北京交通大学
BeiJing JiaoTong University

概率论与数理统计
期末复习

单选

例1. 设 $\boldsymbol{A,B}$ 是两个随机事件，

$$\boldsymbol{P(A)}=0.6,\ \boldsymbol{P(B)}=0.5,\ \boldsymbol{P(A-B)}=0.4，求 \boldsymbol{P(A|A\cup B)}.$$

（A）$\dfrac{9}{10}$．（B）$\dfrac{2}{3}$．（C）$\dfrac{3}{5}$．（C）$\dfrac{1}{5}$．

解： $$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.6-0.4=0.2}$$

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.5-0.2=0.9}$$

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

单选

例 2. 设随机变量 X 服从 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$,$Y$ 服从 $N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，且

$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则

（A）$\sigma_1<\sigma_2$.（B）$\sigma_1>\sigma_2$.（C）$\mu_1<\mu_2$.（D）$\mu_1>\mu_2$.

解 $$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=P\left\{-\frac{1}{\sigma_1}<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}$$

$$=\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-\Phi(-\frac{1}{\sigma_1})=2\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-1$$

同理 $$P\{|Y-\mu_2|<1\}=2\Phi(\frac{1}{\sigma_2})-1$$

从而 $$\Phi(\frac{1}{\sigma_1})>\Phi(\frac{1}{\sigma_2}) \qquad \frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$$

即 $\sigma_1<\sigma_2$ 从而应选（A）

单选

例 3. 设 X 与 Y 独立同分布，且 $X \sim U[0,\ 3]$，则

$P(\max\{X,Y\}>1)=$【 C 】.

（A）$\frac{1}{3}$ （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{8}{9}$ （D）$\frac{1}{9}$.

解：由题意，有 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le x\le 3\\ 0, & other\end{cases}$，$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\le y\le 3\\ 0, & other\end{cases}$

$$P\{\max\{X,Y\}>1\}=1-P\{\max\{X,Y\}\le 1\}$$

$$=1-P\{X\le 1,Y\le 1\}$$

$$=1-P\{X\le 1\}\cdot P\{Y\le 1\} \qquad \text{----独立}$$

$$=1-\int_0^1\frac{1}{3}dx\int_0^1\frac{1}{3}dy=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

单选

例 4. 已知随机变量 X 与 Y 不相关，且 $EX=2$， $EY=3$，$DX=1/9$， $DY=1/4$， 用切比晓夫不等式估计概率 $P\{|3X-2Y|\geq 2\}$.

（A）$\frac{2}{3}$.（B）$\frac{1}{3}$.（C）$\frac{2}{3}$.（C）$\frac{1}{2}$.

解：$Z=3X-2Y,\quad EZ=3EX-2EY=0,$

$$DZ=9DX+4DY=2$$

$$P\{|3X-2Y|\geq 2\}=P\{|Z-EZ|\geq 2\}\leq\frac{DZ}{2^2}=\frac{1}{2}$$

单选

例5 设随机变量X服从$t(n)$, $Y=\dfrac{1}{X^2}$

问Y服从什么分布(C)

(A) $t(n)$ (B) $t(n-1)$ (C) $F(n,1)$ (D) $F(1,n)$

解 由已知$X\sim t(n)$

故X表示为 $X=\dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$

其中 $U\sim N(0,1)$ $V\sim\chi^2(n)$ 且U与V相互独立。

于是 $Y=\dfrac{V/n}{U^2/1}\sim F(n,1)$

例 6 某人钥匙丢了，他估计钥匙掉在宿舍里、教室里以及路上的概率分别为0.4 、0.35和0.25，而钥匙在上述三个地方被找到的概率分别为0.5、0.65和0.45．如果钥匙最终被找到，求钥匙是在路上被找到的概率.

解： 设 $B=$ “钥匙被找到”.

$A_1=$“钥匙掉在宿舍里”，$A_2=$“钥匙掉在教室里”，

$A_3=$ “钥匙掉在路上”.

由 Bayes 公式，得

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{0.25\times0.45}{0.4\times0.5+0.35\times0.65+0.25\times0.45}=0.2083$$

例 7 设随机变量 $X \sim U[2,5]$.

1）求 $P(X > 3)$；

2）若对 X 进行三次独立观察，试求至少有两次观察值大于 3 的概率.

解：1）$f(x)=\begin{cases} 1/3 & 2 \le x \le 5 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^5 \frac{1}{3}dx = \frac{2}{3}$$

2) Y = “三次独立观察 X 大于 3 的次数”，则 $Y \sim b(3, \frac{2}{3})$，

$$P\{Y \geq 2\} = C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \frac{1}{3} + C_3^3 (\frac{2}{3})^3 = \frac{20}{27}$$

例 8． 设昆虫生产 k 个卵的概率为

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k = 0,1,2,\cdots)$$,又设一个虫卵能孵化为昆虫的概率等于 p.若孵化的概率是相互独立的，问此昆虫的下一代有 l 条的概率是多少？

解： 令 X 表示产卵数目，Y_k 表示 k 个卵中孵化为昆虫的数目.

$$P(Y_k = l) = \sum_{k=l}^{+\infty} P(X = k)P(Y_k = l \mid X = k)$$

$$= \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} C_k^l p^l (1-p)^{k-l}$$

$$= \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-l}}{(k-l)!} (1-p)^{k-l}$$

$$= \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda} \sum_{k=l}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{k-l}}{(k-l)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^l}{l!} e^{-\lambda p}$$

例 9 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}，\quad -\infty<x<\infty，\quad -\infty<y<\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$。

解 由概率密度的性质可得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy=A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$\overset{t=y-x}{=}A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=A\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=A\left(\sqrt{\pi}\right)^2=A\pi=1$$

故 $\quad A=\dfrac{1}{\pi}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

对于任意 $x \in (-\infty, \infty)$ ，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy$$

$$\frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-x)^2} dy \overset{t=y-x}{=} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

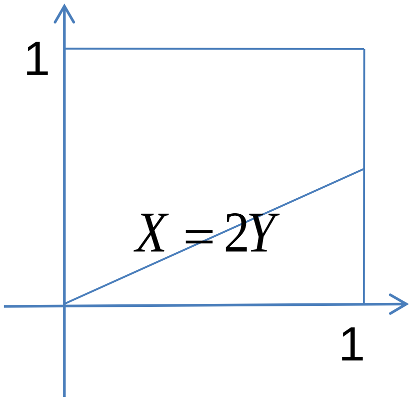
故当 $x \in (-\infty, \infty)$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2}$$

$$(-\infty < y < \infty)$$

例 10. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$



(1)求 $P\{X>2Y\}$;

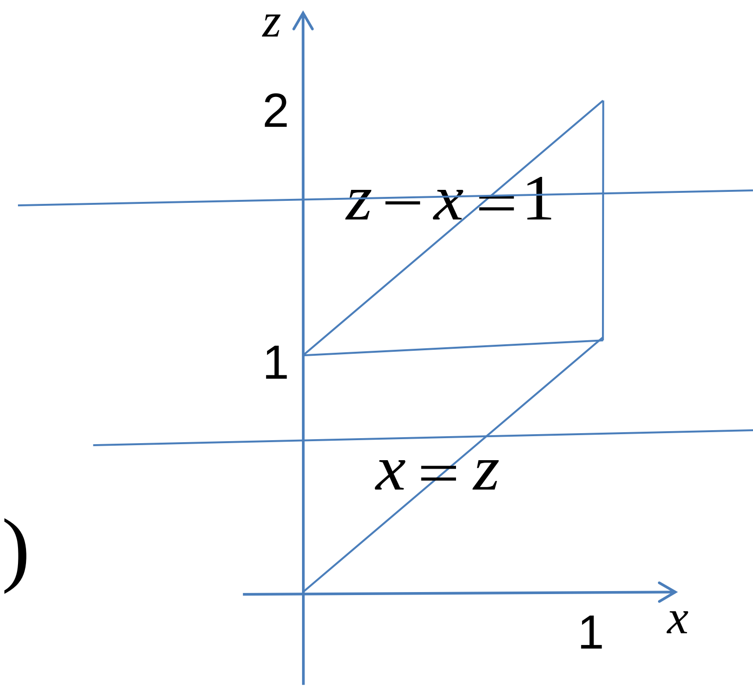
(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 $$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)dy=\frac{7}{24}$$

(2)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$



$$0<x<1, 0<z-x<1$$

当 $0<z\le 1$

$$f_Z(z)=\int_0^z (2-z)dx = z(2-z)$$

$1<z<2$ $\quad f_Z(z)=\int_{z-1}^{1}(2-z)dx=(2-z)^2$

$Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases} 2z-z^2, 0<z\le 1 \\ z^2-4z+4, 1<z<2 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

例 11. 设二维随机变量（X，Y）在区域 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$

上服从均匀分布．1）求 ρ_{XY}；2）讨论 X 和 Y 的相关性，独立性．

解：1）

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$E(X)=\iint xf(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^2 dy=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx\int_0^2 dy=\frac{1}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$E(Y)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^2 ydy=1$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^2 y^2dy=\frac{4}{3}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^2 ydy=\frac{1}{2}$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 1=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(X)}}=0$$

2）$\because\ \rho_{XY}=0,\quad \therefore X$，$Y$ 不相关.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$0\le x\le 1,\ f_X(x)=\int_0^2\frac{1}{2}dy=1\quad,\quad f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$0\le y\le 2,\ f_Y(y)=\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\quad,\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\therefore\quad f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，即 X，Y 相互独立.

例 12．一报刊亭出售 4 种报纸，它们的价格分别为 0.6，1.0，1.5，1.8（元），而且每份报纸售出的概率分别为 0.25，0.3，0.35，0.1．若某天售出报纸 400 份，试用中心极限定理计算该天收入至少 450 元的概率．

标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的分布函数 $\Phi(x)$ 的值：

x	1.38	1.41	1.44	1.47	1.50	1.53
$\Phi(x)$	0.9162	0.9207	0.9251	0.9292	0.9332	0.9370

解： 设 X_k：该天售出第 k 份报纸的收入．$(k=1,\ 2,\ \cdots.\ 400)$

则 X_k 的分布律为

X_k	0.6	1.0	1.5	1.8
P	0.25	0.3	0.35	0.1

$$E(X_k)=0.6\times0.25+1.0\times0.3+1.5\times0.35+1.8\times0.1=1.155,$$

$$E(X_k^2)=0.6^2\times0.25+1.0^2\times0.3+1.5^2\times0.35+1.8^2\times0.1=1.5015,$$

所以，$D(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=1.5015-1.155^2=0.167475$

令 X 表示该天的总收入，则有 $X=\sum_{k=1}^{400} X_k$.

由独立同分布场合下的中心极限定理，有

$$P\{X \geq 450\} = P\left\{\sum_{k=1}^{400} X_k \geq 450\right\} = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400\times 1.155}{\sqrt{400\times 0.167475}} \geq \frac{450-400\times 1.155}{\sqrt{400\times 0.167475}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k - 400\times 1.155}{\sqrt{400\times 0.167475}} < -1.466\right\} \approx 1-\Phi(-1.466).$$

$$=\Phi(1.466)=0.9292$$

例13 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,\cdots,X_{16})$ 为来自总体

X的一个样本， S^2为样本方差，

求：(1) $P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\}$， (2) $D(S^2)$.

解：(1) 由定理知 $$\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15),$$

$$\therefore P\{S^2/\sigma^2 \le 2.04\} = P\{15S^2/\sigma^2 \le 15\times 2.04\}$$

$$= 1 - P\{15S^2/\sigma^2 > 30.615\}$$

$$\approx 1 - 0.01 = 0.99$$

(2) $$D(S^2) = D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{15}\right) = \frac{\sigma^4}{15^2}\times 2\times 15 = \frac{2\sigma^4}{15}$$

例 14 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
p	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta\in(0,1)$ 未知，以 N_i 来表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i 的个数（i=1, 2, 3），

试求常数 a_1,a_2,a_3 使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，

并求 T 的方差.

解　记 $p_1 = 1-\theta$，$p_2 = \theta-\theta^2$，$p_3 = \theta^2$，

则 $N_i \sim B(n, p_i)$，所以 $EN_i = np_i$（i=1, 2, 3），所以

$$ET = E\left(\sum_{i=1}^{3} a_i N_i\right) = a_1 n(1-\theta) + a_2 n\left(\theta-\theta^2\right) + a_3 n\theta^2$$

$$= na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2 = \theta$$

即

$$\begin{cases} na_1 = 0 \\ n(a_2 - a_1) = 1 \\ n(a_3 - a_2) = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{n} \quad a_3 = \frac{1}{n}$$

因为$N_1+N_2+N_3=n$

$$DT=D\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=D\left(\frac{1}{n}N_2+\frac{1}{n}N_3\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}D\left(N_2+N_3\right)=\frac{1}{n^2}D\left(n-N_1\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}D\left(N_1\right)=\frac{1}{n^2}n\theta\left(1-\theta\right)=\frac{1}{n}\theta\left(1-\theta\right)$$

例 15 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求参数 λ 的矩估计量；

（2）求参数 λ 的最大似然估计量。

解：（1）因为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda^2 xe^{-\lambda x}dx=-\lambda\int_{0}^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x}$$

$$=-\lambda\left[x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}-2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx\right]=\frac{2}{\lambda}$$

所以由 $EX=\bar{X}$，

可得参数 λ 的矩估计量为

$$\hat{\lambda}=2/\bar{X}.$$

（2）似然函数为$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^{2}x_{i}e^{-\lambda x_{i}}=\lambda^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_{i}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$

取对数可得$\ln L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^{2}x_{i}e^{-\lambda x_{i}}=2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_{i}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_{i}$。

令其关于λ的导数等于 0，即

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\ln L(\lambda)\right]=\prod_{i=1}^{n}\lambda^{2}x_{i}e^{-\lambda x_{i}}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_{i}=0$$

解得λ的最大似然估计值为$\hat{\lambda}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_{i}}$，

所以λ的最大似然估计量为$\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\bar{X}}$。

例 16 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, 0 < x<\theta \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, \theta \le z<1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

解 (1) $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)\mathrm{dx}=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}dx=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}$

由 $\bar{X}=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}$, 参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\bar{X}-\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $E\left(4\bar{X}^2\right)=4E\left(\bar{X}^2\right)=4\left\{D\left(\bar{X}\right)+\left[E(\bar{X})\right]^2\right\}=$

$$4\left\{\frac{1}{n}D\left(X\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}\right)^2\right\}=4\frac{1}{n}D\left(X\right)+\frac{1}{4}+\theta+\theta^2$$

由于 $D\left(X\right)\geq 0$, $\theta>0$

所以 $E\left(4\bar{X}^2\right)>\theta^2$, 因此, $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

例 17. 某超市出售一批大米，假设每袋重量 X 服从正态分布，规定每袋重量为 $25\,\mathrm{kg}$．现从中随机抽取 6 袋，测得其重量分别为：

26.1	23.6	23.1	25.4	23.7	24.5

试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验，这批大米的每袋重量与规定是否有显著性差异？

解：根据问题提出假设： H_0：$\mu = 25$， H_1：$\mu \neq 25$

检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - 25}{S}\sqrt{n}$

当原假设 H_0 成立时，$T \sim t(n-1)$

拒绝域为 $W_1=\left\{(x_1,\ \cdots,\ x_n):\ \dfrac{|\bar{x}-25|}{s}\sqrt{n}>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$，

查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(5)=2.5706$

因此拒绝域为

$$W_1=\left\{(x_1,\ \cdots,\ x_n):\ \frac{|\bar{x}-25|}{s}\sqrt{n}>2.5706\right\}$$

$\bar{x}=24.4$ $\qquad\sum_{i=1}^{6}x_i^2=3578.88$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{5}\left(3578.88-6\times 24.4^2\right)=1.344$$

因此有 $$\frac{|\bar{x}-25|}{\sqrt{s^2}}\sqrt{n}=\frac{|24.4-25|}{\sqrt{1.344}}\sqrt{6}=1.267731382$$

并且 $1.267731382<2.5706$

所以，应接受 H_0 ，可以认为这批大米每袋重量与规定没有显著性差异.

谢 谢

THANKS