

Huiswerk kwartaal 3 week 6

Vorig week heb je twee verschillende manieren geleerd om een digitaal filter te ontwerpen:

- met behulp van de Inverse Discrete-Time Fourier Transform (IDTFT);
- door het plaatsen van polen en nulpunten in het Z-domein.

Deze week komt daar nog een derde methode bij:

- het ontwerpen van een digitaal filter door het af te leiden van een bestaand analoog filter. Dit kan op twee manieren:
 - Door de impulsresponsie van het digitale filter $h[n]$ te bepalen door de impulsresponsie van het analoge filter $h(t)$ te samplen.
 - Door de overdracht van het analoge filter $H(s)$ om te zetten naar de overdracht $H(z)$ van het digitale filter met de zogenoemde bilineaire transformatie.

Na afloop van deze week:

- kun je een tweede orde digitaal filter ontwerpen door het plaatsen van polen en nulpunten in het Z-domein;
- weet je hoe je een digitaal filter kunt afleiden van een bestaand analoog filter door de
 - $h(t)$ om te zetten naar de $h[n]$ m.b.v. samplen;
 - $H(s)$ om te zetten naar de $H(z)$ m.b.v. de bilineaire transformatie.

Les 1

In deze les wordt het ontwerp van een 2^{de} orde banddoorlaatfilter in een voorbeeld uitgewerkt. Zie [sheet 5](#) tot en met [9](#). We lopen dat ontwerp hier nog even helemaal door. De eisen aan het filter zijn als volgt. Het filter moet:

- een tweede orde banddoorlaatfilter zijn;
- een maximale versterking $|H(\Omega)|$ van 1 hebben bij $\Omega = \Omega_A = \frac{1}{2}\pi$, wat overeenkomt met $f_A = \frac{1}{4}f_s$;
- een minimale versterking $|H(\Omega)|$ hebben bij $\Omega = 0$, wat overeenkomt met $f = 0$ en bij $\Omega = \pi$, wat overeenkomt met $f = \frac{1}{2}f_s$;
- een bandbreedte B hebben van $\frac{1}{40}\pi$, wat overeenkomt met $\frac{1}{80}f_s$.

De bandbreedte is gedefinieerd als de frequentieband waarbij de versterking -3 dB is. Dit is de frequentieband waarbij de versterking hoger is dan $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |H(\Omega)|_{\max}$. In dit geval is dat

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$. De randen van deze frequentieband worden de kantelpunten, of ook wel de -3 dB-punten, genoemd en deze punten liggen bij de frequenties:

- $\Omega_B = \Omega_A - \frac{1}{2}B = \frac{39}{80}\pi$;
- $\Omega_C = \Omega_A + \frac{1}{2}B = \frac{41}{80}\pi$.

De algemene formule van de overdracht van een tweede orde LTI-systeem in het Z-domein is:

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Waarbij $z = e^{j\Omega}$. Om een minimale versterking ($|H(z)| = 0$) te krijgen bij $\Omega = 0$ moet gelden $z_1 = e^{j0} = 1$. Om een minimale versterking ($|H(z)| = 0$) te krijgen bij $\Omega = \pi$ moet gelden $z_2 = e^{j\pi} = -1$. We hebben nu dus de posities van de nulpunten bepaald:

$$H(z) = K \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Om een maximale versterking ($|H(z)|_{\max}$) te krijgen bij $\Omega = \frac{1}{2}\pi$ moet gelden $p_1 = e^{j\frac{1}{2}\pi} = j$. Dit is echter geen goed idee, omdat de noemer van $H(z)$ dan nul wordt bij $\Omega = \frac{1}{2}\pi$ en dan wordt de versterking dus oneindig groot. Als we de versterking maximaal (maar niet oneindig groot) willen maken bij $\Omega = \frac{1}{2}\pi$, dan moet gelden $p_1 = pj$ waarbij $p \in \mathbb{R}$ en $0 < p < 1$. Omdat complexe poolparen altijd elkaars complex geconjugeerde moeten zijn, geldt ook $p_2 = \overline{p_1} = -pj$. We hebben nu dus ook de posities van de polen bepaald:

$$H(z) = K \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - pj)(z + pj)} = K \frac{z^2 - 1}{z^2 + p^2} \text{ met } p \in \mathbb{R} \wedge 0 < p < 1$$

Omdat we weten dat $|H(z)|_{\max} = 1$ voor $\Omega = \frac{1}{2}\pi$, dus voor $z = e^{j\Omega} = e^{j\frac{1}{2}\pi} = j$ kunnen we K bepalen:

$$|H(z)|_{\max} = |H(j)| = K \left| \frac{j^2 - 1}{j^2 + p^2} \right| = K \left| \frac{-2}{-1 + p^2} \right| = K \left| \frac{2}{1 - p^2} \right| = 1$$

Omdat $0 < p < 1$ geldt $1 - p^2 > 0$ dus:

$$K \left(\frac{2}{1 - p^2} \right) = 1$$

We hebben nu ook de waarde van K bepaald:

$$K = \frac{1-p^2}{2}$$

Dus de overdracht van ons filter is:

$$H(z) = \frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{z^2-1}{z^2+p^2} \text{ met } p \in \mathbb{R} \wedge 0 < p < 1$$

Het enig dat ons nu nog rest is het bepalen van p^2 . Deze is afhankelijk van de bandbreedte B . Bij de kantelfrequentie $\Omega_B = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}B$, dus $z_B = e^{j\Omega_B} = e^{j(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}B)} = e^{j\frac{1}{2}\pi} \cdot e^{-j\frac{1}{2}B} = je^{-j\frac{1}{2}B}$ geldt:

$$\left| H\left(je^{-j\frac{1}{2}B}\right) \right| = \left| \frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{\left(je^{-j\frac{1}{2}B}\right)^2 - 1}{\left(je^{-j\frac{1}{2}B}\right)^2 + p^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-p^2}{2} \cdot \left| \frac{-e^{-jB} - 1}{-e^{-jB} + p^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{|e^{-jB} + 1|}{|e^{-jB} - p^2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{|\cos(B) - j\sin(B) + 1|}{|\cos(B) - j\sin(B) - p^2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{(\cos(B)+1)^2 + \sin^2(B)}}{\sqrt{(\cos(B)-p^2)^2 + \sin^2(B)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cos^2(B) + 2\cos(B) + 1 + \sin^2(B)}}{\sqrt{\cos^2(B) - 2\cos(B)p^2 + p^4 + \sin^2(B)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\cos(B)+2}}{\sqrt{-2\cos(B)p^2 + p^4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\cos(B)+2}}{\sqrt{-2\cos(B)p^2+p^4+1}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\frac{(1-p^2)^2}{4} \cdot \frac{2\cos(B)+2}{-2\cos(B)p^2+p^4+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-2p^2+p^4)(2\cos(B)+2)}{4(-2\cos(B)p^2+p^4+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\cos(B)+2-4p^2\cos(B)-4p^2+2p^4\cos(B)+2p^4}{-8\cos(B)p^2+4p^4+4} = \frac{1}{2}$$

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$4\cos(B)+4-8p^2\cos(B)-8p^2+4p^4\cos(B)+4p^4 = -8\cos(B)p^2+4p^4+4$$

$$4\cos(B)-8p^2+4p^4\cos(B) = 0$$

$$\cos(B)p^4-2p^2+\cos(B) = 0$$

Dit lossen we op met de abc-formule:

$$p^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cos^2(B)}}{2\cos(B)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-\cos^2(B)}}{2\cos(B)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{\sin^2(B)}}{\cos(B)} = \frac{1 \pm \sin(B)}{\cos(B)}$$

Dus de overdracht van ons filter is:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1 \pm \sin(B)}{\cos(B)}}{2} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 + \frac{1 \pm \sin(B)}{\cos(B)}} \text{ met } 0 < \sqrt{\frac{1 \pm \sin(B)}{\cos(B)}} < 1$$

Als we $B = \frac{1}{40}\pi$ invullen, volgt $p^2 = 0,9244 \vee p^2 = 1,0817$. Omdat moet gelden $0 < p < 1$ houden we alleen de volgende oplossing over: $p^2 = 0,9244$. Dus de uiteindelijke overdracht

van ons filter is:

$$H(z) = \frac{1 - 0,9244}{2} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0,9244} = \frac{0,0378z^2 - 0,0378}{z^2 + 0,9244}$$

Als we dit filter willen realiseren in een programma of in digitale hardware, dan moeten we deze formule omschrijven naar $Y(z) = \dots$ en terugtransformeren naar het tijddomein $y[n] = \dots$

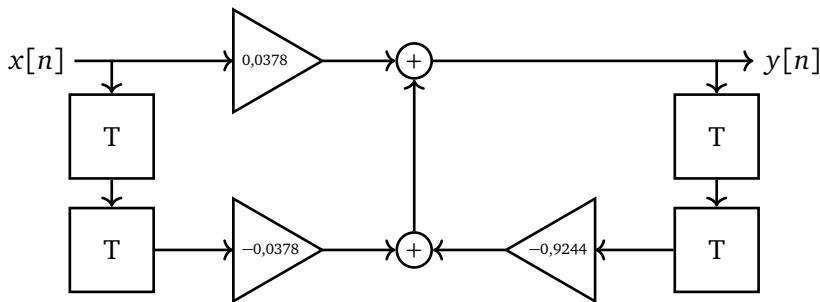
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,0378z^2 - 0,0378}{z^2 + 0,9244} = \frac{0,0378 - 0,0378z^{-2}}{1 + 0,9244z^{-2}}$$

$$Y(z)(1 + 0,9244z^{-2}) = X(z)(0,0378 - 0,0378z^{-2})$$

$$Y(z) = 0,0378X(z) - 0,0378X(z)z^{-2} - 0,9244Y(z)z^{-2}$$

$$y[n] = 0,0378x[n] - 0,0378x[n-2] - 0,9244y[n-2]$$

Dit LTI-systeem is gegeven in [figuur 1](#)



Figuur 1: De implementatie van het ontworpen banddoorlaatfilter.

Als een samplefrequentie f_s wordt gebruikt van 8 kHz dan zal de maximale versterking van 1 (0 dB) optreden bij $f_A = \frac{1}{4}f_s = 2$ kHz. De bandbreedte B is dan $\frac{1}{4}f_s = 100$ Hz. Met het MATLAB-programma dat gegeven is in [listing 1](#) kun je het polen-en-nulpuntenbeeld en de frequentieoverdracht bekijken. Het polen-en-nulpuntenbeeld is gegeven in [figuur 2](#) en de frequentieoverdracht in [figuur 3](#).

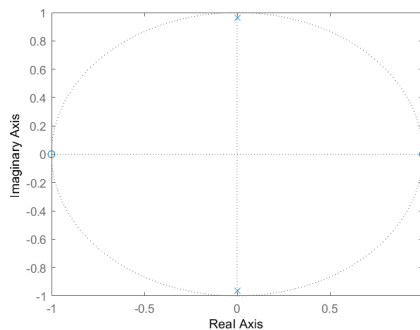
In [figuur 4](#) is ingezoomd in de frequentieoverdracht rondom de frequentie f_A . De frequentie van de -3 dB-punten is 1950 en 2050 Hz. De bandbreedte B is dus $2050 - 1950 = 100$ Hz. Je ziet dat dit filter *exact* aan de specificaties voldoet!

```

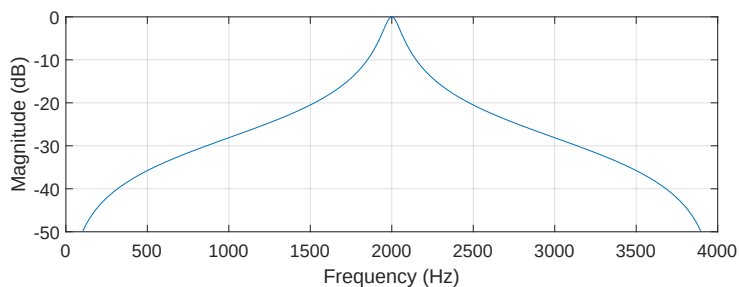
Fs = 8000;
b = [0.0378, 0, -0.0378];
a = [1, 0, 0.9244];
sys = tf(b, a, 1 / Fs);
figure
% plot polen en nulpunten van IIR-filter:
pzmap(sys)
title('Polen en nulpunten van het IIR-filter')
% plot spectrum van IIR-filter:
figure
freqz(b, a, 0 : Fs / 2, Fs);
ax = gca;
ax.YLim = [-50 0];
title('Overdracht van het IIR-filter')

```

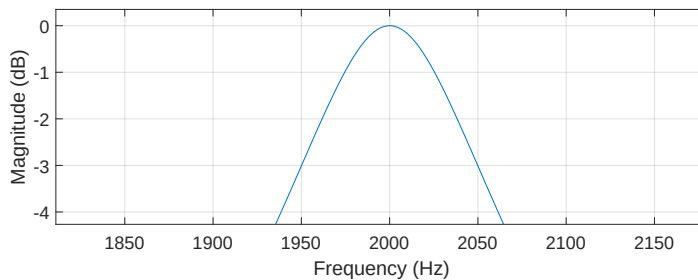
Listing 1: Een Matlab-programma om het ontworpen filter te verifiëren, zie [Week_6_Les_1_Sheet_5.m](#).



Figuur 2: Het polen-en-nulpuntenbeeld van het ontworpen IIR-filter.



Figuur 3: De frequentieoverdracht van het ontworpen IIR-filter.



Figuur 4: De frequentieoverdracht van het ontworpen IIR-filter rond de -3 dB-punten.

Maak opgave 4.14 (zonder de faseoverdracht) uit het boek¹. Als extra verdieping kun je ook [opgave 4.13](#), [4.14 \(faseoverdracht\)](#) en [4.15](#) maken. De [antwoorden](#) en [uitwerkingen](#) staan op de wiki.

Maak eventueel ook oefenopgaven 3.6.1 en 3.6.3. Je kunt deze vragen ook gebruik om te oefenen voor de toets. De [antwoorden](#) en [uitwerkingen](#) staan op de wiki. Als extra verdieping kun je ook [oefenopgaven 3.6.2](#) maken.

De in les 1 behandelde stof kun je terugvinden in de volgende paragrafen van het boek:

§4.3.3 Eerste- en tweede-orde LTI-systemen

§6.1 Het ontwerpen van recursieve digitale filters; Inleiding

§6.2 Eenvoudige ontwerpmethoden op basis van polen en nulpunten

Les 2

In deze les worden de twee hierboven genoemde methoden behandeld om een digitaal filter af te leiden van een bestaand analoog filter. In het verleden zijn er veel soorten analoge filters met elk hun specifieke eigenschappen ontworpen. Je kunt deze ontwerpen hergebruiken in het digitale discrete domein door een digitaal filter af te leiden van een analoog filter.

Op [sheet 20](#) wordt de methode genaamd impuls-invariantie besproken en op [sheet 21](#) wordt de definitie van de bilineaire transformatie gegeven. Deze transformatie wordt ook wel Tustin's methode genoemd.

Wij gaan hier verder niet diep op in, maar gaan deze methode in kwartaal 4 met behulp van MATLAB wel toepassen in de praktijk.

¹ PA. Lynn. *Inleiding Digitale Signaalbewerking*. 2de ed. ThiemeMeulenhoff bv, 2004. ISBN: 9-789055-744480

In [Filter_types_w6.ppsx](#) worden een viertal bekende analoge filtertypes met hun specifieke eigenschappen besproken²:

- Butterworth
- Chebyshev type I
- Chebyshev type II
- Elliptic

Alle plaatjes in deze presentaties zijn *filmpjes* die laten zien wat er met de overdracht van het filter gebeurt als je een bepaalde parameter varieert.

De in les 2 behandelde stof kun je terugvinden in de volgende paragraaf van het boek:

§6.3 Filters afgeleid uit analoge ontwerpmethoden

§6.3.1 De bilineaire Z-transformatie: Butterworth- en Chebyshev-filters

§6.3.2 Impuls-invariante filters

Extra oefenopgaven week 6

Extra oefenopgaven over de stof van week 6 vind je hier: [Oefenopgaven_WK6.pdf](#). Oefenopgaven 3.6.2 is een verdiepende opgave. De bijbehorende antwoorden vind je hier: [Oefenopgaven_WK6_antwoorden.pdf](#). De uitwerkingen vind je hier: [Oefenopgaven_WK6_uitwerkingen.pdf](#).

² Dit is bedoeld als illustratie en behoort niet tot de tentamenstof.