

4.13 De polen en nulpunten zijn af te leiden uit de gegeven eigenschappen:

- complete onderdrukking bij $\Omega = 0$ en $\Omega = \frac{\pi}{3}$: nulpunten op de eenheidscirkel bij $z = 1$, $z = e^{j\frac{\pi}{3}}$ en $z = e^{-j\frac{\pi}{3}}$ (het spectrum is immers gespiegeld rond $\Omega = \pi$);
- nauwe doorlaatband bij $\Omega = \frac{2\pi}{3}$ als gevolg van polen in het Z-vlak met straal $r = 0,9$: polen in $z = 0,9e^{j\frac{2\pi}{3}}$ en $z = 0,9e^{-j\frac{2\pi}{3}}$.

De overdracht van het filter is dus:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z-e^{j\frac{\pi}{3}})(z-e^{-j\frac{\pi}{3}})}{(z-0,9e^{j\frac{2\pi}{3}})(z-0,9e^{-j\frac{2\pi}{3}})}$$

De macht van z in de teller is hoger dan die in de noemer. Dat levert een niet causaal filter op. Om het filter causaal te maken voegen we een pool toe in $z = 0$. Deze pool beïnvloedt de overdracht verder niet omdat de afstand tot de eenheidscirkel voor alle punten op de eenheidscirkel (alle frequenties in het spectrum) 1 is. De overdracht wordt dus:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z-e^{j\frac{\pi}{3}})(z-e^{-j\frac{\pi}{3}})}{z(z-0,9e^{j\frac{2\pi}{3}})(z-0,9e^{-j\frac{2\pi}{3}})}$$

Om $h[n]$ te vinden moeten we de e -machten uitschrijven:

$$\begin{aligned} & (z - e^{j\frac{\pi}{3}})(z - e^{-j\frac{\pi}{3}}) \\ &= \left(z - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \left(z - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(z - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \left(z - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(z - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 - \left(j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 \\ &= \left(z - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= z^2 - 2z \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$=z^2 - 2z \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$=z^2 - z + 1$$

$$(z - 0,9e^{j\frac{2\pi}{3}})(z - 0,9e^{-j\frac{2\pi}{3}})$$

$$= \left(z - 0,9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j0,9 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \left(z - 0,9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j0,9 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \left(z - 0,9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + 0,9^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=z^2 - 1,8z \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 0,9^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 0,9 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=z^2 - 1,8z \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 0,81$$

$$=z^2 + 0,9z + 0,81$$

Dus:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z-1)(z^2-z+1)}{z(z^2+0,9z+0,81)} = \frac{z^3-z^2+z-z^2+z-1}{z^3+0,9z^2+0,81z} \\ &= \frac{z^3-2z^2+2z-1}{z^3+0,9z^2+0,81z} = \frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}}{1+0,9z^{-1}+0,81z^{-2}} \end{aligned}$$

$$Y(z)(1+0,9z^{-1}+0,81z^{-2}) = X(z)(1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3})$$

We passen nu de inverse Z-transformatie toe om de differentievergelijking te vinden:

$$y[n] + 0,9y[n-1] + 0,81y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2] - x[n-3]$$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2] - x[n-3] - 0,9y[n-1] - 0,81y[n-2]$$

Door voor $x[n]$ de impulsfunctie $\delta[n]$ in te vullen, vinden we de impulsresponsie:

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3] - 0,9h[n-1] - 0,81h[n-2]$$

Vervolgens kunnen we de eerste 6 sample-waarden van de impulsresponsie bepalen:

$$h[0] = 1$$

$$h[1] = -2 - 0,9 = -2,9$$

$$h[2] = +2 - 0,9 \cdot (-2,9) - 0,81 \cdot 1 = 3,8$$

$$h[3] = -1 - 0,9 \cdot 3,8 - 0,81 \cdot (-2,9) = -2,071$$

$$h[4] = -0,9 \cdot (-2,071) - 0,81 \cdot 3,8 = -1,2141$$

$$h[5] = -0,9 \cdot (-1,2141) - 0,81 \cdot (-2,071) = 2,7702$$

4.14 Als $\alpha = 0,8$ en het nulpunt naar $z = -1$ wordt verschoven wordt de overdracht van het filter:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z-0,8} = \frac{1+z^{-1}}{1-0,8z^{-1}}$$

A Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$Y(z)(1-0,8z^{-1}) = X(z)(1+z^{-1})$$

We passen nu de inverse Z-transformatie toe om de differentievergelijking te vinden:

$$y[n] - 0,8y[n-1] = x[n] + x[n-1]$$

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 0,8y[n-1]$$

B Door voor $x[n]$ de impulsfunctie $\delta[n]$ in te vullen, vinden we de impulsresponsie:

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 0,8h[n-1]$$

Vervolgens kunnen we de eerste 5 sample-waarden van de impulsresponsie bepalen:

$$h[0] = 1$$

$$h[1] = 1 + 0,8 = 1,8$$

$$h[2] = 0,8 \cdot 1,8 = 1,44$$

$$h[3] = 0,8 \cdot 1,44 = 1,152$$

$$h[4] = 0,8 \cdot 1,152 = 0,9216$$

In plaats van eerst $y[n]$ uit te rekenen en daarmee $h[n]$ te bepalen, kunnen we ook direct $h[n]$ uitrekenen door de inverse Z-transformatie toe te passen op de overdracht. Daartoe moeten we de overdracht omschrijven naar bekende Z-transformatieparen, zie [formuleblad](#) tabel 5:

$$H(z) = \frac{z+1}{z-0,8} = \frac{z}{z-0,8} + \frac{1}{z-0,8} = \frac{z}{z-0,8} + \left(\frac{z}{z-0,8} \right) z^{-1}$$

Toepassen van de inverse Z-transformatie geeft:

$$h[n] = 0,8^n u[n] + 0,8^{n-1} u[n-1]$$

Vervolgens kunnen we de eerste 5 sample-waarden van de impulsresponsie bepalen:

$$h[0] = 0,8^0 + 0 = 1$$

$$h[1] = 0,8^1 + 0,8^0 = 1,8$$

$$h[2] = 0,8^2 + 0,8^1 = 1,44$$

$$h[3] = 0,8^3 + 0,8^2 = 1,152$$

$$h[4] = 0,8^4 + 0,8^3 = 0,9216$$

C Om de frequentieresponsie te schetsen vullen we enkele waarden in:

$$|H_{\Omega}(0)| = |H_z(1)| = \left| \frac{2}{1-0,8} \right| = 10$$

$$|H_{\Omega}(\frac{1}{4}\pi)| = |H_z(\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2})| = \left| \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,8} \right|$$

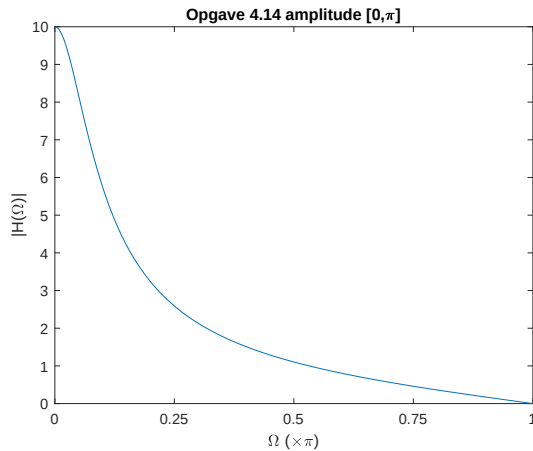
$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{1,64 - 0,8\sqrt{2}}} = 2,591$$

$$|H_{\Omega}(\frac{1}{2}\pi)| = |H_z(j)| = \left| \frac{j + 1}{j - 0,8} \right| = \sqrt{\frac{2}{1,64}} = 1,104$$

$$|H_{\Omega}(\frac{3}{4}\pi)| = |H_z(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2})| = \left| \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0,8} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}}{0,64 + 0,8\sqrt{2}}} = 0,460$$

$$|H_{\Omega}(\pi)| = |H_z(-1)| = \left| \frac{0}{-1 - 0,8} \right| = 0$$



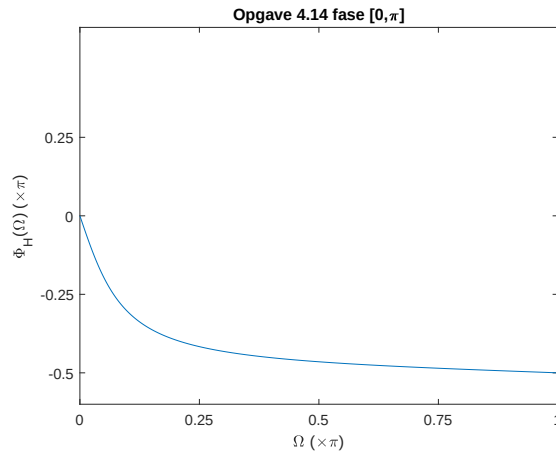
$$\Phi_{H_{\Omega}}(0) = \Phi_{H_z}(1) = \arctan(0) - \arctan(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi_{H_\Omega}\left(\frac{1}{4}\pi\right) &= \Phi_{H_z}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-0,8 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= -1,309\end{aligned}$$

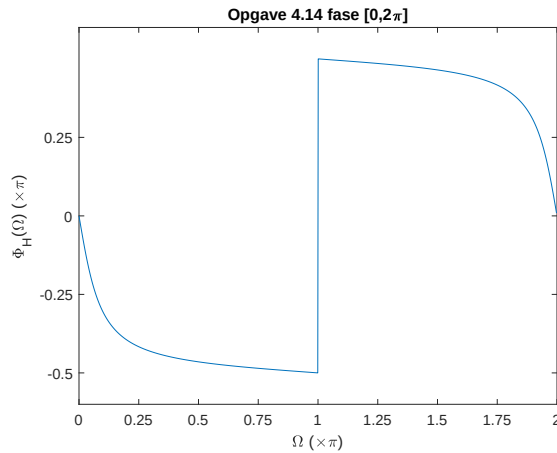
$$\Phi_{H_\Omega}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \Phi_{H_z}(j) = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{-0,8}\right) = -1,4601$$

$$\begin{aligned}\Phi_{H_\Omega}\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= \Phi_{H_z}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-0,8 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= -1,525\end{aligned}$$

$$\Phi_{H_\Omega}(\pi) = \Phi_{H_z}(-1) = \arctan(0) - \arctan(0) = 0$$



De waarde van $\Phi_H(\Omega)$ voor $\Omega = \pi$ lijkt niet overeen te komen met de waarde die hierboven is berekend. Toch is deze berekende waarde wel correct. De fase maakt namelijk een sprong van π radialen bij het nulpunt. Dit is te zien als we de grafiek van de fase van de frequentieresponsie tekenen van 0 tot en met 2π .



4.15 Om de polen te kunnen bepalen, moeten we eerst $H(z)$ bepalen. De gegeven differentievergelijking is:

$$y[n] = \alpha y[n-1] - \beta y[n-2] + x[n]$$

We transformeren dit naar het Z-domein:

$$Y(z) = \alpha Y(z)z^{-1} - \beta Y(z)z^{-2} + X(z)$$

$$Y(z)(1 - \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \alpha z + \beta}$$

We kunnen dus de polen p_1 en p_2 vinden door de volgende vergelijking op te lossen:

$$z^2 - \alpha z + \beta = 0$$

We maken daarbij gebruik van de ABC-formule:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$$

Er zijn drie mogelijkheden:

- Een reële pool, dan geldt:

$$\alpha^2 - 4\beta = 0 \wedge p_1 = \frac{1}{2}\alpha$$

Deze pool moet binnen de eenheidscirkel liggen dus:

$$|p_1| = \left| \frac{1}{2}\alpha \right| < 1 \implies -2 < \alpha < 2$$

Er geldt: $\alpha^2 - 4\beta = 0 \implies \beta = \frac{1}{4}\alpha^2$, dus:

$$0 \leq \left| \frac{1}{2}\alpha \right| < 1 \implies 0 \leq \frac{1}{4}\alpha^2 < 1 \implies 0 \leq \beta < 1$$

- Twee reële polen, dan geldt:

$$\alpha^2 - 4\beta > 0 \wedge p_{1,2} = \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \wedge p_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Deze polen moeten binnen de eenheidscirkel liggen dus:

$$|p_{1,2}| = \left| \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \right| < 1 \wedge p_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Voor $p_1 \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\left| \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \right| < 1 \implies \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} > -2$$

We hebben nu twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{cases} \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} > -2 \\ \alpha^2 - 4\beta > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} > -2 \\ \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} > 0 \end{cases} \implies \alpha > -2$$

Voor $p_2 \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\left| \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \right| < 1 \implies \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} < 2$$

We hebben nu weer twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{cases} \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} < 2 \\ \alpha^2 - 4\beta > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} < 2 \\ -\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} < 0 \end{cases} \implies \alpha < 2$$

Beide polen moeten in de eenheidscirkel liggen dus: $-2 < \alpha < 2$. Het bereik van β vinden we als volgt:

$$\alpha^2 - 4\beta > 0 \implies 4\beta < \alpha^2 \implies \beta < \frac{1}{4}\alpha^2$$

Voor $-2 < \alpha < 2$ geldt: $0 \leq \beta < 1$.

- Twee complex geconjugeerde polen, dan geldt:

$$\alpha^2 - 4\beta < 0 \wedge p_{1,2} = \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \wedge p_{1,2} \notin \mathbb{R}$$

Deze polen moeten binnen de eenheidscirkel liggen dus:

$$|p_{1,2}| = \left| \frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} \right| < 1$$

$$\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}(4\beta - \alpha^2) < 1$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2 - \beta < 1$$

We hebben nu twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha^2 - \beta < 1 \\ \alpha^2 - 4\beta < 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} 2\alpha^2 - 4\beta < 4 \\ \alpha^2 - 4\beta < 0 \end{cases} \implies \alpha^2 < 4 \implies -2 < \alpha < 2 \\ &\implies \begin{cases} \alpha^2 - 2\beta < 2 \\ \alpha^2 - 4\beta < 0 \end{cases} \implies 0 \leq \beta < 1 \end{aligned}$$

Dus het filter is stabiel als geldt: $-2 < \alpha < 2 \wedge 0 \leq \beta < 1$.

Dit kunnen we ook op een andere manier berekenen. De overdracht van het filter is hierboven berekend:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \alpha z + \beta}$$

De algemene formule van de overdracht van een tweede orde filter is:

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Dit filter is stabiel als de polen binnen de eenheidscirkel liggen.

Als we de polen van het filter weergeven in poolcoördinaten dan geldt:

$$p_1 = r \cdot e^{j\theta} \text{ met } 0 \leq r < 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi$$

Omdat de polen alleen in complex geconjugeerde paren voorkomen geldt:

$$p_2 = \overline{p_1} = r \cdot e^{-j\theta} \text{ met } 0 \leq r < 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi$$

De noemer van de algemene formule van de overdracht is dus gelijk aan:

$$(z - r \cdot e^{j\theta})(z - r \cdot e^{-j\theta}) = z^2 - r(e^{j\theta} + e^{-j\theta})z + r^2 = z^2 - 2r \cos(\theta)z + r^2$$

In de laatste stap is de halveringsformule gebruikt (zie [formuleblad](#)). We kunnen nu de noemer van de overdracht van het filter gelijkstellen aan de noemer van de algemene formule van de overdracht:

$$z^2 - \alpha z + \beta = z^2 - 2r \cos(\theta)z + r^2$$

Dus $\alpha = 2r \cos(\theta)$ en $\beta = r^2$. Omdat $0 \leq r < 1$ geldt: $0 \leq \beta < 1$. Omdat de $\cos(\theta)$ tussen -1 en 1 ligt voor $0 \leq \theta \leq \pi$ geldt: $-2 < \alpha < 2$. De overdracht van het filter is dus stabiel als geldt: $-2 < \alpha < 2 \wedge 0 \leq \beta < 1$.

A Om een doorlaatband rond $\Omega = \frac{1}{3}\pi$ te laten ontstaan moeten er twee polen net onder de eenheidscirkel liggen onder een hoek van $\Omega = \pm \frac{1}{3}\pi$. Voor het gemak leggen we de pool op de eenheidscirkel, dus bij:

$$p_{1,2} = e^{\pm j\frac{1}{3}\pi} = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \pm j \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Hierboven hebben we afgeleid dat voor de polen geldt:

$$z^2 - \alpha z + \beta = 0$$

Verder is gegeven dat β dicht bij 1 ligt. Voor het gemak vullen we in $\beta = 1$:

$$z^2 - \alpha z + 1 = 0$$

Invullen $z = p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft:

$$\left(\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \alpha\left(\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4} - \alpha\left(\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3} - \alpha\left(\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\alpha = 1$$

Omdat $|p_1|$, $|p_2|$ en β allemaal iets kleiner dan 1 moeten zijn (maar we hebben voor het gemak 1 ingevuld), is het correcte antwoord: $\alpha \approx 1$.

B Om een doorlaatband rond $\Omega = \frac{2}{3}\pi$ te laten ontstaan moeten er twee polen net onder de eenheidscirkel liggen onder een hoek van $\Omega = \pm\frac{2}{3}\pi$. Voor het gemak leggen we de pool op de eenheidscirkel, dus bij:

$$p_{1,2} = e^{\pm j\frac{2}{3}\pi} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \pm j\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Hierboven hebben we afgeleid dat voor de polen geldt:

$$z^2 - \alpha z + \beta = 0$$

Verder is gegeven dat β dicht bij 1 ligt. Voor het gemak vullen we in $\beta = 1$:

$$z^2 - \alpha z + 1 = 0$$

Invullen $z = p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft:

$$\left(-\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \alpha\left(-\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4} \mp j\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4} + \alpha\left(\frac{1}{2} \mp j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \mp j\frac{1}{2}\sqrt{3} + \alpha\left(\frac{1}{2} \mp j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\alpha = -1$$

Omdat $|p_1|$, $|p_2|$ en β allemaal iets kleiner dan 1 moeten zijn (maar we hebben voor het gemak 1 ingevuld), is het correcte antwoord: $\alpha \approx -1$.