北 京 交 通 大 学

2016~2017 学年第一学期概率论与数理统计期末考试试卷（A 卷）

参 考 答 案

一．（本题满分 10 分）

设一罐中装有 40 个球，其中 35 个为白球，其余 5 个为黑球．现从中任意取出 8 个球．求下列事件的概率：⑴ $A=$“取出的 8 个球中恰好有 2 个黑球”；$B=$“取出的 8 个球中至少有 2 个黑球”．

解：

40 个球取出 8 个球，共有 C_{40}^{8} 种可能（样本点总数）．

⑴ 随机事件 A 含有 $C_5^2C_{35}^6$ 个样本点，因此

$$P(A)=\frac{C_5^2C_{35}^6}{C_{40}^8}=0.2110612637\,.$$

⑵ 随机事件 $\overline{B}$ 含有 $C_5^0C_{35}^8+C_5^1C_{35}^7$ 个样本点，因此

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_5^0C_{35}^8+C_5^1C_{35}^7}{C_{40}^8}=0.2567628357\,.$$

二．（本题满分 10 分）

假设一个人在一年中患感冒的次数 X 服从参数为 $\lambda=4$ 的 Poisson 分布．现有一种预防感冒的新药，它对于 22%的人来讲，可将上面的参数 λ 降为 $\lambda=1$（称为疗效显著）；对 37%的人来讲，可将上面的参数 λ 降为 $\lambda=3$（称为疗效一般）；而对于其余的人来讲则是无效的．现有一人服用此药一年，在这一年中，他患了 2 次感冒，求此药对他是“疗效显著”概率有多大？

解：

设 $A_1=\{\text{此药疗效显著}\}$，$A_2=\{\text{此药疗效一般}\}$，$A_3=\{\text{此药无效}\}$，

$$B=\{\text{某人一年中患2次感冒}\}.$$

由题设，可知如果事件 A_1 发生，则 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的 Poisson 分布；如果事件 A_2 发生，则 X 服从参数为 $\lambda=3$ 的 Poisson 分布；如果事件 A_3 发生，则 X 服从参数为 $\lambda=4$ 的 Poisson

分布．因此，由 Bayes 公式，我们有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B|A_k)}$$

$$=\frac{0.22\times\frac{1^2}{2}e^{-1}}{0.22\times\frac{1^2}{2}e^{-1}+0.37\times\frac{3^2}{2}e^{-3}+0.41\times\frac{4^2}{2}e^{-4}}=0.2206\ .$$

三．（本题满分 10 分）

设电源电压 $X\sim N(220,\ \ 25^2)$，在电源电压不超过 200V、在 $200\sim240\text{V}$ 和超过 240V 三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1、0.001 和 0.2，试求：⑴ 该电子元件损坏的概率（5 分）．⑵ 已知该电子元件已经损坏，求此时电源电压在 $200\sim240\text{V}$ 的概率（5 分）．

（附：标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的部分取值

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

解：

设 $A_1=\{X\le200\}$，$A_2=\{200<X<240\}$，$A_3=\{X\ge240\}$，

$B=\{$该电子元件损坏$\}$，则

（1） $P(A_1)=P\{X\le200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right\}$

$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=1-0.788=0.212$；

$P(A_2)=P\{200<X<240\}=P\left\{\frac{200-220}{25}<\frac{X-220}{25}<\frac{240-220}{25}\right\}$

$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=2\Phi(0.8)-1=2\times0.788-1=0.576$

$P(A_3)=P\{X\ge240\}=1-P\left\{\frac{X-220}{25}<\frac{240-220}{25}\right\}$

$=1-\Phi(0.8)=1-0.788=0.212$

由全概率公式，得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.212\times 0.1+0.576\times 0.001+0.212\times 0.2=0.064176.$$

⑵ 要求的是 $P(A_2|B)$，由 Bayes 公式，得

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.576\times 0.001}{0.064176}=0.008957.$$

四．（本题满分 10 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立而且同分布． X 的分布列为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

其中 $p+q=1$．⑴ 对于给定的 $n\ (n\geq 2)$，求在 $X+Y=n$ 的条件下，随机变量 X 的条件分布列（7 分）；

⑵ 求概率 $P\{X=Y\}$（3 分）．

解：

⑴ 对于 $n\geq 2$，有

$$P\{X+Y=n\}=\sum_{k=1}^{n-1}P\{X=k,\quad Y=n-k\}=\sum_{k=1}^{n-1}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}\cdot pq^{n-k-1}=(n-1)p^2q^{n-2}.$$

所以，当 $X+Y=n$ 时，随机变量 X 的条件分布列为

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,\quad X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=k,\quad Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{pq^{k-1}\cdot pq^{n-k-1}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

⑵ $$P\{X=Y\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k,\quad Y=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}P\{Y=k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}pq^{k-1}\cdot pq^{k-1}=p^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^2\right)^{k-1}=\frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p}{1+p}.$$

五．（本题满分 10 分）

设随机变量 $X\sim N(0,\ 1)$，求随机变量 $Y=2X^2+1$ 的密度函数．

解：

由题意，随机变量 X 的密度函数为 $p_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$(-\infty<x<+\infty)$.

设随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布函数为 $F_Y(y)$，则有

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X^2+1\le y)=P\left(X^2\le\frac{y-1}{2}\right),$$

所以，当 $y\le 1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>1$ 时，

$$F_Y(y)=P\left(X^2\le\frac{y-1}{2}\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

因此有 $F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx & y>1\\ 0 & y\le 1\end{cases}$，

所以，随机变量 $Y=2X^2+1$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2} & y>1\\ 0 & y\le 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}} & y>1\\ 0 & y\le 1\end{cases}.$$

六.（本题满分 10 分）

⑴ 叙述切比雪夫（Chebyshev）不等式（3 分）；⑵ 设随机变量 X 服从区间 $(0\quad 10)$ 上的均匀分布，试用切比雪夫不等式估计概率 $P(|X-E(X)|\ge 4)$（4 分）；⑶ 在上述条件下，计算概率 $P(|X-E(X)|\ge 4)$ 的精确值（3 分）.

解：

⑴ 设随机变量 X 存在数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

⑵ 因为随机变量 X 服从区间 $(0\quad 10)$ 上的均匀分布，所以，

$$E(X)=5,\quad D(X)=\frac{10^2}{12}=\frac{25}{3}.$$

因此，由切比雪夫不等式，对于 $\varepsilon=4>0$，有

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq 4\right)\leq\frac{\frac{25}{3}}{4^2}=\frac{25}{48}=0.52083333333.$$

⑶ $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq 4\right)=1-P\left(\left|X-5\right|<4\right)$

$$=1-P\left(-4<X-5<4\right)=1-P(1<X<9)=1-\frac{8}{10}=0.2.$$

七.（本题满分 10 分）

设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,\quad y)=\begin{cases}3x & 0<y<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

求 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}$.

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,\quad y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x 3x^2dy=3\int_0^1 x^3dx=\frac{3}{4},$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,\quad y)dxdy=3\int_0^1 xdx\int_0^x ydy=\frac{3}{2}\int_0^1 x^3dx=\frac{3}{8},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,\quad y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x 3x^3dy=3\int_0^1 x^4dx=\frac{3}{5},$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,\quad y)dxdy=3\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,\quad y)dxdy=3\int_0^1 x^2dx\int_0^x ydy=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{3}{10},$$

所以有 $\operatorname{cov}(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160}$，

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{19}{320},$$

因此，有

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{3}{160}}{\sqrt{\frac{3}{80}}\cdot\sqrt{\frac{19}{320}}}=\frac{3}{\sqrt{57}}.$$

八.（本题满分 10 分）

某餐厅每天接待 400 位顾客，假设每位顾客的消费额（单位：元）服从区间 $(20,\ 100)$ 上的均匀分布，并且每位顾客的消费额是相互独立的．试求：⑴ 设 X 表示该餐厅一天的营业额，求该餐厅每天的平均营业额 $E(X)$（4 分）；⑵ 用中心极限定理近似计算，该餐厅每天的营业额在平均营业额 ± 760 元之间的概率（6 分）.（附：正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的某些取值：

x	1.55	1.60	1.65	1.70
$\Phi(x)$	0.9394	0.9452	0.9505	0.9554

解：

⑴ 设 X_i 表示第 i 位顾客的消费额，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 400)$．则有

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{400}$ 相互独立，$X_i\sim U(20,\ 100)$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 400)$.

所以，$E(X_i)=60$， $\operatorname{var}(X_i)=\dfrac{80^2}{12}=\dfrac{1600}{3}$.

再设 X 表示餐厅每天的营业额，则 $X=\sum_{i=1}^{400}X_i$.

所以，$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{400}X_i\right)=\sum_{i=1}^{400}E(X_i)=400\times 60=24000$ （元）.

⑵ 由独立同分布场合下的中心极限定理，有

$$P\{-760 \le X-24000 \le 760\} = P\left\{-\frac{760}{\sqrt{400\times\frac{1600}{3}}} \le \frac{X-24000}{\sqrt{400\times\frac{1600}{3}}} \le \frac{760}{\sqrt{400\times\frac{1600}{3}}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{760}{\sqrt{400\times\frac{1600}{3}}}\right) - \Phi\left(-\frac{760}{\sqrt{400\times\frac{1600}{3}}}\right) = 2\Phi(1.645)-1 = 2\times 0.9505-1 = 0.9010 .$$

九.（本题满分 10 分）

⑴ 设 x_1， x_2， $\cdots$， x_n 是 n 个实数，$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，证明：对于任意的常数 c，有等式：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 - n(\bar{x}-c)^2$$ **（5 分）**.

⑵ 设总体 X 存在二阶矩，$\mu = E(X)$，$\sigma^2 = D(X)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是从总体 X 中抽取的一个样本．S^2 是其样本方差．求 $E(S^2)$ **（5 分）**.

解：

⑴ $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i-c)-(\bar{x}-c)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-c)^2 + (\bar{x}-c)^2 - 2(x_i-c)(\bar{x}-c)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-c)^2 - 2(\bar{x}-c)\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 + n(\bar{x}-c)^2 - 2(\bar{x}-c)\cdot n(\bar{x}-c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 + n(\bar{x}-c)^2 - 2n(\bar{x}-c)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 - n(\bar{x}-c)^2 .$$

⑵ $$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2-n\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-\mu\right)^2-nE\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-E\left(X_i\right)\right)^2-nE\left(\overline{X}-E\left(\overline{X}\right)\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)-n\cdot D\left(\overline{X}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\sigma^2=\sigma^2.$$

十．（本题满分 10 分）

设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\ \alpha,\ \beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}} & x>\alpha\\ 0 & x\le\alpha\end{cases},$$

其中 $\alpha>0$, $\beta>1$ 为参数，$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个简单随机样本．⑴ 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量 $\hat{\beta}_M$（5 分）；⑵ 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量 $\hat{\beta}_L$（5 分）．

解：

⑴ 当 $\alpha=1$ 时，密度函数为

$$f(x;\ 1,\ \beta)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases},$$

所以，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\ \alpha,\ \beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\beta x^{-\beta-1}dx=\beta\int_{1}^{+\infty}x^{-\beta}dx=\dfrac{\beta}{\beta-1}$ ．

解方程：$E(X)=\dfrac{\beta}{\beta-1}$，得解：$\beta=\dfrac{E(X)}{E(X)-1}$．

将$E(X)$替换成$\overline{X}$，得未知参数β的矩估计量为$\hat{\beta}_M=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(2) 当$\alpha=1$时，密度函数为

$$f(x;\ 1,\ \beta)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases},$$

所以，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ 1,\ \beta)=\beta^n x_i^{-(\beta+1)},\ (x_i>1,\ (i=1,\ \cdots,\ n)).$$

所以，$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)$.

对β求导，得 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\ln(x_1x_2\cdots x_n)$.

令 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\beta}=0$，得方程$\dfrac{n}{\beta}-\ln(x_1x_2\cdots x_n)=0$.

解得 $\beta=\dfrac{n}{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}$.

因此，β的最大似然估计量为 $\hat{\beta}_L=\dfrac{n}{\ln(X_1X_2\cdots X_n)}$.