

Vorbereiding op de les

Inleiding

Deze week ligt de focus op het ontwerpen en realiseren van hogere-orde filters die aan verschillende eisen dienen te voldoen. Dit zijn laag-, hoog- en eventueel banddoorlaatfilters (LP, HP en BP). De te ontwerpen filters zijn in hun doorlaatgebied zo vlak mogelijk. Deze filters zullen opgebouwd worden als tweede orde Sallen–Key filters.

Leerdoelen

- Eigenschappen van Sallen–Key laag- en hoogdoorlaatfilters kunnen afleiden en toepassen
- Eigenschappen van Butterworth laag- en hoogdoorlaatfilters kunnen afleiden en toepassen
- Ontwerpen van hogere orde laag- en hoogdoorfilters aan de hand van specificaties

Opdrachten

Overdrachtsfuncties voor filters

Een filter wordt gekarakteriseerd door een overdrachtsfunctie $\mathbf{H}(s)$, met $s = j\omega$, met hoekfrequentie $\omega = 2\pi f$. In een Bode-plot worden de amplitude $H(\omega)$ en de fase $\angle H(\omega)$, gegeven door

$$H(\omega) = |\mathbf{H}(s)|, \quad \angle H(\omega) = \arg \mathbf{H}(s), \quad (1)$$

tegen de frequentie f uitgezet. De maximale versterking $H_{\max \text{ dB}} = 20 \log H_{\max}$ is de maximale waarde $H_{\max}$ van $H(\omega)$ in dB.

De orde n van een filter wordt bepaald door het aantal polen van de overdrachtsfunctie. Zo heeft een n -de orde laagdoorlaatfilter een overdrachtsfunctie

$$\mathbf{H}_n^{\text{LP}}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^n + a_1\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1}, \quad (2)$$

Deze overdrachtsfunctie wordt bepaald door de coëfficiënten $a_1, \dots, a_{n-1}$ en een zogenaamde kritische frequentie ω_0 . De maximale versterking van dit n -de orde laagdoorlaatfilter is 0 dB. Een hoogdoorlaatfilter

$$\mathbf{H}_n^{\text{HP}}(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^n}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^n + b_1\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{n-1} + \dots + b_{n-1}\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} \quad (3)$$

heeft ook een maximale versterking van 0 dB. Kenmerkend voor een hoogdoorlaatfilter is de term s^n in de teller.

Er zijn verschillende transformaties mogelijk tussen de verschillende typen overdrachtsfuncties. Zo wordt met de transformatie

$$s \rightarrow \frac{\omega_0^2}{s} \quad (4)$$

een laagdoorlaatfilter omgezet in een hoogdoorlaatfilter en omgekeerd.

Opdracht 1: Hogere orde filters algemeen

- Laat met een berekening zien dat de maximale versterking diep in het doorlaatgebied van (2) (voor $f \rightarrow 0$) en (3) (voor $f \rightarrow \infty$) daadwerkelijk 0 dB is.
- Schets de Bodeplots voor de amplitude van n -de orde laagdoorlaatfilters voor $n = 1$ t/m 4. Geef hierbij aan wat de doorlaatgebieden en niet-doorlaatgebieden zijn voor deze filters.
- Laat zien dat in het niet-doorlaatgebied deze laagdoorlaatfilters afvallen met $20 \cdot n$ dB per decade.

- d) Schets de Bode-plots voor de fase van n -de orde laagdoorlaatfilters voor $n = 1$ t/m 4.
- e) Herhaal de vorige drie opgaven voor $n = 1, 2, 3, 4$ orde hoogdoorlaatfilters.
- f) Laat zien dat de overdracht (3) ook te schrijven is als

$$\mathbf{H}_n^{\text{HP}}(s) = \frac{1}{1 + b_1\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^1 + \dots + b_{n-1}\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^{n-1} + \left(\frac{\omega_0}{s}\right)^n} . \quad (5)$$

- g) Laat zien dat de transformatie (4) ook te schrijven is als: $\frac{s}{\omega_0} \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s}$.

- h) Gebruik dit om te laten zien dat $\mathbf{H}_n^{\text{HP}}(s) = \mathbf{H}_n^{\text{LP}}\left(\frac{\omega_0^2}{s}\right)$.

Conclusie 1

Sallen-Key filters

Tweede orde filters worden meestal door een kritische frequentie ω_c en een kwaliteitsfactor Q gekarakteriseerd:

$$\mathbf{H}_2^{\text{LP}}(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} , \quad (6)$$

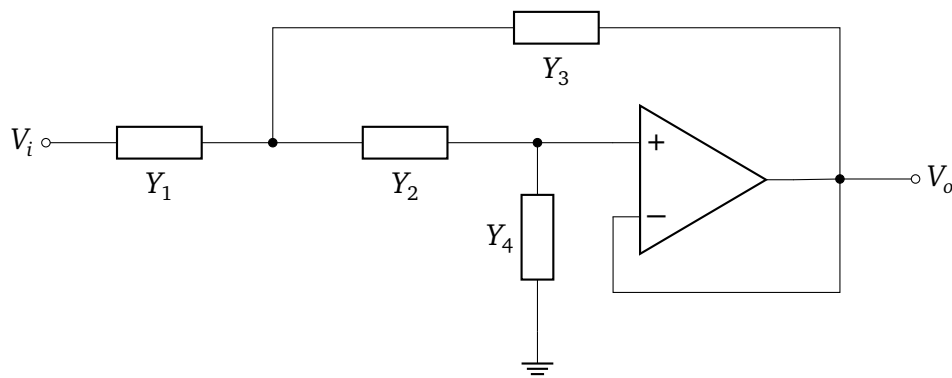
en

$$\mathbf{H}_2^{\text{HP}}(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} . \quad (7)$$

De coëfficiënten a_1 in (2) en b_1 in (3) zijn dus vervangen door $1/Q$. Op de kritische frequentie ω_0 zijn de amplitudes $H_2^{\text{LP}}(\omega_0) = H_2^{\text{HP}}(\omega_0) = Q$. Dus alleen als $Q = 1/\sqrt{2}$ zit de kritische frequentie op het -3 dB-punt.

Met de Sallen-Key topologie, zie [schakeling 1](#), is het mogelijk om tweede orde laag- en hoogdoorlaatfilters te maken. De algemene overdrachtsfunctie in termen van de gegeven admittanties, Y_1 t/m Y_4 , in [schakeling 1](#) is gegeven door

$$\mathbf{H}(s) = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)} . \quad (8)$$



Schakeling 1: Sallen-Key filtertopologie

De versie van de Sallen–Key die hier gegeven is, heeft een maximale versterking van 0 dB. (De topologie is uit te breiden zodat een grotere versterking bereikt kan worden, maar dat is voor de toepassingen in dit lab niet nodig en zou bepaalde formulesodeloos ingewikkeld maken.) Het doel van de onderstaande opgave is dat we heel snel waarden voor de mogelijke combinaties van weerstanden en condensatoren voor de admittanties Y_1 t/m Y_4 kunnen kiezen, zodanig dat een tweede orde laag- of hoogdoorlaatfilter ontstaat met gegeven kritische frequentie ω_c en kwaliteitsfactor Q .

Opdracht 2: Tweede orde Sallen–Key filters

- Laat zien dat met keuzen in [tabel 1](#) tweede orde laag- en hoogdoorlaatfilters gerealiseerd worden met kritische frequentie $\omega_0 = 1/(RC)$ en kwaliteitsfactor Q .
- Maak simulaties van tweede orde laag- en hoogdoorlaatfilters met de Sallen–Key topologie met kritische frequentie van 1 kHz en verschillende kwaliteitsfactoren $Q = 1/2, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$. Produceer de hierbij behorende Bodeplots van 0,1 Hz t/m 10 MHz.
- Bouw een tweetal Sallen–Key laagdoorlaatfilters op zodat je hun kritische frequenties en kwaliteitsfactoren makkelijk kunt aanpassen door het verwisselen van een minimum aantal componenten.
 - Gebruik de LF356N of de TL074 voor de opamp in de filterschakelingen.
 - Stel de kritische frequenties in op 1 kHz en de kwaliteitsfactoren op $1/\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$.
 - Verifieer met behulp van je simulaties het gedrag van de opgebouwde schakelingen.
- Bouw een tweetal Sallen–Key hoogdoorlaatfilters op zodat je de kritische frequenties en kwaliteitsfactoren makkelijk kunt aanpassen door het verwisselen van een minimum aantal componenten.
 - Gebruik de LF356N of de TL074 voor de opamp in de filterschakelingen.
 - Stel de kritische frequenties in op 1 kHz en de kwaliteitsfactoren op $1/\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$.

- Verifieer met behulp van je simulaties het gedrag van de opgebouwde schakelingen.

Conclusie 2

Tabel 1: Sallen-Key componentkeuzen voor tweede orde filters met kritische frequentie $\omega_0 = 1/(RC)$ en kwaliteitsfactor Q

Filtertype	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Laagdoorlaat	$R_1 = R$	$R_2 = R$	$C_3 = (2Q)^{+1}C$	$C_4 = (2Q)^{-1}C$
Hoogdoorlaat	$C_1 = C$	$C_2 = C$	$R_3 = (2Q)^{-1}R$	$R_4 = (2Q)^{+1}R$

Butterworth filters

Butterworth filters zijn filters die in hun doorlaatgebied zo vlak mogelijk zijn. De amplitude van een n -orde Butterworth laagdoorfilter is gegeven door

$$H_n^{\text{BW LP}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}, \quad (9)$$

met de kritische frequentie ω_0 . Even orde Butterworth laagdoorlaatfilters kunnen verkregen worden uit tweede orde laagdoorlaatfilters met speciale waarden van hun kwaliteitsfactoren. In dat geval wordt de overdrachtsfunctie van een $2n$ -de orde Butterworth laagdoorlaatfilter

$$\mathbf{H}_{2n}^{\text{BW LP}}(s) = \frac{1}{\mathbf{D}_{2n}(s)} \quad (10)$$

met de polynomen $\mathbf{D}_{2n}(s)$ voor $n = 1, 2, 3$ gegeven in [tabel 2](#).

Opdracht 3: Butterworth filters

- Laat zien dat het -3 dB-punt van een n -de orde Butterworth laagdoorfilter zit op de kritische frequentie $\omega = \omega_0$.
- Bepaal de amplitude $H_2^{\text{LP}}(\omega)$ voor het tweede orde laagdoorlaatfilter gegeven in (6).

- c) Voor welke waarde van de kwaliteitsfactor Q wordt het algemene tweede orde filter (2) een Butterworth filter? Laat hiermee zien dat voor deze waarde van Q dat de overdrachtsfunctie van een tweede orde laagdoorlaatfilter gegeven is door

$$H_2^{LP}(s) = H_2^{BW LP}(s) = \frac{1}{D_2(s)}$$

met $D_2(s)$ gegeven in tabel 2.

- d) Toon door metingen aan dat een van de in opdracht 2.c) opgebouwde Sallen–Key laagdoorlaatfilters een tweede orde Butterworth filter is.
- e) Gebruik vergelijking (10) en tabel 2 om te bepalen hoe uit twee tweede orde Sallen–Key laagdoorlaatfilters een vierde orde Butterworth laagdoorlaatfilter kan gemaakt worden. Geef hierbij aan hoe de waarden van de condensatoren volgens tabel 1 gekozen dienen te worden.
- f) Gebruik vergelijking (10) en tabel 2 om te bepalen hoe uit drie tweede orde Sallen–Key laagdoorlaatfilters een zesde orde Butterworth laagdoorlaatfilter kan gemaakt worden. Geef hierbij aan hoe de waarden van de condensatoren volgens tabel 1 gekozen dienen te worden.
- g) Tot nu toe hebben we hier alleen gekeken naar Butterworth laagdoorlaatfilters. Gebruik de transformatie (4) om te bepalen hoe de vergelijkingen (9) en (10) aangepast kunnen worden voor Butterworth hoogdoorlaatfilters.
- h) Geef hiermee aan hoe tweede, vierde en zesde orde Butterworth hoogdoorlaatfilters verkregen kunnen worden uit tweede orde Sallen–Key hoogdoorlaatfilters. Geef hierbij aan hoe de waarden van de weerstanden volgens tabel 1 voor deze tweede, vierde en zesde orde Butterworth hoogdoorlaatfilter gekozen dienen te worden.

Conclusie 3

Als elektronicaontwerper zul je vaak niet gevraagd worden om een bepaald filter te maken van een bepaalde orde, maar een filter die aan bepaalde eisen voldoet:

- bij frequentie f_1 (in het doorlaatgebied) is de overdracht A_1^{dB} ;
- bij frequentie f_2 (in het niet–doorlaatgebied) is de overdracht A_2^{dB} .

Tabel 2: Noemers $D_n(s)$ van even orde Butterworth filters met $S = s/\omega_0$ gefactoriseerd naar tweede ordes

Orde	Gefactoriseerd polynoom $D_n(s)$
2	$(S^2 + 1,414S + 1)$
4	$(S^2 + 1,848S + 1)(S^2 + 0,765S + 1)$
6	$(S^2 + 1,932S + 1)(S^2 + 1,414S + 1)(S^2 + 0,518S + 1)$

Een Butterworth laag- of hoogdoorlaatfilter heeft maar twee parameters: de kritische frequentie ω_0 en de orde n . De orde n is een positief geheel getal. Uit de bovenstaande twee condities kan eerst een benadering n_{approx} voor de orde n bepaald worden door gebruik te maken van de formules voor n_{approx} in tabel 3. Het resultaat n_{approx} moet vervolgens wel afgerond worden naar het volgende positieve gehele getal n . Daarna kan de kritische frequentie f_0 berekend worden door gebruik te maken van de formules voor f_0 in tabel 3. Let hierbij goed op of het om een laag- of hoogdoorlaatfilter gaat want dat correspondeert met verschillende kolommen want de formules zijn net iets anders.

Tabel 3: Bepalen van de benaderde orde n_{approx} en de kritische frequentie f_0 van een Butterworth hoog- of laagdoorlaatfilter

Parameters	Laagdoorlaatfilter	Hoogdoorlaatfilter
$n_{\text{approx}} =$	$\frac{\log \left[\frac{10^{-\frac{1}{10}A_2^{\text{dB}}} - 1}{10^{-\frac{1}{10}A_1^{\text{dB}}} - 1} \right]}{2 \log \left(\frac{f_2}{f_1} \right)}$	$\frac{\log \left[\frac{10^{-\frac{1}{10}A_2^{\text{dB}}} - 1}{10^{-\frac{1}{10}A_1^{\text{dB}}} - 1} \right]}{2 \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right)}$
$f_0 =$	$\left(10^{-\frac{1}{10}A_1^{\text{dB}}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2n}} f_1$	$\left(10^{-\frac{1}{10}A_1^{\text{dB}}} - 1 \right)^{\frac{1}{2n}} f_1$

Opdracht 4: Ontwerpen van Butterworth filters

Bij deze opgave maak je opgave 4a) laagdoorlaatfilter als je een oneven tafelnummer hebt en 4b) hoogdoorlaatfilter als je een even tafelnummer hebt.

a) Ontwerp, simuleer en bouw een Butterworth laagdoorlaatfilter uit Sallen–Key filter(s) die voldoet aan de volgende eisen:

- Voor $f < 15 \text{ kHz}$ mag het versterkingsverlies hooguit $-0,1 \text{ dB}$ zijn;
- Voor $f > 200 \text{ kHz}$ moet de onderdrukking minstens 60 dB zijn.

Dit betekent minimaal het volgende:

- Ontwerp: de orde n , de kritische frequentie f_0 , de benodigde schakeling en de kwaliteitsfactor(en) en onderbouwing van de componentkeuzen;

- Simulatie: de schakeling in simulatieprogramma, een Bodeplot voor de amplitude, controle van de eisen, de kritische frequentie en het afvalgedrag;
 - Realisatie: de opgebouwde schakeling, een Bodeplot voor de amplitude, controle van de eisen, de kritische frequentie en het afvalgedrag.
- b) Ontwerp, simuleer en bouw een Butterworth hoogdoorlaatfilter die voldoet aan de volgende eisen:
- Voor $f > 36 \text{ kHz}$ mag het versterkingsverlies hooguit $-0,1 \text{ dB}$ zijn;
 - Voor $f < 1 \text{ kHz}$ moet de onderdrukking minstens 60 dB zijn.

Met minimaal dezelfde zaken als in [opdracht 4.a](#)).

Conclusie 4

Controle: controleer of je overal alle gegevens goed opgeschreven hebt. Zijn alle grafieken en tabellen volledig ingevuld? Heb je alle simulaties opgeslagen en foto's/filmpjes gemaakt van alle opgebouwde schakelingen en uitgevoerde metingen? En heb je zinvolle conclusies opgeschreven en deze goed onderbouwd?