

4.1 Dit soort opgaven zijn een soort wiskundige puzzeltjes. Je moet de signalen omzetten naar een vorm waarvan de Z-getransformeerde bekend is, zie [formuleblad](#), tabel 5 waarbij je gebruik kan maken van de eigenschappen van de Z-transformatie, zie [formuleblad](#) tabel 3.

A Dit kan op twee manieren.

- We beginnen met de algemene Z-transformatie:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Uit de grafiek van $x[n]$ lezen we af:

$$x[0] = 0, x[1] = 0, x[2] = 0, x[3] = 3, x[4] = 3a, x[5] = 3a^2, \dots$$

$$X(z) = 3z^{-3} + 3az^{-4} + 3a^2z^{-5} + 3a^3z^{-6} + \dots$$

$$= 3z^{-3} (a^0z^0 + a^1z^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots) = 3z^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

Die laatste som is gelijk aan de geometrische reeks, zie [formuleblad](#) tabel 6. Dus:

$$X(z) = 3z^{-3} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{3}{z^3(1 - az^{-1})} = \frac{3}{z^2(z - a)}$$

- We kunnen het signaal ook beschrijven als:

$$x[n] = 3a^{n-3}u[n-3]$$

De Z-transformatie van deze macht met tijdverschuiving is:

$$X(z) = 3 \frac{z}{(z - a)} z^{-3} = \frac{3}{z^2(z - a)}$$

B We beschrijven het blokvormige signaal eerst als de som van twee stapvormige signalen:

$$x[n] = 2u[n] - 2u[n - 8]$$

De Z-transformatie van deze unit step plus unit step met tijdsverschuiving is:

$$X(z) = 2 \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-1} z^{-8} = \frac{2(z - z^{-7})}{z-1} = \frac{2(z^8 - 1)}{z^7(z-1)}$$

4.2 A Twee manieren:

- via staartdeling levert:

$$X(z) = z^{-1} + 0,5z^{-2} + 0,5^2z^{-3} + 0,5^3z^{-4} + \dots$$

$$x[0] = 0, x[1] = 1, x[2] = 0,5, x[3] = 0,25, x[4] = 0,125$$

- via [formuleblad](#) en tijdsverschuiving eigenschap:

$$X(z) = \frac{1}{z-0,5} = z^{-1} \frac{z}{z-0,5} \iff x[n] = (0,5)^{n-1} u[n-1]$$

B

$$X(z) = \frac{z}{z+1,1} \iff x[n] = (-1,1)^n u[n]$$

$$x[0] = 1, x[1] = -1,1, x[2] = 1,21, x[3] = -1,331, x[4] = 1,464$$

C

$$X(z) = \frac{z+1}{z-1} = \frac{z-1+2}{z-1} = 1 + 2z^{-1} \frac{z}{z-1} \iff x[n] = \delta[n] + 2u[n-1]$$

of

$$X(z) = \frac{z+1}{z-1} = \frac{z}{z-1} + z^{-1} \frac{z}{z-1} \iff x[n] = u[n] + u[n-1]$$

$$x[0] = 1, x[1] = 2, x[2] = 2, x[3] = 2, x[4] = 2$$

4.6 A Om dit signaal terug te transformeren naar het tijdsdomein moeten we een formule vinden op het [formuleblad](#) die op deze formule lijkt. Deze formule lijkt het meest op een ‘Gedempte sinus’. We moeten dan alleen nog bepalen wat de

waarden van a en Ω_0 zijn.

$$X(z) = \frac{0,5z}{z^2 - z + 0,5} = \frac{az \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2az \cos(\Omega_0) + a^2}$$

Als $a^2 = 0,5$, dan geldt: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Het signaal wordt dan:

$$X(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}z \cos(\Omega_0) + 0,5}$$

Als $\sin(\Omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, geldt: $\Omega_0 = \frac{1}{4}\pi$. Het signaal wordt dan:

$$X(z) = \frac{0,5z}{z^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}z \cos(\frac{1}{4}\pi) + 0,5} = \frac{0,5z}{z^2 - z + 0,5}$$

De inverse Z-getransformeerde van de ‘Gedempte sinus’ is:

$$a^n \sin(n\Omega_0)u[n]$$

Invullen van de hierboven bepaalde waarden van a en Ω_0 levert de inverse Z-getransformeerde van $X(z)$:

$$x[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right)u[n]$$

B Bij deze opgave kunnen we $\frac{1}{z} = z^{-1}$ buiten haakjes halen en moeten we daarna de breuk splitsen om termen te krijgen die overeenkomen met het [formuleblad](#).

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z - 0,5}{z(z - 0,8)(z - 1)} = z^{-1} \left(\frac{A}{z - 0,8} + \frac{B}{z - 1} \right) \\ &= z^{-1} \frac{z(A + B) - (A + 0,8B)}{(z - 0,8)(z - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ A + 0,8B &= 0,5 \end{cases} \iff B = \frac{5}{2}, A = -\frac{3}{2}$$

$$X(z) = z^{-1} \left(\frac{-\frac{3}{2}}{z - 0,8} + \frac{\frac{5}{2}}{z - 1} \right) = z^{-2} \left(\frac{-\frac{3}{2}z}{z - 0,8} + \frac{\frac{5}{2}z}{z - 1} \right)$$

Met behulp van de standaard Z-transformaties die op het [formuleblad](#) staan vermeld, kan het signaal worden omgezet naar het tijddomein:

$$x[n] = -\frac{3}{2}(0,8)^{n-2} \cdot u[n-2] + \frac{5}{2} \cdot u[n-2]$$

$$x[0] = 0, x[1] = 0, x[2] = 1, x[3] = 1,3, \dots$$

Natuurlijk had jij meteen gezien dat je z^{-1} buiten haakjes kan halen. Maar laten we eens kijken wat er gebeurt als je dit niet had gezien en meteen was gaan breuksplitsen:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z - 0,5}{z(z - 0,8)(z - 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 0,8} + \frac{C}{z - 1} \\ &= \frac{A(z - 0,8)(z - 1) + Bz(z - 1) + Cz(z - 0,8)}{z(z - 0,8)(z - 1)} \end{aligned}$$

De noemers zijn al gelijk, de tellers moeten dat dus ook zijn:

$$z - 0,5 = A(z - 0,8)(z - 1) + Bz(z - 1) + Cz(z - 0,8)$$

Als je $z = 0,8$ invult, dan kun je B bepalen:

$$0,8 - 0,5 = B \cdot 0,8(0,8 - 1) \implies B = -1,875$$

Deze waarde van B kun je vervolgens invullen in bovenstaande vergelijking:

$$z - 0,5 = A(z - 0,8)(z - 1) - 1,875z(z - 1) + Cz(z - 0,8)$$

Als je nu $z = 1$ invult, dan kun je C bepalen:

$$1 - 0,5 = C \cdot 1(1 - 0,8) \implies C = 2,5$$

Deze waarde van C kun je vervolgens invullen in bovenstaande vergelijking:

$$z - 0,5 = A(z - 0,8)(z - 1) - 1,875z(z - 1) + 2,5z(z - 0,8)$$

Als je nu $z = 0$ invult, dan kun je A bepalen:

$$0 - 0,5 = A(0 - 0,8)(0 - 1) \implies A = -0,625$$

Dus:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z - 0,5}{z(z - 0,8)(z - 1)} = \frac{-0,625}{z} + \frac{-1,875}{z - 0,8} + \frac{2,5}{z - 1} \\ &= z^{-1} \left(-0,625 - 1,875 \frac{z}{z - 0,8} + 2,5 \frac{z}{z - 1} \right) \end{aligned}$$

Met behulp van het [formuleblad](#) kun je dit terugtransformeren naar het tijddomein:

$$x[n] = -0,625\delta[n - 1] - 1,875(0,8)^{n-1}u[n - 1] + 2,5u[n - 1]$$

Dit lijkt een andere formule, dan degene die we al eerder hadden gevonden. Maar als we $x[n]$ berekenen voor verschillende waarden van n , dan leveren beide formules dezelfde resultaten op:

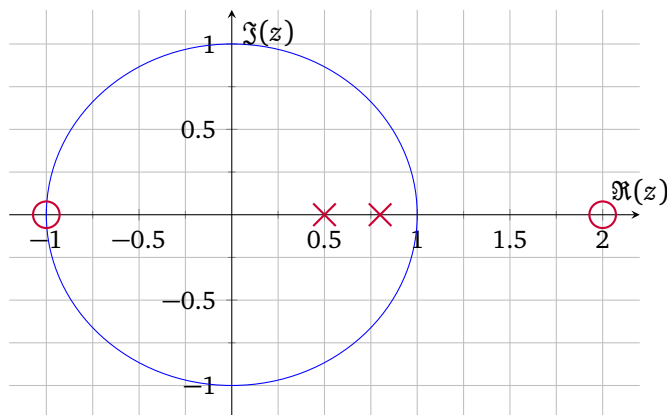
$$x[0] = 0, x[1] = 0, x[2] = 1, x[3] = 1,3, \dots$$

4.8 A We vinden de nulpunten en polen door de teller en de noemer te ontbinden in factoren:

$$H(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z^2 - 1,3z + 0,4} = \frac{(z - 2)(z + 1)}{(z - 0,8)(z - 0,5)}$$

Nulpunten: $(z - 2)(z + 1) = 0 \iff z = 2$ en $z = -1$

Polen: $(z - 0,8)(z - 0,5) = 0 \iff z = 0,8$ en $z = 0,5$



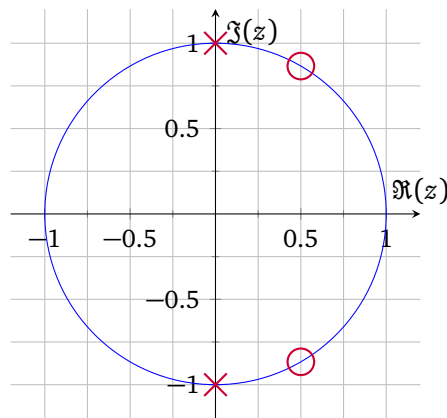
De polen liggen binnen de eenheidscirkel, dus het systeem is stabiel.

B Op dezelfde wijze als opgave A. We gebruiken in dit geval de ABC-formule.

$$H(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^2 + 1}$$

$$\text{Nulpunten: } z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Polen: } z^2 = -1 \iff z = \pm j$$



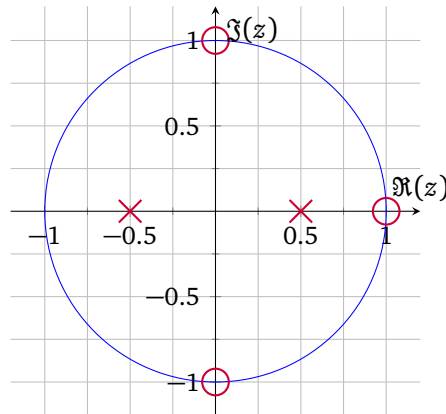
De polen liggen op de eenheidscirkel. Het systeem is daarom marginaal stabiel.

C

$$H(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - 1}{z^2 - 0,25} = \frac{z^2(z-1) + z-1}{(z-0,5)(z+0,5)} = \frac{(z^2+1)(z-1)}{(z-0,5)(z+0,5)}$$

$$\text{Nulpunten: } z = \pm j \text{ en } z = 1$$

$$\text{Polen: } z = 0,5 \text{ en } z = -0,5$$



Deze overdracht is wel stabiel, maar niet causaal. Dat de overdracht niet causaal is, kun je zien als je deze terugtransformeert naar het tijddomein en schrijft als $y[n] = \dots$. Je zult dan zien dat in deze formule $x[n+1]$ voorkomt. Dat is een sample uit de 'toekomst', dus de overdracht is niet causaal. In het algemeen geldt: als de hoogste macht in de teller groter is dan de hoogste macht in de noemer, dan is het systeem niet causaal.

D

$$H(z) = \frac{z^9 - 1}{(z - 1)z^8}$$

Nulpunten: $z^9 = 1$. Om uit te vinden waar de nulpunten zich bevinden vullen we in: $z = e^{j\Omega}$. Dus:

$$z^9 = e^{j9\Omega} = 1$$

$$\cos(9\Omega) + j \sin(9\Omega) = 1$$

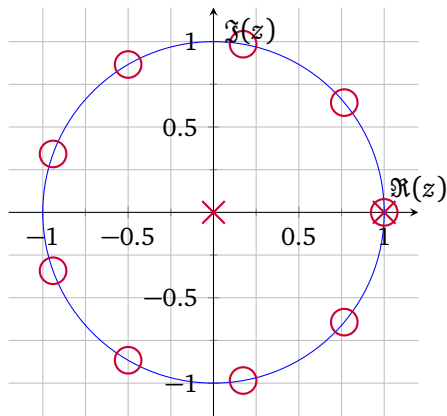
$$9\Omega = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 16\pi$$

$$\Omega = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \dots, \frac{16\pi}{9}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{9}k \text{ met } k = 0, 1, \dots, 8$$

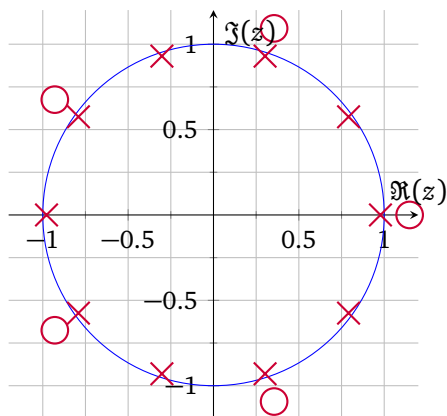
De 9 nulpunten worden verdeeld over de eenheidscirkel. Na elke $\frac{2}{9}\pi$ radialen komt een nulpunt.

Polen: $z = 1$ en 8 polen in $z = 0$.



Ondanks het feit dat er een pool op eenheidscirkel ligt, is deze overdracht toch stabiel. Er ligt namelijk ook een nulpunt op dezelfde plaats en dit nulpunt heft de pool op.

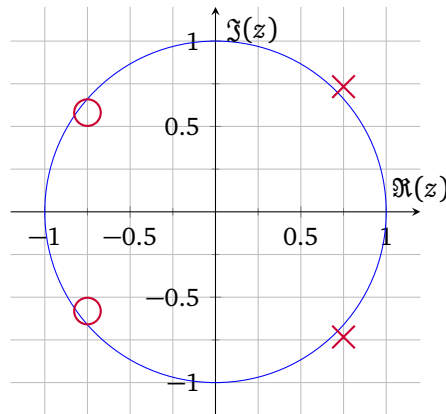
4.9 A Vergelijkbaar met opgave 4.8 [deelopgave D](#). Voor de nulpunten geldt: $z^5 = 2$ dus $z = \sqrt[5]{2}$. Er zijn dus 5 nulpunten netjes verdeeld over een cirkel met een straal van $\sqrt[5]{2} = 1,149$, dus om de $\frac{2}{5}\pi$ radialen. Voor de polen geldt: $z^{10} = 0,8$ dus $z = \sqrt[10]{0,8}$. Er zijn dus 10 polen netjes verdeeld over een cirkel met een straal van $\sqrt[10]{0,8} = 0,978$, dus om de $\frac{2}{10}\pi$ radialen.



Dit signaal is stabiel, want de polen liggen binnen de eenheidscirkel. Dus dit signaal neemt *niet* ongelimiteerd toe als $n \rightarrow \infty$.

B Door twee maal de ABC-formule toe te passen vind je:

- Er zijn twee nulpunten voor $z = -0.75 \pm j0.581$.
- Er zijn twee polen voor $z = 0.75 \pm j0.733$.



Dit signaal is instabiel, want de polen liggen buiten de eenheidscirkel. Dus dit signaal neemt ongelimiteerd toe als $n \rightarrow \infty$, omdat de polen buiten de eenheidscirkel liggen.

4.11 We gebruiken de methode van geometrische evaluatie zoals beschreven in paragraaf 4.3.2 van je boek. De overdracht bij $\Omega = 0$ en $\Omega = \pi$ zijn eenvoudig uit te rekenen door in te vullen $z = 1$ respectievelijk $z = -1$.

A Het nulpunt ligt op $z_1 = 1$ en de pool schatten we op $p_1 = -0,8$. De overdracht is dus:

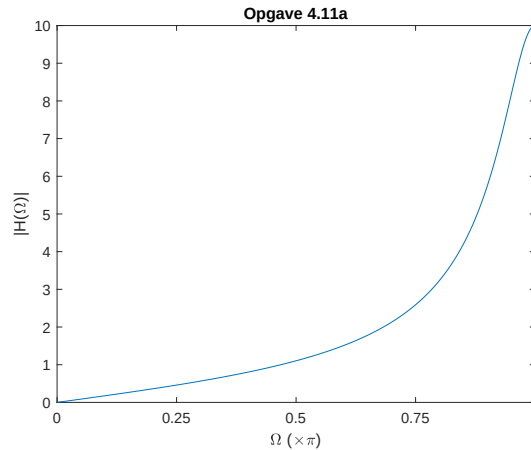
$$H(z) = \frac{z - z_1}{z - p_1} = \frac{z - 1}{z + 0,8}$$

$|H_\Omega(0)|$ is 0 vanwege het nulpunt in $z = 1$. De versterking is maximaal voor $\Omega = \pi$, want daar naderen we de pool zo dicht mogelijk. De versterking is dan:

$$|H_\Omega(\pi)| = |H_z(-1)| = \left| \frac{-1 - 1}{-1 + 0,8} \right| = 10$$

We berekenen nog een tussenliggend punt om de overdracht beter te kunnen schetsen:

$$|H_{\Omega}(\frac{1}{2}\pi)| = |H_z(j)| = \left| \frac{j-1}{j+0,8} \right| = \sqrt{\frac{2}{1,64}} = 1,104$$



Dit is duidelijk een hoogdoorlaatfilter.

- B** De nulpunten liggen op $z_1 = j$, $z_2 = -1$ en $z_3 = -j$. De polen liggen op een cirkel met een geschatte straal van 0.8 met een geschatte hoek van respectievelijk 0° , 20° en -20° . De polen schatten we dus op $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,8e^{j\frac{1}{9}\pi}$ en $p_3 = 0,8e^{-j\frac{1}{9}\pi}$. De overdracht is dus:

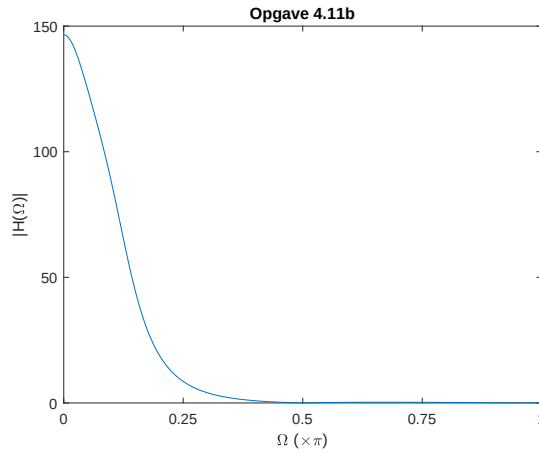
$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)} = \frac{(z - j)(z + 1)(z + j)}{(z - 0,8)(z - 0,8e^{j\frac{1}{9}\pi})(z - 0,8e^{-j\frac{1}{9}\pi})}$$

De versterking is maximaal voor $\Omega = 0$ ($z = 1$):

$$\begin{aligned} |H_{\Omega}(0)| &= |H_z(1)| = \left| \frac{(1 - j)(1 + 1)(1 + j)}{(1 - 0,8)(1 - 0,8e^{j\frac{1}{9}\pi})(1 - 0,8e^{-j\frac{1}{9}\pi})} \right| \\ &= \frac{|1 - j| \cdot |1 + 1| \cdot |1 + j|}{|1 - 0,8| \cdot |1 - 0,8e^{j\frac{1}{9}\pi}| \cdot |1 - 0,8e^{-j\frac{1}{9}\pi}|} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{0,2 \cdot \left(\sqrt{1,64 - 1,6 \cos(\frac{1}{9}\pi)} \right)^2} = 146,529$$

De versterking bij $\Omega = \frac{1}{2}\pi$ ($z = j$) en $\Omega = \pi$ ($z = -1$) is 0. We kunnen de overdracht nu schetsen:



Dit is duidelijk een laagdoorlaatfilter.

C De nulpunten liggen op een cirkel met een straal van 1 met een geschatte hoek van respectievelijk 60° en -60° . De nulpunten schatten we dus op $z_1 = e^{j\frac{1}{3}\pi}$ en $z_2 = e^{-j\frac{1}{3}\pi}$. De polen liggen op een cirkel met een geschatte straal van 0.8 met dezelfde hoeken als de nulpunten. De polen schatten we dus op $p_1 = 0,8e^{j\frac{1}{3}\pi}$ en $p_2 = 0,8e^{-j\frac{1}{3}\pi}$. De overdracht is dus:

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{\left(z - e^{j\frac{1}{3}\pi}\right)\left(z - e^{-j\frac{1}{3}\pi}\right)}{\left(z - 0,8e^{j\frac{1}{3}\pi}\right)\left(z - 0,8e^{-j\frac{1}{3}\pi}\right)}$$

De versterking is 0 voor $\Omega = \frac{1}{3}\pi$. De versterking voor $\Omega = 0$ ($z = 1$) kan als volgt berekend worden:

$$|H_\Omega(0)| = |H_z(1)| = \frac{\left|1 - e^{j\frac{1}{3}\pi}\right| \cdot \left|1 - e^{-j\frac{1}{3}\pi}\right|}{\left|1 - 0,8e^{j\frac{1}{3}\pi}\right| \cdot \left|1 - 0,8e^{-j\frac{1}{3}\pi}\right|}$$

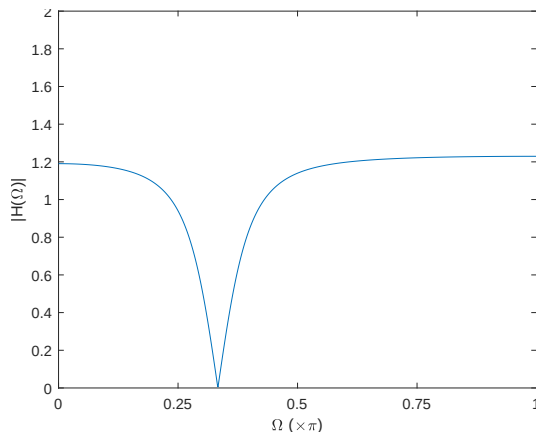
$$= \frac{2 - 2\cos(\frac{1}{3}\pi)}{1,64 - 1,6\cos(\frac{1}{3}\pi)} = \frac{2 - 1}{1,64 - 0,8} = \frac{1}{0,84} = \frac{25}{21} = 1,190$$

De versterking voor $\Omega = \pi$ ($z = -1$) kan als volgt berekend worden:

$$|H_{\Omega}(\pi)| = |H_z(-1)| = \frac{\left| -1 - e^{j\frac{1}{3}\pi} \right| \cdot \left| -1 - e^{-j\frac{1}{3}\pi} \right|}{\left| -1 - 0,8e^{j\frac{1}{3}\pi} \right| \cdot \left| -1 - 0,8e^{-j\frac{1}{3}\pi} \right|}$$

$$= \frac{2 + 2\cos(\frac{1}{3}\pi)}{1,64 + 1,6\cos(\frac{1}{3}\pi)} = \frac{2 + 1}{1,64 + 0,8} = \frac{3}{2,44} = \frac{75}{61} = 1,230$$

We kunnen de overdracht nu schetsen:



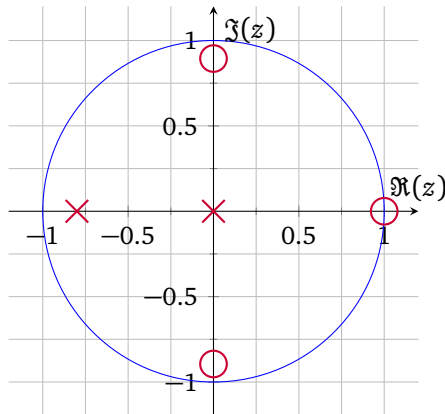
Dit is duidelijk een bandsperfilter.

4.12

$$H(z) = \frac{z^3 - z^2 + 0,8z - 0,8}{z^3 + 0,8z^2} = \frac{(z^2 + 0,8)(z - 1)}{z^2(z + 0,8)}$$

Nulpunten: $(z^2 + 0,8)(z - 1) = 0 \iff z = \pm j\sqrt{0,8}$ en $z = 1$

Polen: $z^2(z + 0,8) \iff z = 0$ en $z = -0,8$



We gebruiken de methode van geometrische evaluatie zoals beschreven in paragraaf 4.3.2 van je boek. De overdracht bij $\Omega = 0$ en $\Omega = \pi$ zijn eenvoudig uit te rekenen door in te vullen $z = 1$ respectievelijk $z = -1$:

$$|H_{\Omega}(0)| = |H_z(1)| = \left| \frac{(1^2 + 0,8)(1 - 1)}{1^2(1 + 0,8)} \right| = 0$$

$$|H_{\Omega}(\pi)| = |H_z(-1)| = \left| \frac{((-1)^2 + 0,8)(-1 - 1)}{(-1)^2(-1 + 0,8)} \right| = 18$$

Het nulpunt bij $z = j\sqrt{0,8}$ zorgt ervoor dat er een dal in de overdracht ontstaat in de buurt van $z = j$. De overdracht op dit punt kunnen we als volgt bepalen:

$$|H_{\Omega}(\frac{1}{2}\pi)| = |H_z(j)| = \left| \frac{((j)^2 + 0,8)(-j - 1)}{(j)^2(j + 0,8)} \right| = \sqrt{\frac{0,08}{1,64}} = 0,2209$$

De overdracht begint bij nul en zal oplopen vanwege de pool in $z = 0,8$. In de buurt van $\Omega = \frac{1}{8}\pi$ zal de versterking maximaal zijn en daarna weer afnemen omdat we het nulpunt bij $z = j\sqrt{0,8}$ naderen en de afstand tot de pool toeneemt.

We kunnen de overdracht dus als volgt schetsen:

