

uitwerkingen

3.1 Gevraagd wordt om de spectrale coëfficiënten a_k te berekenen voor de volgende periodieke signalen:

A

$$x[n] = 5 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Een sinus is periodiek over 2π . De sinus in dit signaal is dus periodiek voor $N = 4$. Een cosinus is periodiek over 2π . De cosinus in dit signaal is dus periodiek voor $N = 8$. Het gehele signaal is dus periodiek voor $N = 8$. Je moet dus de eerste 8 waarden van $x[n]$ bepalen, door $n = 0$ tot en met $n = 7$ in te vullen in de formule voor $x[n]$, zie [tabel 1](#).

Tabel 1: De eerste 8 waarden van $x[n]$

n	$x[n]$
0	$5 + 0 + 1 = 6$
1	$5 + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
2	$5 + 0 + 0 = 5$
3	$5 - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
4	$5 + 0 - 1 = 4$
5	$5 + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 6 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
6	$5 + 0 + 0 = 5$
7	$5 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Je kunt nu de formule voor de Fourierreeks, zie [formuleblad](#), gebruiken om de waarden van a_k voor $k = 0$ tot en met $k = 7$ te berekenen:

$$a_k = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^{-j\pi kn/4}$$

Als je dat teveel werk vindt, kun je ook gebruik maken van de regel:

$$a_{N-k} = \overline{a_k} \text{ voor } 0 < k < \frac{1}{2}N$$

Voor $k = 0$ geldt:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{8} \left(6 + 6 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 5 + 4 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4 + 6 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 5 + 4 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \\
 &= \frac{40}{8} = 5
 \end{aligned}$$

Dit was te verwachten want a_0 is de gelijkspanningscomponent in het signaal $x[n]$ en die is inderdaad 5. Voor $k = 1$ geldt:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^{-j\pi n/4} \\
 &= \frac{1}{8} \left(6 \cdot 1 + \left(6 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. 5 \cdot -j + \left(4 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. 4 \cdot -1 + \left(6 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. 5 \cdot j + \left(4 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \right) \\
 &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Voor $k = 7$ geldt:

$$a_7 = \overline{a_1} = \frac{1}{2}$$

Ook dit was te verwachten. Het reële deel van a_1 geeft de halve amplitude van de cosinus van de grondfrequentie weer, die is inderdaad $\frac{1}{2}$. Het imaginaire deel van $-a_1$ geeft de halve amplitude van de sinus van de grondfrequentie weer, die

is inderdaad 0. Voor $k = 2$ geldt:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^{-j\pi n/2} \\
 &= \frac{1}{8} \left(6 \cdot 1 + \left(6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot -j + 5 \cdot -1 + \left(4 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot j + \right. \\
 &\quad \left. 4 \cdot 1 + \left(6 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot -j + 5 \cdot -1 + \left(4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot j \right) \\
 &= \frac{-j4}{8} = -j\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Voor $k = 6$ geldt:

$$a_6 = \overline{a_2} = j\frac{1}{2}$$

Ook dit was te verwachten. Het reële deel van a_2 geeft de halve amplitude van de cosinus van $2 \times$ de grondfrequentie weer, die is inderdaad 0. Het imaginaire deel van $-a_2$ geeft de halve amplitude van de sinus van $2 \times$ de grondfrequentie weer, die is inderdaad $\frac{1}{2}$. Voor $k = 3$ geldt:

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^{-j\pi 3n/4} \\
 &= \frac{1}{8} \left(6 \cdot 1 + \left(6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. 5 \cdot +j + \left(4 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. 4 \cdot -1 + \left(6 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. 5 \cdot -j + \left(4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \right) \\
 &= \frac{0}{8} = 0
 \end{aligned}$$

Voor $k = 5$ geldt:

$$a_5 = \overline{a_3} = 0$$

Ook dit was te verwachten. Het reële deel van a_3 geeft de halve amplitude van de cosinus van $3 \times$ de grondfrequentie weer, die is inderdaad 0. Het imaginaire deel van $-a_3$ geeft de halve amplitude van de sinus van $3 \times$ de grondfrequentie weer, die is inderdaad 0. Voor $k = 4$ geldt:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^{-j\pi n} \\ &= \frac{1}{8} \left(6 \cdot 1 + \left(6 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot -1 + 5 \cdot 1 + \left(4 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot -1 \right. \\ &\quad \left. 4 \cdot 1 + \left(6 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot -1 + 5 \cdot 1 + \left(4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot -1 \right) \\ &= \frac{0}{8} = 0 \end{aligned}$$

Ook dit was te verwachten. Het reële deel van a_4 geeft de amplitude van de cosinus van $4 \times$ de grondfrequentie weer, die is inderdaad 0. Het imaginaire deel van a_4 is altijd 0.

B

$$x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Een cosinus is periodiek over 2π . Dit signaal is dus periodiek voor $N = 4$. Je moet dus de eerste 4 waarden van $x[n]$ bepalen, door $n = 0$ tot en met $n = 3$ in te vullen in de formule voor $x[n]$, zie [tabel 2](#).

Je kunt nu de formule voor de Fourierreeks, zie [formuleblad](#), gebruiken om de waarden van a_k voor $k = 0$ tot en met $k = 3$ te berekenen:

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\pi kn/2}$$

Tabel 2: De eerste 4 waarden van $x[n]$

n	$x[n]$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
3	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Als je dat teveel werk vindt, kun je ook gebruik maken van de regel:

$$a_{N-k} = \overline{a_k} \text{ voor } 0 < k < \frac{1}{2}N$$

Voor $k = 0$ geldt:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \\
 &= \frac{0}{4} = 0
 \end{aligned}$$

Dit was te verwachten want a_0 is de gelijkspanningscomponent in het signaal $x[n]$ en die is inderdaad 0. Voor $k = 1$ geldt:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\pi n/2} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -j - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot j \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2} - j\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2} - j\frac{1}{4}\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Voor $k = 3$ geldt:

$$a_3 = \overline{a_1} = \frac{1}{4}\sqrt{2} + j\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Voor $k = 2$ geldt:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\pi n} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 \right) \\ &= \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

Als je bij goniometrie goed hebt opgelet dan weet je dat:

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Dus in dit geval:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Dit signaal bestaat dus uit de som van een cosinus en een sinus van de grondfrequentie. Het reële deel van a_1 geeft de halve amplitude van de cosinus van de grondfrequentie weer, die is inderdaad $\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Het imaginaire deel van $-a_1$ geeft de halve amplitude van de sinus van de grondfrequentie weer, die is inderdaad $\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Het reële deel van a_2 geeft de amplitude van de cosinus van $2 \times$ de grondfrequentie weer, die is inderdaad 0. Het imaginaire deel van a_2 is altijd 0.

C

$$x[n] = 2n \text{ voor } 0 \leq n \leq 3, \text{ daarna herhalend}$$

Dit signaal is dus periodiek voor $N = 4$. Je moet dus de eerste 4 waarden van $x[n]$ bepalen, door $n = 0$ tot en met $n = 3$ in te vullen in de formule voor $x[n]$, zie [tabel 3](#).

Tabel 3: De eerste 4 waarden van $x[n]$

n	$x[n]$
0	0
1	2
2	4
3	6

Je kunt nu de formule voor de Fourierreeks, zie [formuleblad](#), gebruiken om de waarden van a_k voor $k = 0$ tot en met $k = 3$ te berekenen:

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\pi kn/2}$$

Als je dat teveel werk vindt, kun je ook gebruik maken van de regel:

$$a_{N-k} = \overline{a_k} \text{ voor } 0 < k < \frac{1}{2}N$$

Voor $k = 0$ geldt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot 1 = \frac{1}{4} (0 + 2 + 4 + 6) \\ &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

Voor $k = 1$ geldt:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\pi n/2} = \frac{1}{4} (0 \cdot 1 + 2 \cdot -j + 4 \cdot -1 + 6 \cdot j) \\ &= \frac{-4 + 4j}{4} = -1 + j \end{aligned}$$

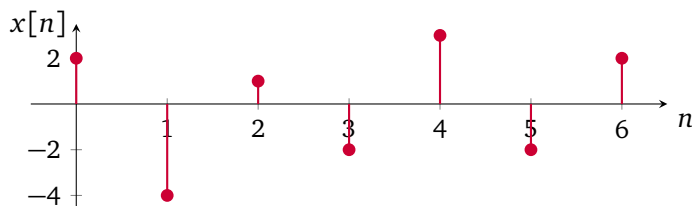
Voor $k = 3$ geldt:

$$a_3 = \overline{a_1} = -1 - j$$

Voor $k = 2$ geldt:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot e^{-j\pi n} = \frac{1}{4} (0 \cdot 1 + 2 \cdot -1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot -1) \\ &= \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned}$$

3.2 Je moet bij deze opgave de Fourierreeks bepalen van een periodiek signaal met $N = 7$, zie [figuur 1](#).



Figuur 1: De gegeven sample-waarden van het periodieke signaal.

Om te voorkomen dat je rekenmachine overbelast wordt, kun je hier maar beter een programma voor schrijven. De formule die je moet berekenen voor $k = 0$ tot en met $k = 6$ is:

$$a_k = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^6 x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/7} \quad (1)$$

In [listing 1](#) is een Python-programma gegeven om [vergelijking \(1\)](#) te berekenen voor $k = 0$ tot en met $k = 6$.

```
import cmath

x = [2, -4, 1, -2, 3, -2, 2]
N = 7
for k in range(N):
    sum = 0
    for n in range(N):
        sum += x[n] * cmath.exp(-1j * 2 * cmath.pi * k * n / N)
    print('a_' + str(k) + ' = {0:.4f}'.format(sum / N))
```

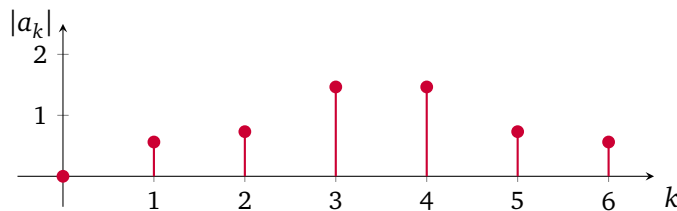
Listing 1: Python-programma om [vergelijking \(1\)](#) te berekenen, [h3o2.py](#)

De uitvoer van het programma gegeven in [listing 1](#) is als volgt:

```
a_0 = 0.0000+0.0000j
a_1 = 0.0107+0.5622j
a_2 = 0.5671+0.4632j
a_3 = 0.4223+1.4033j
a_4 = 0.4223-1.4033j
a_5 = 0.5671-0.4632j
a_6 = 0.0107-0.5622j
```

Je kunt nu de overige vragen beantwoorden:

- Waarom is a_0 gelijk aan 0?
Omdat de gemiddelde waarde (de gelijkspanningscomponent) van $x[n]$ gelijk is aan $\frac{0}{7} = 0$.
- Waarom zijn de amplitudes van a_3 en a_4 relatief groot?
In [figuur 2](#) zijn de amplitudes van de hierboven berekende a_k 's weergegeven.



Figuur 2: De amplitudes van de berekende Fourier-coëfficiënten.

Je ziet dat de amplitudes van a_3 en a_4 relatief groot zijn. Deze geven aan dat de hoogste frequentie sterk voorkomt in het signaal. Je ziet in [figuur 1](#) dat dit inderdaad zo is, de samples wisselen telkens af tussen een positieve en een negatieve waarde.

- Als het signaal gesampled is met een frequentie van 1 MHz, welke frequentie wordt dan gerepresenteerd door de coëfficiënt a_2 ?
De frequentieband van 0 tot en met 1 MHz wordt verdeeld in 7 stappen dus $a_2 = 2 \cdot \frac{1\text{MHz}}{7} \approx 0,2857\text{MHz} \approx 286\text{kHz}$.

3.5 Gevraagd wordt om de amplitudes en fasen van de spectrale coëfficiënten van het volgende signaal te berekenen:

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{32}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Dit signaal is periodiek voor $N = 64$. Het berekenen van de spectrale coëfficiënten met behulp van de formule voor de Fourierreeks en de rekenmachine, is niet aan te raden. We kunnen echter wel eenvoudig beredeneren wat de waarde van a_k voor $k = 0$ tot en met $k = 63$ moet zijn.

De gelijkspanningscomponent in het signaal is 1, dus $a_0 = 1$. We weten verder dat geldt:

$$a_{64-k} = \overline{a_k} \text{ voor } 0 < k < 32$$

Één periode van de cosinus past exact in 64 samples. Het signaal is periodiek over 64 samples, dus de frequentie van de cosinus is gelijk aan de grondfrequentie. Het reële deel van a_1 is de helft van de amplitude van deze cosinus: $a_1 = \frac{1}{2}$. Omdat $a_{63} = \overline{a_1}$ geldt: $a_{63} = \frac{1}{2}$.

Één periode van de sinus past exact in 8 samples. Het signaal is periodiek over 64 samples, dus de frequentie van de cosinus is gelijk aan $8 \times$ de grondfrequentie. Het complexe deel van a_8 is de negatieve waarde van de helft van de amplitude van deze sinus: $a_8 = -j\frac{1}{2}$. Omdat $a_{56} = \overline{a_8}$ geldt: $a_{56} = j\frac{1}{2}$.

Dit zijn de enige frequenties die voorkomen in het signaal, dus alle andere spectrale coëfficiënten zijn 0.

We kunnen nu de vragen beantwoorden:

$$|a_k| = \begin{cases} 1 & \text{voor } k = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } k = 1, 8, 56 \text{ en } 63 \\ 0 & \text{voor } k = 2, \dots, 7, 9, \dots, 55, 57, \dots, 62 \end{cases}$$

$$\arg(a_k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{voor } k = 56 \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{voor } k = 8 \\ 0 & \text{voor } k = 0, \dots, 7, 9, \dots, 55, 57, \dots, 63 \end{cases}$$

Je kunt deze antwoorden controleren met het Python-programma [h3o5.py](#).

3.11 Je moet de gegeven discrete signalen transformeren naar het frequentiedomein met behulp van de DTFT, zie tabel 2 en 4 op het [formuleblad](#).

A

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$X(\Omega) = 1 + 2e^{-j\Omega} - e^{-2j\Omega}$$

B

$$x[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$$

$$X(\Omega) = e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}$$

Dit is indien gewenst verder te vereenvoudigen met de halveringsformule, zie tabel 6 op het [formuleblad](#):

$$X(\Omega) = 2j \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{2j} = 2j \sin(\Omega)$$

C

$$x[n] = u[n+3] - u[n-4]$$

$$X(\Omega) = \frac{e^{3j\Omega} - e^{-4j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Dit is indien gewenst verder te vereenvoudigen door de deling uit te voeren (als staartdeling). Om de berekening eenvoudiger te maken vervangen we $e^{j\Omega}$ door z ¹.

$$X(z) = \frac{z^3 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

¹ Deze variabele z komen we later nog veelvuldig tegen.

$$\begin{array}{r}
 1 - z^{-1} / z^3 \\
 \hline
 z^3 - z^2 \\
 \hline
 z^2 \\
 \hline
 z^2 - z \\
 \hline
 z \\
 \hline
 z - 1 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 1 - z^{-1} \\
 \hline
 z^{-1} \\
 \hline
 z^{-1} - z^{-2} \\
 \hline
 z^{-2} \\
 \hline
 z^{-2} - z^{-3} \\
 \hline
 z^{-3} \\
 \hline
 z^{-3} - z^{-4} \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 -z^{-4} \setminus z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

Dus:

$$X(z) = \frac{z^3 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} = z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$X(\Omega) = e^{3j\Omega} + e^{2j\Omega} + e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} + e^{-3j\Omega}$$

$$= \cos(3\Omega) + \sin(3\Omega) + \cos(2\Omega) + \sin(2\Omega)$$

$$+ \cos(\Omega) + \sin(\Omega) + 1 + \cos(\Omega) - \sin(\Omega)$$

$$+ \cos(2\Omega) - \sin(2\Omega) + \cos(3\Omega) - \sin(3\Omega)$$

$$= 1 + 2\cos(\Omega) + 2\cos(2\Omega) + 2\cos(3\Omega)$$

3.12 Je moet de gegeven discrete impulsresponsies transformeren naar het frequentiedomein met behulp van de DTFT, zie tabel 2 en 4 op het [formuleblad](#).

A

$$h[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

$$H(\Omega) = 4 + 2e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}$$

B

$$h[n] = h[n-1] + \delta[n] - \delta[n-7]$$

$$H(\Omega) = H(\Omega)e^{-j\Omega} + 1 - e^{-7j\Omega}$$

$$H(\Omega)(1 - e^{-j\Omega}) = 1 - e^{-7j\Omega}$$

$$H(\Omega) = \frac{1 - e^{-7j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

C

$$h[n] = 0,8h[n-1] + \delta[n]$$

$$H(\Omega) = 0,8H(\Omega)e^{-j\Omega} + 1$$

$$H(\Omega)(1 - 0,8e^{-j\Omega}) = 1$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\Omega}}$$

3.13 Gegeven is een eenvoudig hoogdoorlaatfilter:

$$y[n] = -0,9y[n-1] + 0,1x[n]$$

Gevraagd wordt om $H(\Omega)$ te bepalen:

$$Y(\Omega) = -0,9Y(\Omega)e^{-j\Omega} + 0,1X(\Omega)$$

$$Y(\Omega)(1 + 0,9e^{-j\Omega}) = 0,1X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{0,1}{1 + 0,9e^{-j\Omega}}$$

Gevraagd wordt om $|H(\Omega)|$ te schetsen voor $0 \leq \Omega \leq \pi$:

$$\begin{aligned}
 |H(\Omega)| &= \left| \frac{0,1}{1 + 0,9 \cos(\Omega) - j0,9 \sin(\Omega)} \right| \\
 &= \frac{0,1}{\sqrt{(1 + 0,9 \cos(\Omega))^2 + 0,81 \sin^2(\Omega)}} \\
 &= \frac{0,1}{\sqrt{1 + 1,8 \cos(\Omega) + 0,81 \cos^2(\Omega) + 0,81 \sin^2(\Omega)}} \\
 &= \frac{0,1}{\sqrt{1 + 1,8 \cos(\Omega) + 0,81(\cos^2(\Omega) + \sin^2(\Omega))}} \\
 &= \frac{0,1}{\sqrt{1,81 + 1,8 \cos(\Omega)}}
 \end{aligned}$$

We vullen $\Omega = 0, \frac{1}{2}\pi$ en π in om de grafiek van $|H(\Omega)|$ te kunnen schetsen, zie [tabel 4](#). De grafiek is gegeven in [figuur 3](#). Zie ook <https://www.geogebra.org/graphing/h39wdgxw>.

Tabel 4: Drie punten van $|H(\Omega)|$.

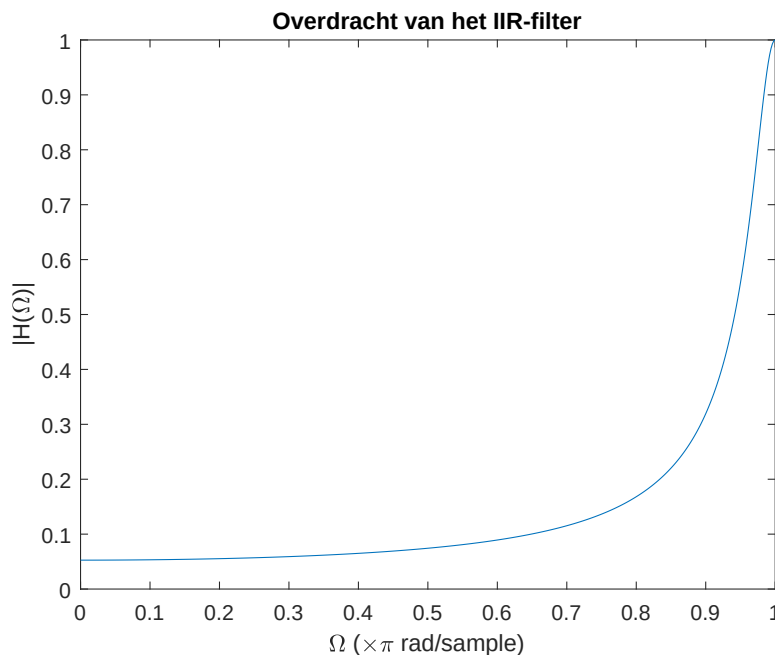
Ω	$ H(\Omega) $
0	0,0526
$\frac{1}{2}\pi$	0,0743
π	1

3.14 Gevraagd wordt om $|H(\Omega)|$ te schetsen voor $0 \leq \Omega \leq \pi$. We beginnen met het bepalen van $y[n]$:

$$y[n] = x[n] + 0,9y[n-1] - 0,8y[n-2]$$

We transformeren dit m.b.v. de DTFT naar het frequentiedomein en bepalen $H(\Omega)$:

$$Y(\Omega) = X(\Omega) + 0,9Y(\Omega)e^{-j\Omega} - 0,8Y(\Omega)e^{-2j\Omega}$$



Figuur 3: $|H(\Omega)|$ van het hoogdoorlaatfilter.

$$Y(\Omega)(1 - 0,9e^{-j\Omega} + 0,8e^{-2j\Omega}) = X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - 0,9e^{-j\Omega} + 0,8e^{-2j\Omega}}$$

$$|H(\Omega)| = \left| \frac{1}{1 - 0,9e^{-j\Omega} + 0,8e^{-2j\Omega}} \right|$$

Gegeven is dat dit een banddoorlaatfilter is. Het is niet eenvoudig om uit te rekenen bij welke Ω de versterking maximaal is. De versterking is maximaal als de waarde van de noemer van $|H(\Omega)|$ minimaal is. We kunnen de waarde van Ω waarbij dit het geval is benaderen door te bepalen voor welke waarde van Ω de noemer nul wordt. Om het rekenwerk te vereenvoudigen vervangen we $e^{j\Omega}$ door z . De noemer wordt dan:

$$1 - 0,9z^{-1} + 0,8z^{-2}$$

Deze waarde wordt nul als voor z geldt²:

$$1 - 0,9z^{-1} + 0,8z - 2 = 0$$

$$z^2 - 0,9z + 0,8 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{0,9 \pm \sqrt{0,9^2 - 4 \cdot 0,8}}{2} = 0,4500 \pm 0,7730j$$

We kunnen $p_{1,2}$ ook schrijven als $|p|e^{\pm j \arg(p)}$:

$$p_{1,2} = \sqrt{0,4500^2 + 0,7730^2} e^{\pm j \arctan(\frac{0,7730}{0,4500})} = 0,8944 e^{\pm j 1,0436}$$

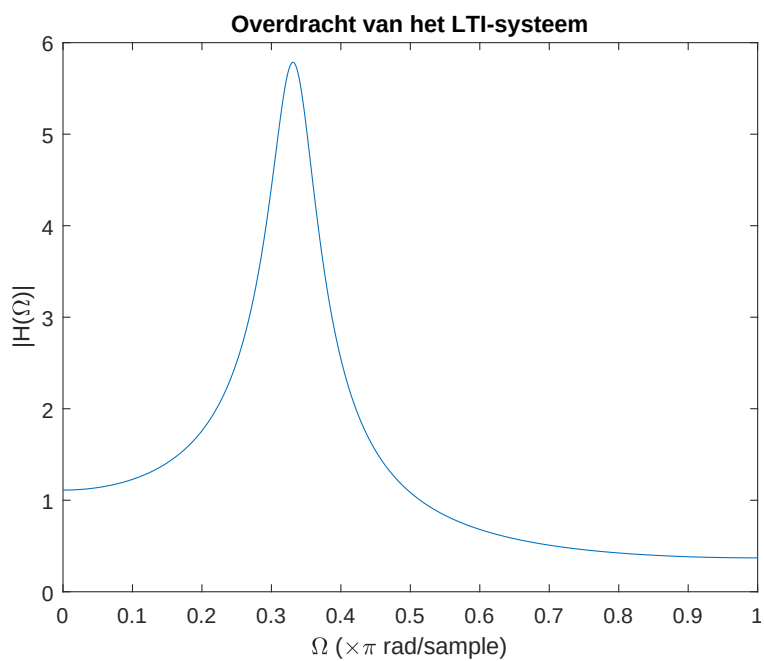
Omdat we z gelijk hebben gesteld aan $e^{j\Omega}$, kunnen we nu vaststellen dat $|H(\Omega)|$ maximaal zal zijn voor $\Omega \approx 1,0436 = 0,3322\pi$. Dus ongeveer bij $\Omega = \frac{1}{3}\pi$.

We vullen $\Omega = 0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$ en π in om de grafiek van $|H(\Omega)|$ te kunnen schetsen, zie tabel 5. De grafiek is gegeven in figuur 4. Zie ook <https://www.geogebra.org/graphing/vpsystvw>.

Tabel 5: Vier punten van $|H(\Omega)|$.

Ω	$ H(\Omega) $
0	1,1111
$\frac{1}{3}\pi$	5,7735
$\frac{1}{2}\pi$	1,0847
π	0,3704

² We noemen de waarden van z waarbij de noemer van $H(\Omega)$ nul wordt de polen van $H(\Omega)$: p_1, p_2 , enz. We komen hier in week 5 nog uitgebreid op terug.



Figuur 4: $|H(\Omega)|$ van het banddoorlaatfilter.