,Y 不相关,此时 COV(X,Y)=0。

定理：若X，Y独立，则X,Y不相关。

证明：由数学期望的性质有

E(X-EX)(Y-EY)=E(X-EX)E(Y-EY)

又 E(X-EX)=0,　E(Y-EY)=0

所以　E(X-EX)(Y-EY)=0。

即　COV(X,Y)=0

注意： 若E(X-EX)(Y-EY)≠0，即EXY-EXEY ≠0， 则X，Y一定相关，且X，Y一定不独立。

2、协方差的性质

1) COV(X,Y)=COV(Y,X);

2) COV(aX，bY)=abCOV(X,Y);

3) COV(X+Y,Z)=COV(X,Z)+COV(Y,Z);

4) 若 X,Y 不相关，则：EXY=EXEY, D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY

由方差的性质 3）知：

D(aX+bY)= $a^2DX+b^2DY+2abCOV(X,Y)$

复习

4) DX=0 $\Leftrightarrow$ P{X=c}=1， c=EX

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

3、相关系数的性质

1) $|\rho_{XY}| \le 1.$

2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数 a,b 使 P{Y=a+bX}=1.

证明:

令: $e = E[Y-(a+bX)]^2$

$$= EY^2 + b^2EX^2 + a^2 - 2aEY - 2bEXY + 2abEX$$

求 a,b 使 e 达到最小

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bEX - 2EY = 0 \\ \dfrac{\partial e}{\partial b} = 2bEX^2 - 2EXY + 2aEX = 0 \end{cases}$$

将 $a = EY - bEX$, 代入第二个方程得

$$bEX^2 - EXY + (EY - bEX)EX = 0, \text{ 故 } b = \frac{EXY - EXEY}{EX^2 - (EX)^2}$$

解得
$$b_0=\frac{COV(X,Y)}{DX};$$
$$a_0=EY-b_0EX=EY-EX\cdot\frac{COV(X,Y)}{DX}$$

$$\min_{a,b}E[Y-(a+bX)]^2=E[Y-(a_0+b_0X)]^2$$
$$=E(Y-EY+EX\frac{COV(X,Y)}{DX}-X\cdot\frac{COV(X,Y)}{DX})^2$$
$$=E((Y-EY)-(X-EX)\cdot\frac{COV(X,Y)}{DX})^2$$
$$=DY+DX\cdot\frac{COV^2(X,Y)}{(DX)^2}-2COV(X,Y)\cdot\frac{COV(X,Y)}{DX}$$
$$=DY+\frac{COV^2(X,Y)}{DX}-2\frac{COV^2(X,Y)}{DX}$$

$$= DY - \frac{COV^2(X,Y)}{DX} = DY - \rho_{XY}^2 \cdot DY = (1-\rho_{XY}^2)DY$$

即： $\min\limits_{a,b} E[Y-(a+bX)]^2 = (1-\rho_{XY}^2)DY$

由上式得:

1) $1 - \rho_{XY}^2 \geq 0, \quad |\rho_{XY}| \leq 1$。

2) 若$|\rho_{XY}| = 1$, 　则 $E[Y-(a_0+b_0X)]^2 = 0$。

从而$D[Y-(a_0+b_0X)] + (E[Y-(a_0+b_0X)])^2 = E[Y-(a_0+b_0X)]^2 = 0$

所以 $D[Y-(a_0+b_0X)] = 0, \quad E[Y-(a_0+b_0X)] = 0$

故　P{Y－（a_0+b_0X）$=0$ }=1.

即　　P{Y＝a_0+b_0X }=1。

返回主目录

反之，若存在 a^*, b^* 使 P{Y＝$a^* + b^* X$ }=1，则

P{Y－（$a^* + b^* X$）＝ 0 }=1，

故 $E[Y-(a^*+b^*X)]^2 = 0$ 而

$$0 = E[Y-(a^*+b^*X)]^2 \ge \min_{a,b} E[Y-(a+bX)]^2 = (1-\rho_{XY}^2)DY$$

则 $1-\rho_{XY}^2 = 0, |\rho_{XY}| = 1$。

说　明

相关系数是表征随机变量 X 与 Y 之间线性关系紧密程度的量

当 $|\rho_{X,\ Y}| = 1$时，X 与 Y 之间以概率1存在着线性关系；

当 $|\rho_{X,\ Y}|$越接近于0时，X 与 Y 之间的线性关系越弱；

当 $|\rho_{X,\ Y}| = 0$时，X 与 Y 之间不存在线性关系(不相关).

X与Y之间没有线性关系并不表示它们之间没有关系。

5、例子

设 X，Y 是二个随机变量，已知 $DX=1$，$DY=4$，$\operatorname{cov}(X,\ Y)=1$，记

$$\xi = X-2Y,\quad \eta = 2X-Y$$

试求：$\rho_{\xi,\ \eta}$．

解：

$$D\xi = D(X-2Y) = DX+4DY-4\operatorname{cov}(X,\ Y)$$

$$=1+4\times 4-4\times 1=13$$

$$D\eta = D(2X-Y) = 4DX+DY-4\operatorname{cov}(X,\ Y)$$

$$=4\times 1+4-4\times 1=4$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)=\operatorname{cov}(X-2Y,\ 2X-Y)$$

$$=2\operatorname{cov}(X,\ X)-4\operatorname{cov}(Y,\ X)-\operatorname{cov}(X,\ Y)+2\operatorname{cov}(Y,\ Y)$$

$$=2DX-5\operatorname{cov}(X,\ Y)+2DY$$

$$=2\times1-5\times1+2\times4$$

$$=5$$

所以，

$$\rho_{\xi,\ \eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{4}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

设(X,Y)服从二维正态分布，求：ρ_{XY}

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

由上述知： $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$， $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

$$EX=\mu_1, DX=\sigma_1^2, EY=\mu_2, DY=\sigma_2^2,$$

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}]^2}dydx$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}[\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}]$， $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$，

则 $x-\mu_1=\sigma_1 u$， $y-\mu_2=(t\sqrt{1-\rho^2}+\rho u)\sigma_2$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \sigma_1\\ \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 & \rho\sigma_2\end{vmatrix}$$

$$=-\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2$$

$$x-\mu_1=\sigma_1 u\,,\qquad J=-\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$
$$y-\mu_2=(t\sqrt{1-\rho^2}+\rho u)\sigma_2$$

$$COV(X,Y)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2^2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1^2}]^2}dydx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1\sigma_2 u(t\sqrt{1-\rho^2}+\rho u)e^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\left|-\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right|dtdu$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}+0=\rho\sigma_1\sigma_2$$

故 $\rho_{XY}=\rho$。

正态分布

X，Y独立⇔ $\rho_{XY}=\rho$ =0⇔X，Y不相关。

- 作业
- 19;20,21

§4.4 矩

1、定义

若 EX^k 存在，称之为 X 的 k 阶原点矩。

若 $E(X-EX)^k$ 存在，称之为 X 的 k 阶中心矩。

若 $E(X-EX)^k(Y-EY)^l$ 存在，称之为 X 和 Y 的 k+l 阶混合中心矩。

所以 EX 是一阶原点矩，DX 是二阶中心矩，协方差 Cov(X,Y)是二阶混合中心矩。

例1

设随机变量 $X \sim N(0,\ \sigma^2)$，试求 $E(X^n)$.

解:

令：$Y = \dfrac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \dfrac{X}{\sigma}$ 则 $Y \sim N(0,\ 1)$.

所以，

$$E(X^n) = \sigma^n E(Y^n) = \sigma^n \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f_Y(y) dy = \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

(1). 当n为奇数时，由于被积函数是奇函数，所以 $E(X^n) = 0$.

(2). 当n为偶数时，由于被积函数是偶函数，所以

$$EX^n = \frac{2\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

令：$\frac{y^2}{2} = t$, 则 $y = \sqrt{2}\sqrt{t}$,

$$dy = \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$EX^n = \frac{2\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt$$ 注意 $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t} dt = 2^{\frac{n}{2}} \frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

其中 $\Gamma(t)=\int_0^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx.$

利用$\Gamma-$函数的性质：$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$，得

$$E\left(X^n\right)=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}=\sigma^n(n-1)!!$$

因而，

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}\sigma^n(n-1)!! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases}$$

其中，

$$n!!=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot n & n\text{为奇数}\\ 2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot n & n\text{为偶数}\end{cases}$$

特别，若　$X\sim N(0,\ 1)$，　则

$$E\left(X^n\right)=\begin{cases}(n-1)!! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases},\quad n=4\text{时},\quad EX^4=3.$$

2、n维正态分布的性质

1) n维随机变量$(X_1,\cdots,X_n)$服从n维正态分布$\Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$的任意线性组合$l_1X_1+\cdots+l_nX_n$服从一维正态分布。

2) 若$(X_1,\cdots,X_n)$服从n维正态分布，$Y_1,\cdots,Y_n$是$X_j(j=1,\cdots,n)$的线性函数，则$(Y_1,\cdots,Y_n)$也服从正态分布。

3) 若$(X_1,\cdots,X_n)$服从 n 维正态分布，则$X_1,\cdots,X_n$相互独立$\Leftrightarrow X_1,\cdots,X_n$两两不相关。

例2 (1) 设 X,Y 独立，$X \sim N(1,4), Y \sim N(2,9)$,

求: $2X-Y$ 的分布;

(2) $(X,Y) \sim N(1,2;4,9;0.5)$

求: $2X-Y$ 的分布;

解: (1) $E(2X-Y)=2EX-EY=0$

$D(2X-Y)=4DX+DY=4\times4+9=25$

则: $2X-Y \sim N(0,25)$

(2) $D(2X-Y)=4DX+DY-2\times2COV(X,Y)$

$=25-4\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=25-4\times\frac{1}{2}\times2\times3=13$

则: $2X-Y \sim N(0,13)$

例3　设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$$

其中$\varphi_1(x,y)$和$\varphi_2(x,y)$都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零，方差都是1.

(1) 求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，及 X 和 Y 的相关系数

(2)(2)问 X 和 Y 是否独立？为什么？

解　（1）由于二维正态密度函数的两个边缘密度都是正态密度函数，因此有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x,y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x,y)dy\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};$$

同理，

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};$$

则　$X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1),$

所以　$EX=EY=0,\ \ DX=DY=1.$

随机变量 X 和 Y 的相关系数

$$\rho=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\varphi_1(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\varphi_2(x,y)dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]=0.$$

（2）二维正态分布密度函数

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

由题设,我们知道 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}\right],$$

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}\right],$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

所以 X 与 Y 不独立.

(X_1, X_2) 有四个中心矩,分别记为

$c_{11} = E(X_1 - EX_1)^2$ $c_{12} = E(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)$

$c_{21} = E(X_2 - EX_2)(X_1 - EX_1)$ $c_{22} = E(X_2 - EX_2)^2$

(X_1, X_2) 的协方差矩阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

二维正态密度函数

$$f(x_1,\quad x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

引入 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\qquad \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$

(X_1,X_2) 的协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

所以 $\dfrac{1}{(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$

$$=(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)$$

$$f(x_1,\quad x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j) \qquad i, j=1,2,\cdots,n$$

都存在

n维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

是对称矩阵

引入

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

n维正态密度函数

$$f(x_1,\quad x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

1 阐述了数学期望、方差的概念及背景，要掌握它们的性质与计算，会求随机变量函数的数学期望和方差。

2 要熟记两点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的数学期望与方差。

3 给出了契比雪夫不等式，要会用契比雪夫不等式作简单的概率估计。

4 引进了协方差、相关系数的概念，要掌握它们的性质与计算。

5 要掌握二维正态随机变量的不相关与独立的等价性。

6 给出了矩与协方差矩阵。

作业：

- 作业:
- 23,24,25
- 综合题
- 2,3,4,7