第六章 参数估计

§1 样本与统计量

§2 点估计

§3 估计量的评选标准

§4 正态总体统计量的分布

§5 置信区间

§1 样本与统计量

- 总体
- 个体
- 样本
- 统计量

第六章 参数估计

- 数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据,来研究随机现象,对研究对象的客观规律性作出种种合理的估计和判断.
- 在数理统计中,我们研究的随机变量,它的分布是未知的,或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值,对这些数据进行分析,从而对所研究的随机变量的分布作出种种推断的.

一、总体和个体

1）总体：研究对象的某项数量指标的值的全体。

2）个体：总体中的每个元素为个体。

例如：某工厂生产的灯泡的寿命是一个总体，每一个灯泡的寿命是一个个体；某学校男生的身高的全体一个总体，每个男生的身高是一个个体。

二、样本

定义：设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1,\cdots X_n$ 是具有同一分布函数 F 的相互独立的随机变量，则称 $X_1,\cdots X_n$ 为从总体 X 中得到的容量为 n 的简单随机样本，简称为样本，其观察值 $x_1,\cdots x_n$ 称为样本值。

由定义知：若 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本，则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为：

$$F^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

若设X的概率密度为$f(x)$，则$(X_1,\cdots,X_n)$的联合概率密度为：

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

若设X的分布律为$P\{X=x\}=p(x)$，则$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布律为：

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)$$

例1 若$X_1,\cdots,X_n$是正态总体$X\sim N(1,4)$的样本，则

$EX_1X_n=$ __1__，　$D(X_1-2X_2)=$ __20__.

例2 若$X_1,\cdots,X_n$是总体$X\sim B(1,p)$的样本，求$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布率.

解:

总体 X 的分布率为

$$p(x)=P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},x=0,1.$$

所以（$X_1,\cdots,X_n$）的联合分布率为

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

$$x_i=0,1,\ \ i=1,\cdots,n.$$

例3 若$X_1,\cdots,X_n$是参数为λ的泊松分布总体X的样本，求$(X_1,\cdots,X_n)$的联合分布率.

解: 总体 X 的分布率为

$$p(x)=P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},x=0,1,\cdots$$

所以（$X_1,\cdots,X_n$）的联合分布率为

$$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda},\quad x_i=0,1,\cdots,\ i=1,\cdots,n.$$

例4 若$X_1,\cdots,X_n$是总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，求$(X_1,\cdots,X_n)$的联合概率密度.

解：总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty.$$

所以（$X_1,\cdots,X_n$）的联合概率密度为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma)^{-n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\infty<x_i<\infty,i=1,\cdots,n.$$

三、统计量

1）定义：设 $X_1,\cdots X_n$ 为来自总体X的一个样本，g是 $X_1,\cdots X_n$的函数，且g中不含任何未知参数，则称 $g(X_1,\cdots X_n)$是统计量。

设$(x_1,\cdots,x_n)$是相应于样本$(X_1,\cdots X_n)$的样本值。

则称$g(x_1,\cdots x_n)$是$g(X_1,\cdots X_n)$的观察值。

注：统计量是随机变量。

例5设 $X_1,\cdots X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，

其中 μ 未知，σ^2 已知，问下列随机变量中那些是统计量

$$\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ \vee;\quad \frac{X_1+X_n}{2\ \vee};\quad \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\ ;$$

$$\frac{(X_1+X_n)^2}{\sigma^2\ \vee};\quad \frac{(X_1+\cdots+X_n)-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

2） 常用的统计量

样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$

样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2]$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\overline{X}^2]$$

证明:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}n\overline{X}+n\overline{X}^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\overline{X}^2]$$

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本k阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ k} \quad k=1,2,\cdots$

样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \quad k=1,2,\cdots$

它们的观察值分别为:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\overline{x}^2]$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k,\quad k=1,2\cdots$$

$$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k,\quad k=1,2\cdots$$

分别称为样本均值、样本方差、样本标准差、样本k阶原点矩、样本k阶中心矩的观察值。

统计量是样本的函数，它是一个随机变量，统计量的分布称为抽样分布。

3）结论：设 $X_1,\cdots X_n$为来自总体X 的一个样本，

$$EX=\mu,\ DX=\sigma^2,$$

则 $E\overline{X}=\mu,\ D\overline{X}=\dfrac{\sigma^2}{n},\ ES^2=\sigma^2.$

请记熟此结论！

证明：

$$E\overline{X}=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}EX_i}{n}=\mu$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}DX_i}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$ES^2 = E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2] = \frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 - nE\overline{X}^2]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(DX_i + (EX_i)^2) - n(D\overline{X} + (E\overline{X})^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2) = \sigma^2$$

§2 点估计

- 点估计
- 矩法
- 极大似然法

在数理统计学中，总体的分布是未知的。它包括两种情形：

1）总体分布的类型是已知的，但其中包含未知参数。我们的任务就是通过样本来估计这些未知参数。这就是参数估计问题。

2） 总体分布的类型是未知的。我们的任务就是通过样本来估计总体的分布。这就是非参数估计问题。

我们这里只讨论参数估计问题。

一、点估计问题

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$的形式为已知，θ是待估参数。$X_1,\cdots,X_n$是X的一个样本，$x_1,\cdots,x_n$是相应的样本值。

构造一个适当的统计量$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，用它的观察值$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$来估计未知参数$\theta$。

我们称$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的估计量;

称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$的估计值。

这种对未知参数进行定值估计的问题就是点估计问题。

二、矩估计法

设X为连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

X为离散型随机变量，其 分布律为

$$P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

其中$\theta_1,\cdots,\theta_k$是待估参数，$X_1,\cdots,X_n$为来自X的样本.

设 $EX^l=\mu_l$ 存在， $l=1,2,\cdots,k$

则 $\mu_l=\mu_l(\theta_1,\cdots,\theta_k),l=1,2,\cdots,k.$

令 $A_l=\mu_l,\quad l=1,\cdots,k,$ 其中 $A_l=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$

这是包含k个未知参数$\theta_1,\cdots,\ \theta_k$的联立方程组，

$$\begin{cases} A_1 = \mu_1(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k) \\ A_2 = \mu_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ A_k = \mu_k(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k) \end{cases}$$

从中解出方程组的解记为$\hat{\theta}_1,\cdots,\ \hat{\theta}_k$,即

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \end{cases}$$

用$\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$分别作为$\theta_1,\cdots,\theta_k$的估计量，

这种求估计量的方法称为矩估计法.

这种估计量称为矩估计量；矩估计量的观察值称为矩估计值。

矩法原理：由辛钦大数定律知

$$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l \xrightarrow{P} \mu_l, \quad l=1,2,\cdots,k.$$

所以我们令 $A_l=\mu_l$， $l=1,\cdots,k$,用A_l估计μ_l.

矩法求估计量的步骤：

1) 求 $\mu_1 = EX \ (\mu_2 = EX^2)$;

2) 令 $A_1 = \mu_1 \ (A_2 = \mu_2)$;

3)解上面方程（组），得

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_n)$$
$$(\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, \cdots, X_n)).$$

例 1 设某炸药厂一天中发生着火现象的次数X服从参数为λ的泊松分布，λ未知，有以下样本值；试估计参数λ（用矩法）。

着火的次数k	0	1	2	3	4	5	6	
发生k次着火天数n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\sum = 250$

解：$\mu_1 = EX = \lambda,\quad A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

令 $\overline{X} = \lambda,$

则 $\hat{\lambda} = \overline{x} = \frac{1}{250}(0\times 75 + 1\times 90 + \cdots + 6\times 1) = 1.22$

所以估计值$\hat{\lambda} = 1.22$。

例2

设总体$X \sim U[a,b]$，a,b未知，$X_1,\cdots,X_n$是一个样本，求：a,b的矩估计量。

解：

$$\mu_1 = EX = \frac{a+b}{2},$$

$$\mu_2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$$

令 $\dfrac{a+b}{2} = A_1$　　即 $a+b = 2A_1,$

$$\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 \qquad b-a = \sqrt{12(A_2 - A_1^2)}$$

例2（续）

即 $a+b=2A_1$， $b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)}$

解得：

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\bar{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\bar{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

$$A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

例3 设总体X的均值μ，方差σ^2都存在，且$\sigma^2>0$，但μ，σ^2未知，又设$X_1,\cdots,X_n$是一个样本；

求：μ,σ^2的矩估计量。

解：$\mu_1=EX=\mu$,

$$\mu_2=EX^2=DX+(EX)^2=\sigma^2+\mu^2$$

令 $\mu_1=A_1$，$\mu_2=A_2$，

即 $\mu=A_1$，$\sigma^2+\mu^2=A_2$，

所以 $\hat{\mu}=A_1=\overline{X}$,

$$\hat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

特别，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知；

则
$$\hat{\mu}=\overline{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

例4 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，其中 $\lambda>0$未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是从该总体中抽取的一个样本，试求参数 λ 的矩估计.

解：总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

所以，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$

令

$$\overline{X}=\frac{1}{\lambda},$$

得参数λ的矩估计量为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}.$$

例5 设总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

其中$\alpha>0$为未知参数，试求参数α的矩估计

解：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}x\cdot(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

令 $$\overline{X}=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

由此得α的矩估计量为$\hat{\alpha}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

例6 设总体X服从$\Gamma-$分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\alpha>0$，$\beta>0$为未知参数，试求参数α与β的矩估计。

解：$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\,\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}x^{(\alpha+1)-1}e^{-\beta x}dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\,\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\beta\,\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

例6(续)

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} x^{(\alpha+2)-1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

因此有 $\begin{cases} EX = \dfrac{\alpha}{\beta}, \\ EX^2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}. \end{cases}$ 令 $\begin{cases} A_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}, \\ A_2 = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}. \end{cases}$

例6(续)

解此方程组，得

$$\begin{cases}\hat{\alpha}=\dfrac{A_1{}^2}{A_2-A_1{}^2},\\[2ex]\hat{\beta}=\dfrac{A_1}{A_2-A_1{}^2}.\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}\hat{\alpha}=\dfrac{\overline{X}^2}{B_2},\\[2ex]\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{B_2}.\end{cases}$$

其中 $B_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 为样本的二阶中心矩.

- 作业:1,6

三、 极大似然法

1) 若总体X属离散型，其分布律

$$P\{X=x\}=p(x;\theta),\theta\in\Theta$$

的形式为已知，θ为待估参数，Θ是θ可能取值的范围

设$X_1,\cdots,X_n$是来自X的样本，则$X_1,\cdots,X_n$的联合分布律：

$$\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

又设$x_1,\cdots,x_n$是$X_1,\cdots,X_n$的一个样本值，

易知样本$X_1,\cdots,X_n$取$x_1,\cdots,x_n$的概率，亦即

事件$\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\}$发生的概率为：

$$L(\theta) = L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta), \theta \in \Theta.$$

它是θ的函数. $L(\theta)$称为样本的似然函数

极大似然法原理：

固定$x_1, \cdots, x_n$，挑选使概率$L(x_1, \cdots, x_n; \theta)$达到最大的参数$\hat{\theta}$，作为$\theta$的估计值，即取$\hat{\theta}$使得：

$$L(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \cdots, x_n; \theta)$$

$\hat{\theta}$与$x_1, \cdots, x_n$有关，记为$\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$;

称其为参数θ的极大似然估计值.

$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$称为参数$\theta$的极大似然估计量。

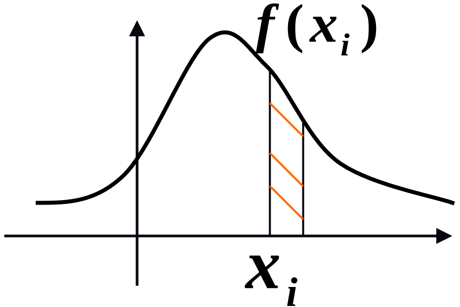
这种求未知参数θ的方法称为极大似然法

2) 若总体X属连续型，其概率密度$f(x;\theta),\theta\in\Theta$的形式已知，$\theta$为待估参数. 则$X_1,\cdots,X_n$的联合密度:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

设$x_1,\cdots,x_n$是相应$X_1,\cdots,X_n$的一个样本值，则随机点$(X_1,\cdots,X_n)$落在$(x_1,\cdots,x_n)$的邻域（边长分别为$dx_1,\cdots,dx_n$的n维立方体）内的概率近似为:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_i$$



在得到观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的前提下，自然应当选取使得

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_i$$

达到最大的θ值作为未知参数θ的估计值

因为当未知参数θ等于这个值时，出现给定的那个样本观测值的可能性最大.

但$\prod_i dx_i$不随θ而变，故只需考虑：

$$L(\theta) = L(x_1,\cdots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

的最大值，这里$L(\theta)$称为样本的似然函数。

若 $L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$

则称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$的极大似然估计值。

称$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的极大似然估计量。

一般，$p(x;\theta)$, $f(x;\theta)$关于θ可微，故θ可由下式求得：

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0$$ ------似然方程

又因$L(\theta)$与$\ln L(\theta)$在同一θ处取到极值，因此θ的极大似然估计θ也可从下述方程解得：

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$$ ------对数似然方程

若总体的分布中包含多个参数，

即可令 $\dfrac{\partial L}{\partial \theta_i}=0, i=1,\cdots,k$ -----似然方程组

或 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}=0, i=1,\cdots,k$ -----对数似然方程组

解k个方程组求得$\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计值。

即可得$\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计量。

一般来讲，极大似然估计优于矩估计，因而在应用中，我们应当尽可能地使用极大似然估计.

极大似然法求估计量的步骤：(一般情况下)

1) 构造似然函数$L(\theta)$：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i)\ (\text{离散型}),\quad L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\ (\text{连续型});$$

2) 取对数：$\ln L(\theta)$;

3) 令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$;

4) 解似然方程得θ的极大似然估计量$\hat{\theta}$.

说明：若似然方程（组）无解，或似然函数不可导，此法失效，改用其它方法。

例1 设$X \sim B(1,p)$; $X_1,\cdots,X_n$是来自X的一个样本，试求参数p的极大似然估计量。

解：设$x_1,\cdots,x_n$是一个样本值。X的分布律为：

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1;$$

故似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

而 $$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p).$$

例1（续）

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$$

令 $\frac{d}{dp}\ln L(p)=0$,即 $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0.$

解得p的极大似然估计值 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$

p的极大似然估计量为

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$$

-------它与矩估计量是相同的。

例2 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$; μ已知， σ^2为未知参数， $x_1,\cdots,x_n$ 是来自X的一个样本值，**求σ^2的极大似然估计量**

解：

X的概率密度为：

$$f(x;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为:

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

例2（续）

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d\ln L}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令： $\dfrac{d\ln L}{d\sigma^2} = 0$，

得似然方程 $-\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$

解此方程，得 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

因此 σ^2 的极大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

例3 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$; μ,σ^2为未知参数，$x_1,\cdots,x_n$是来自X的一个样本值，求μ,σ^2的极大似然估计量

解：X的概率密度为：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

例3（续）

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases}$ 即：$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$

解得：$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}$， $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

故μ,σ^2的极大似然估计量为:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \bar{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

例4 设总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中θ未知，$\theta>1$，X_1，$\cdots$，X_n是从该总体抽取的一个样本．试求θ的极大似然估计．

解：似然函数为

$$L(\theta)=\theta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1},$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

例4（续） $\ln L = n\ln\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令： $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = 0$，

得似然方程为 $\dfrac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$,

解得 $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$,

因此θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

例5 设$X \sim U[a,b]$;a,b未知，$x_1,\cdots,x_n$是一个样本值，求：a,b的极大似然估计量

分析：X的概率密度为：$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

似然函数为

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}\quad (a<x_i<b,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\ln L(a,b)=-n\ln(b-a),$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\ln L(a,b)=\frac{n}{b-a}=0;\quad \frac{\partial}{\partial b}\ln L(a,b)=-\frac{n}{b-a}=0,$$

显然，似然方程组无解，但这不能说明不存在极大似然估计量，只是不能由似然方程组求解。

例5（续）

解： 将$x_1,\cdots,x_n$按从小到大顺序排列成

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)},$$

则
$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)} \le b; \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于满足$a \le x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)} \le b$的任意$a,b$有

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(n)}-x_{(1)})^n}$$

例5（续）

即：$L(a,b)$在$a=x_{(1)},b=x_{(n)}$时，

取最大值$(x_{(n)}-x_{(1)})^n$

故a,b的极大似然估计值为

$$\hat{a}=x_{(1)}=\min x_i,\quad \hat{b}=x_{(n)}=\max x_i,$$

故a,b的极大似然估计量为

$$\hat{a}=\min X_i,\quad \hat{b}=\max X_i.$$

例6 一个罐子里装有黑球和白球，有放回地抽取 n 个球，发现有 k 个黑球。试求罐子里黑球数与白球数之比 R 的极大似然估计量。

解： 设罐中装有 a 只黑球 b 只白球，则 $R=\dfrac{a}{b}$.

设 $$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次摸到黑球；}\\ 0, & \text{第}i\text{次摸到白球.}\end{cases}\quad i=1,\cdots,n.$$

则 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim b(1,p)$ 的样本,

其中 $$p=P\{X_i=1\}=\frac{a}{a+b}=\frac{R}{1+R}.$$

$$p=\frac{R}{1+R}$$

似然函数 $L(R)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{R}{1+R}\right)^{x_i}\left(1-\frac{R}{1+R}\right)^{1-x_i}=\left(\frac{R}{1+R}\right)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(1-\frac{R}{1+R}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

则 $\ln L=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\left(\frac{R}{1+R}\right)+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\left(\frac{1}{1+R}\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i[\ln R-\ln(1+R)]\ -\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1+R)]$$

令 $\frac{d\ln L}{dR}=0$, 则 $\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{1+R}\right)-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{1+R}=0$

解出 $\hat{R}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{k}{n-k}.$

极大似然估计性质：

设θ的函数$u=u(\theta),\theta\in\Theta$具有单值反函数，$\hat{\theta}$是$\theta$的极大似然估计；则$\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的极大似然估计。

例： $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的极大似然估计，

$u=u(\sigma^2)=\sqrt{\sigma^2}$有单值反函数$\sigma^2=u^2,(u\geq 0)$

故 $\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 是σ的极大似然估计.

例7 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知，求使$P\{X > A\} = 0.05$的点A的极大似然估计量

解： $$P\{X > A\} = 1 - \Phi\left(\frac{A-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$$

查表有 $\frac{A-\mu}{\sigma} = 1.645$, 所以 $A = \mu + 1.645\sigma$.

由前面知μ和σ^2的极大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

所以A的极大似然估计量为

$$\hat{A} = \hat{\mu} + 1.645\hat{\sigma} = \overline{X} + 1.645\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$$

- 作业:7,8

§2 估计标准

§3 估计量的评选标准

1. 无偏性：若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$的数学期望存在，

且$E\hat{\theta}=\theta.$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

2. 有效性：若$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$

都是θ的无偏估计量；若$\mathrm{D}(\hat{\theta}_1)<\mathrm{D}(\hat{\theta}_2).$

则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效。

3. 一致性：若$\hat{\theta}=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\longrightarrow\infty$时$\hat{\theta}\xrightarrow{p}\theta.$

则称$\hat{\theta}$是θ的一致估计(相合估计量).

返回主目录

例 **1**. 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)(k \geq 1)$ 存在，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本. 试证明不论总体服从什么分布，k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 k 阶的总体矩 μ_k 无偏估计量。

证　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 同分布，故有

$$\mathrm{E}(X_i^k) = \mathrm{E}(X^k) = \mu_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

即有

$$E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \mu_k$$

例 2. 样本 X_1，X_2，X_3 来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $Y=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+aX_3$ 为 μ 的无偏估计量,则 a 为多少?

分析：由于 $Y=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+aX_3$ 为 μ 的无偏估计量,于是

$$E(Y)=(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+a)\mu=\mu \quad ,$$

从而 $a=\frac{1}{2}$.

例 3. 设总体 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

其中参数$\theta>0$为未知，又设 X_1，$X_2,\cdots,X_n$是总体 X 的一个样本，

试证: $\overline{X}$ **和** $nZ=n$ **[min(**X_1，$X_2,\cdots,X_n$**)]都是**θ**的无偏估计量.**

证　因为$E(\overline{X})=E(X)=\theta$，所以$\overline{X}$是$\theta$的无偏估计量. 而 Z =**min(**$X_1,X_2,\cdots,$

X_n**)**具有概率密度　$f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-nx/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

（由 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n$ ）

故知 $E(Z)=\dfrac{\theta}{n}$， $E(nZ)=\theta$.

即 nZ 也是参数 θ 的无偏估计量.

由此可见一个未知参数可以有不同的无偏估计量. 事实上，在本例中 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 中的每一个都可以作为 θ 的无偏估计量.

例 4 .（续例 3 ）试证当 $n>1$时，θ 的无偏估计量 $\overline{X}$ 较 θ 的无偏估计量 nZ 有效.

证 由于 $D(X)=\theta^2$，故有 $D(\overline{X})=\theta^2/n$.

再者，由于 $D(Z)=\theta^2/n^2$，故有 $D(nZ)=\theta^2$，

当 $n>1$时 $D(nZ)>D(\overline{X})$，故 $\overline{X}$ 较 nZ 有效.

例5 设总体 X 服从区间 $[0,\ \theta]$ 上的均匀分布，其中 $\theta > 0$ 为未知参数，$X_1, \cdots, X_n$ 是从该总体中抽取的一个样本.求 θ 的矩估计和极大似然借，并验证是否是无偏估计

解: $EX = \dfrac{\theta}{2}$，令 $\overline{X} = \dfrac{\theta}{2}$，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

由于 $E(\hat{\theta}) = E(2\overline{X}) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = 2 \cdot \dfrac{\theta}{2} = \theta$,

因此 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 是未知参数 θ 的无偏估计.

在上一节我们知道

θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_L = \max\limits_i X_i$,

$\hat{\theta}_L = \max\limits_i X_i$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \left(x/\theta\right)^n, & 0 \le x < \theta, \\ 1, & x \ge \theta. \end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_L = \int_0^{\theta} x \cdot n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \theta \quad \ne \theta$$

$\hat{\theta}_L$ 不是 θ 的无偏估计量

例6 若$X_1,\cdots,X_n$是总体X的样本，$EX=\mu$，$EX^k=\mu_k$，由辛钦大数定律，知

对于任意给定的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k-\mu_k\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

因此，样本的k阶原点矩$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$是总体$k$阶原点矩$\mu_k=EX^k$的一致估计量.

相合性是对一个估计量的基本要求，若估计量不具有相合性，那么不论将样本容量n取得多么大，都不能将估计得足够准确，这样的估计量是不可取的.

上述无偏性，有效性，相合性是评价估计量的一些基本标准，其他的标准这里就不讲了.

- 作业:10,11

§4 正态总体统计量的分布

χ^2-分布

$t-$分布

$F-$分布

正态总体的样本均值
与样本方差的分布

一、χ^2－分布

设$(X_1,\cdots X_n)$为来自于正态总体$N(0,1)$的样本，

则称统计量： $$\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

所服从的分布为自由度是n的χ^2分布。

记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

χ^2分布的性质：

1) 若 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, 且$X$，$Y$独立，则有

$$X + Y \sim \chi^2(m+n)$$

2) 若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则 $E\chi^2 = n, \quad D\chi^2 = 2n.$

证: $\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$

$X_i \sim N(0,1),$

$EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = 1,$

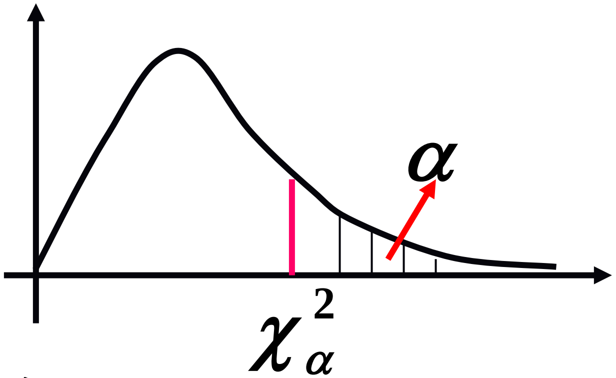
$DX_i^2 = EX_i^4 - (EX_i^2)^2 = 3 - 1 = 2, \quad i = 1,2,\cdots n$

所以 $E\chi^2 = E(\sum_{i=1}^n X_i^2) = \sum_{i=1}^n EX_i^2 = n$

$$D\chi^2 = D(\sum_{i=1}^n X_i^2) = \sum_{i=1}^n DX_i^2 = 2n$$

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$$



的点$\chi^2_\alpha(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点。

当n充分大时，$\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

z_α是标准正态分布的上α分位点。

例1

设$(X_1,\cdots X_n)$为来自于正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，

则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim$ ____$\chi^2(n)$____.

解： $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1),\ i=1,\cdots,n,$ 且它们独立.

则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$

二、$t-$分布

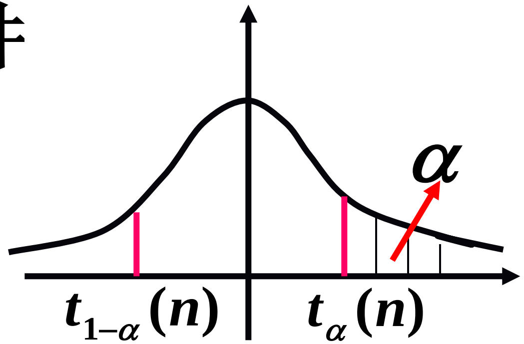
$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, X,Y独立，则称随机变量

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

所服从的分布为自由度是n的$t-$分布，记作$t \sim t(n)$.

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$$



的点$t_\alpha(n)$为t分布的上α分位点。

由概率密度的对称性知: $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

当$n>45$时，$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$

三、$F-$分布

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$，$X, Y$ 独立，则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$ 所服从的分布为自由度

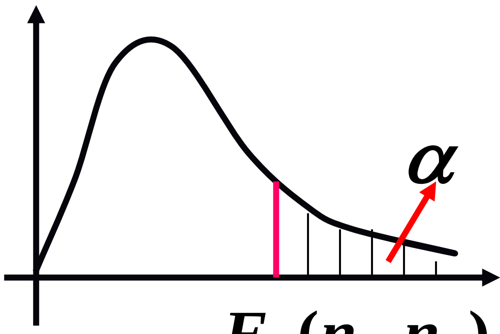
是n_1, n_2 的 $F-$分布，记作$F \sim F(n_1, n_2)$.

定理： 若 $F \sim F(n_1, n_2)$,则 $1/F \sim F(n_2, n_1)$.

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件：

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$$

的点$F_\alpha(n_1, n_2)$为F分布的<u>上α分位点</u>。



结论：$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = 1/F_\alpha(n_2, n_1)$

$$P\{F > F_{\alpha}(n_1,n_2)\} = \alpha$$

证明：若$F \sim F(n_1,n_2)$

$$1-\alpha = P\{F > F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\} = P\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\}$$

$$= 1 - P\{\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\}$$

所以 $P\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\} = \alpha$

又因为 $1/F \sim F(n_2,n_1)$， 所以 $F_{\alpha}(n_2,n_1) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$

即 $$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$$

四、正态总体的样本均值与样本方差的分布：

定理1 设$X_1,\cdots,X_n$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值与样本方差，则有：

(1) $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$;

(2) $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1);$$

(3) $\overline{X}$与S^2独立。

例2 设X_1, X_2, X_3是总体$N(2,9)$的样本,

求(1)$P\{\overline{X} > 3\}$; (2)$P\{|\overline{X} - 2| > 1\}$;(3)$P\{S^2 > 26.955\}$;

(4)$P\{\max(X_1, X_2, X_3) > 4\}$; (5)$P\{\min(X_1, X_2, X_3) < 0\}$.

解:

（1） 由于 $\overline{X} \sim N(2,3)$,

所以 $$P\{\overline{X} > 3\} = 1 - \Phi(\frac{3-2}{\sqrt{3}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$= 1 - \Phi(0.58) \quad = 1 - 0.7190 = 0.281$$

（2） $$P\{|\overline{X} - 2| > 1\} = 1 - P\{|\overline{X} - 2| \le 1\}$$

$$= 1 - P\{-\frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{\overline{X} - 2}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

例2（续）

$$=1-P\{-\frac{1}{\sqrt{3}}\le\frac{\overline{X}-2}{\sqrt{3}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\}=1-[\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}})-\Phi(-\frac{1}{\sqrt{3}})]$$

$$=2-2\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}})\ =2\times[1-\Phi(0.58)]$$

$$=2\times[1-0.7190]=0.562$$

（3） 由于 $(3-1)S^2 / 9 \sim \chi^2(2)$，故

$$P\{S^2>26.955\}=P\{2S^2/9>5.99\}\ \approx 0.05$$

例3（续）

（4） $P\{\max(X_1,X_2,X_3)>4\}$

$$=1-P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le 4\}$$

$$=1-P\{X_1\le 4,X_2\le 4,X_3\le 4\}$$

$$=1-P\{X_1\le 4\}P\{X_2\le 4\}P\{X_3\le 4\}$$

$$=1-[\Phi(\frac{4-2}{3})]^3$$

$X_1\sim N(2,9)$

$$=1-[\Phi(0.67)]^3$$

$$=1-(0.7486)^3$$

$$=0.58$$

例3（续）

（5） $P\{\min(X_1,X_2,X_3)<0\}$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,X_3)\geq 0\}$$

$$=1-P\{X_1\geq 0,X_2\geq 0,X_3\geq 0\}$$

$$=1-P\{X_1\geq 0\}P\{X_2\geq 0\}P\{X_3\geq 0\}$$

$$=1-[1-\Phi(\frac{0-2}{3})]^3 \qquad X_1\sim N(2,9)$$

$$=1-[1-1+\Phi(0.67)]^3$$

$$=1-(0.7486)^3$$

$$=0.58$$

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

定理2 $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证明：$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

且它们独立。

则由t-分布的定义：$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim t(n-1)$$

即：$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

定理3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且它们独立

设 $\overline{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$， $\overline{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$ 分别是两个样本的均值。

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2,\ S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2$$

分别是两个样本的方差 则有：

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

证明: $\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2})$,

所以 $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim N(0,1),$$

且 $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$,

它们独立.

则 $$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2).$$

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$$

由$t-$分布的定义：

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}/(n_1+n_2-2)}$$

$$\sim t(n_1+n_2-2)$$

即：$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

定理4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots Y_{n_2}$ 分别是两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且它们独立。

则： (1) $$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/\sigma_2^2}\cdot\frac{n_2}{n_1} \sim F(n_1, n_2)$$

(2) $$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2/\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2/\sigma_2^2}\cdot\frac{n_2-1}{n_1-1}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\sim F(n_1-1, n_2-1)$$

例4

设$X_1,\cdots,X_n$是总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本,则

$$E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\}=\sigma^2 E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma^2\right\}$$

$$=\underline{\quad(n-1)\sigma^2\quad}.\qquad\left(\because \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)\right)$$

同理 $$D\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\}=\sigma^4 D\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma^2\right\}$$

$$=\underline{\quad 2(n-1)\sigma^4\quad}.$$

例4（续）

$$E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\}=\sigma^2 E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2\right\}=\underline{\ n\sigma^2\ }.$$

$$(\because \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2\sim\chi^2(n))$$

$$D\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\}=\sigma^4 D\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2\right\}=\underline{\ 2n\sigma^4\ }.$$

例4（续）

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim \underline{\quad t(n-1) \quad};$$

$$\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} = \frac{(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \,/\, \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

例4（续）

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \underline{\chi^2(n)}.$$

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

例4（续）

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \underline{\chi^2(1)}.$$

因为 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), i=1,\cdots,n,$ 且它们独立.

所以 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,n),$ 故 $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1),$

则 $\displaystyle\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right\}^2 \sim \chi^2(1).$

1 给出了总体、个体、样本和统计量的概念，要掌握样本均值和样本方差的计算及基本性质。

2 引进了 χ^2分布、t分布、F分布的定义，会查表计算。

3 掌握正态总体的某些统计量的分布。

作业：15,16,17,20

§5 置信区间

- 置信区间与置信度
- 一个正态总体未知参数的置信区间
- 两个正态总体中未知参数的置信区间

在统计推断中，未知参数 θ 的点估计 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 是一种有用的形式，一旦得到了样本观测值 $(x_1, \cdots, x_n)$，估计值 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 能使我们对未知参数 θ 的值有一个明确的数量概念.

但是，点估计值 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 仅仅是未知参数 θ 的一个近似值，没有反映出这个近似值的误差范围，这在应用上是非常不方便的.

区间估计就是根据样本给出未知参数的一个范围，并希望知道这个范围包含该参数的可信程度。

一、置信区间与置信度

定义：设总体X含一待估参数θ；对于样本$X_1,\cdots,X_n$，找出统计量$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n)(i=1,2),\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2$，使得：

$$P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha,\quad (0<\alpha<1)$$

称区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$是一个随机区间.

$1-\alpha$给出该区间含真值θ的可靠程度，α表示该区间不包含真值 θ 的可能性.

例如：若$\alpha=5\%$，即置信度为$1-\alpha=95\%$.
这时重复抽样100次，则在得到的100个区间中包含θ 真值的有95个左右，不包含θ 真值的有5个左右.

通常，采用95%的置信度，有时也取99%或90%.

例1 设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$的一个样本,其中σ_0^2已知。求μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解： 构造样本的函数 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$

则
$$P\left\{-z_{\alpha/2}<\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma_0/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即
$$P\left\{\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

则
$$\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

就是μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

求置信区间的步骤:

(1) 找一个样本的函数 $Z = Z(X_1,\cdots,X_n;\theta)$, 它包含待估参数 θ，而不包含其它未知参数.且 Z的分布是已知的，不依赖于未知参数 θ.

(2) 对给定的置信度 $1-\alpha$，确定常数 a,b, 使

$$P\{a < Z < b\} = 1-\alpha.$$

(3) 从不等式 $a < Z(X_1,\cdots X_n;\theta) < b$ 得到等价的不等式 $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$, 其中 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1,\cdots X_n)$，$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1,\cdots X_n)$ 都是统计量.

(4) 随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

二、一个正态总体未知参数的置信区间

1） 均值的区间估计

设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,

在置信度$1-\alpha$下，来确定μ的置信区间(θ_1, θ_2).

(1)方差已知时，估计均值

设已知方差$\sigma^2=\sigma_0^2$,

构造样本的函数 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

对于给定的置信度$1-\alpha$，查正态分布表，找出λ_1，λ_2，使得：

$$P\{\lambda_1 < U < \lambda_2\} = 1-\alpha.$$

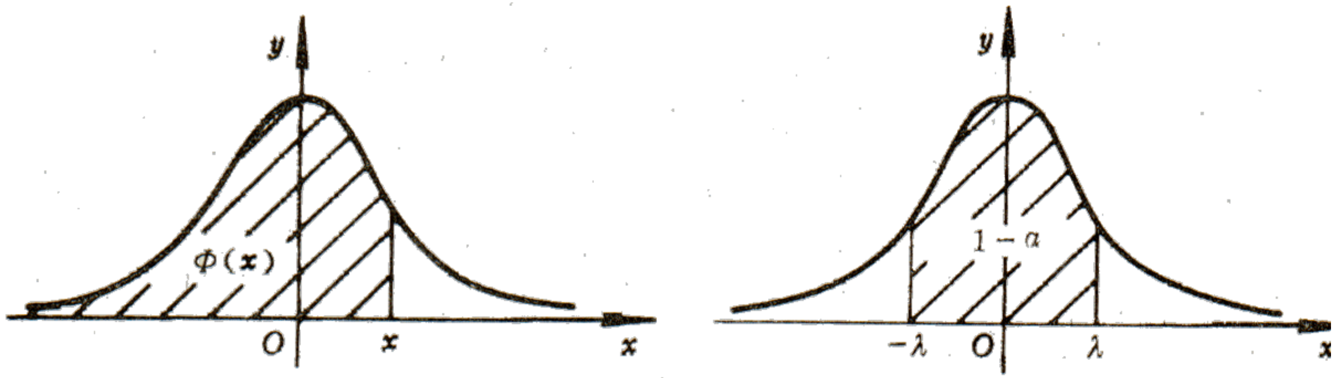
由此可找出无穷多组λ_1，λ_2；通常我们取对称区间$(-\lambda,\lambda)$，使：

$$P\{|U| < \lambda\} = 1-\alpha$$

即：

$$P\{-\lambda < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0\sqrt{n}} < \lambda\} = 1-\alpha$$

由正态分布表的构造,$P\{|U|<\lambda\}=1-\alpha$, 可知:



查正态分布表$\Phi(\lambda)=1-\alpha/2, \lambda=z_{\frac{\alpha}{2}}$,得:

$$-z_{\alpha/2}<\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_0}<z_{\alpha/2}$$

推得,随机区间:$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

是μ的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 .

说明:

（1）置信区间不唯一，在置信度固定的条件下，置信区间越短，估计精度越高。

（2）在置信度固定的条件下，n 越大，置信区间越短，估计精度越高。

（3）在样本量 n 固定时，置信度越大，置信区间越长，估计精度越低。

例2 已知幼儿身高服从正态分布，现从5~6岁的幼儿中随机地抽查了9人，其高度分别为：
115,120,131,115,109,115,115,105,110（cm）；
假设标准差$\sigma_0 = 7$，置信度为95%；
试求总体均值μ的置信区间

解：已知$\sigma_0 = 7, n = 9, \alpha = 0.05.$ 由样本值算得：

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(115 + 120 + \cdots + 110) = 115$$

查正态分布表得临界值$z_{0.025} = 1.96$，由此得置信区间：

$$(115 - 1.96 \times 7/\sqrt{9}\,,\, 115 + 1.96 \times 7/\sqrt{9})$$

$$= (110.43\,,\, 119.57)$$

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

(2) 方差未知时，估计均值

由于方差σ^2未知，

而选取样本函数： $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$

对于给定的$1-\alpha$，查t分布表，找λ_1与λ_2，使得：

$$P\{\lambda_1<T<\lambda_2\}=1-\alpha,$$

我们仍然取成对称区间$(-\lambda,\lambda)$，使得：

$$P\{|T|<\lambda\}=1-\alpha,$$

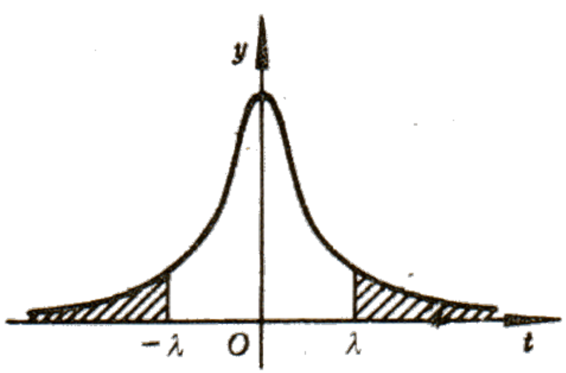
即 $$P\{-\lambda < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < \lambda\} = 1-\alpha,$$

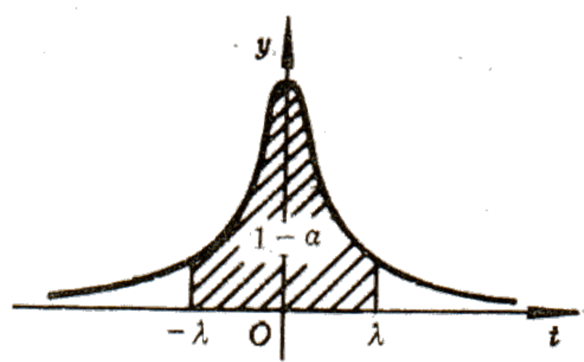
由t分布表的构造及$P\{|T| < \lambda\} = 1-\alpha$，可知：

$\lambda = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，由此得：

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

推得，置信区间为 $(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$





例3 用仪器测量温度，重复测量7次，测得温度分别为：120,113.4,111.2,114.5,112.0,112.9,113.6度；设温度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$。

在置信度为95%时，试求温度的均值μ的所在范围

解：已知 $n=7, \alpha=0.05.$ 由样本值算得

$$\bar{x}=113.94, \quad s=2.88.$$

查表得 $t_{0.025}(6)=2.447.$ 由此得置信区间：

$$\left(113.94-2.447\times\frac{2.88}{\sqrt{7}}, \quad 113.94+2.447\times\frac{2.88}{\sqrt{7}}\right)$$

$$=(111.28, \quad 116.60)$$

$$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

2）方差的区间估计

设$X_1,\cdots,X_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本.

样本函数：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$

对于给定的$1-\alpha$，查χ^2分布表，得λ_1与λ_2，使得：

$$P\{\lambda_1<\chi^2<\lambda_2\}=1-\alpha,$$

虽然χ^2分布密度函数无对称性，我们仍采用使概率对称的区间：

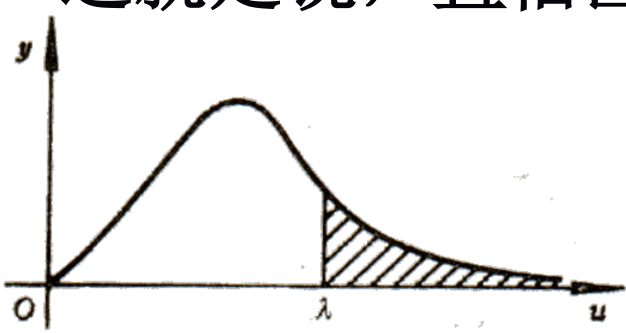
$$P\{\chi^2<\lambda_1\}=P\{\chi^2>\lambda_2\}=\alpha/2,$$

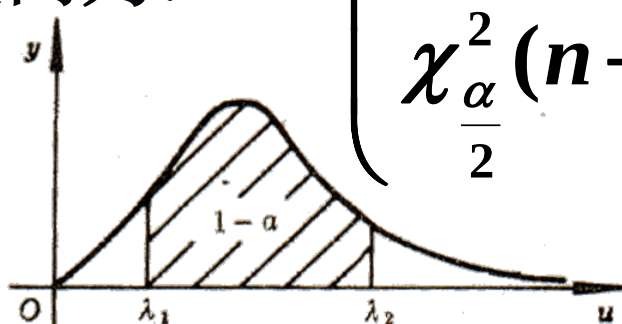
查$\chi^2(n-1)$分布表,得$\lambda_2=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, $\lambda_1=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$。

由此得: $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

推得: $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

这就是说,置信区间为: $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$





例4 设某机床加工的零件长度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽查16个零件，测得长度（单位：mm）如下：

12.15，12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01，
12.06，12.13，12.07，12.11，12.08，12.01，12.03，12.06，

在置信度为95%时，试求总体方差 σ^2 的置信区间.

解：已知 $n=16, \alpha=0.05.$ 由样本值算得 $s^2=0.00244.$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表，得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.5, \chi^2_{0.975}(15)=6.26.$

由此得置信区间：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

$$\left(\frac{15\times 0.00244}{27.5}, \frac{15\times 0.00244}{6.26}\right)=(0.0013, 0.0059)$$

一个正态总体未知参数的置信区间

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
μ	σ^2已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,\ 1)$	$\overline{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$
σ^2	μ已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$　$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}$
	μ未知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$\chi^2(n-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$　$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

三、两个正态总体中未知参数的置信区间

二、两个总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情况

在实际中常遇到下面的问题，已知产品的某一质量指标服从正态分布，但由于原料，设备条件，工艺过程的改变等因素，引起总体均值，总体方差有所改变，我们需要知道这些变化有多大，这就需要考虑两个正态总体均值差式方差比的估计问题.

设已经定置信水平为$1-\alpha$，并设$X_1, X_2,\cdots,X_{n_1}$

是来自第一总体的样本；Y_1，$Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是来自第二总

体的样本,这两个样本相互独立.且设$\overline{X}$,$\overline{Y}$分别为第

一、二个总体的样本均值，S_1^2, S_2^2分别是第一、二个

总体的样本方差.

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

（a） σ_1^2，σ_2^2 均为已知.

因 $\bar{X}$，$\bar{Y}$ 分别为 μ_1，μ_2 的无偏估计，故 $\bar{X}-\bar{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计. 由

$\bar{X}$，$\bar{Y}$ 的独立性以及 $\bar{X}\sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$，$\bar{Y}\sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ 得

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

或

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0, 1)$$

即得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个定置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

（b） $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但 σ^2 为为未知.

由第六章 §4 定理 2

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

从而可得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个定置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_\omega^{\ 2}=\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}$， $S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$.

1. 两个总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况，由第六章§2 定理四

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

并且分布 $F(n_1-1, n_2-1)$ 不依赖于任何未知参数，故有

$$\mathrm{P}\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha .$$

即
$$\mathrm{P}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\} = 1-\alpha \quad .$$

这就得到方差 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right).$$

两个正态总体未知参数的置信区间（一）

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2、σ_2^2 均已知	$\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,\ 1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 但未知	$\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$

其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

两个正态总体未知参数的置信区间（二）

待估参数		随机变量	随机变量的分布	双侧置信区间的上、下限
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1、μ_2均已知	$\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/\sigma_1^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2/\sigma_2^2}$	$F(m,\ n)$	$\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\cdot\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}$, $\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\cdot\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{m\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}$
	μ_1、μ_2均未知	$\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,\ n-1)$	$\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, $\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

例5 为比较甲乙两类试验田的收获量，随机抽取甲类试验田8块，乙类试验田10块，分别测得其收获量如下（单位：kg）：

甲类： 12.6， 10.2， 11.7， 12.3， 11.1， 10.5， 10.6， 12.2，

乙类： 8.6， 7.9， 9.3， 10.7， 11.2， 11.4， 9.8， 9.5， 10.1， 8.5，

假设两类试验田的收获量都服从正态分布，且方差相同．试在置信度$1-\alpha=0.95$下，求两个总体期望差$\mu_1-\mu_2$的置信区间．

解： 样本的函数

$$T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)<T<t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}=1-\alpha$$

由

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)<\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$$

有

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}<\left(\mu_1-\mu_2\right)$$

$$<\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)+t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

由样本观测值

$$m=8,\quad \bar{x}=11.4,\quad s_1^2=0.851,$$
$$n=10,\quad \bar{y}=9.7,\quad s_2^2=1.378,$$

又由$1-\alpha=0.95$，得 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025$

查表，得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=t_{0.025}(16)=2.12$

将上面各数代入置信区间端点得计算公式，得

$$(\bar{x}-\bar{y})-t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=(11.4-9.7)-2.12\times1.07\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=0.624$$

$$(\bar{x}-\bar{y})+t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=(11.4-9.7)+2.12\times1.07\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}=2.776$$

所求置信区间为$[0.624,\quad 2.776]$.

$$S_w^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

例6 研究由机器A与机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器A生产的产品18只，测得其样本方差为$s_1^2=0.34(\mathrm{mm}^2)$；随机抽取机器$B$生产的产品13只，测得其样本方差为$s_2^2=0.29(\mathrm{mm}^2)$．假设两个机器生产的钢管的内径均服从正态分布，其总体期望与总体方差均未知．又设两样本相互独立．试在置信度$1-\alpha=0.90$下求两总体方差比σ_1^2/σ_2^2的置信区间．

解：样本的函数

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1),$$

由
$$P\left\{ a < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < b \right\} = 1-\alpha$$

取
$$a = F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, \quad n-1), \ b = F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, \quad n-1),$$

因此，得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, \quad n-1)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, \quad n-1)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$$

由样本观测值 $m=18,\quad s_1^2=0.34,$

$n=13,\quad s_2^2=0.29,$

又由$1-\alpha=0.90$，得 $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.95,\quad \dfrac{\alpha}{2}=0.05$

查表，得$F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)=F_{0.05}(17,\ 12)=2.59$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)=F_{0.95}(17,\ 12)=\frac{1}{F_{0.05}(12,\ 17)}=\frac{1}{2.38}$$

将上面各数代入置信区间端点得计算公式，得

$$\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.45,\qquad \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}=2.79,$$

所求置信区间为$(0.45,\ 2.79)$.

四、（0-1）分布参数的置信区间

设有一容量 $n>50$ 的大样本，它来自 (0−1) 分布的总体 X ，X 的分布律为

$$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1,$$

其中 p 为未知参数。现在来求 p 的置信水平为 1—α 的置信区间

已知 (0−1) 分布的均值和方差分别为：$\mu=p,\sigma^2=p\ (1-p)$.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一个样本. 因样本容量 n 较大，由中心极限定理，知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布

于是有

$$P\left\{-z_{\alpha/2}<\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

而不等式

$$-z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_{\frac{\alpha}{2}}$$

等价于

$$(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)p+n\overline{X}^2<0$$

记

$$p_1=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)$$

$$p_2=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)$$

此处

$$a=(n+z_{\alpha/2}^2),\ b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2),\ c=n\overline{X}^2$$

则p的一个近似置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$(p_1,p_2)$$

例7 设在一大批产品中抽取100个产品，得一级品60个，求这批产品一级品率p的置信度0.95的置信区间。

解： 一级品率p是（0-1）分布的参数，此处 n=100，

$$\bar{x}=0.6, 1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, \quad z_{0.025}=1.96$$

$$a=(n+z_{\alpha/2}^{2})=103.84,$$

$$b=-(2n\overline{x}+z_{\alpha/2}^{2})=-123.84,$$

$$c=n\overline{x}^{2}=36.$$

于是 $p_1=0.5,\quad p_2=0.69.$

故得 p 的置信度0.95的置信区间为（0.50，0.69）。

五、单侧置信区间

定义： 设总体X含一待估参数θ；对于样本$X_1,\cdots,X_n$，有统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，使得

$$P\{\underline{\theta}<\theta\}=1-\alpha,\quad (0<\alpha<1)$$

称区间$(\underline{\theta},\ \infty)$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间，

称$\underline{\theta}$为θ的单侧置信下限

若统计量$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，使

$$P\{\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha,\quad (0<\alpha<1)$$

称区间$(-\infty,\overline{\theta})$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间，称$\overline{\theta}$为$\theta$的单侧置信上限.

例如对于正态总体 X，若均值 μ，方差 σ^2 均为未知，设

$X_1\ X_2$，……, X_n 是一个样本,由

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

有 $$p\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\mu>\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

于是得到 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),\infty\right).$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1).$$

又由 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

有 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间 $\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$.

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限为 $\overline{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$

例 从一批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验，测得寿命(以小时计为

1050 1100 1120 1250 1280

设灯泡寿命服从正态分布. 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $1-\alpha=0.95$, n=5, $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$, $\bar{x}=1160$,

$s^2=9950$.

由此可得所求单侧置信下限为

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065$$

- 作业:21,23,25,26,28,30