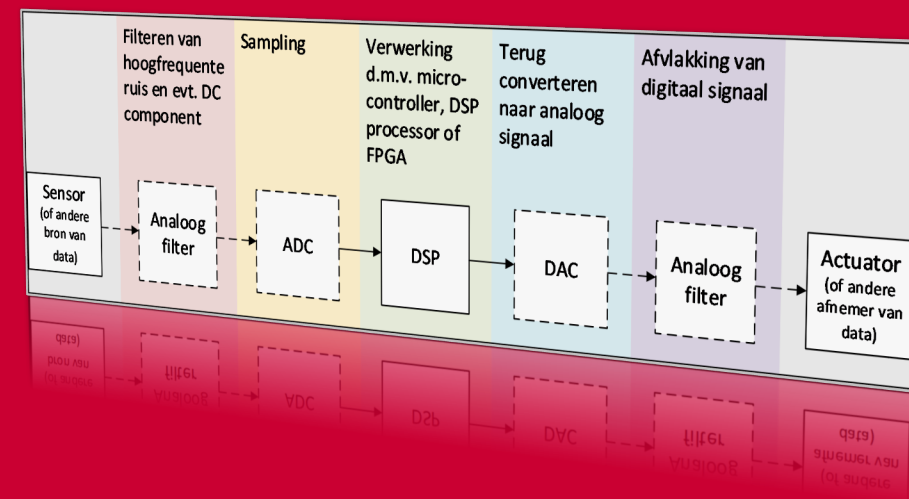
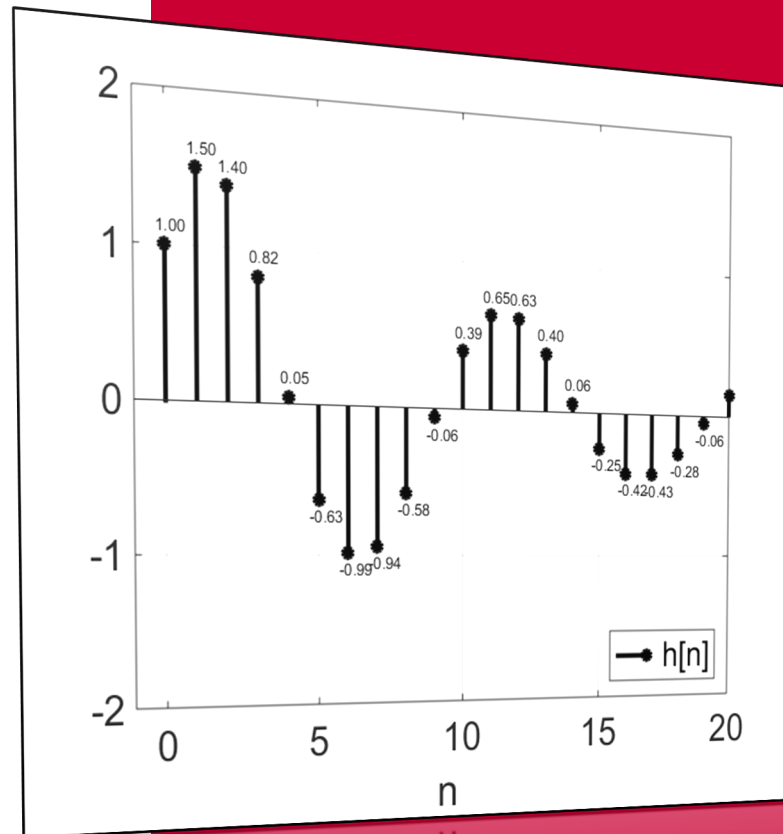
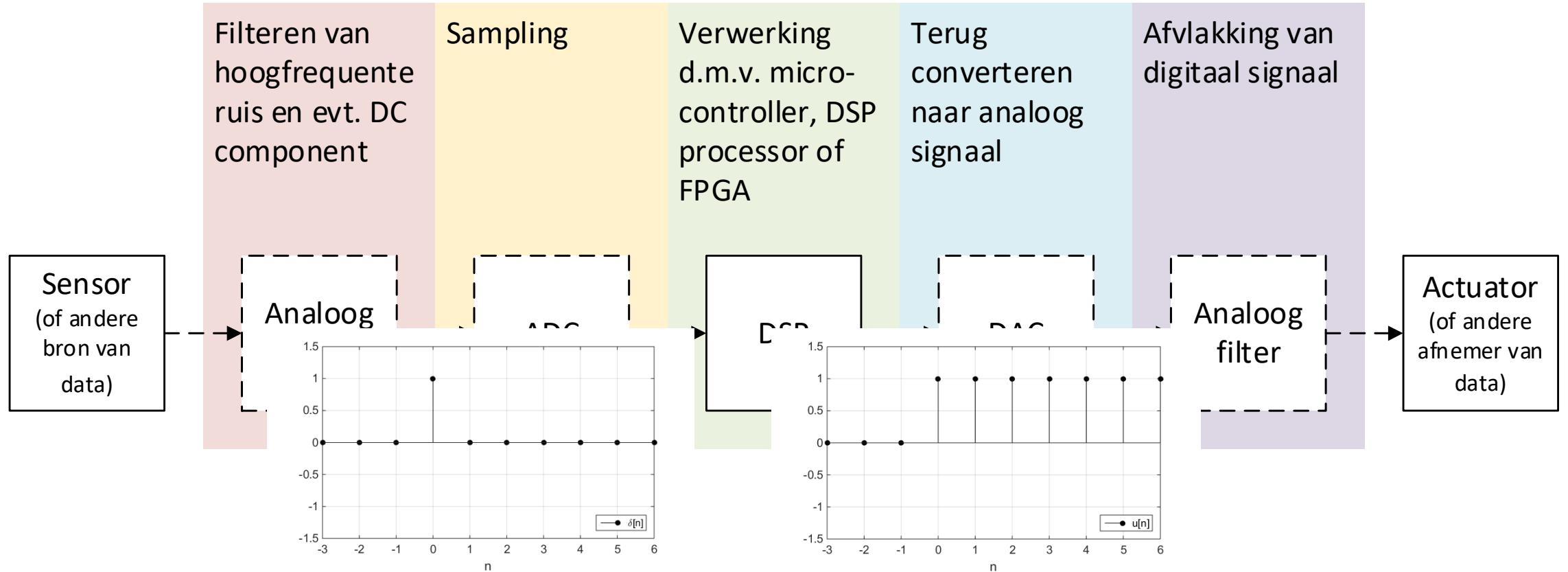




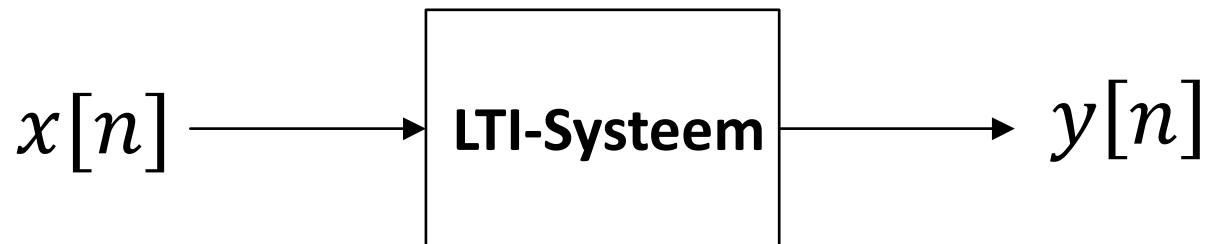
ELEDIS10

Digitale Systemen

Vorige week



Lineaire tijd invariante (LTI) systemen



- **Lineair:**

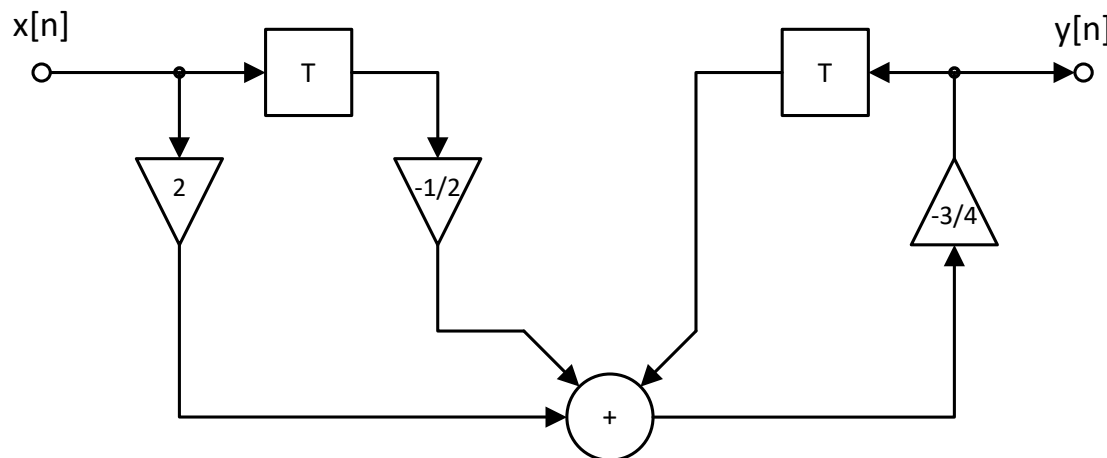
- Geen kwadraten of producten van in- en/of uitgangssignalen

- **Tijd invariant:**

- De eigenschappen van het systeem veranderen niet in de tijd

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] \Rightarrow x_1[n - k] \rightarrow y_1[n - k]$$

Voorbeeld:



Overige eigenschappen van LTI-systemen

In dit vak bestuderen we alleen LTI-systemen met de volgende eigenschappen:

Omkeerbaar:

- Uit het uitgangssignaal kan het ingangssignaal éénduidig bepaald worden.

Stabiel:

- Het uitgangssignaal groeit niet onbegrensd.

Causaal:

- Het huidige uitgangssignaal hangt alleen van huidige en voorafgaande ingangssignalen af en mogelijk van voorafgaande uitgangssignalen.

Geheugen:

- Het huidige uitgangssignaal hangt van voorafgaande in- en/of uitgangssignalen af.

Deze week

- Signaalbeschrijving d.m.v. impulsen
- Impulsresponsie
- Stapresponsie
- Convolutie

Signaalbeschrijving d.m.v. impulsen

- Gegeven het volgende signaal:

$$x[-2] = -2$$

$$x[-1] = -1$$

$$x[0] = 4$$

$$x[1] = 4$$

$$x[2] = 1$$

- Dit is ook te schrijven als:

$$x[-2]$$

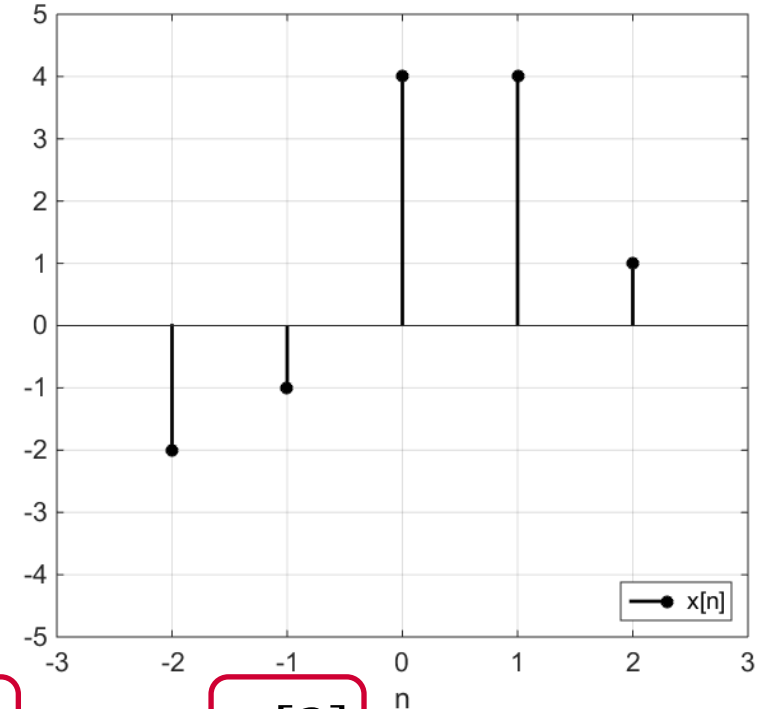
$$x[-1]$$

$$x[0]$$

$$x[1]$$

$$x[2]$$

$$x[n] =$$

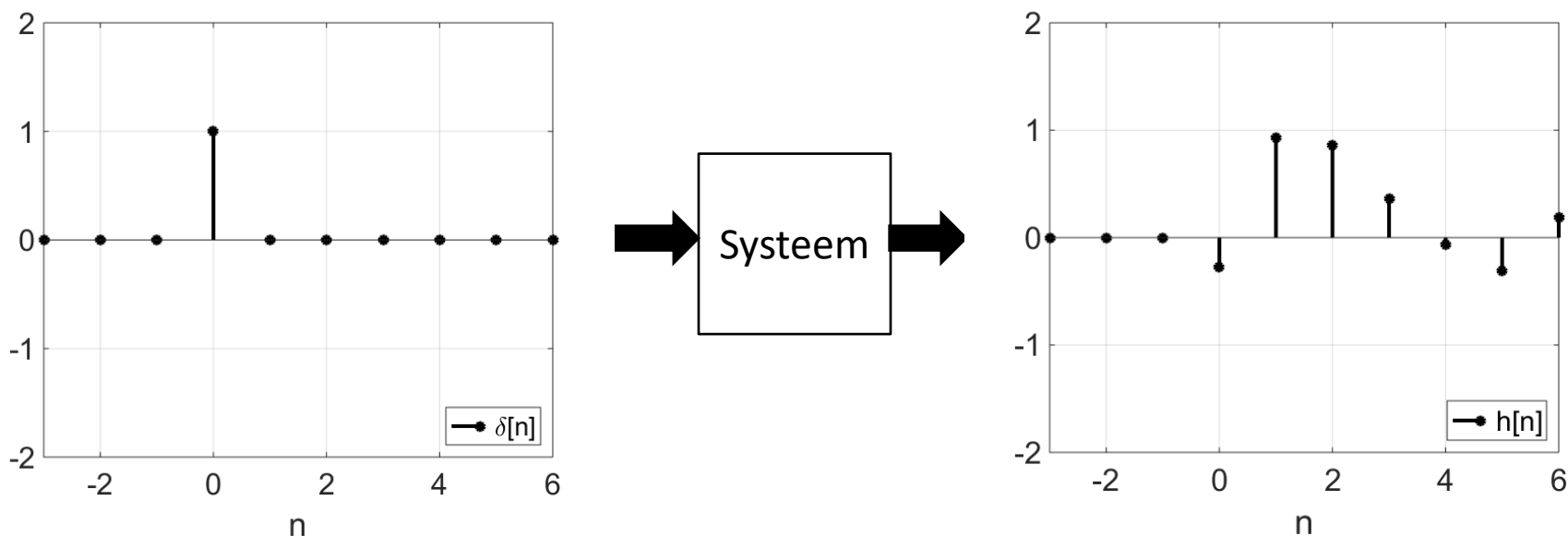


- Elk signaal is te beschrijven als **impulstrein**:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$

Impulsresponsie (1/3)

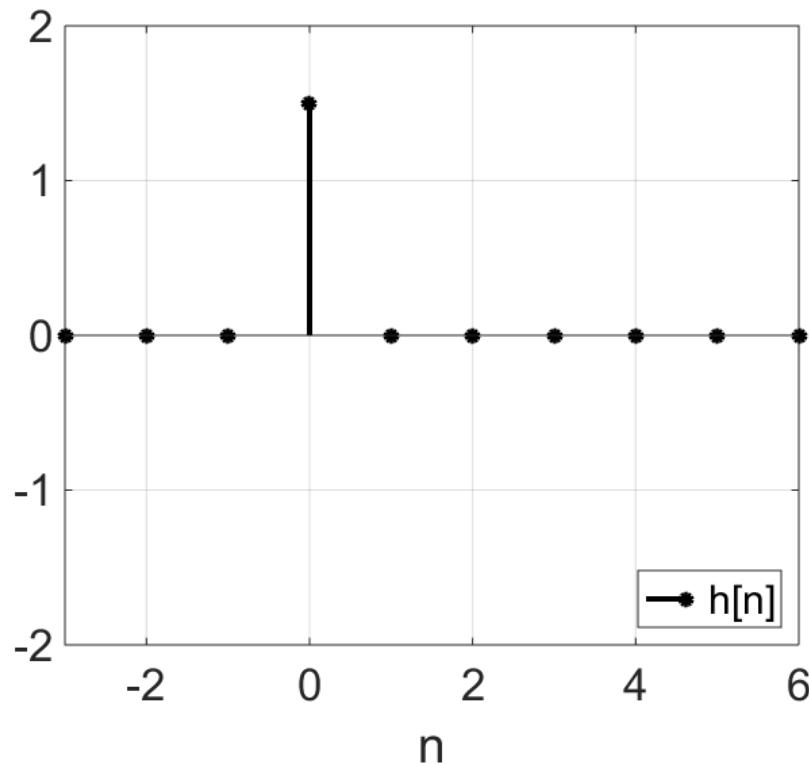
- Als we een systeem voeden met een impuls $\delta[n]$ kunnen we informatie krijgen over het systeem:



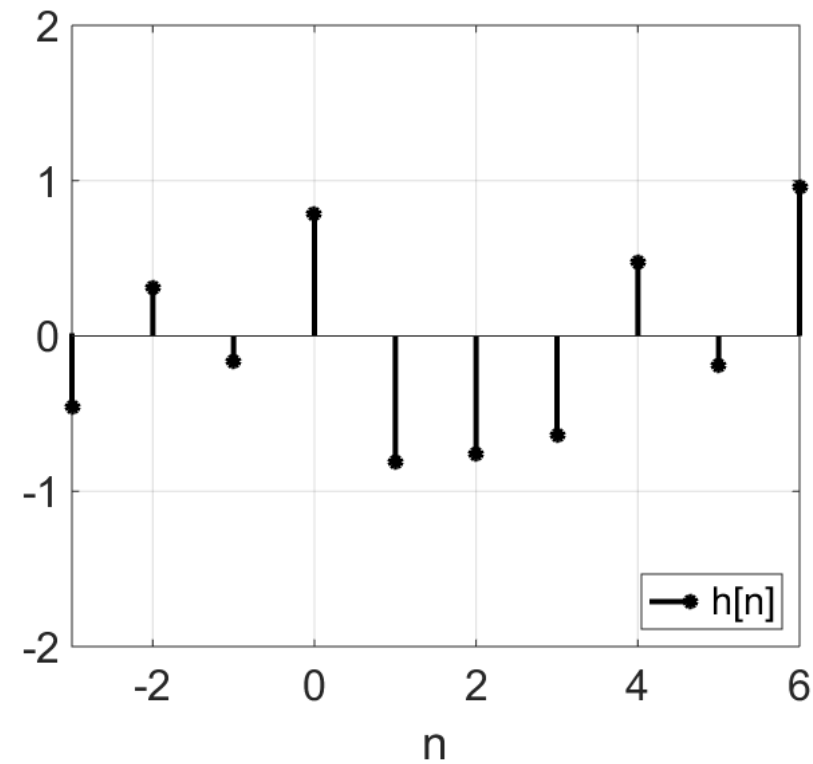
We noemen de uitgang de
impulsresponsie $h[n]$
van het systeem.

Impulsresponsie (2/3)

- Stel we geven een impuls op de input van het systeem en we zien het volgende:



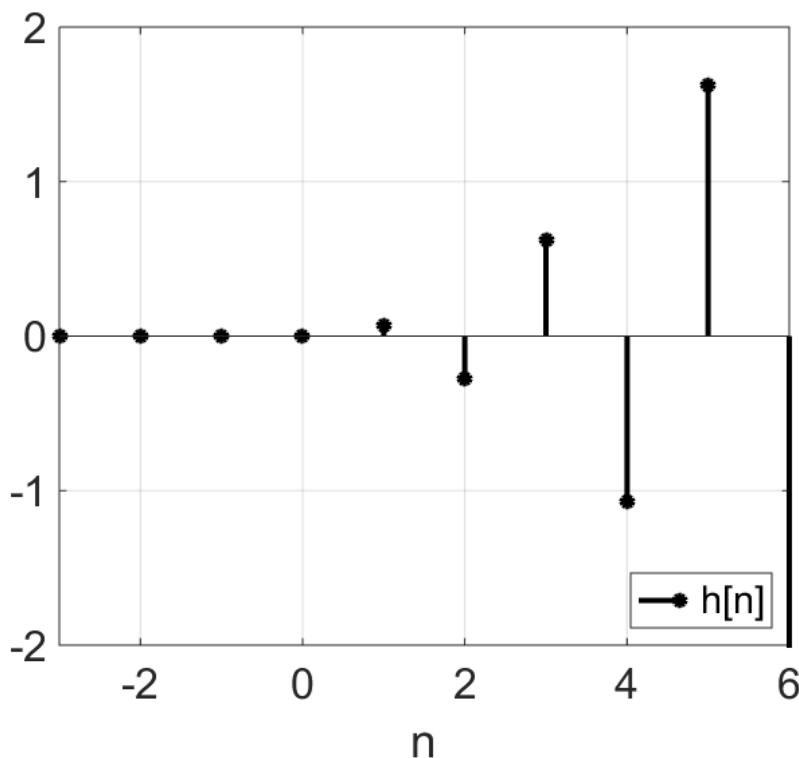
Geheugenloos



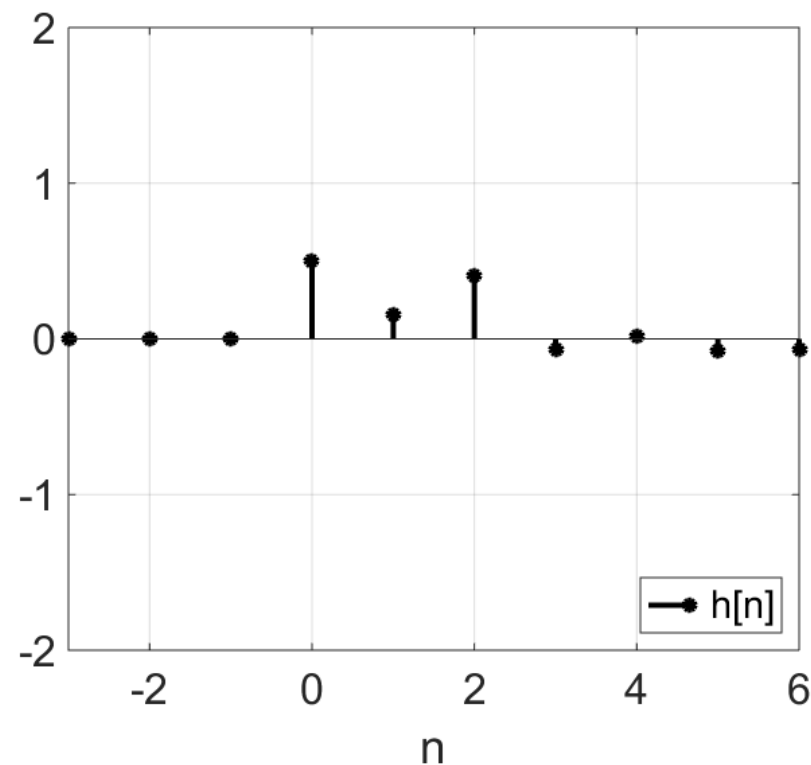
Niet-causaal (in theorie)

Impulsresponsie (3/3)

- Stel we geven een impuls op de input van het systeem en we zien het volgende:



Instabiel



Causaal en stabiel

Voorbeeld impulsresponsie (1/4)

- Neem de output van een banddoorlaatfilter:

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Bepaal de eerste vier waarden van de impulsresponsie

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld impulsresponsie (2/4)

- Neem de output van een banddoorlaatfilter:

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Bepaal de eerste vier waarden van de impulsresponsie:

$$h[n] = 1,5 \cdot h[n - 1] - 0,85 \cdot h[n - 2] + \delta[n]$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

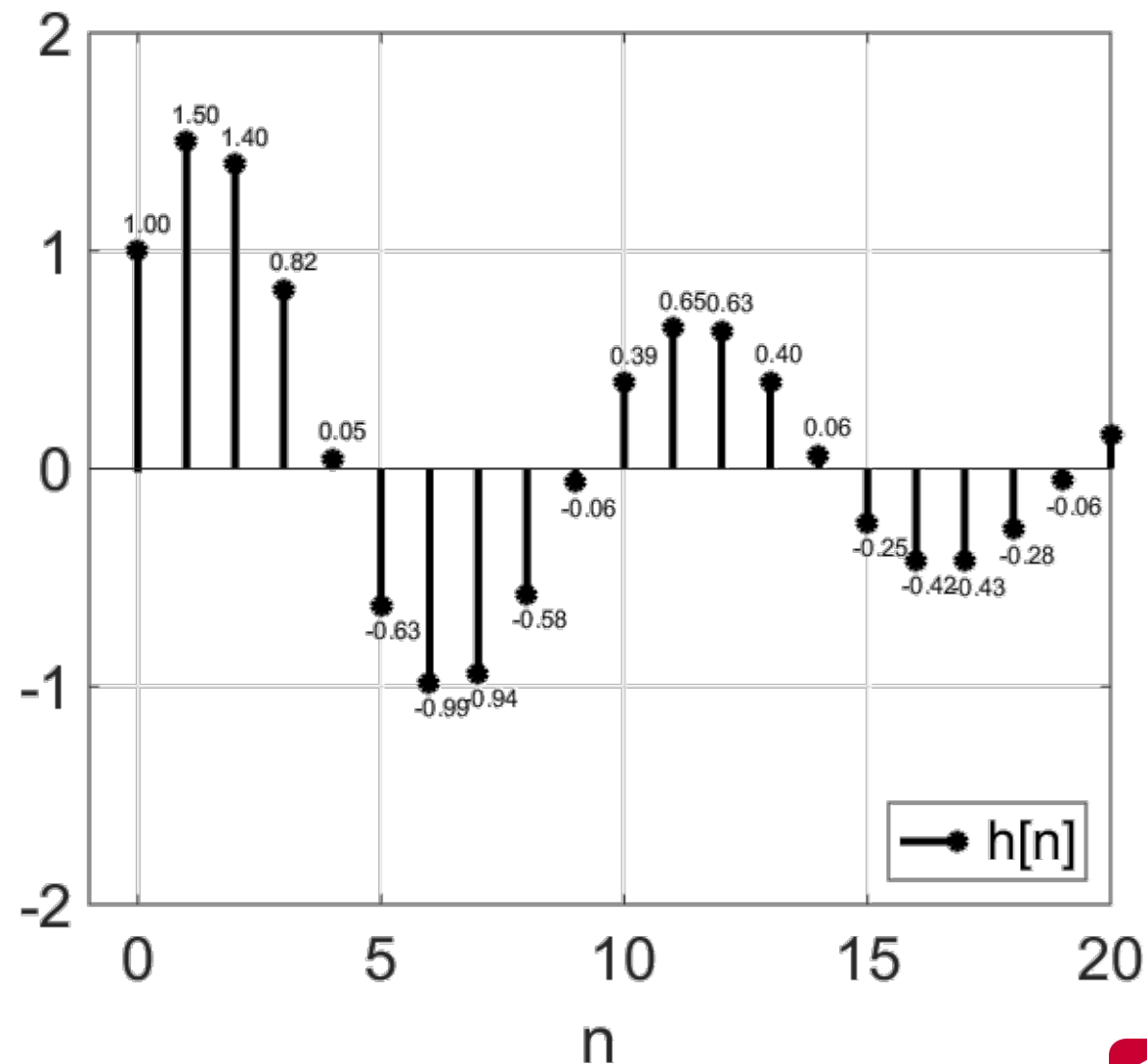
(Vóór de impuls is de output natuurlijk nul)

Voorbeeld impulsresponsie (3/4)

- Neem de output van een banddoorlaatfilter:
$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Bepaal de eerste vier waarden van de impulsresponsie

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



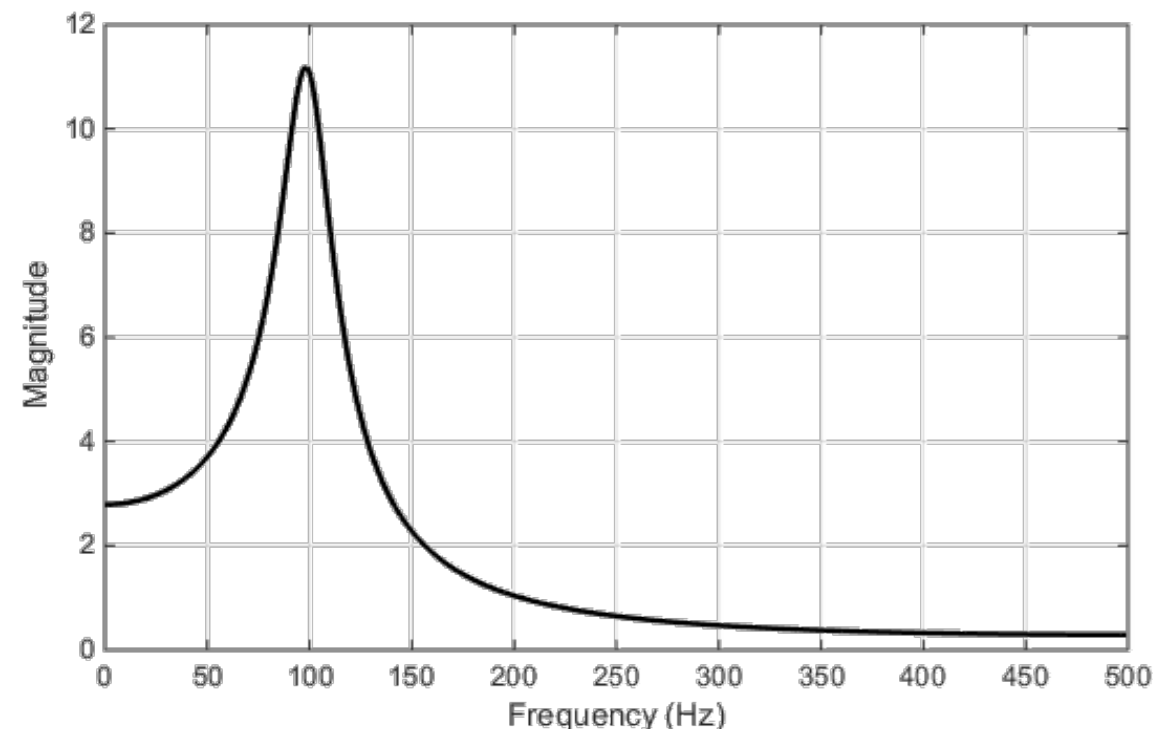
Voorbeeld impulsresponsie (4/4)

- We kunnen via een impuls ook de **frequentieresponsie** bekijken van een systeem.

- Zelfde systeem:

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

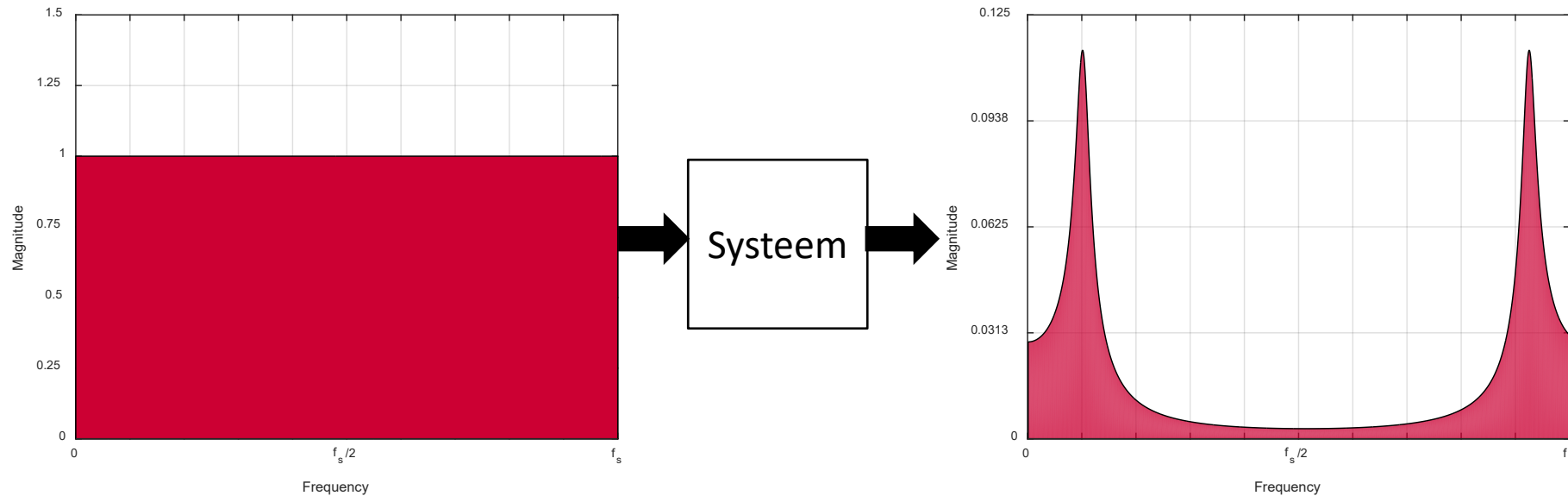
- We nemen $f_s = 1 \text{ kHz}$ en geven een impuls.
- Als we de **Fouriertransformatie** toepassen op de **impulsresponsie** van het systeem:



Volgende week
gaan we naar Fourier kijken

Impulsresponsie in frequentiedomein

- Als we een systeem voeden met een impuls $\delta[n]$ kunnen we informatie krijgen over het systeem:



We kunnen ook het *spectrum* van de input en output bekijken.

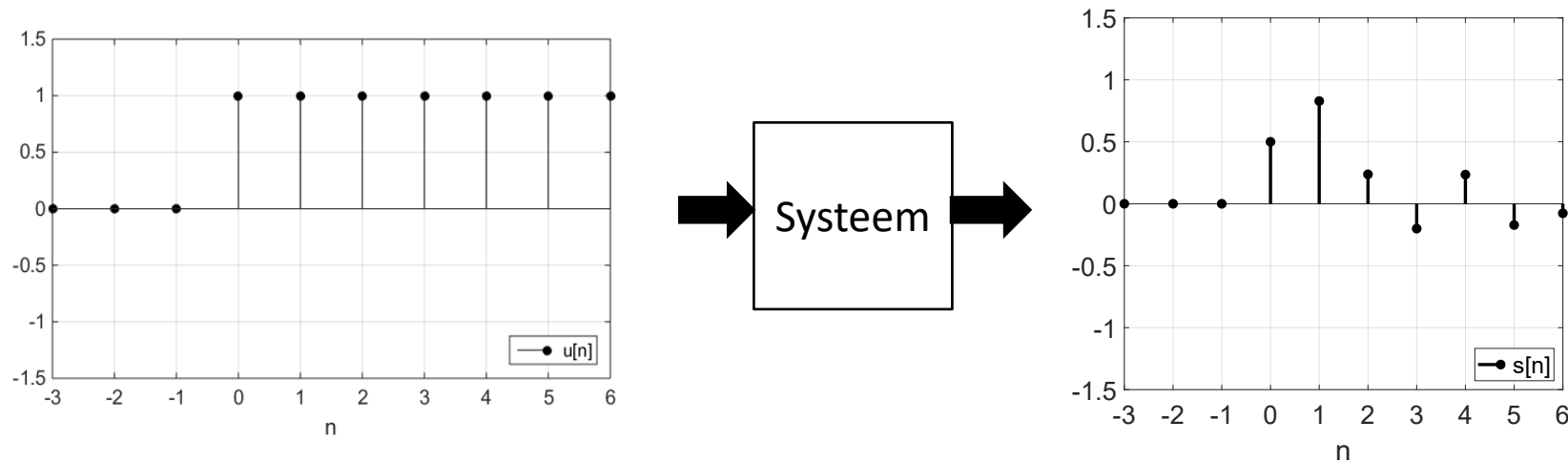
Oefening impulsresponsie

- Bepaal de impulsresponsie van het volgende systeem en teken de impulsresponsie voor $n = -1$ t/m 4 :

$$y[n] = 0,2 \cdot y[n - 1] + x[n]$$

Stapresponsie

- Bij digitale regelaars willen we graag kijken hoe het systeem reageert op een stap $u[n]$:



We noemen de uitgang de
stapresponsie $s[n]$
van het systeem.

Voorbeeld stapresponsie (1/3)

- Neem de output van een banddoorlaatfilter:

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Bereken de eerste vier waarden van de stapresponsie:

$$s[n] = 1,5 \cdot s[n - 1] - 0,85 \cdot s[n - 2] + u[n]$$

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

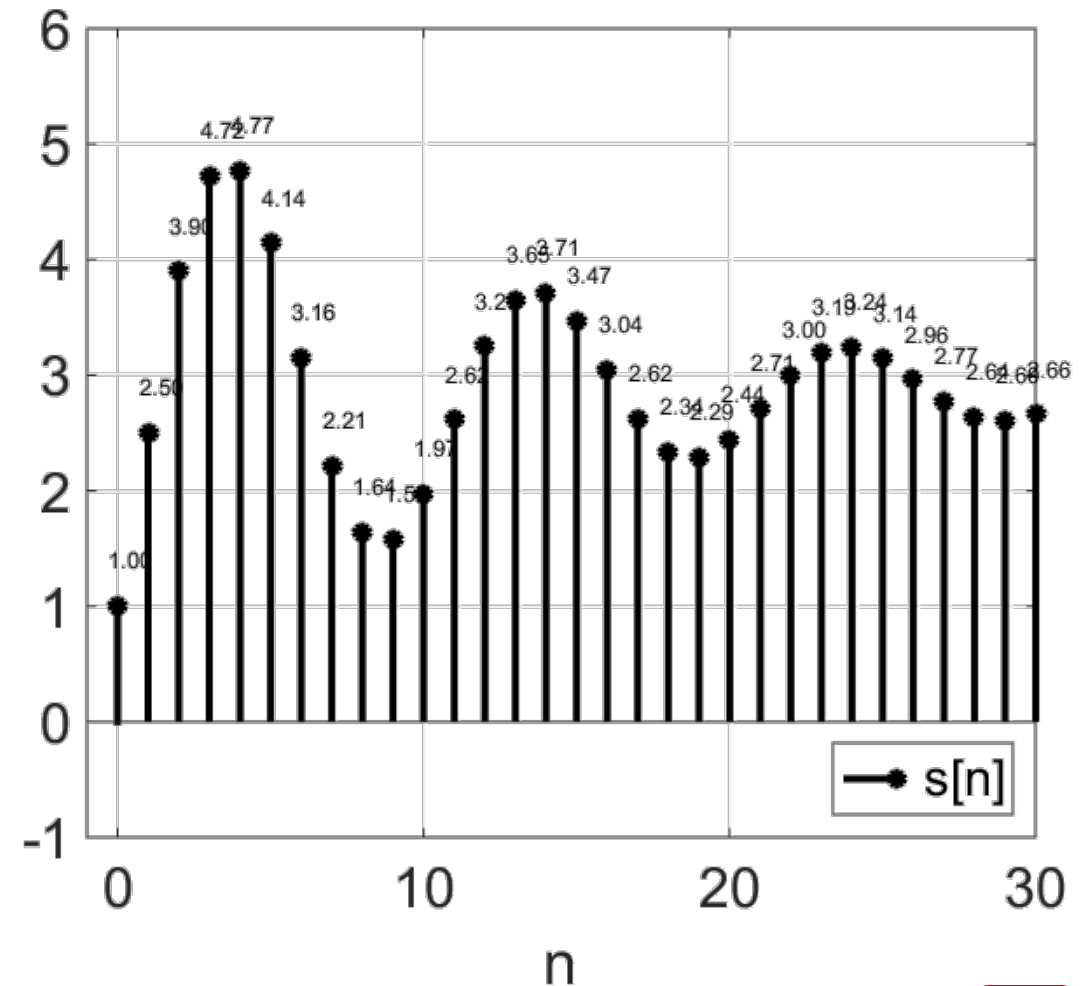
Voorbeeld stapresponsie (2/3)

- Neem de output van een banddoorlaatfilter:

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Bereken de eerste vier waarden van de stapresponsie:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



Voorbeeld stapresponsie (3/3)

- Hetzelfde banddoorlaatfilter:

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Stapresponsie:

$$s[n] = 1,5 \cdot s[n - 1] - 0,85 \cdot s[n - 2] + u[n]$$

- Bepaal de **eindwaarde** (de limiet $n \rightarrow \infty$) van de stapresponsie:

Als n heel groot is en het systeem stabiel is geldt *praktisch*:

$$s[n] \approx s[n - 1] \approx s[n - 2] \approx s[n - 3]$$

Invullen: $\lim_{n \rightarrow \infty} s[n] = 1,5 \cdot s[n] - 0,85 \cdot s[n] + u[n] \Rightarrow 0,35 \cdot s[n] = u[n]$

Dus de eindwaarde is: $\lim_{n \rightarrow \infty} s[n] = \frac{1}{0,35} = 2,86$

Oefeningen stapresponsie

Beschouw het volgende LTI-systeem:

$$y[n] = 0,8 \cdot y[n - 1] + x[n]$$

- Bepaal de eerste 5 waarden van de stapresponsie en de eindwaarde.

Een ander systeem heeft:

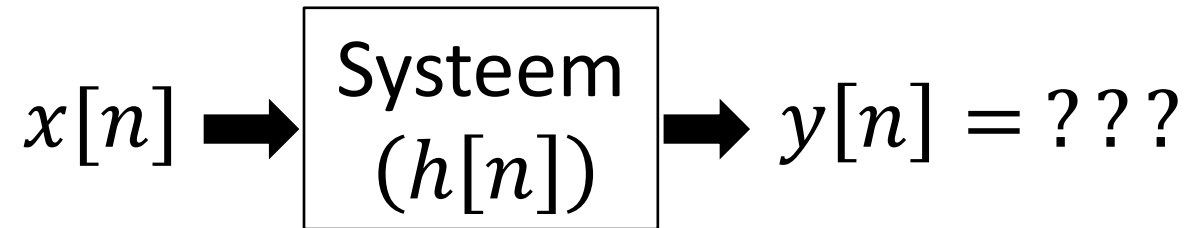
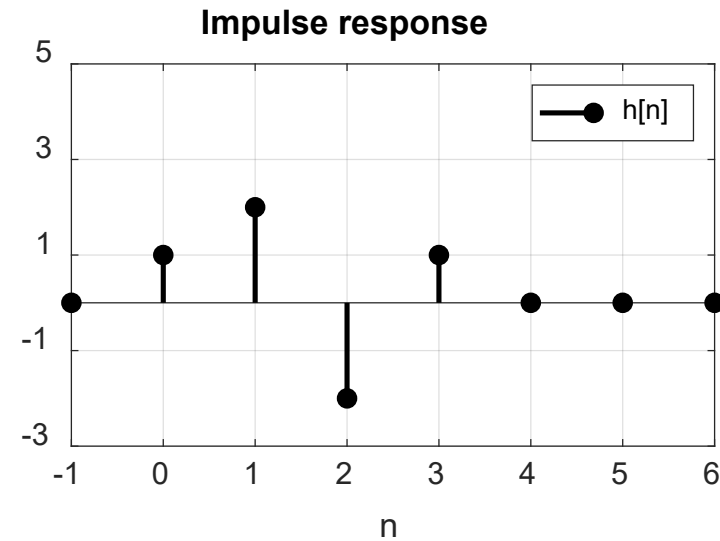
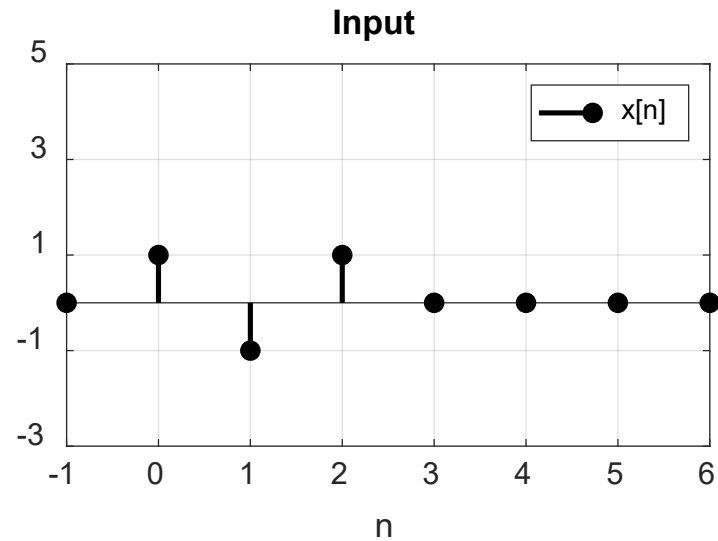
$$y[n] = y[n - 1] + x[n]$$

- Bepaal de eerste 5 waarden van de stapresponsie.
- Leg uit waarom dit systeem geen eindwaarde heeft.

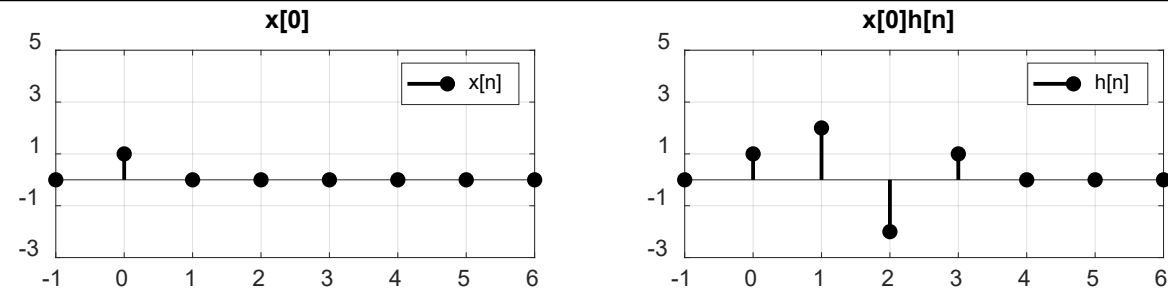
Vorbereiding les 2

- [Huiswerk week 2 les 1](#)
- Opgaven: [2.1, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7, 2.8 en 2.9](#)
- Lezen (verdieping):
 - §2.1 Analyse in het tijddomein; Inleiding
 - §2.2 Het beschrijven van digitale signalen met impulsfuncties
 - §2.3 Het beschrijven van digitale LTI-processoren(10 pagina's)

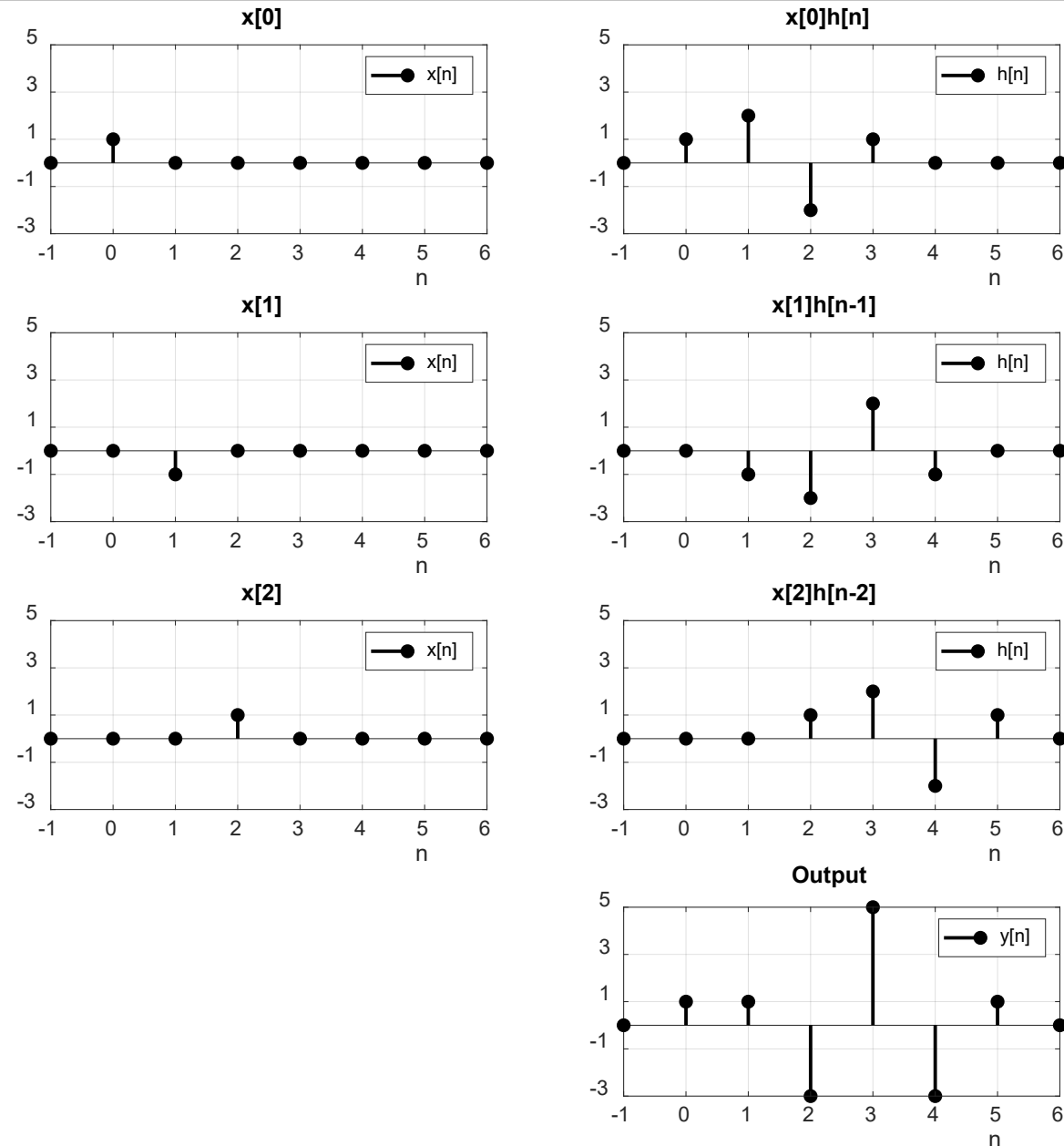
Convolutie



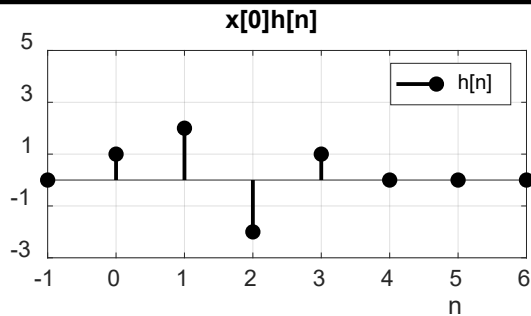
Convolutie



Convolutie

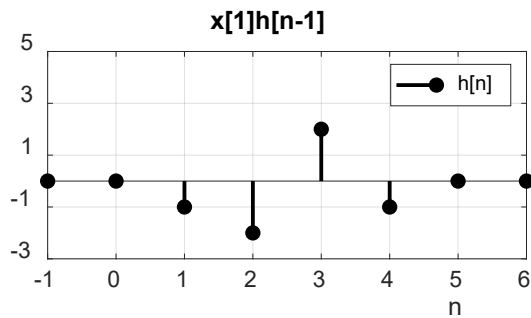


Convolutie



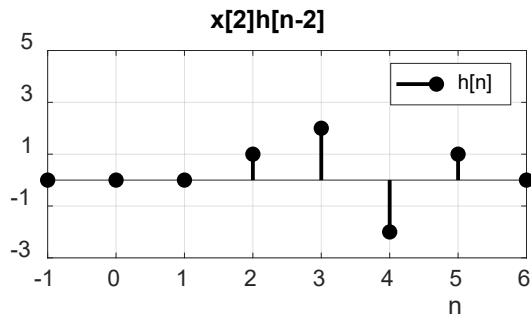
$$\begin{aligned}y[0] &= x[0]h[0] + x[1]h[0-1] + x[2]h[0-2] \\ &= x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] = 1\end{aligned}$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^2 x[k]h[0-k]$$



$$\begin{aligned}y[1] &= x[0]h[1] + x[1]h[1-1] + x[2]h[1-2] \\ &= x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] = 1\end{aligned}$$

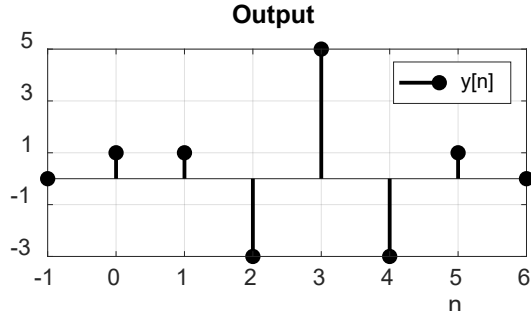
$$y[1] = \sum_{k=0}^2 x[k]h[1-k]$$



Enz.

Algemeen:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



Deze operatie wordt **convolutie** genoemd.

Eigenschappen van convolutie

Convolutie wordt vaak genoteerd als:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \underline{h[n - k]}$$

We schuiven hier als het ware h door naar het moment in de tijd waarin we geïnteresseerd zijn (n).

Hiermee kun je rekenen alsof het een gewoon product is, d.w.z.:

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= h[n] * x[n], & \text{Commutatief} \\ h[n] * (x_1[n] + x_2[n]) &= h[n] * x_1[n] + h[n] * x_2[n], & \text{Distributief} \\ x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] & \text{Associatief} \end{aligned}$$

Commutatieve eigenschap van convolutie

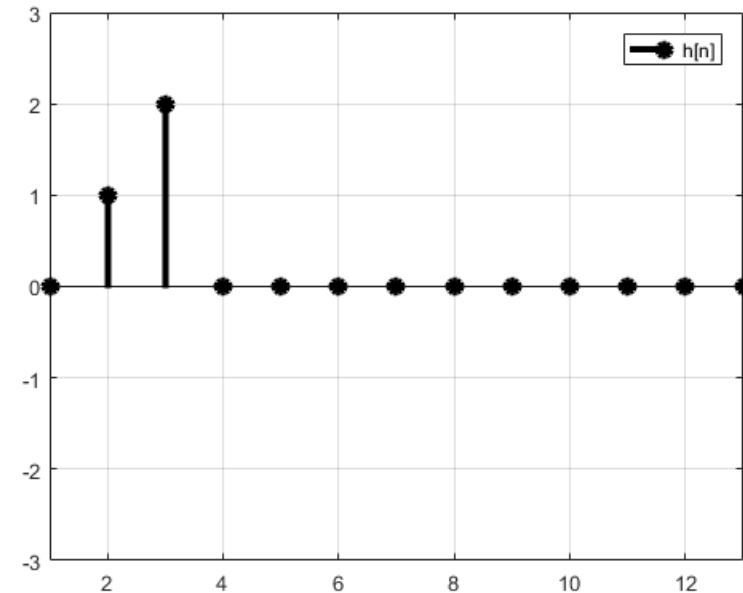
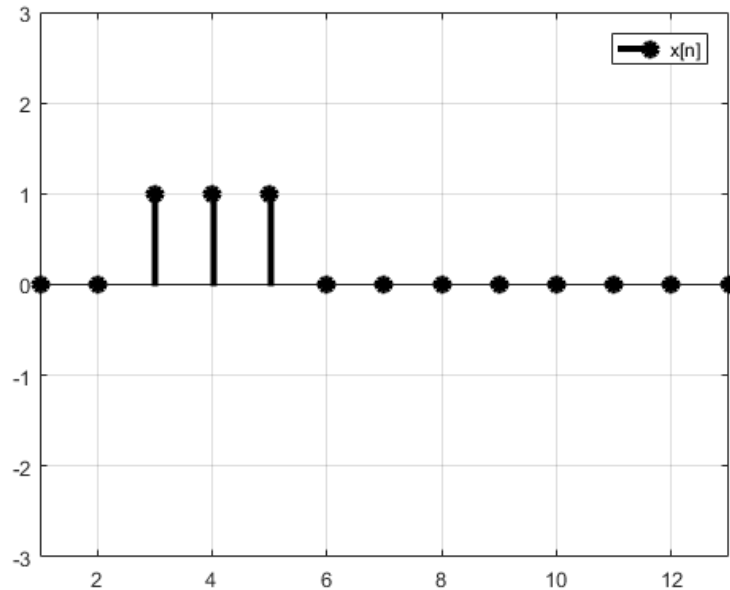
Convolutie wordt ook genoteerd als:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k]$$

We gaan ervan uit dat het systeem causaal is.

Voorbeeld 1 convolutie (1/3)

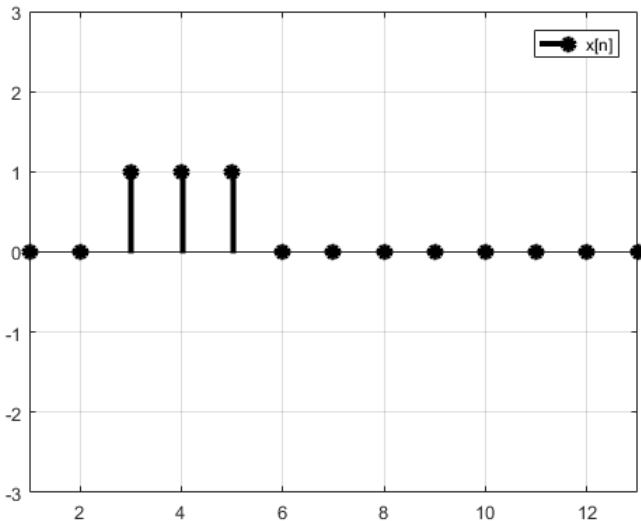
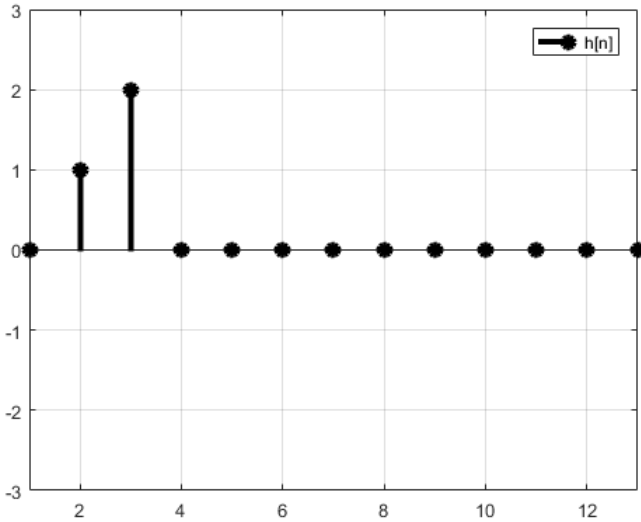
- Gegeven een digitaal systeem met impulsresponsie $h[n]$.
- Op dit systeem wordt het ingangssignaal $x[n]$ aangeboden.



- Bereken het uitgangssignaal $y[n]$

Voorbeeld 1 convolutie (2/3)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=3}^5 x[k] h[n-k]$$

$$= x[3]h[n-3] + x[4]h[n-4] + x[5]h[n-5]$$

$$= h[n-3] + h[n-4] + h[n-5]$$

Dus:

$$y[n \leq 3] = 0$$

$$y[4] = h[1] + h[0] + h[-1] = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$y[5] = h[2] + h[1] + h[0] = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$y[6] = h[3] + h[2] + h[1] = 2 + 1 + 0 = 3$$

$$y[7] = h[4] + h[3] + h[2] = 0 + 2 + 1 = 3$$

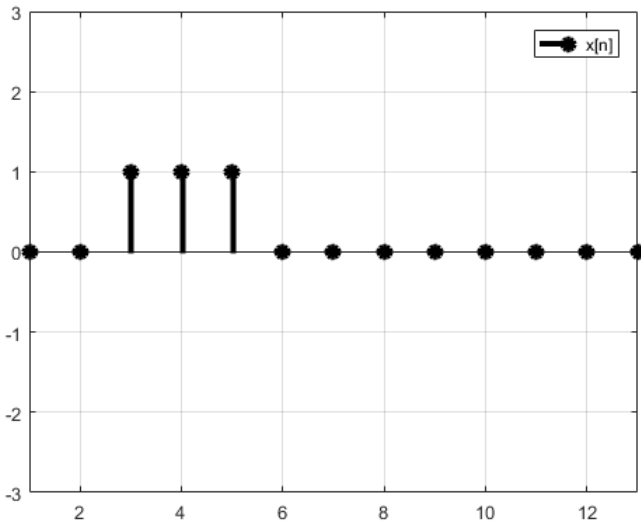
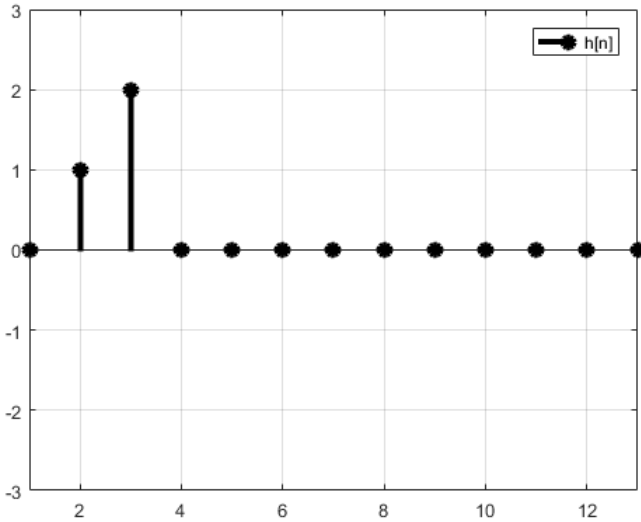
$$y[8] = h[5] + h[4] + h[3] = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$y[9] = h[6] + h[5] + h[4] = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$y[n \geq 10] = 0$$

Voorbeeld 1 convolutie (3/3)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k]$$



$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n - k] = \sum_{k=2}^3 h[k] x[n - k]$$

$$= h[2]x[n - 2] + h[3]x[n - 3]$$

$$= x[n - 2] + 2x[n - 3]$$

Dus:

$$y[n \leq 3] = 0$$

$$y[4] = x[2] + 2x[1] = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$y[5] = x[3] + 2x[2] = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$y[6] = x[4] + 2x[3] = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$y[7] = x[5] + 2x[4] = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

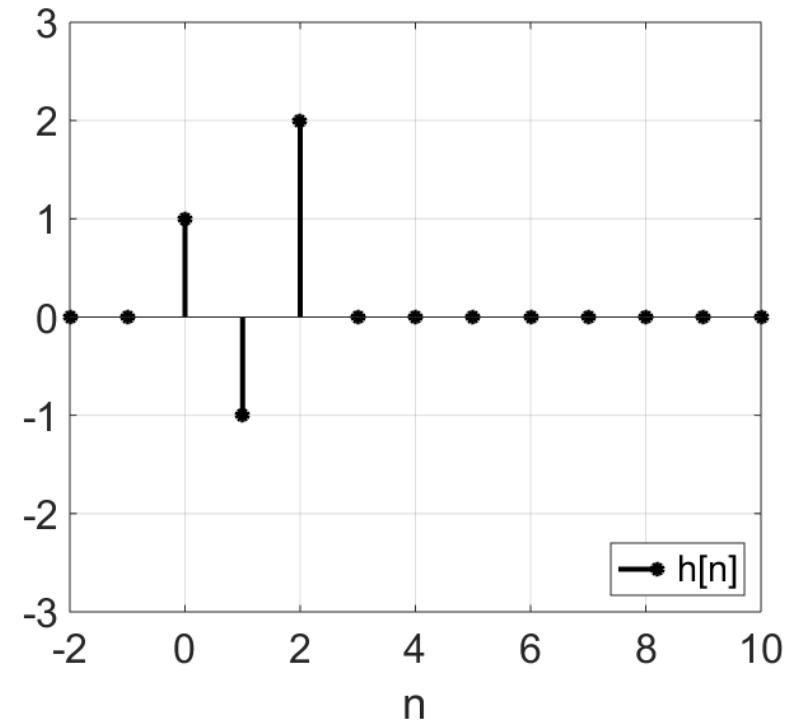
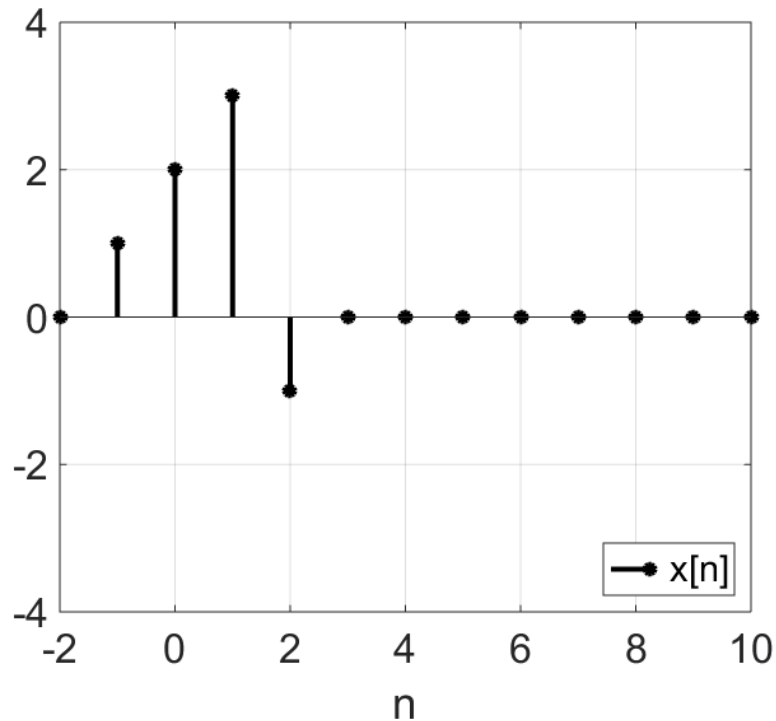
$$y[8] = x[6] + 2x[5] = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$y[9] = x[7] + 2x[6] = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$y[n \geq 10] = 0$$

Voorbeeld 2 convolutie (1/4)

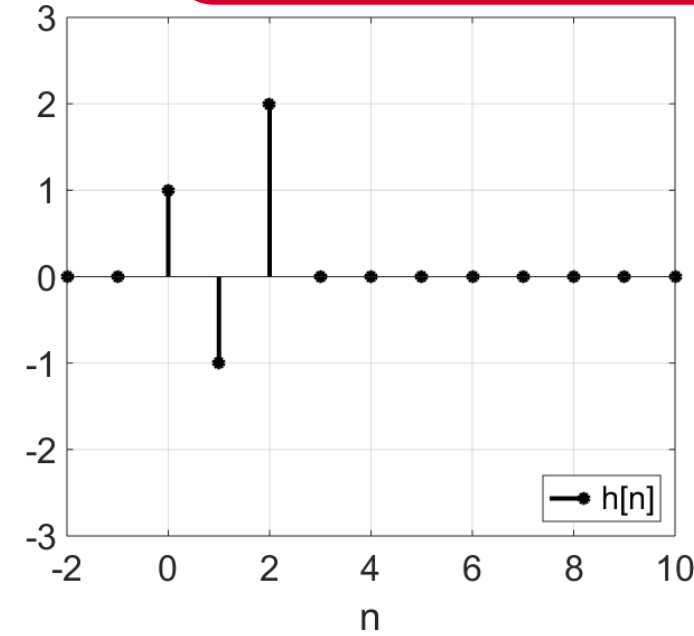
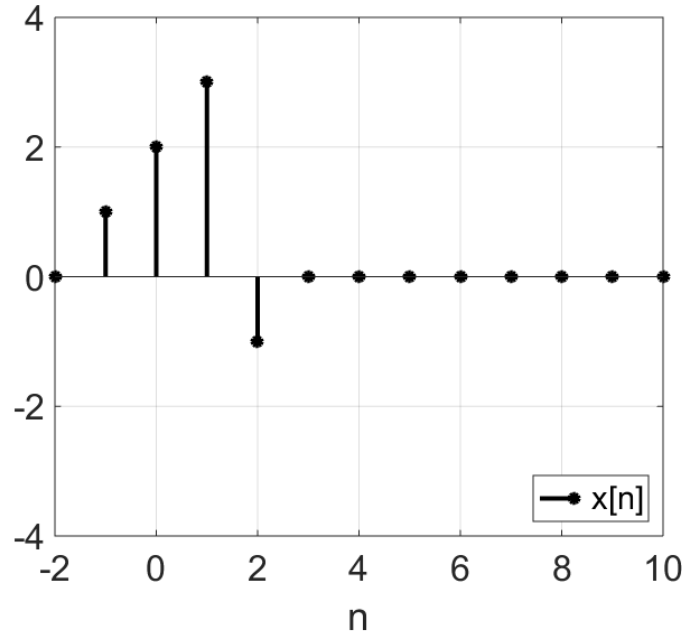
- Gegeven een digitaal systeem met impulsresponsie $h[n]$.
- Op dit systeem wordt het ingangssignaal $x[n]$ aangeboden.



- Bepaal het uitgangssignaal $y[n]$:
 - a) M.b.v. de convolutiesom
 - b) Grafisch

Voorbeeld 2 convolutie (2/4)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$



$$y[n] = x[-1]h[n+1] + x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$$

$$y[n] = 1 \cdot h[n+1] + 2 \cdot h[n-0] + 3 \cdot h[n-1] + (-1) \cdot h[n-2]$$

$$y[-1] = 1 \cdot h[0] + 2 \cdot h[-1] + 3 \cdot h[-2] - 1 \cdot h[-3] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 1$$

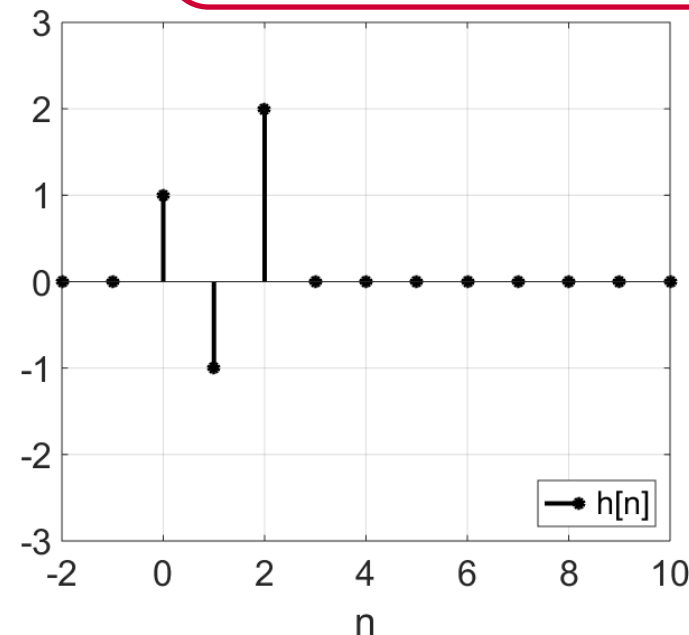
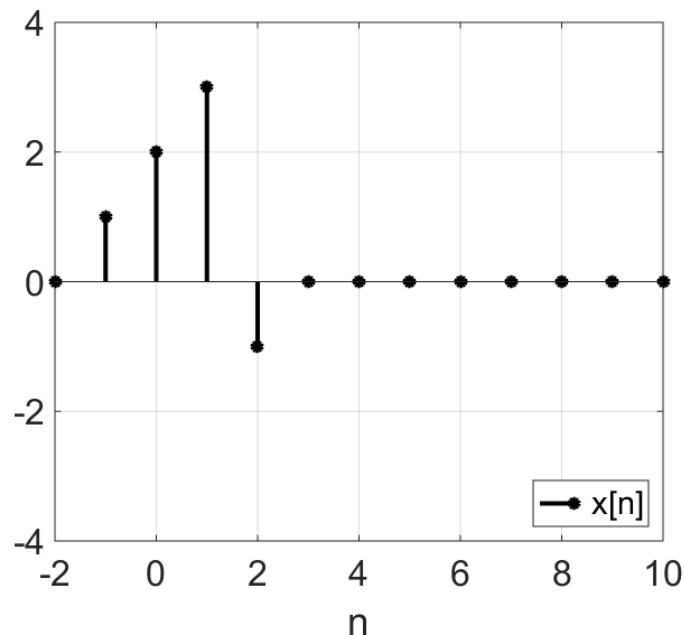
$$y[0] = 1 \cdot h[1] + 2 \cdot h[0] + 3 \cdot h[-1] - 1 \cdot h[-2] = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 1$$

$$y[1] = 1 \cdot h[2] + 2 \cdot h[1] + 3 \cdot h[0] - 1 \cdot h[-1] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 3$$

enzovoorts

Voorbeeld 2 convolutie (3/4)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k]$$



$$y[n] = h[0]x[n - 0] + h[1]x[n - 1] + h[2]x[n - 2]$$

$$y[n] = 1 \cdot x[n - 0] + (-1) \cdot x[n - 1] + 2 \cdot x[n - 2]$$

$$y[-1] = 1 \cdot x[-1] - 1 \cdot x[-2] + 2 \cdot x[-3] = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$y[0] = 1 \cdot x[0] - 1 \cdot x[-1] + 2 \cdot x[-2] = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

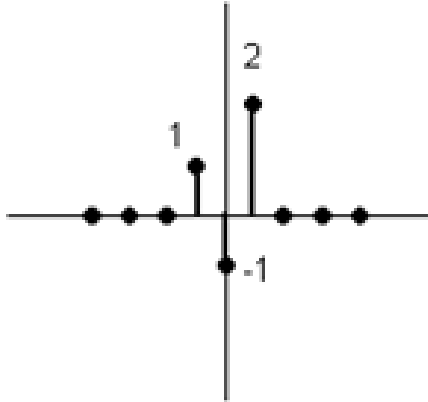
$$y[1] = 1 \cdot x[1] - 1 \cdot x[0] + 2 \cdot x[-1] = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 3$$

enzovoorts

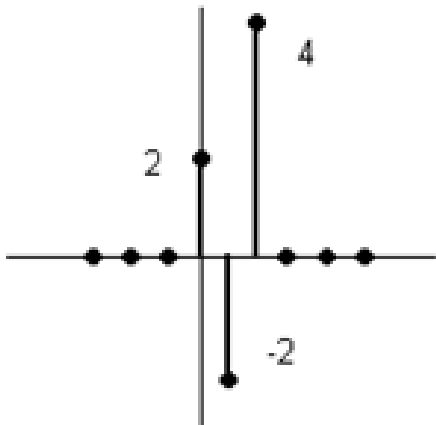
Voorbeeld 2 convolutie (4/4)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

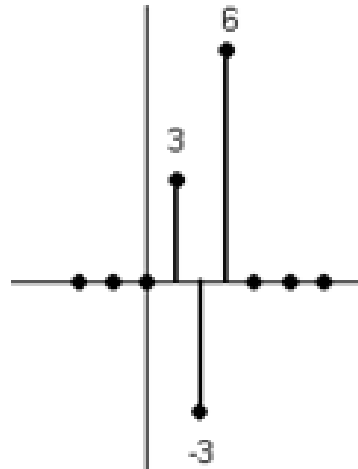
$$x[-1] \cdot h[n+1] = 1 \cdot h[n+1]$$



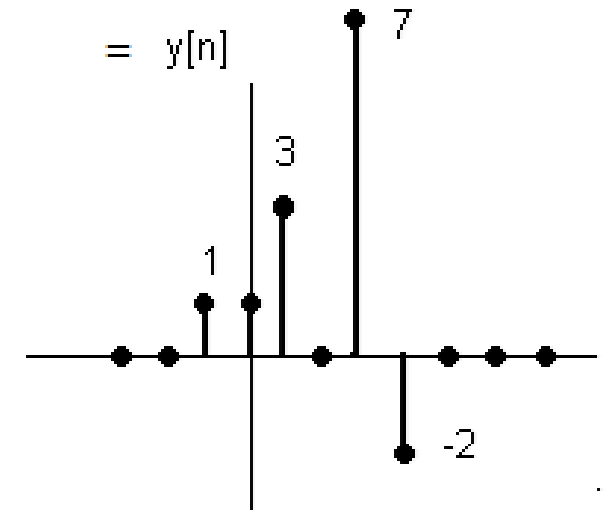
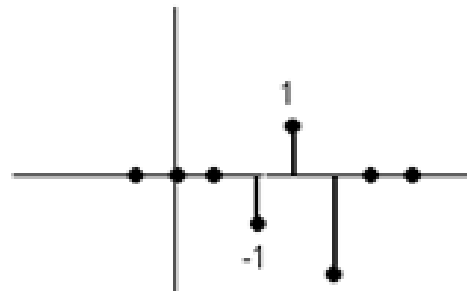
$$+ \quad x[0] \cdot h[n+0] = 2 \cdot h[n]$$



$$+ \quad x[1] \cdot h[n-1] = 3 \cdot h[n-1]$$



$$+ \quad x[2] \cdot h[n-2] = (-1) \cdot h[n-2]$$



Vorbereiding week 3

- [Huiswerk week 2 les 2](#)
- Opgaven: [2.10 a+b](#)
- Doornemen presentatie week 2
- Lezen (verdieping):
 - §2.4 Digitale convolutie
(11 pagina's)