CENTRO DE ENSINO UNIFICADO DE BRASÍLIA

CURSO DE CIÊNCIA DE DADOS E MACHINE LEARNING

HENRI FELIPE MARQUES MAFRA

SISTEMATIZAÇÃO 01: ADIÇÃO DE VETORES COM PHET

Trabalho apresentado à disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica, do curso de Ciência de Dados e Machine Learning, como requisito parcial para avaliação do 1º semestre.

Brasília

2025

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho de Álgebra Linear e Geometria Analítica, foi feita a utilização do programa PHET da Universidade do Colorado, como indicado na tarefa, para explorar atividades como a adição de vetores de forma prática e interativa. O propósito era entender como realizar a soma de vetores em 1D, 2D e 3D, observar suas propriedades (como comutatividade e associatividade) e, dessa forma, utilizar métodos como a regra do paralelogramo. Assim, a atividade demonstrou grande utilidade na área da tecnologia, como em computação gráfica ou em ciência de dados (meu curso) nos quais é necessário tal conhecimento. A simulação, dessa forma, auxiliou no esclarecimento desses conceitos, nos quais transformamos cálculos em representações gráfico-visuais.

2. METODOLOGIA

A utilização do PHET na simulação foi feita em três módulos: "Explorar 1D", "Explorar 2D" e "Laboratório". No módulo Explorar 1D, foi feito o ajuste de vetores unidimensionais (variáveis: valores de a, b e c no eixo X) manipulando as setas na interface e observando o resultado da soma. No ‘’Explorar 2D’’, foi realizado o manuseamento da magnitude e do ângulo dos vetores (variáveis: magnitude e direção) para chegar ao vetor resultante. Em equações foi feito o requerido quanto a soma e subtração com a dita orientação de escolhê-los eu mesmo Já no ‘’Laboratório’’, foi produzido o uso da regra do paralelogramo selecionando vetores e ativando a opção de visualização gráfica. Cada módulo foi realizado a partir do ajuste dos valores indicados a serem feitos na simulação, acompanhado da análise dos resultados obtidos e do registro dos mesmos por meio de capturas de tela.

3. RESULTADOS

Os resultados das simulações foram organizados conforme os três módulos da plataforma PHET:

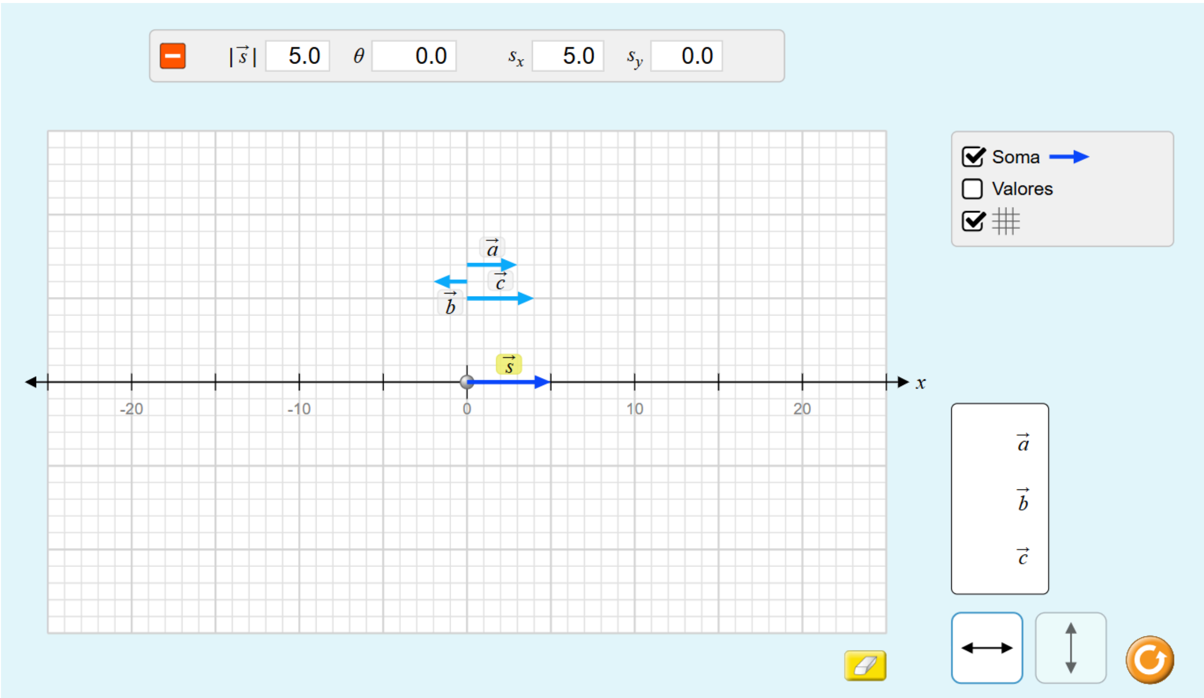
3.1 Explorar 1D

Foram realizados cinco exercícios utilizando vetores unidimensionais.

Exercício 1: Considere os vetores $a = 3$, $b = -2$ e $c = 4$. Calcule a soma $a + b + c$ e demonstre a propriedade comutativa (ou seja, $a + b = b + a$) utilizando a simulação.

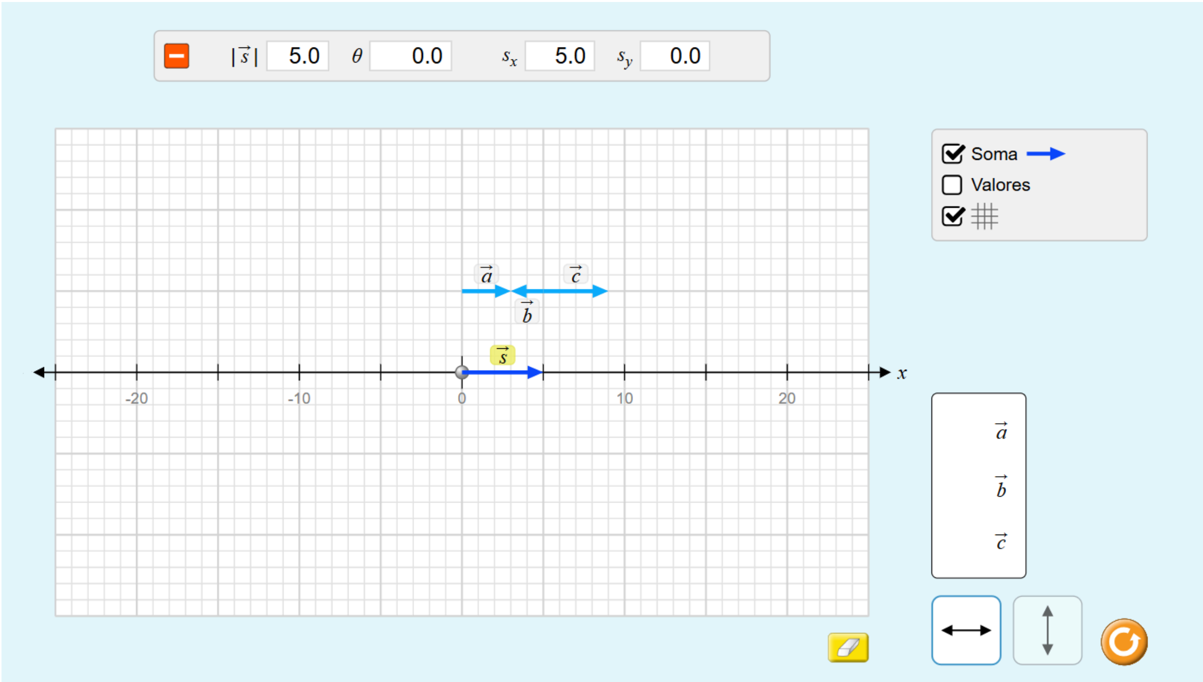
Somando:

A + B + C (3 - 2 + 4) = 5

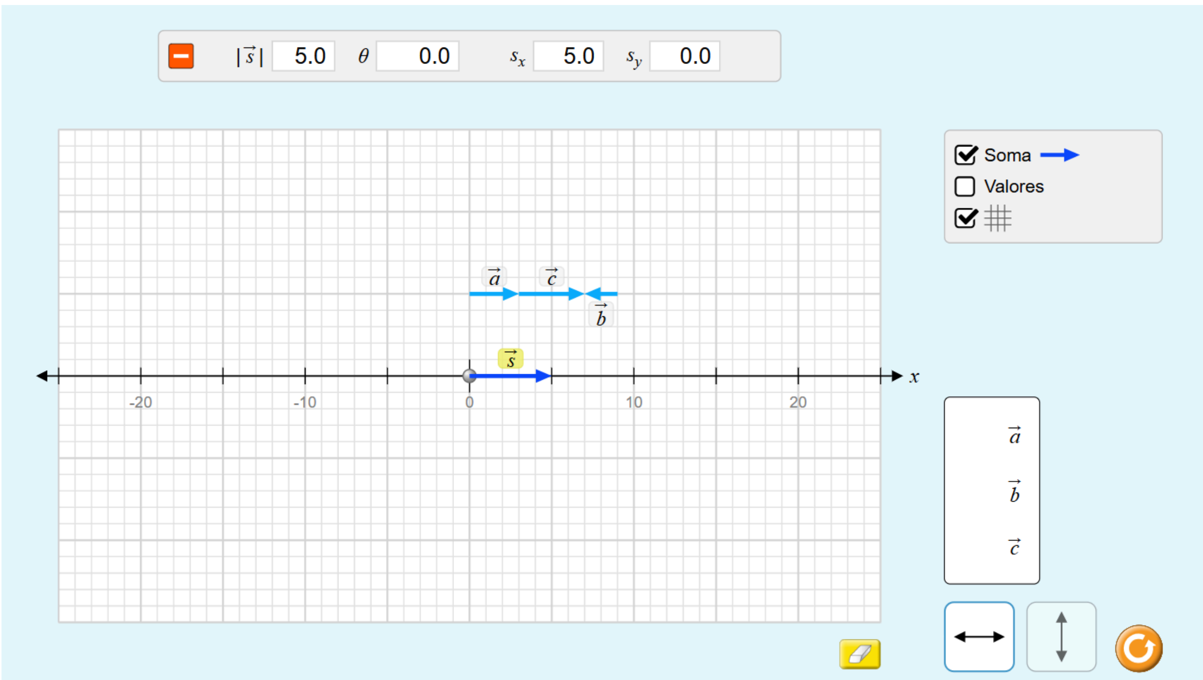


Aplicando a propriedade comutativa:

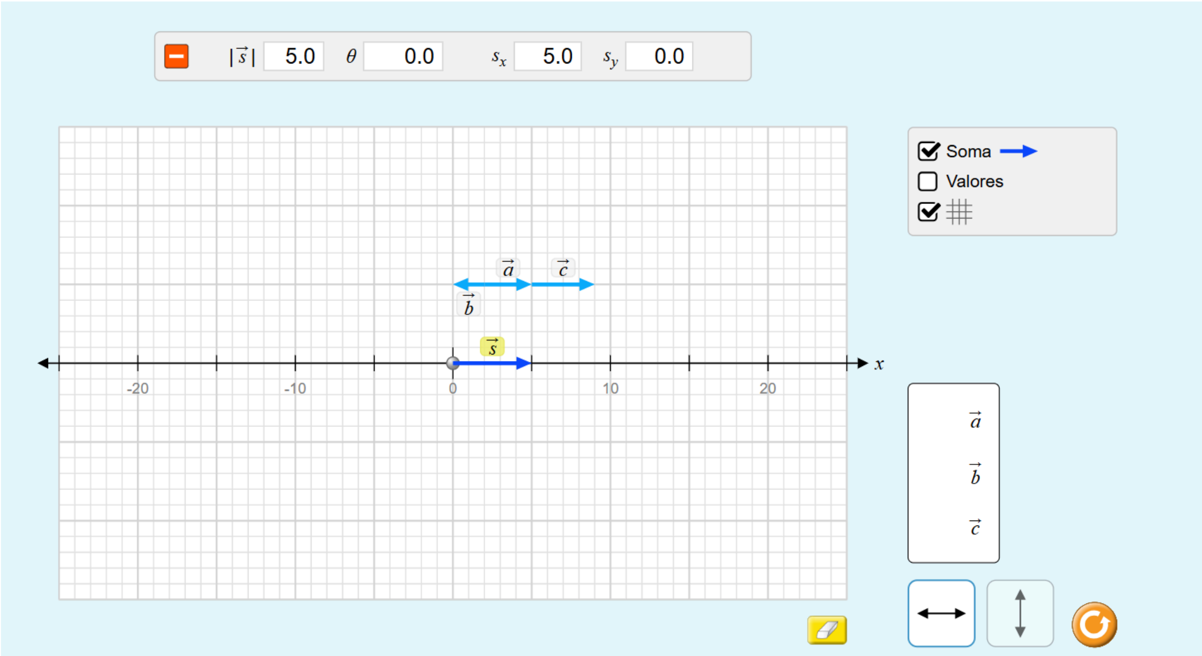
A + B + C (3 - 2 + 4) = 5



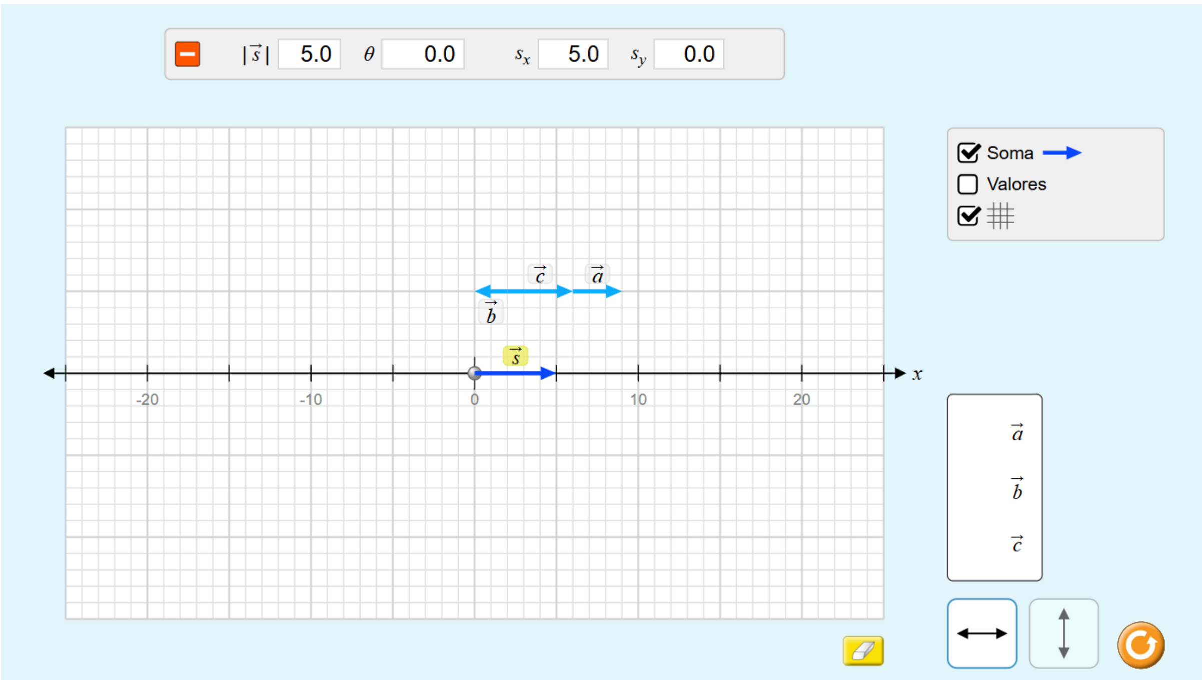
A + C + B (3 + 4 - 2) = 5



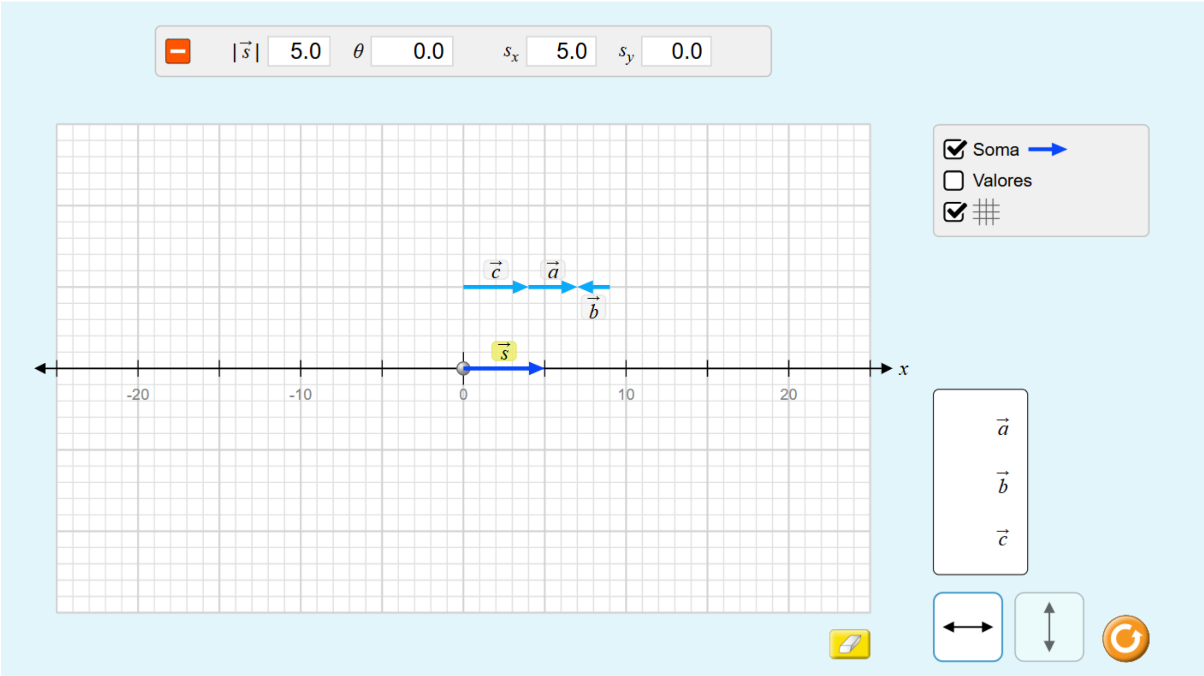
B + A + C (-2 + 3 + 4) = 5



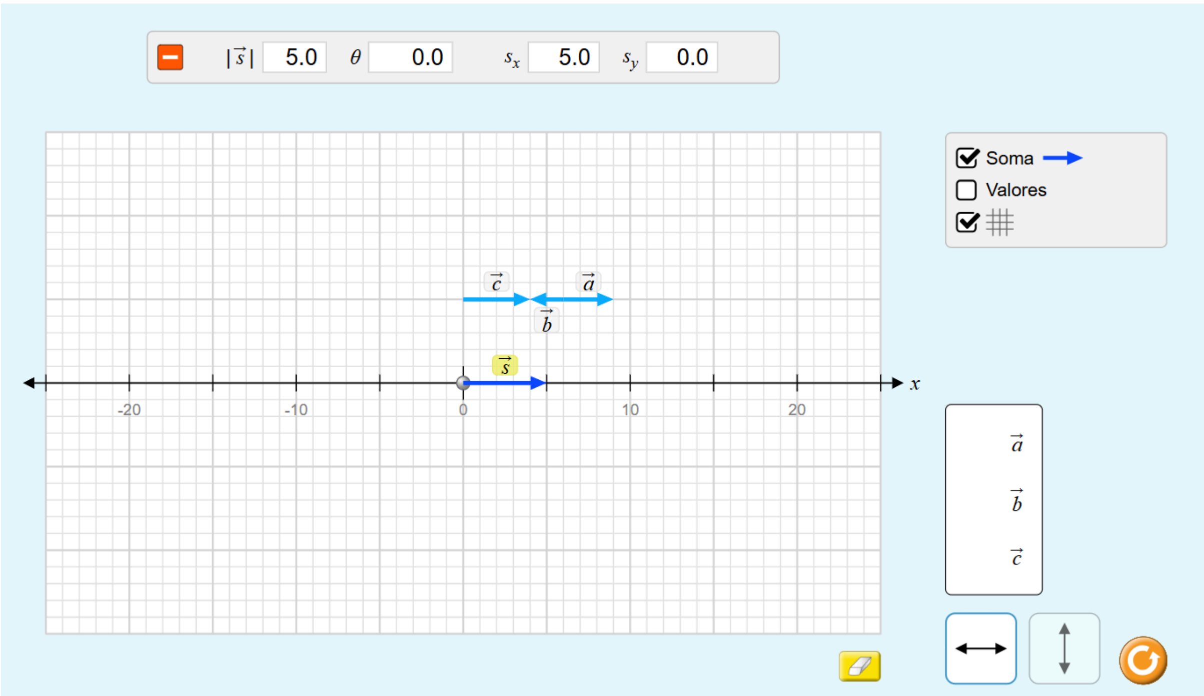
B + C + A (- 2 + 4 + 3) = 5



C + A + B (4 + 3 - 2) = 5



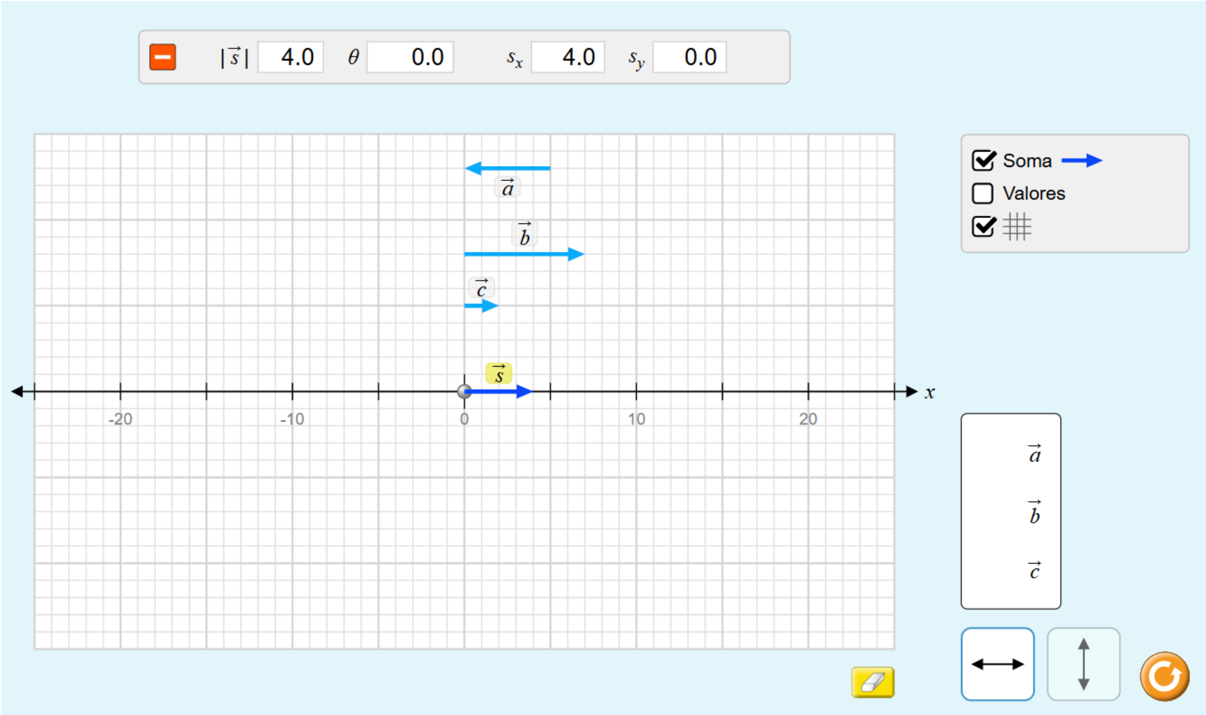
C + B + A (4 - 2 + 3) = 5



Exercício 2: Utilize os vetores *a = -5*, *b = 7* e *c = 2*. Some-os e, em seguida, compare o resultado da soma *(a + c) + b* com *a + (b + c)* para demonstrar a propriedade associativa.

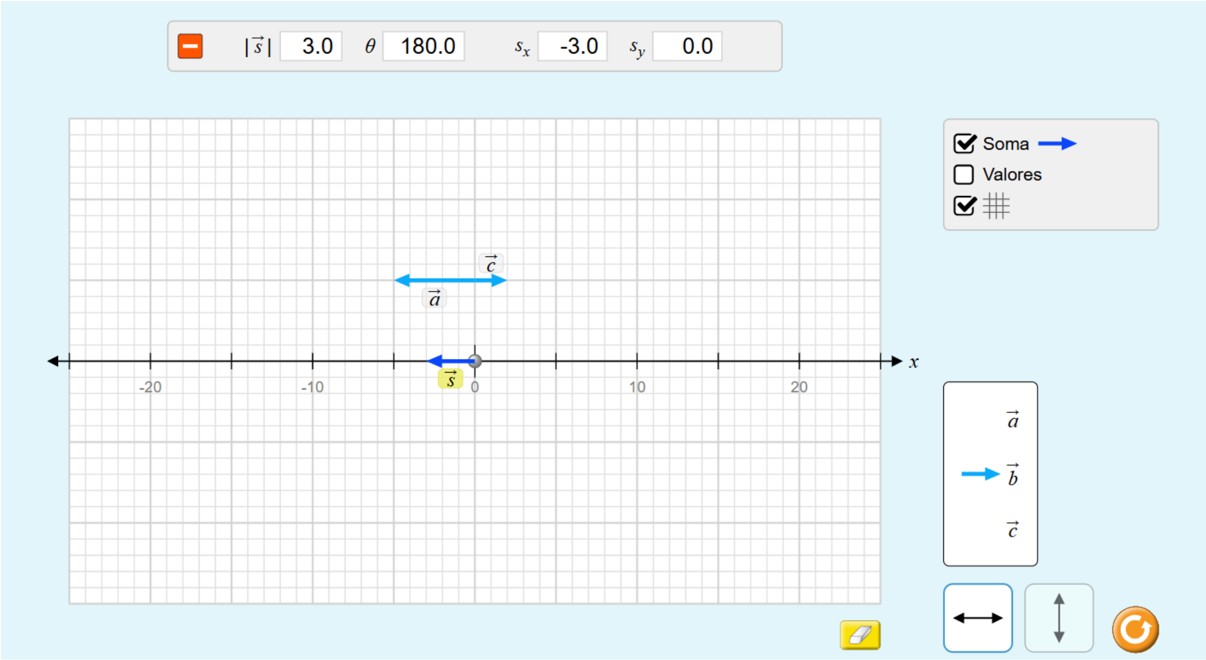
Somando:

A + B + C (-5 + 7 + 2) = 4

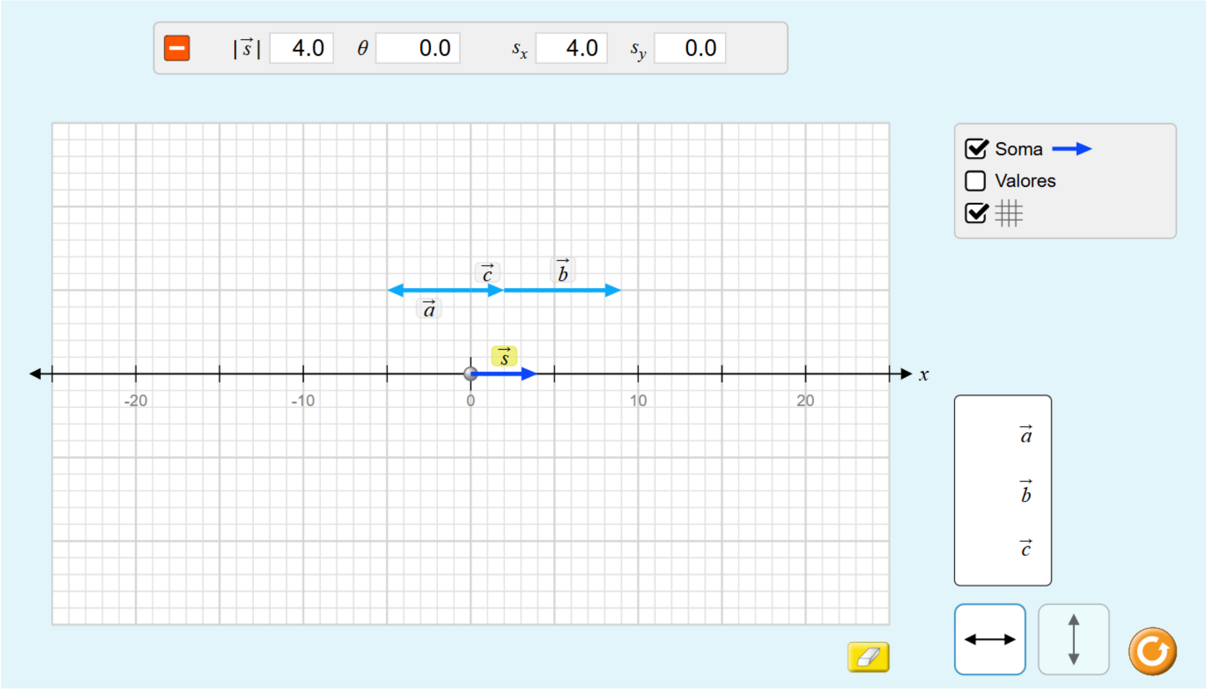


Aplicando a propriedade associativa:

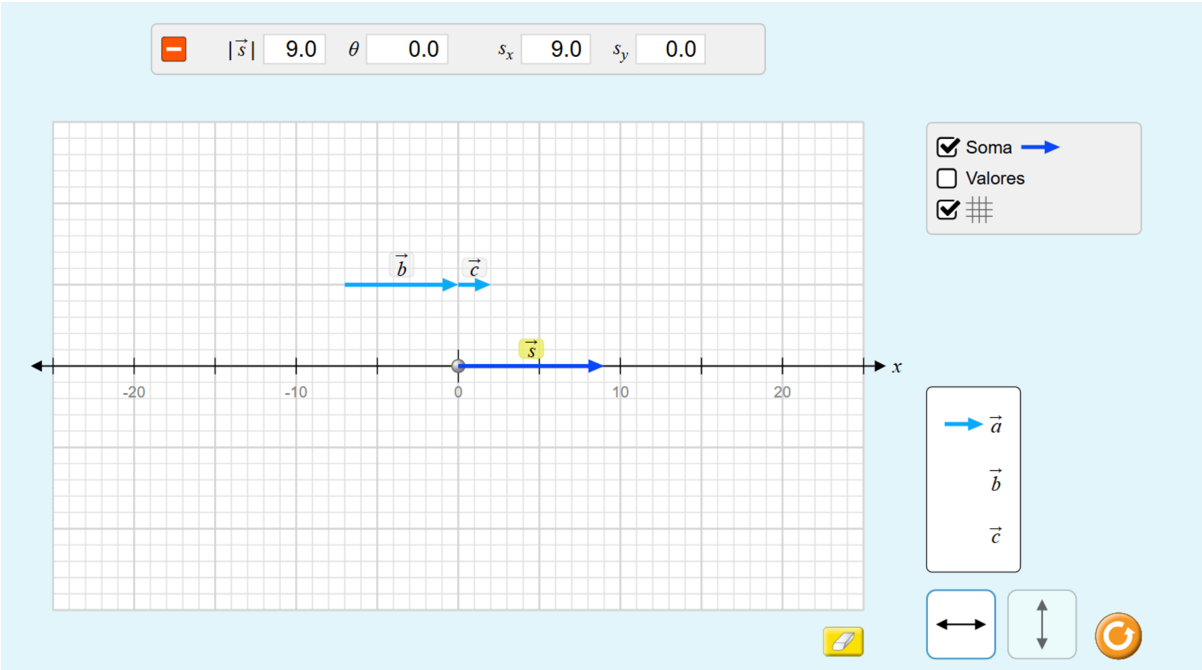
A + C (-5 + 2) = - 3



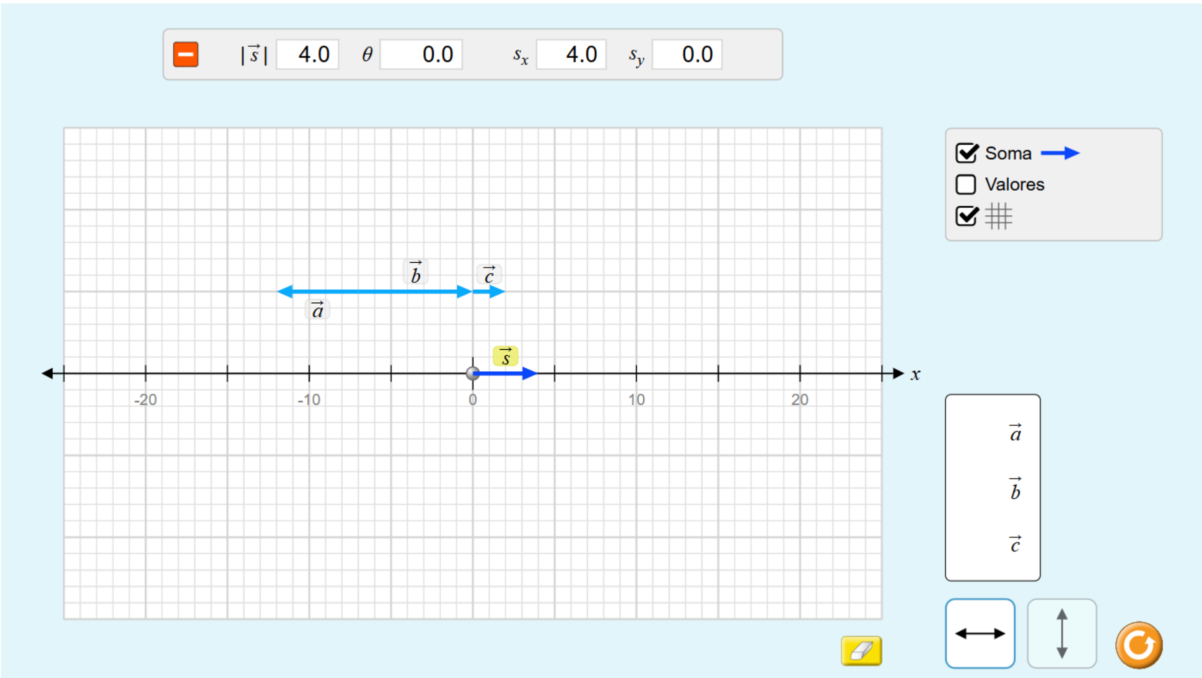
(A + C) + B // (-5 + 2) + 7 = 4



B + C (7 + 2) = 9



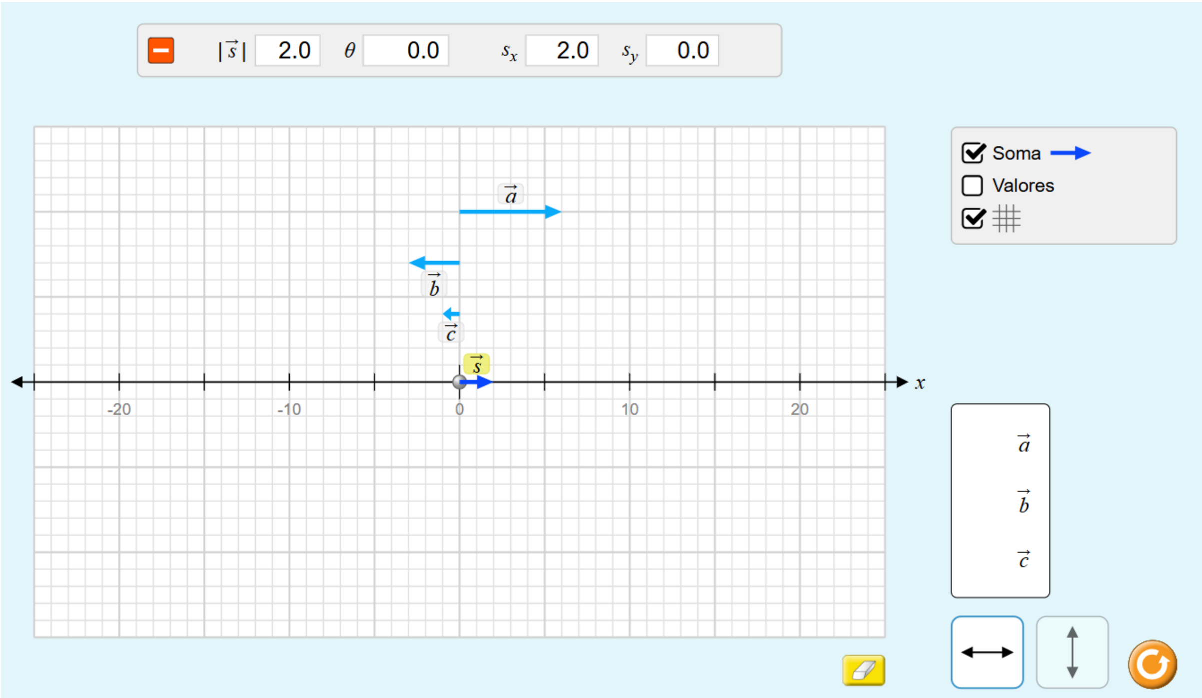
A + (B + C) // -5 + (7 + 2) = 4



Exercício 3: Dados $a = 6$, $b = -3$ e $c = -1$, calcule a soma dos vetores e verifique se a soma dos vetores opostos resulta no vetor nulo.

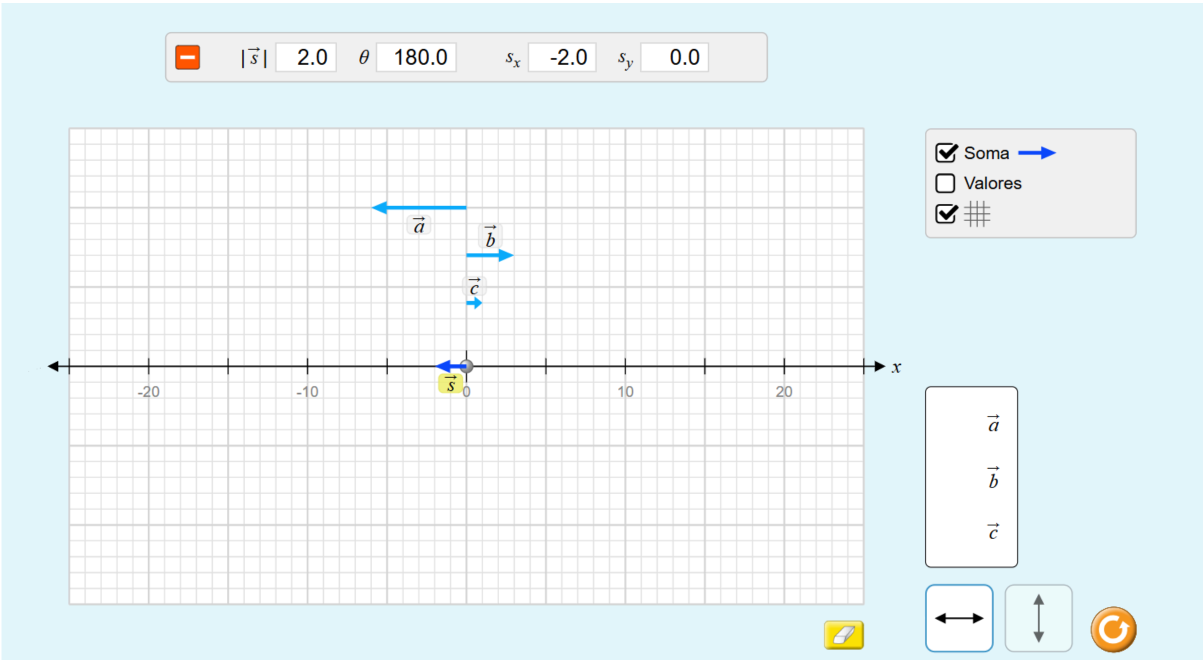
Somando :

A + B + C (6 - 3 - 1) = 2



Verificando se a soma dos vetores opostos resulta no vetor nulo

- A - B - C (-6 + 3 + 1) = -2

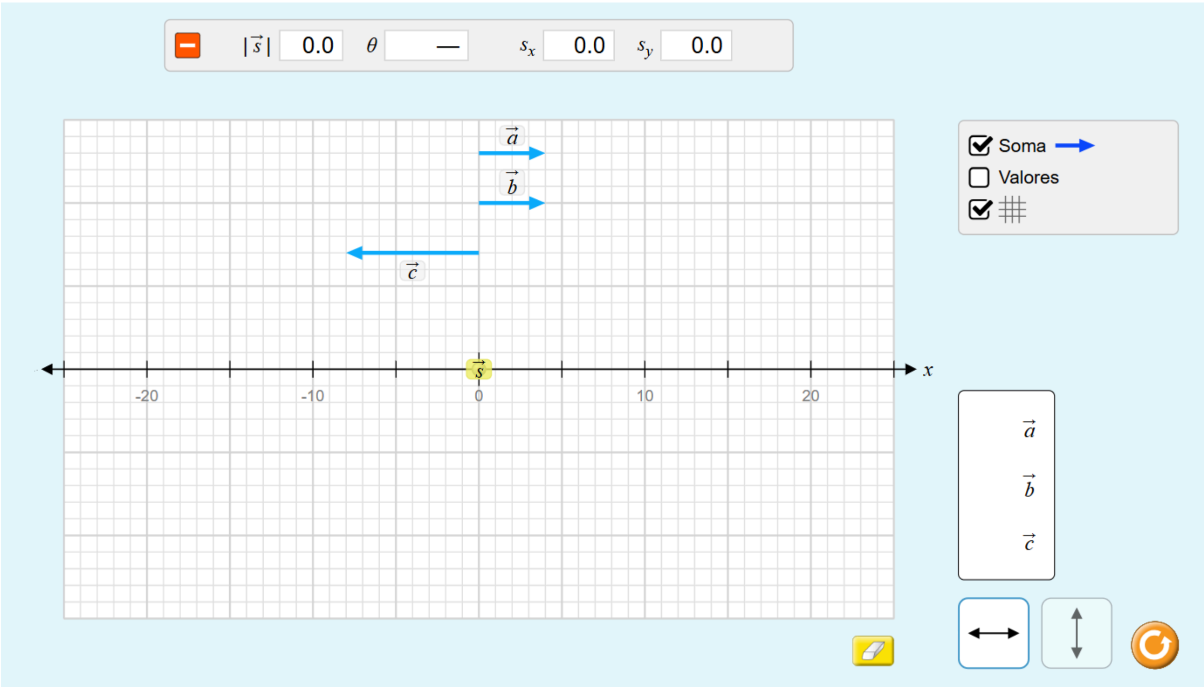


Sim, a soma dos vetores opostos resulta no vetor nulo (em relação a primeira soma que resulta em 2) sendo assim 2 - 2 = 0. Lembrando que o vetor nulo se refere a cada um individualmente mas utilizei como explicação o vetor resultante como exemplo.

Exercício 4: Considere os vetores *a = 4*, *b = 4* e *c = -8*. Some-os e analise como a propriedade do inverso aditivo se manifesta na simulação.

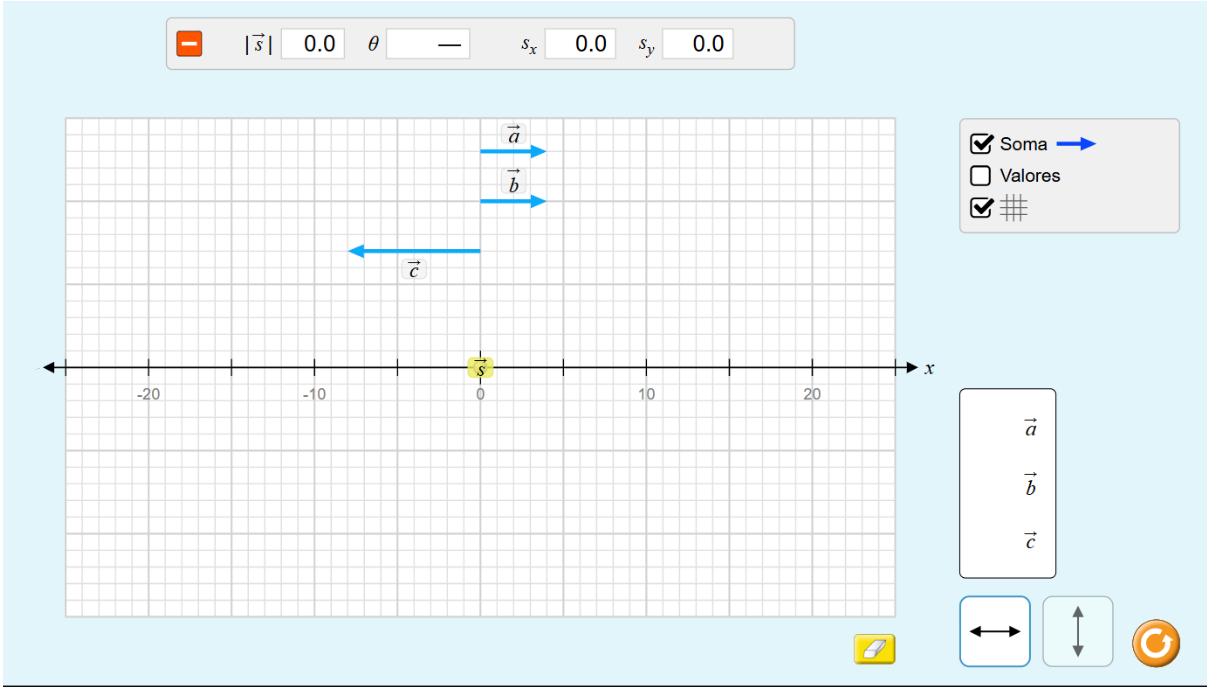
Somando:

A + B + C (4 + 4 - 8) = 0



Analisando com a propriedade do inverso aditivo:

-A - B -C (-4 -4 + 8) = 0



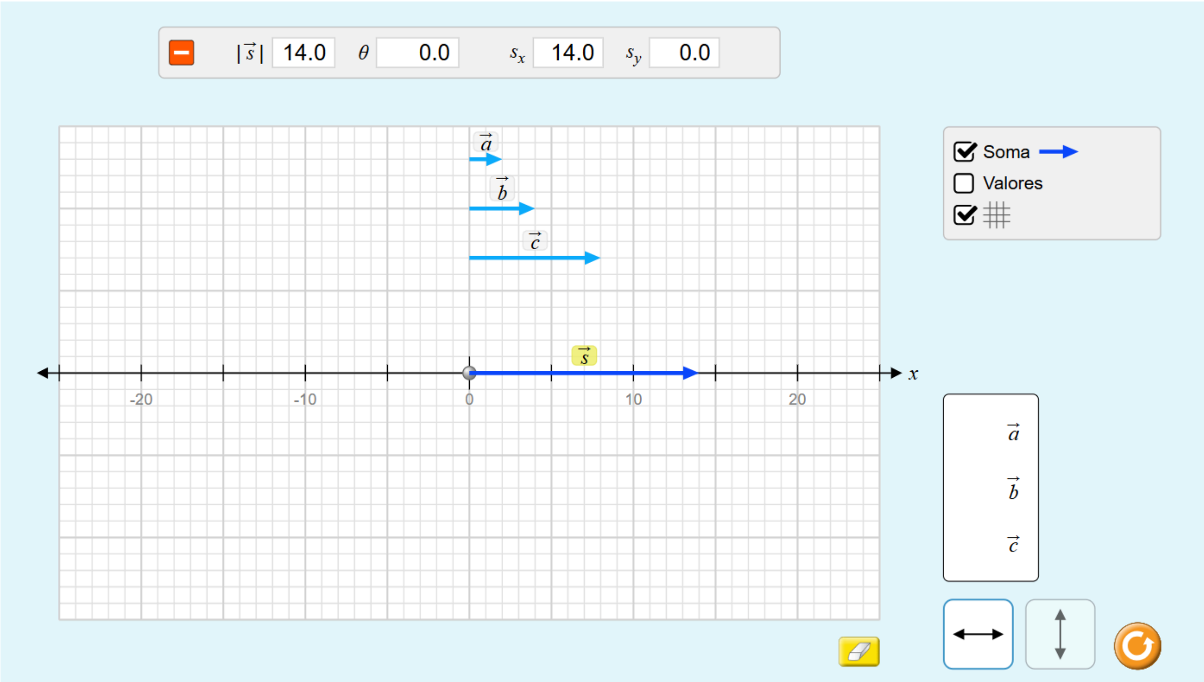
C = A + B Logo os vetores ainda se anulam.

Exercício 5: Crie seus próprios valores para *a*, *b* e *c* e utilize a simulação para testar as propriedades da soma de vetores unidimensionais, registrando os resultados com capturas de tela.

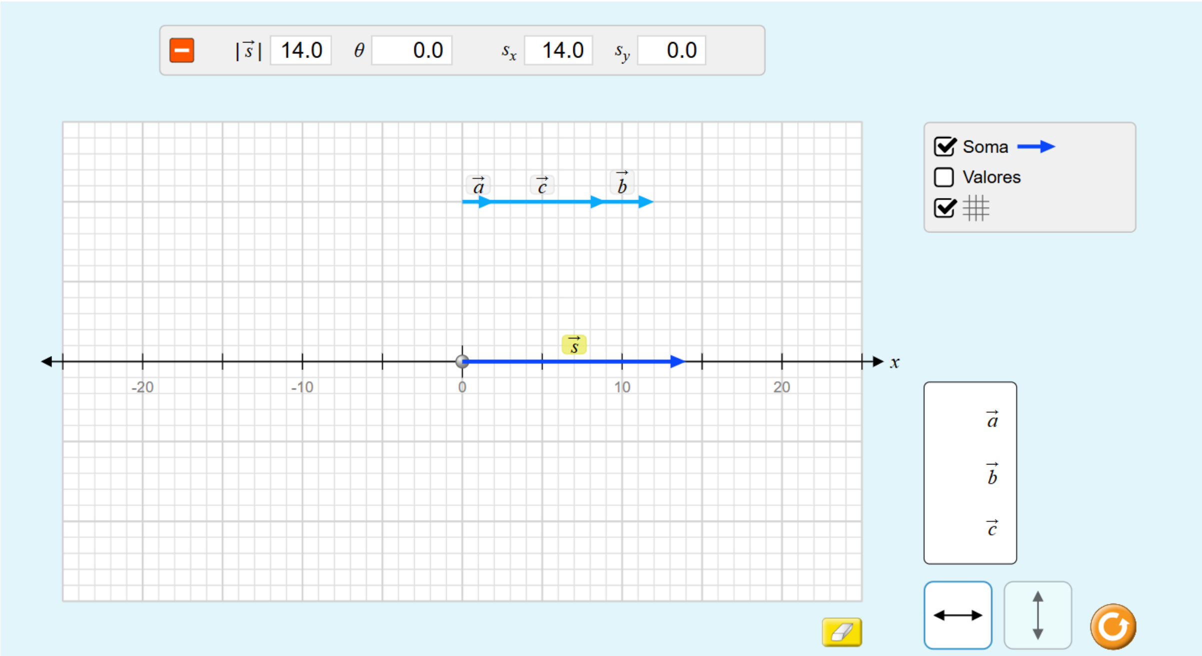
VALORES ESCOLHIDOS A = 2 B = 4 C = 8

Aplicando a comutativa:

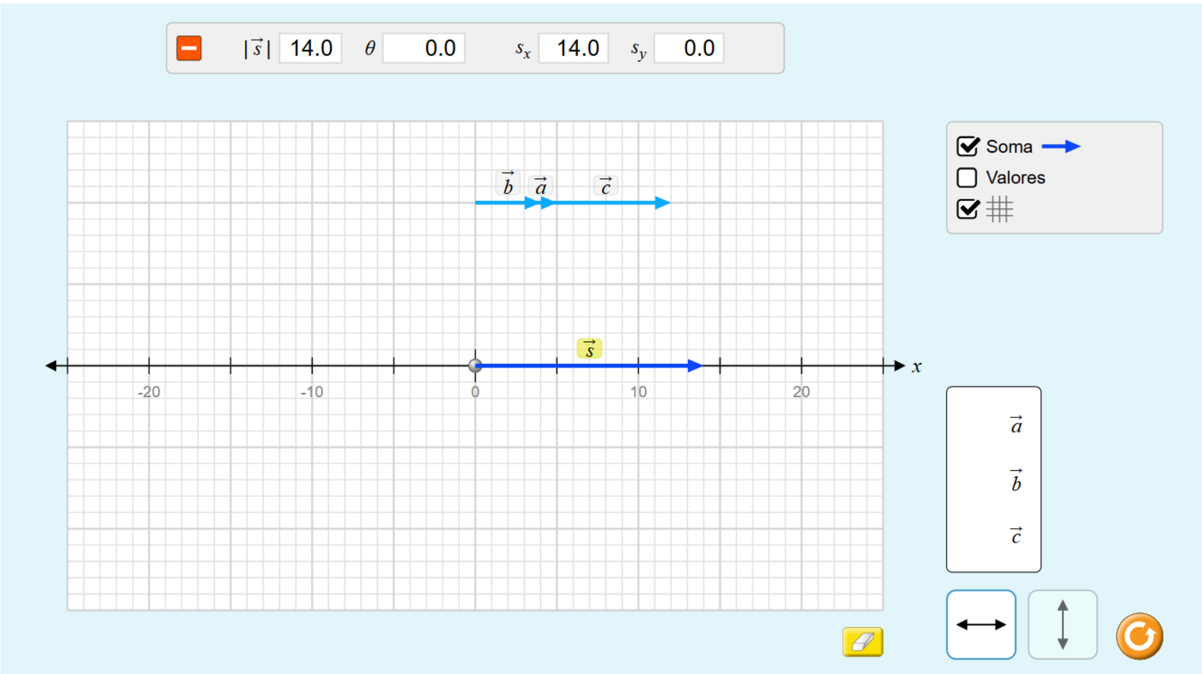
A + B + C (2 + 4 + 8) = 14



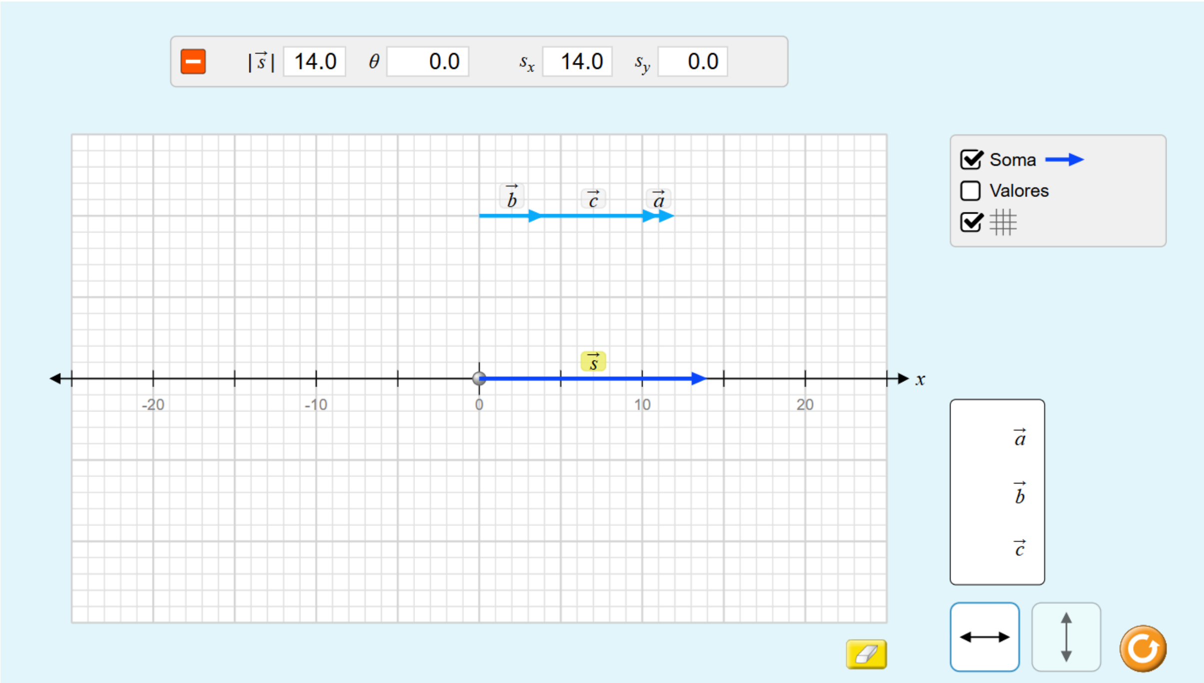
A + C + B (2 + 8 + 4) = 14



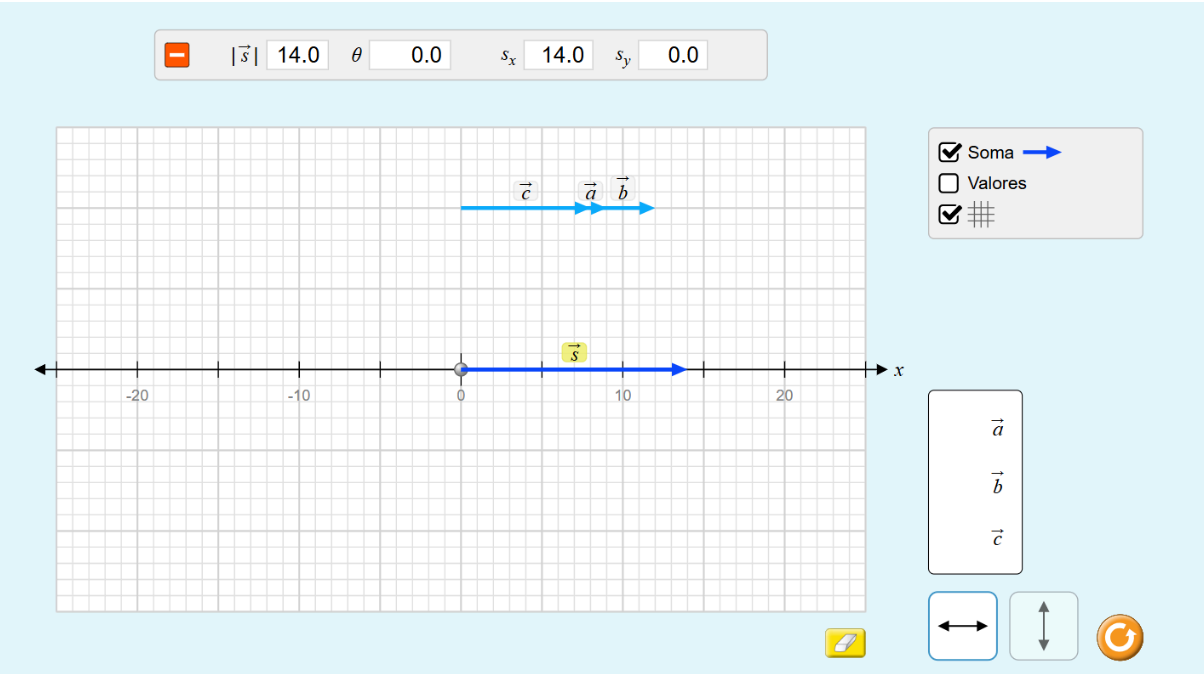
B + A + C (4 + 3 + 8) 14



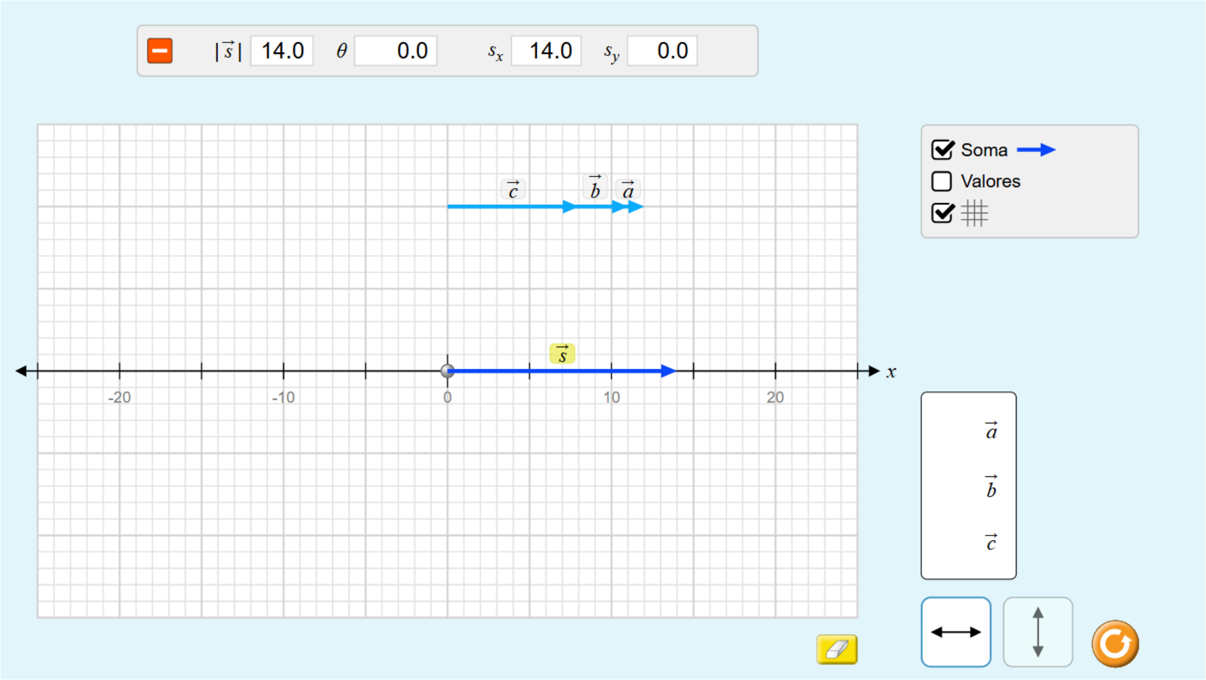
B + C + A (4 + 8 + 2) = 14



C + A + B (8 + 2 + 4)

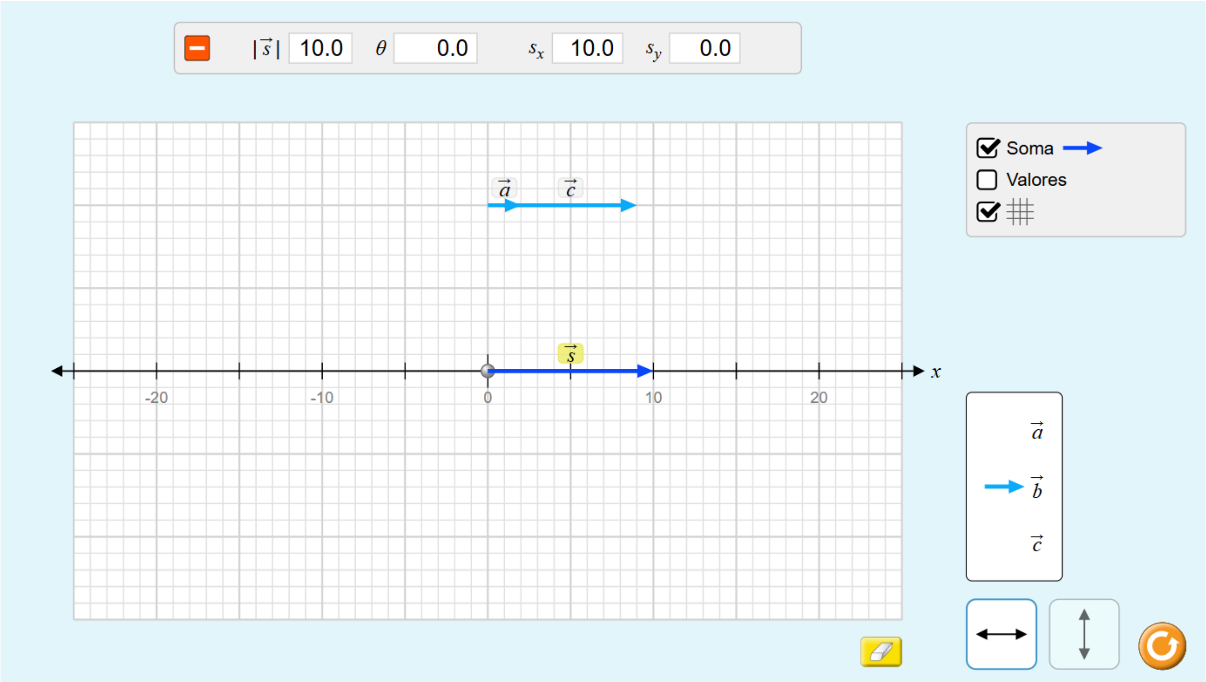


C + B + A (8 + 4 + 2) = 14

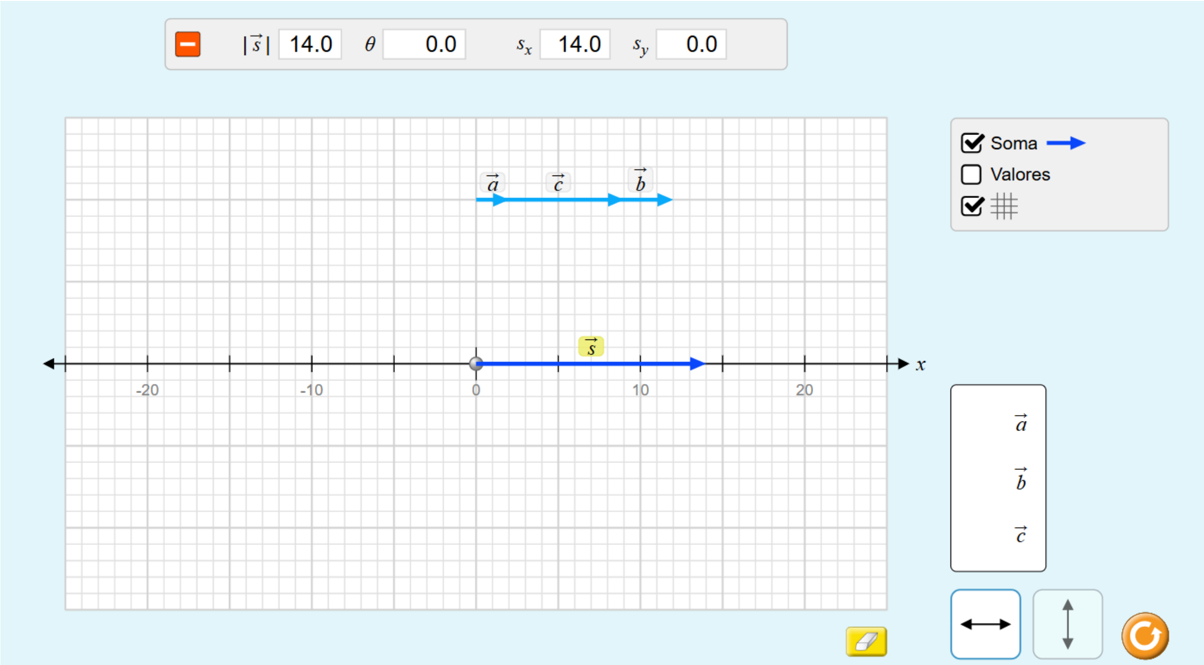


Aplicando a associativa:

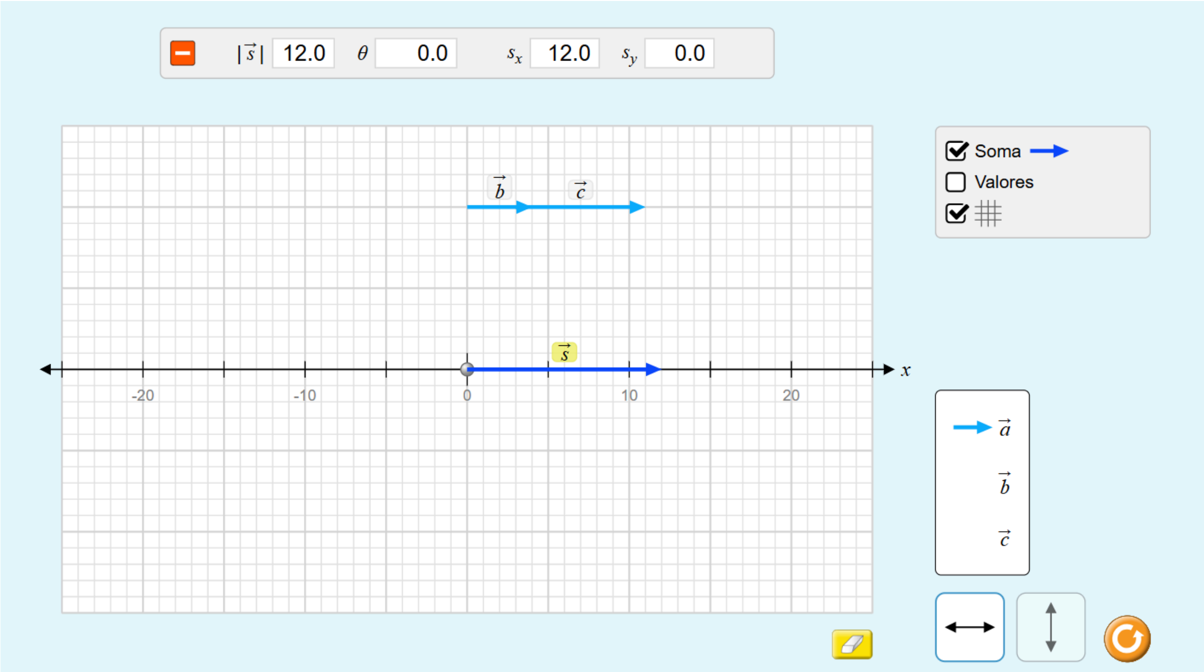
A + C (2 + 8) = 10



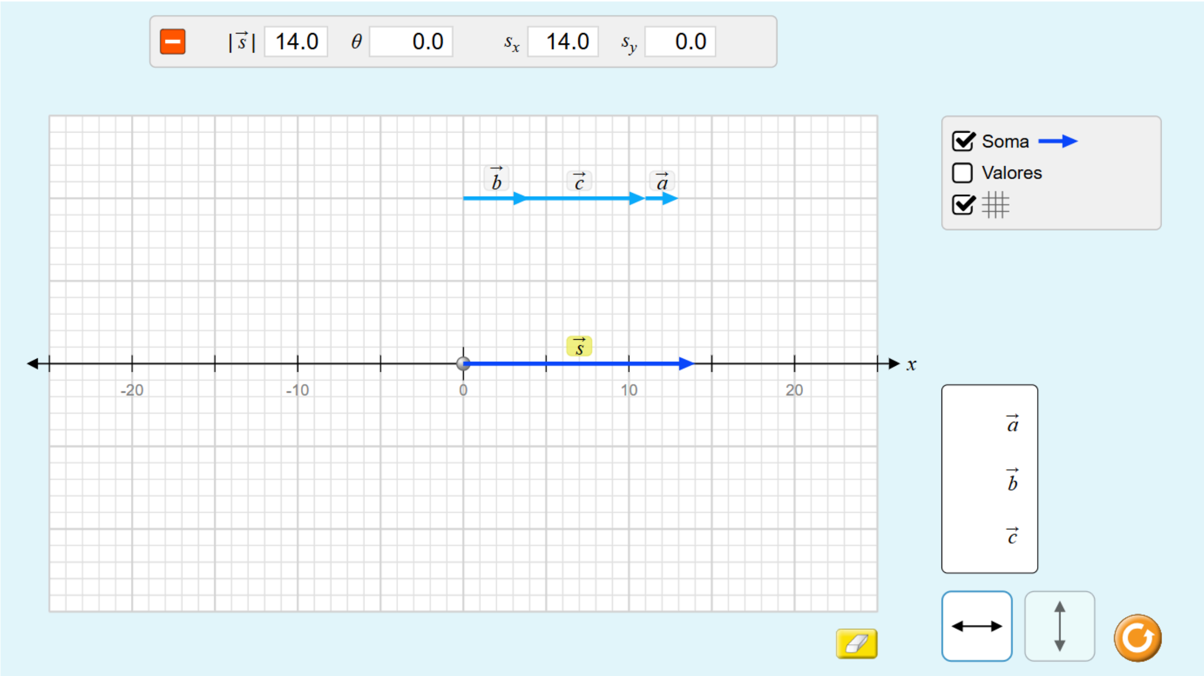
(A + C) + B // (2 + 8) + 4 = 14



B +C (4 + 8) = 12

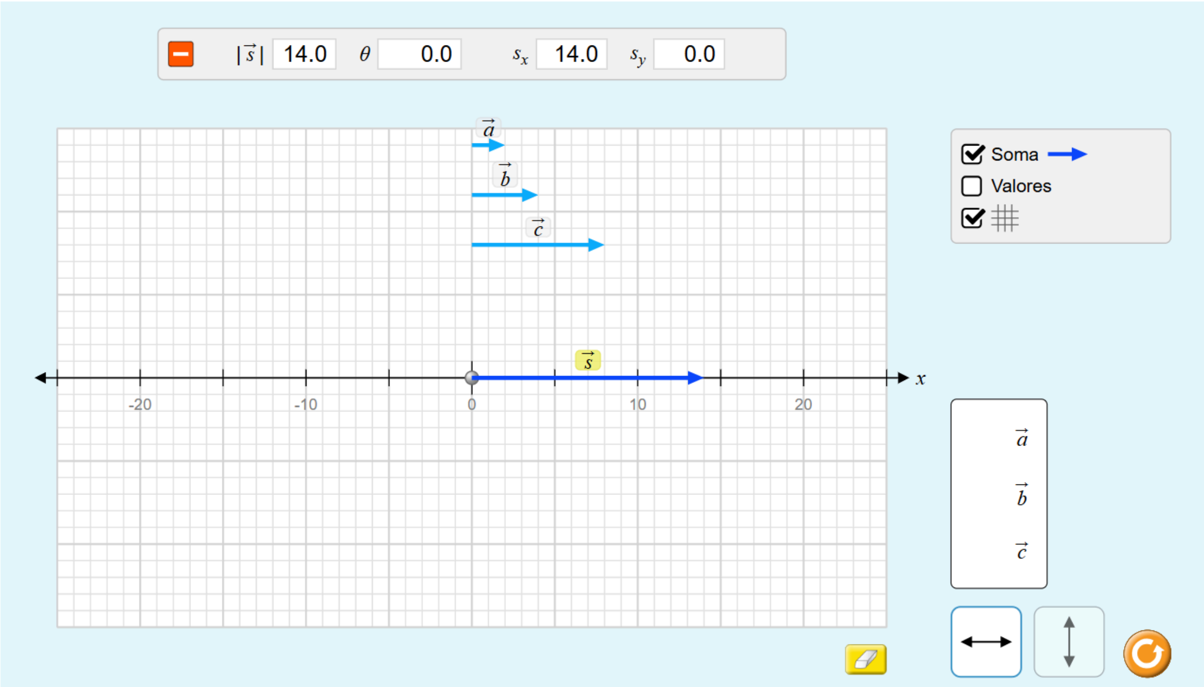


(B + C) + A // (4 + 8) + 2 = 14

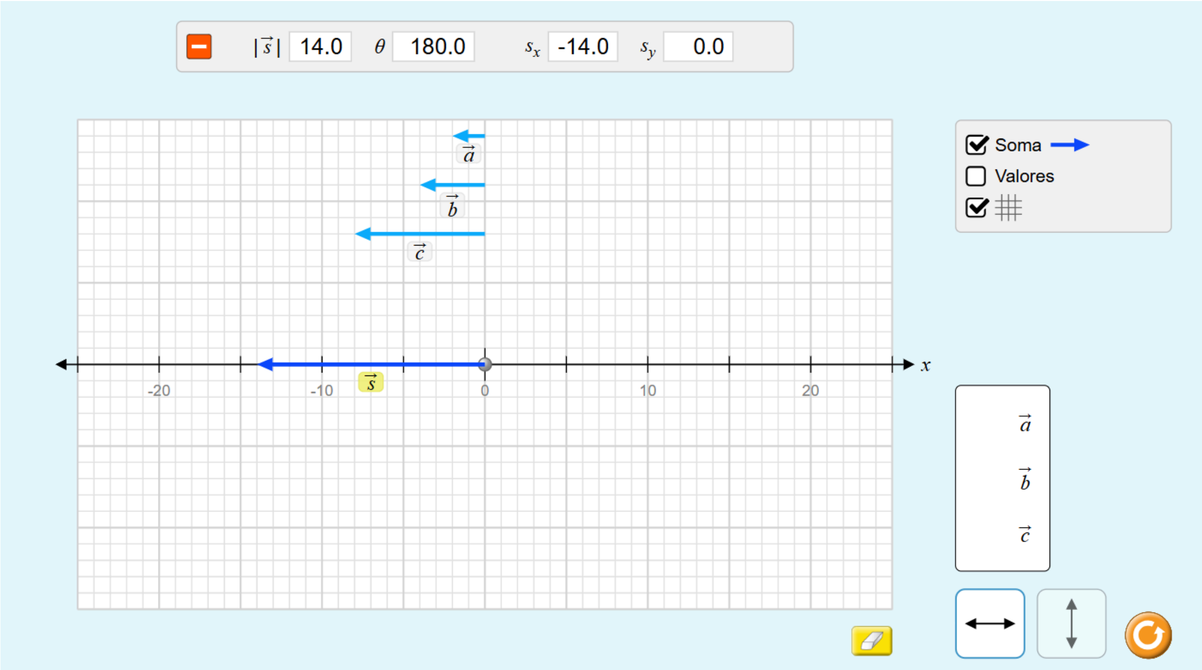


Aplicando inversão vetorial

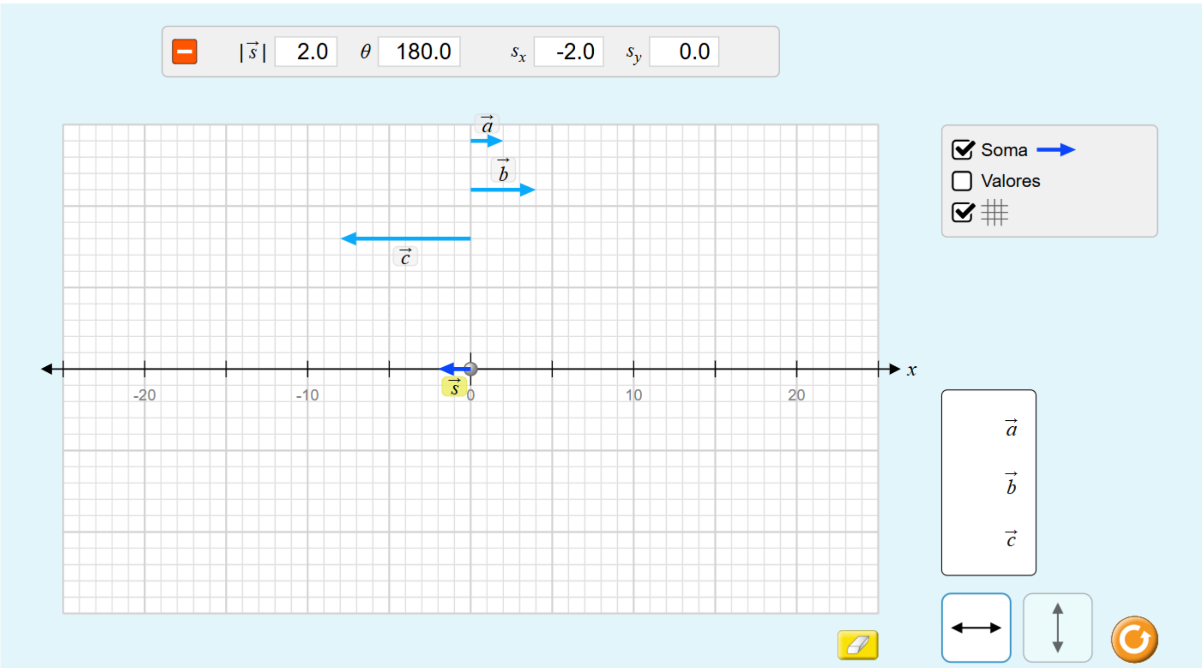
A + B + C (2 + 4 + 8) = 14 // antes da soma dos vetores opostos

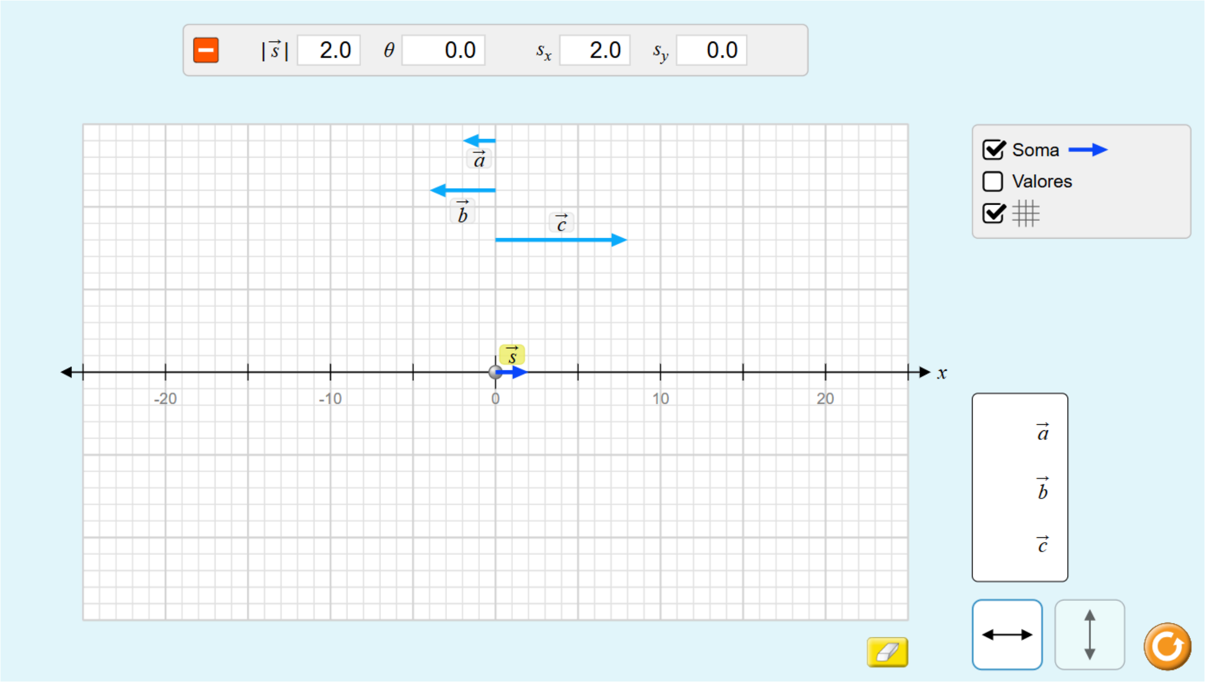


-A -B -C (-2 - 4 -8) = -14 // Soma dos vetores opostos



A + B - C (2 + 4 - 8) = - 2





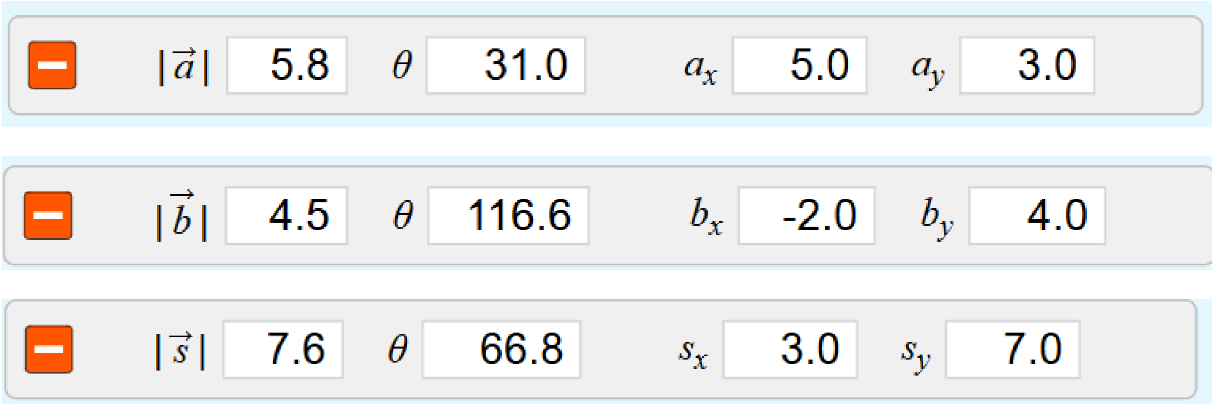
-A -B + C (-2 - 4 + 8) = 2 (imagem acima)

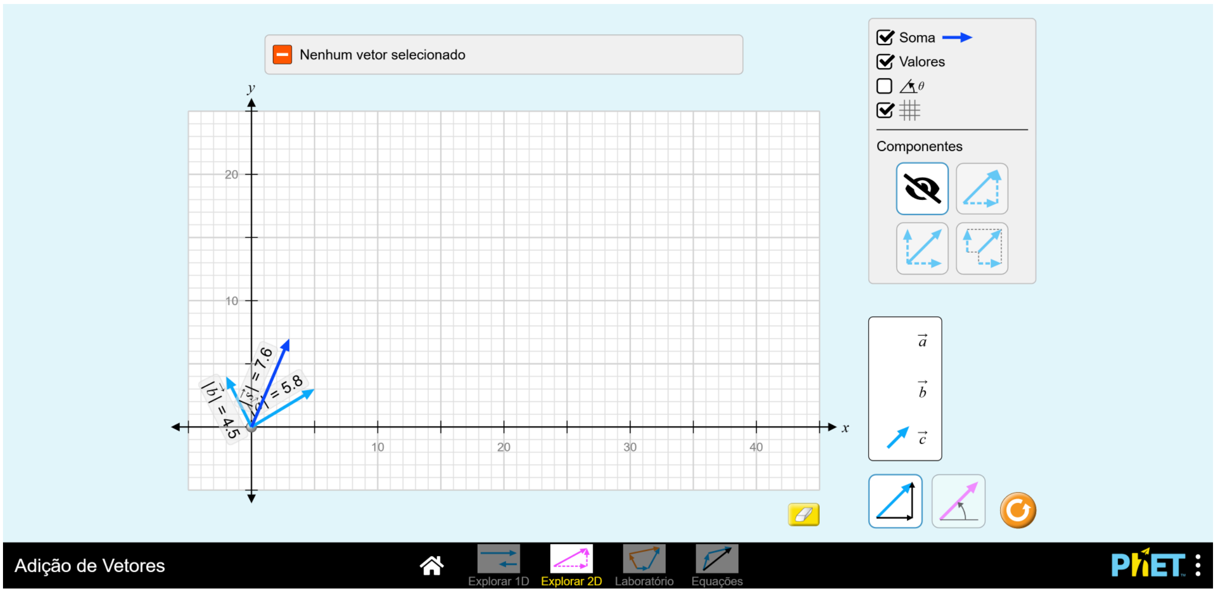
3.2 Explorar 2D

Foram analisados vetores com ângulos e magnitudes variados para entender como as direções influenciam no vetor resultante.

Exercício 1: Considere o vetor *a* com magnitude 5 e ângulo 30° e o vetor *b* com magnitude 4 e ângulo 120°. Some-os e determine a magnitude e a direção do vetor resultante.

Não foi possível chegar aos requeridos ângulos e magnitudes, pois só é possível manusear o vetor manualmente. Esse foi o mais próximo que consegui, com uma variação de 0,8 para magnitude e 1 para o ângulo de A, 0,5 de magnitude e 3,4 para o ângulo em B e 1,2 de magnitude e 1,7 para o ângulo em relação ao resultado se feito com os valores reais (6,4 de magnitude e 68,5 de ângulo).





Vetor a:

$a_x = 5 * \cos(30°) = 4,33$

$a_y = 5 * \sin(30°) = 2,5$

a = (4,33, 2,5)

Vetor b:

$b_x = 4 * \cos(120°) = -2$

$b_\gamma = 4 * \sin(120°) = 3{,}46$

$b = (-2, 3{,}46)$

Soma dos vetores:

$s = (4{,}33 - 2, 2{,}5 + 3{,}46) = (2{,}33, 5{,}96)$

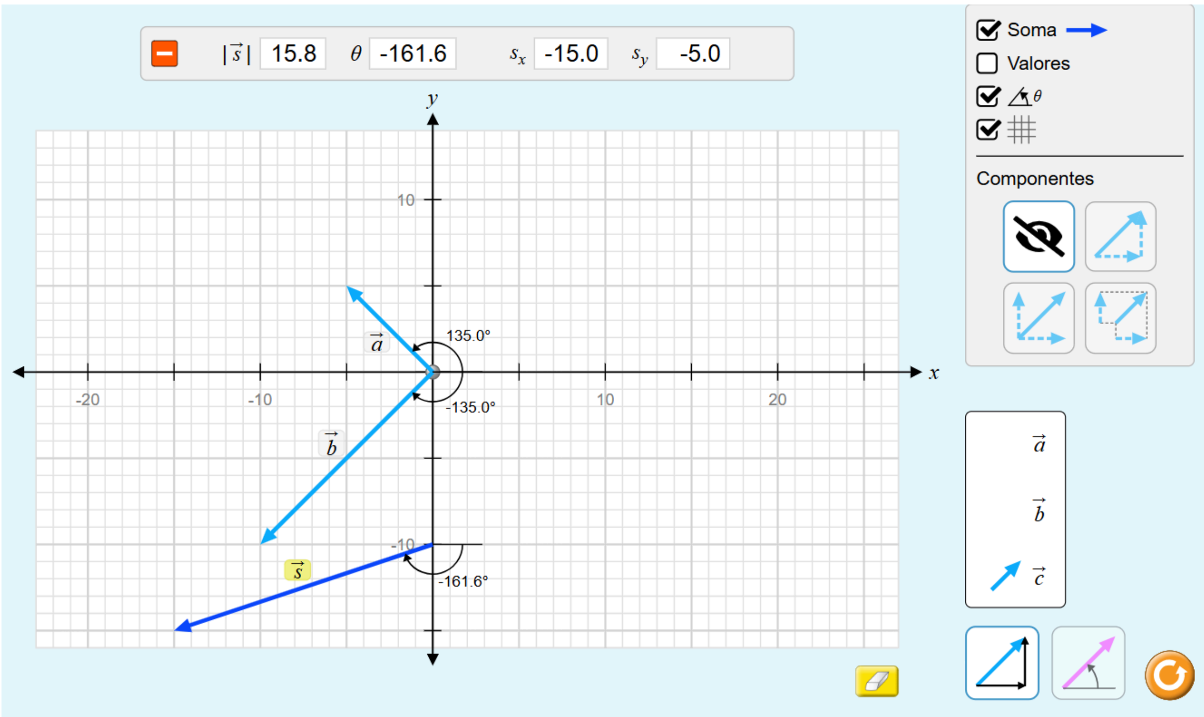
Magnitude da soma:

$\sqrt{(2{,}33^2 + 5{,}96^2)} = 6{,}4$

Ângulo da resultante com o eixo x:

$\arctan(5{,}96 / 2{,}33) = 68{,}7°$

Exercício 2: Escolha dois vetores quaisquer, registre suas componentes, some-os e utilize a simulação para verificar a relação entre os ângulos formados pelos vetores originais e o vetor soma.



O ângulo se mostra entre os dois somados e mais alinhado ao b visto que a magnitude do mesmo é maior a = 7.1 e 135 graus b = 14.1 e -135 graus (equivalente a 225 graus)

Representando de forma básica matematicamente :

Ax = 7,1 cos 135 = -5,02, Ay = 5,02

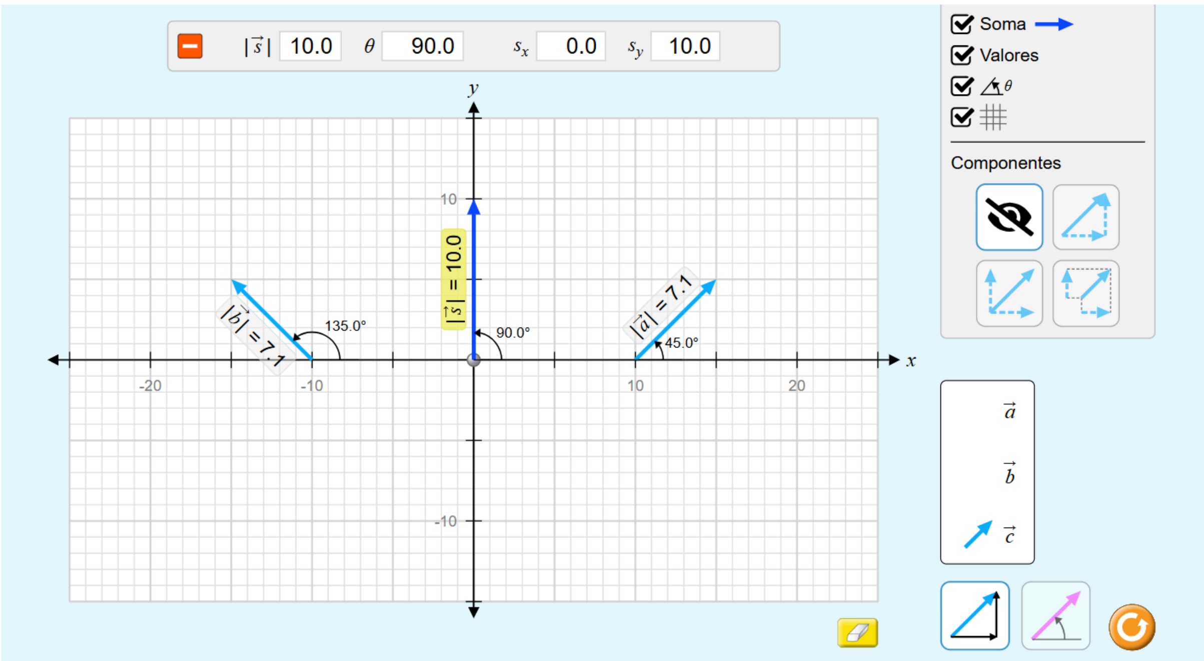
Bx = 14,1 cos 225 = - 9,98, By = - 9,98

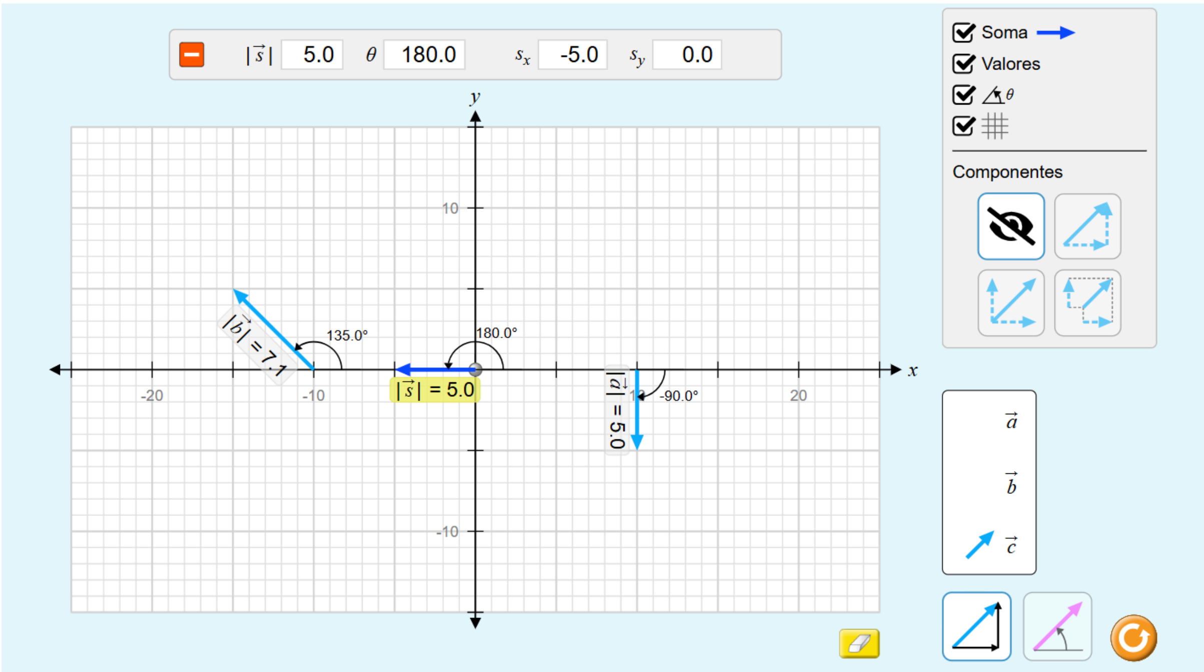
Soma: (-15 , - 4,96)

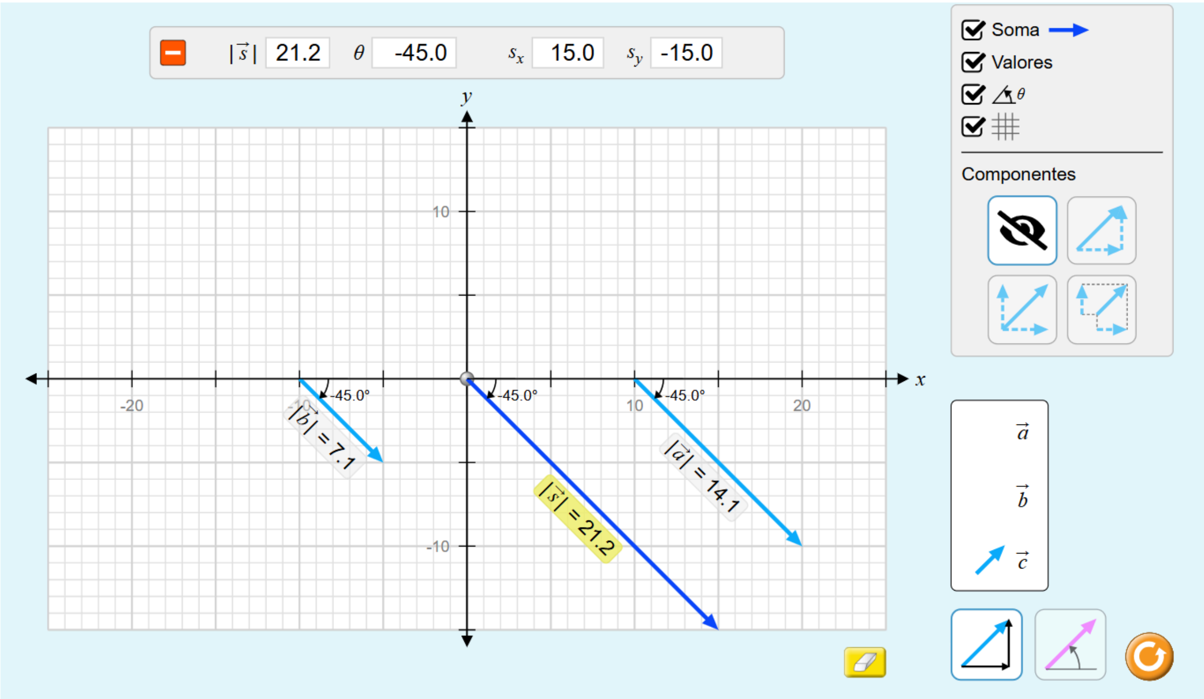
Magnitude : √ (-15) ² + (- 4,96) ² = 15,74

Ângulo: arctan (- 4,96 / - 15) = 198,3

Exercício 3: Varie os ângulos de dois vetores fixos e observe como a soma vetorial se comporta. Registre os resultados e descreva como a variação angular afeta a magnitude do vetor resultante.





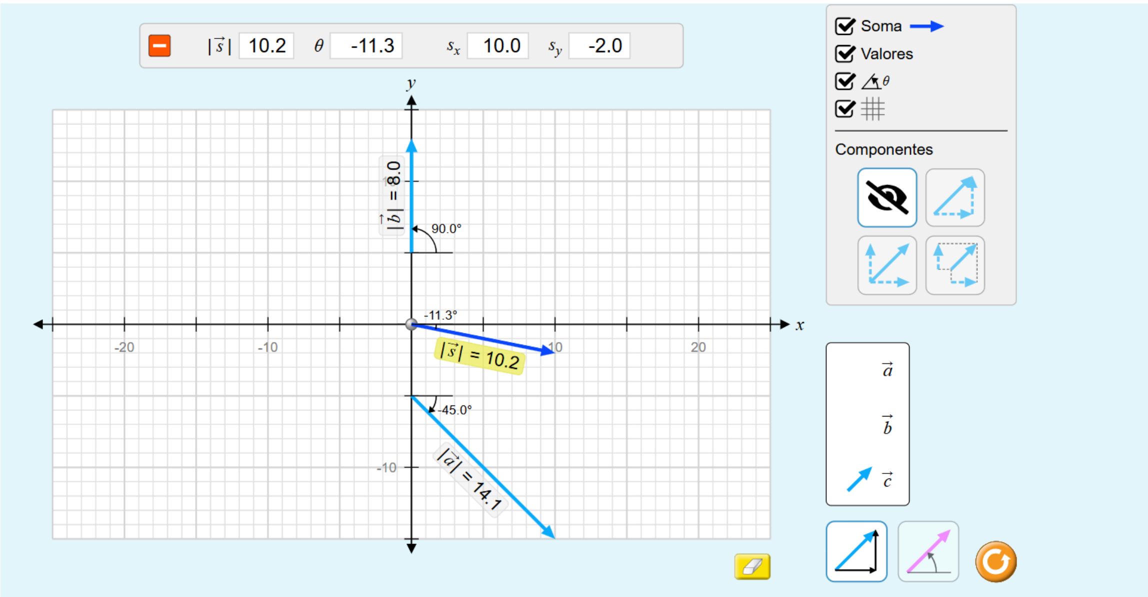


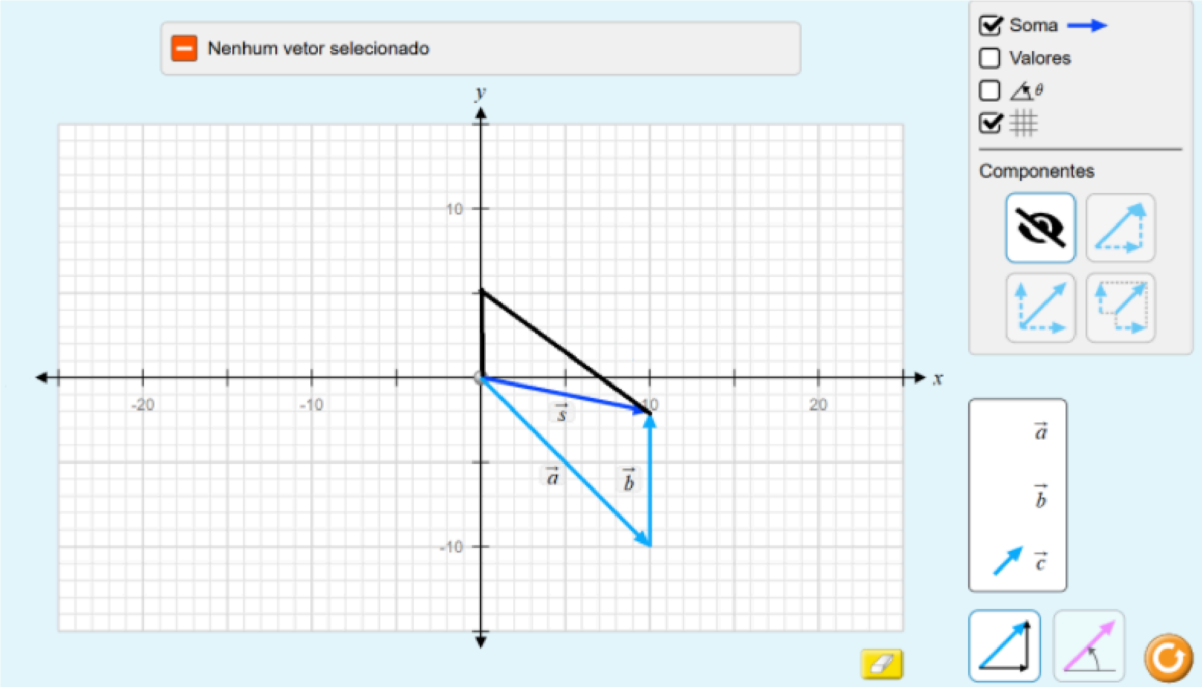
A variação angular afeta a magnitude de forma que os ângulos se subtraem ou se somam assim diminuindo ou aumentando a magnitude (deixando os mesmos em um sentido paralelo, contrário, oblíquo entre outros.)

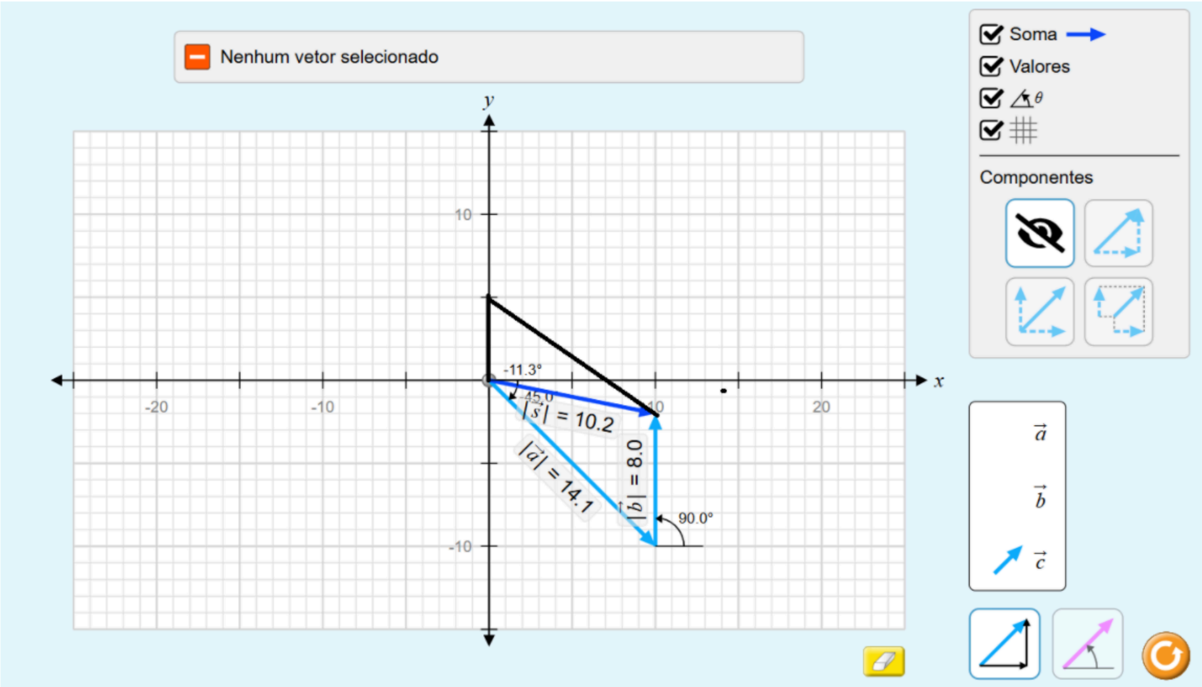
3.3 Laboratório

Neste módulo, a regra do paralelogramo foi aplicada para determinar visualmente o vetor resultante.

Exercício 1: Selecione dois vetores não colineares e aplique a regra do paralelogramo para determinar o vetor resultante. Capture a imagem do desenho e descreva o procedimento utilizado.







Eu fiz o regulamento dos respectivos ângulos da forma que se propõe regra do paralelogramo, no qual se forma a diagonal do mesmo através de duas arestas (assim formando o resto do mesmo)

em termos matemáticos, aplicando a lei dos cossenos

$S^2 = A^2 + B^2 - 2 . A . B . \cos \theta$

temos que

$S^2 = (14{,}1)^2 + (8)^2 - 2 \cdot 14{,}1 \cdot 8 \cdot \cos 135$

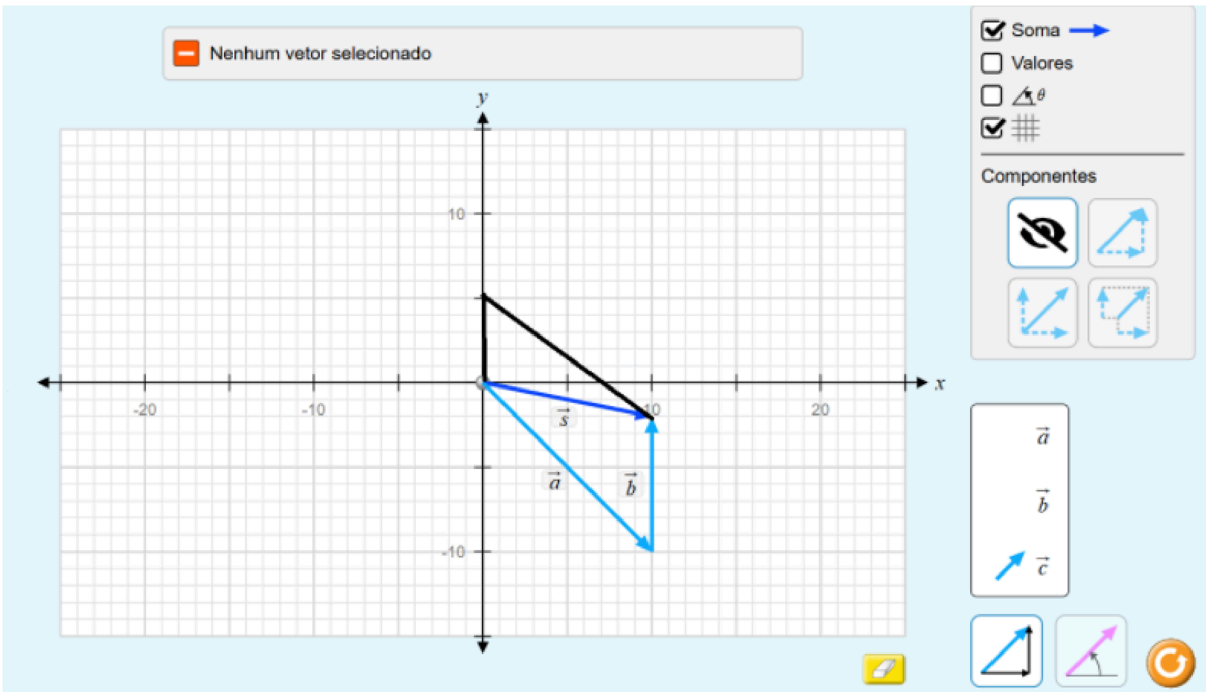
$198{,}81 + 64 - 225{,}6 \cdot (-0{,}707)$

$198{,}81 + 64 + 159{,}5 = 422{,}31$

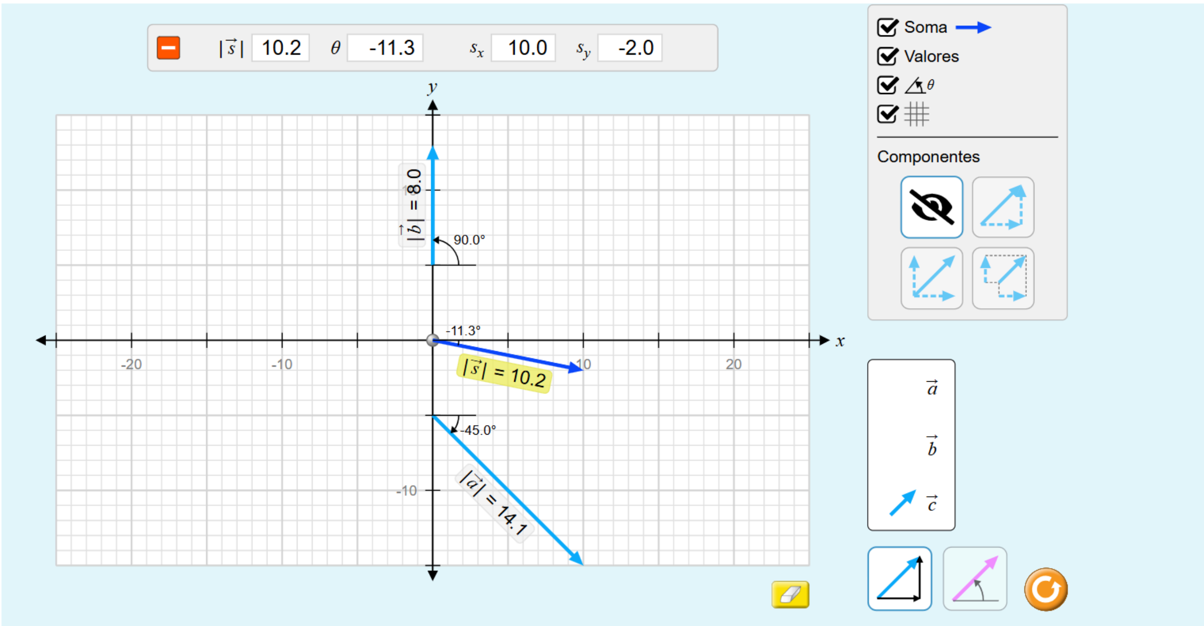
$\sqrt{422{,}31} = 20{,}55$

Exercício 2: Compare a visualização gráfica da regra do paralelogramo com a soma vetorial obtida por componentes. Discorra sobre as vantagens de cada abordagem.

Regra do paralelogramo



Soma por componentes



A regra do paralelogramo tem uma vantagem na questão de visualização e entendimento do que está se propondo, sendo boa para ensinar e para problemas simples.

A soma por componentes é mais precisa e pode ser facilmente ser utilizada em 2d e 3d diferentemente da regra do paralelogramo que é limitada ao 2d por ser muito difícil de se representar e de se entender em dimensões maiores que essa. A soma por componentes é especialmente melhor para cálculos exatos ou em contextos mais complexos.

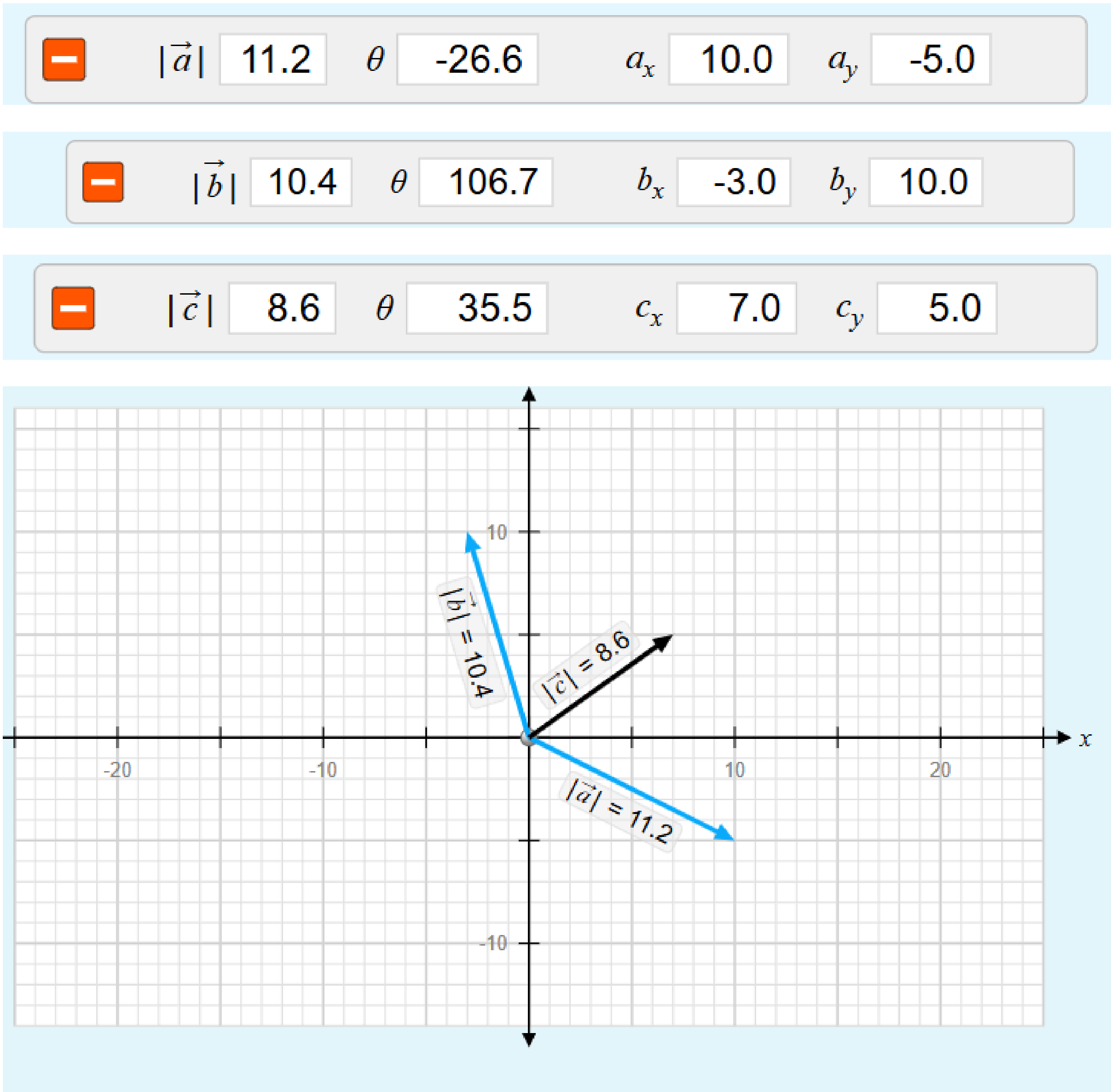
Os dois métodos são bons, qual utilizar depende do intuito, sendo para uma apresentação gráfica ou para algo mais preciso matematicamente.

4. EQUAÇÕES

Foram feitas somas e subtrações vetoriais utilizando coordenadas cartesianas e foi analisada a influência da ordem de operações.

Exercício 1: Utilize a simulação para realizar a soma e a subtração de dois vetores quaisquer. Anote as equações correspondentes e gere o gráfico dos resultados.

Soma

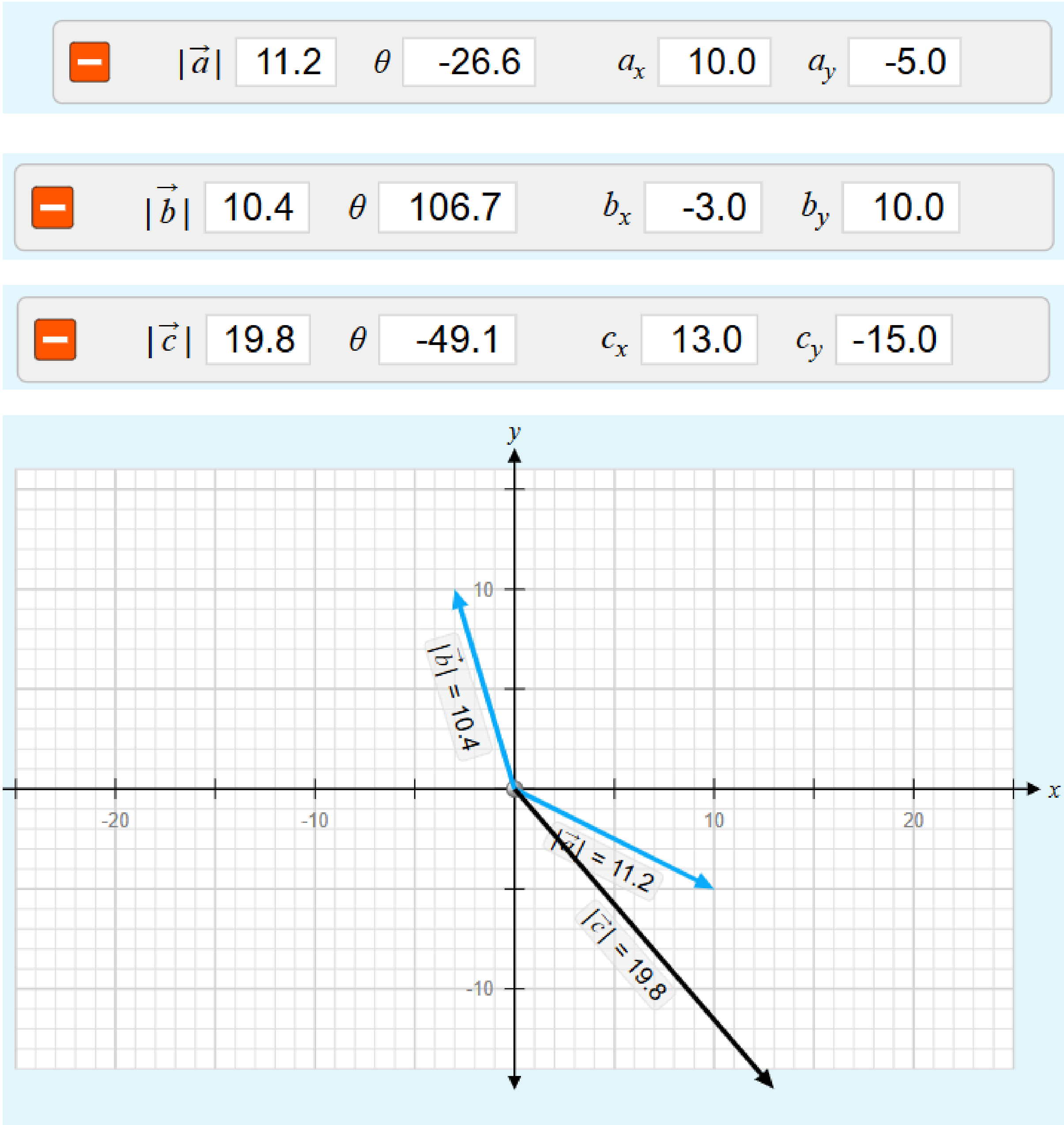


$C = A + B = (10, -5) + (-3, 10) = (7, 5)$

$\sqrt{(7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74} = 8{,}602$ (magnitude)

$\tan \theta c = cy / cx = 5/7 = \text{arctg de } 0{,}714 = 35{,}5377$ (Ângulo)

Subtração



$C = A - B = (10, -5) + (-3, 10) = (13, -15)$

$\sqrt{(13)^2 + (-15)^2} = \sqrt{169 + 225} = \sqrt{394} = 19{,}849$ (magnitude)

$\tan \theta c = cy / cx = 13 / -15$ ou $-(15 / 13)$ = arctg de 1.154 = 310,9 (Ângulo)

Exercício 2: Expanda a atividade incluindo três vetores. Realize as operações de soma e subtração e discuta como a ordem das operações afeta o resultado final, se aplicável.

Vetores Escolhidos: A = (3, 2), B = (-1, 4), C = (5, -3).

Soma:

S = (A + B) + C = (7, 3), magnitude aproximadamente 7,62, ângulo aproximadamente 23,2 graus.

S = A + (B + C) = (7, 3), confirmando a propriedade associativa.

Subtração:

D = (A - B) - C = (-1, 1), magnitude aproximadamente 1,41, ângulo aproximadamente 135 graus.

D = A - (B + C) = (-1, 1), mesmo resultado com a interpretação padrão.

Se interpretarmos como A - (B - C), o resultado é (9, -5), mostrando que a subtração não é associativa.

A ordem das operações em vetores pode influenciar o resultado dependendo de como as subtrações são organizadas, mas a soma de vetores é comutativa e associativa, o que significa que a ordem em que você soma os vetores não altera o resultado final. No entanto, a subtração introduz uma dependência da ordem, pois inverter a direção de um vetor (equivalente a subtrair) muda o sinal das componentes.

5. QUESTÕES TEÓRICAS

As questões teóricas abordaram os conceitos de vetor, propriedades da soma vetorial, regra do paralelogramo e aplicações da álgebra vetorial na Geometría Analítica.

Explique os conceitos de vetor, magnitude e direção. Como esses conceitos se aplicam na representação gráfica de vetores?

Vetor é um tipo de grandeza que não se resume só a um número. Ele tem magnitude, que é basicamente o tamanho ou a intensidade dele, e também direção, que mostra pra onde essa "força" ou deslocamento que ele possui está apontando. No papel, ele é normalmente representado como uma seta: o comprimento da seta mostra o quanto ele é “forte” (ou longo), e a inclinação indica o sentido. Quando se faz o uso do plano cartesiano para trabalhar com vetores, dá pra “quebrar” esse vetor em duas partes — uma no eixo x e outra no eixo y. Essas componentes são calculadas usando trigonometria, a partir da magnitude e do ângulo.

Quais são as principais propriedades da soma de vetores (comutatividade, associatividade, existência do elemento neutro e do inverso aditivo)?

As principais propriedades da soma de vetores são: comutatividade (a + b = b + a), associatividade ((a + b) + c = a + (b + c)), elemento neutro (existe um vetor nulo a + 0 (vetor nulo) = a) e inverso aditivo (para cada vetor a, existe um com valor equivalentemente contrário sendo a + (-a) = 0). Essas propriedades possibilitam que as operações permaneçam estáveis e coerentes.

Descreva a regra do paralelogramo e sua importância na adição de vetores em duas dimensões.

É uma forma de somar dois vetores graficamente, completando o paralelogramo. Você coloca os dois vetores saindo do mesmo ponto, e depois completa o paralelogramo com linhas iguais aos vetores, e a diagonal que sai desse ponto é o vetor soma.

Esta regra é bastante importante principalmente para fins de visualização gráfica em 2d, por ser de fácil compreensão

Como a manipulação algébrica de vetores pode ser utilizada para resolver problemas práticos em Geometria Analítica?

A manipulação algébrica de vetores é uma das ferramentas mais úteis quando se trabalha com Geometria Analítica. Com ela, dá pra resolver uma série de problemas, desde os mais simples até os mais complexos. Usando coordenadas e operações como soma, subtração e produto escalar, conseguimos, por exemplo, calcular a distância entre dois pontos, verificar se vetores são paralelos, ou ainda encontrar o ângulo entre eles. Um caso clássico é quando queremos descrever uma reta: se ela passa por um ponto P=(1,1) e tem direção d=(2,3), podemos escrevê-la como x =1+2t = + y=1+3t. Além disso, dá pra achar ponto médio, projetar vetores e até resolver interseções entre retas por meio de sistemas de equações. O melhor é que tudo isso funciona tanto em 2D quanto em 3D, facilitando bastante a visualização e a resolução prática de problemas.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO

Foi observada a coerência entre os conceitos teóricos e os resultados práticos. As propriedades da adição vetorial foram verificadas experimentalmente.

Ao realizar as simulações propostas pela plataforma PHET, foi possível entender de forma muito mais prática como os vetores se comportam na adição. No caso dos vetores unidimensionais (1D), ficou evidente como as propriedades básicas da adição vetorial realmente funcionam. Por exemplo, somar os vetores em diferentes ordens não muda o resultado, o que confirma a propriedade comutativa. Também foi possível perceber que, ao mudar os parênteses numa soma com três vetores, o resultado se manteve, ilustrando bem a propriedade associativa.

Outro ponto que ficou claro foi a ideia do vetor nulo. Quando somamos um vetor com seu oposto, o resultado foi zero, como esperado. Esse tipo de visualização direta ajuda bastante a fixar os conceitos, porque a gente vê o que está acontecendo em tempo real.

Já na simulação em duas dimensões (2D), os vetores passaram a ter direção e ângulo, e isso fez com que a soma dependesse mais do posicionamento deles. Alterar o ângulo entre dois vetores, mesmo que suas magnitudes fossem mantidas, alterava o vetor resultante — algo que, teoricamente, já sabíamos, mas é bem diferente quando se vê isso acontecendo no gráfico. Essa parte foi importante para entender como os ângulos influenciam a direção e o comprimento do vetor soma.

No laboratório, a regra do paralelogramo foi bem útil para visualizar a soma entre dois vetores que partem do mesmo ponto. A forma como a diagonal do paralelogramo surge automaticamente com a simulação torna mais fácil compreender o conceito, principalmente para quem tem mais facilidade com o visual do que com o cálculo. Comparando com a soma feita por componentes, dá pra dizer que ambas chegam ao mesmo resultado, mas cada método tem suas vantagens: um é mais visual e direto, o outro é mais exato e matemático.

No geral, os resultados obtidos nas simulações bateram com os conceitos teóricos vistos em aula. Algumas pequenas diferenças apareceram por conta do arredondamento automático da simulação ou de dificuldades em alinhar vetores exatamente, mas nada que comprometesse o entendimento. Essa prática com a ferramenta interativa foi muito útil para consolidar o conteúdo e mostrar como os vetores estão presentes em várias áreas, não só na matemática, mas também na física, engenharia e computação.

7. CONCLUSÃO

A simulação permitiu compreender conceitos fundamentais de vetores, aplicáveis em várias áreas, especialmente na Ciência de Dados.

A realização desta atividade prática permitiu não apenas visualizar, mas também compreender de forma mais concreta como a álgebra vetorial é aplicada na Geometria Analítica. A manipulação dos vetores por meio da simulação PHET tornou os conceitos de magnitude, direção e soma vetorial mais palpáveis, facilitando a absorção do conteúdo.

Ao longo das simulações, ficou evidente que propriedades como comutatividade, associatividade, existência do vetor nulo e do inverso aditivo não são apenas abstrações matemáticas, mas regras que se confirmam graficamente. Além disso, a regra do paralelogramo se mostrou uma ferramenta útil para interpretar, de maneira intuitiva, a combinação de vetores em duas dimensões.

Na prática, os conhecimentos adquiridos são amplamente aplicáveis. No meu caso, como estudante da área de Ciência de Dados e Inteligência Artificial, o raciocínio vetorial está presente em modelos matemáticos, representações de dados em espaços multidimensionais e algoritmos de aprendizado de máquina. A clareza com que foi possível compreender esses fundamentos agora certamente contribuirá para uma base mais sólida ao lidar com temas avançados no futuro.

8. REFERÊNCIAS

PHET. Vector addition. Universidade do Colorado. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/vector-addition. Acesso em: 1 abr. 2025.

BRASIL ESCOLA. O que são vetores? Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/o-que-sao-vetores.htm. Acesso em: 1 abr. 2025.

BRASIL ESCOLA. Grandezas físicas: o que são, exemplos, tipos. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/grandezas-fisicas.htm. Acesso em: 1 abr. 2025.

YOUTUBE. Playlist: Álgebra Linear com aplicações. Disponível em: https://youtube.com/playlist?list=PLzjR7HXQnrceCXqDYawEzO-lp5A6nZQyP. Acesso em: 1 abr. 2025.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 201. Acesso em: 1 abr. 2025.