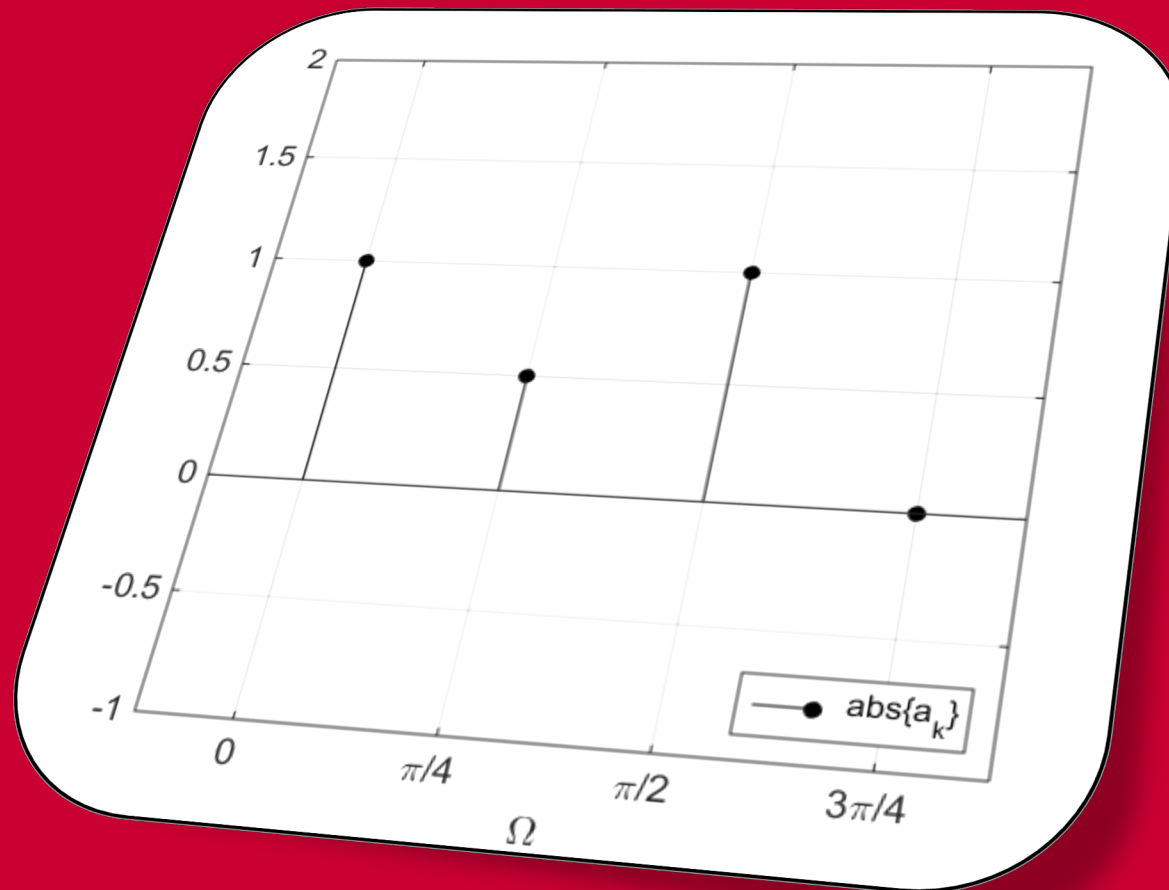




HOGESCHOOL
ROTTERDAM

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

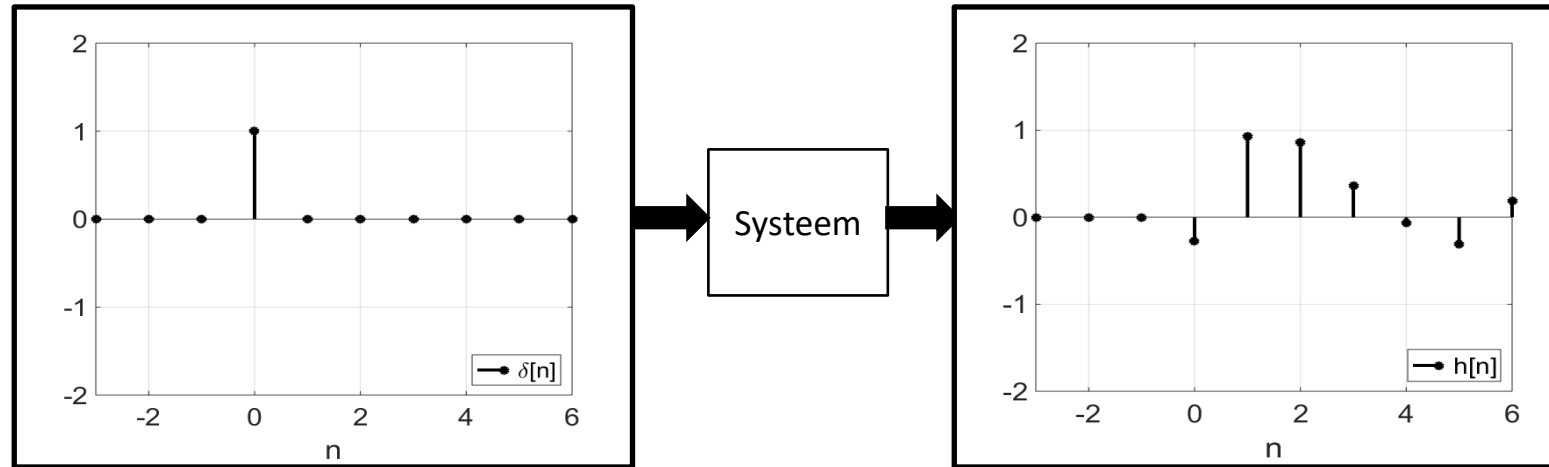


ELEDIS10

Digitale Systemen

Opleiding Elektrotechniek

Vorige week



- Impulsresponsie:

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

- Stapresponsie:

$$u[n] \rightarrow s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k]$$

- Algemene responsie:
convolutie

$$\begin{aligned} x[n] &\rightarrow y[n] = x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \end{aligned}$$

- Alternatief:
convolutie

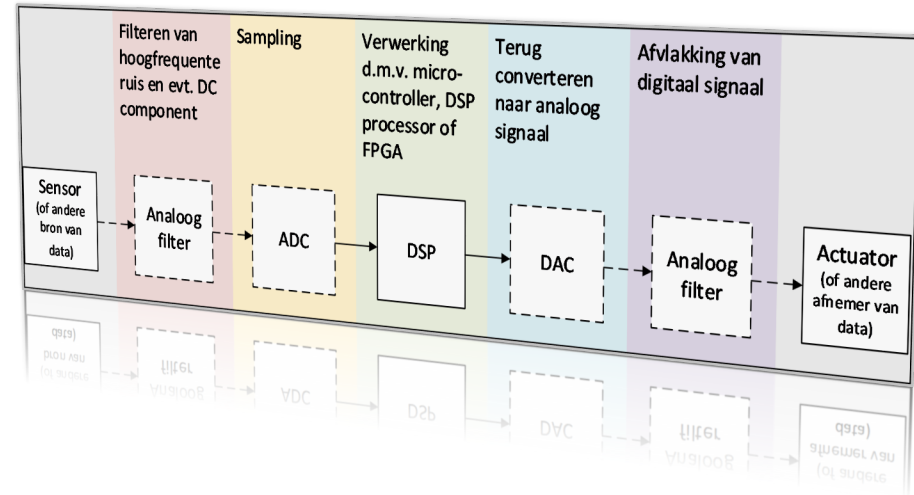
$$\begin{aligned} x[n] &\rightarrow y[n] = h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \end{aligned}$$

We gaan ervan uit dat het systeem causaal is.

Deze week

- Spectrum
- Discrete Fourier-reeks
- Fourier-transformatie

Frequentiedomein



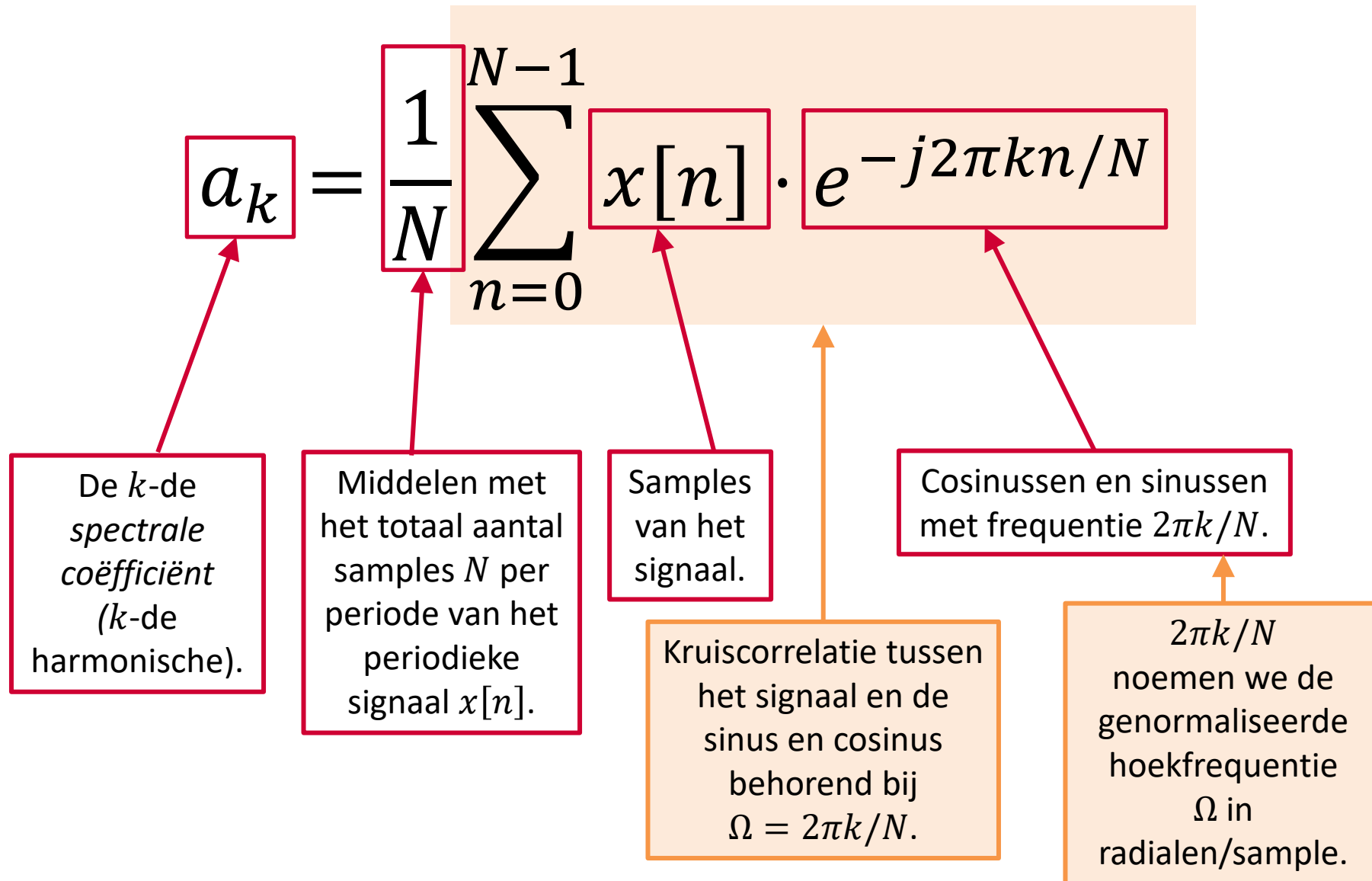
- Signalen komen binnen in ons systeem in het continue-tijdsdomein.
- Daarna kunnen wij door middel van sampling naar het discrete-tijdsdomein.
 - In dit domein geven wij samples weer d.m.v. gewogen en verschoven impuls functies.
- Van het discrete-tijdsdomein kunnen wij ook naar het discrete frequentiedomein. Dat is wat wij nu gaan doen.

Spectrum

- Het spectrum van een signaal laat zien hoeveel een sinus of cosinus van een bepaalde frequentie aanwezig is in het signaal.
- Als we de correlatie van het signaal en een sinus/cosinus van een bepaalde frequentie berekenen, weten we hoeveel van die frequentie in het signaal zit.
- Zo kunnen we dus het spectrum uitrekenen!
- Bij DSP gebruiken we bij **periodieke signalen** hiervoor een formule genaamd de **Discrete Fourier-reeks**:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

Discrete Fourier-reeks voor periodieke signalen (1/2)



Discrete Fourier-reeks voor periodieke signalen (2/2)

Euler:

$$\alpha \cdot e^{j\beta} = \alpha \cdot \cos(\beta) + \alpha \cdot j \cdot \sin(\beta)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x[n] \cdot \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \cdot x[n] \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$

- Dit wordt de **analysevergelijking** van de discrete Fourierreeks genoemd.
- a_k kan dus een **complex** getal opleveren.
- ‘De hoeveelheid **cosinus**’ is te zien in het **reële deel** van het getal.
- ‘De hoeveelheid **sinus**’ is te zien in het **imaginaire deel** van het getal.
- Als je $|a_k|$ uitzet tegen k , dan krijg je een amplitude-spectrum.

Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (1/7)

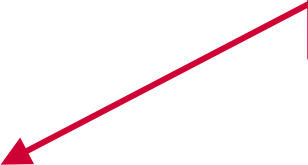
- Stel dat we een signaal hebben:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

We zien hier:

- een DC-component van 1;
- een sinus met amplitude 1 en 8 samples per periode van 2π (dus $\Omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ in radialen/sample);
- een cosinus met amplitude 2 en 4 samples/periode ($\Omega = \frac{\pi}{2}$).

Waarom 8?



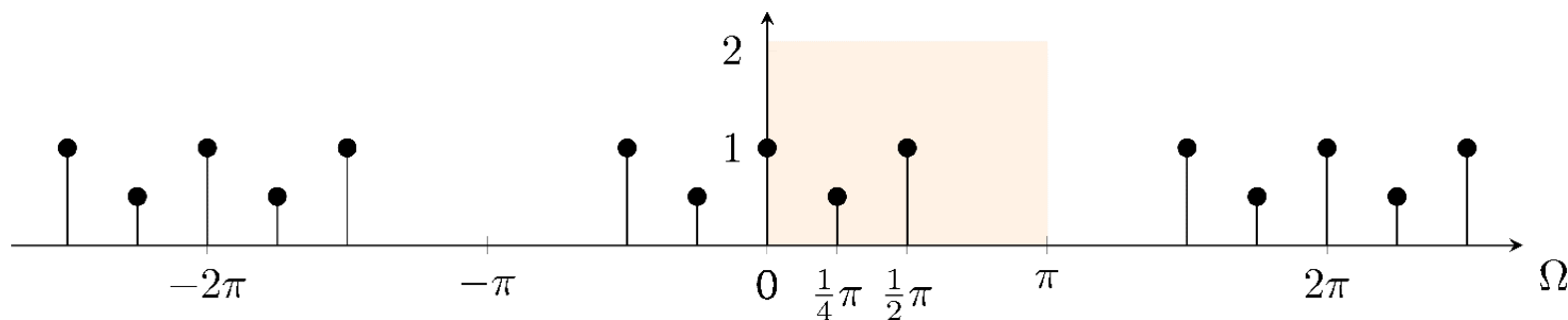
Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (2/7)

- Stel dat we een signaal hebben:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Schrijf $x[n]$ op door middel van e -machten.

Dit levert het volgende spectrum op (zie week 1):



Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (3/7)

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Samples maken:

- Aantal samples per periode van $x[n]$: $N = 8$

n	$\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$	$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$	$x[n]$
0	0	2	3
1	0,707	0	1,707
2	1	-2	0
3	0,707	0	1,707
4	0	2	3
5	-0,707	0	0,293
6	-1	-2	-2
7	-0,707	0	0,293

Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (4/7)

n	$x[n]$	e^0
0	3	1
1	1,707	1
2	0	1
3	1,707	1
4	3	1
5	0,293	1
6	-2	1
7	0,293	1

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

Invullen voor $k = 0$ geeft:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^0 \\ &= \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot 1 + 1,707 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1,707 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0,293 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 0,293 \cdot 1) \\ a_0 &= \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \end{aligned}$$

We bekijken eigenlijk
hoeveel DC er in het signaal
zit, immers $e^0 = 1$.

Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (5/7)

n	$x[n]$	$e^{-j\pi n/4}$	$x[n] \cdot e^{-j\pi n/4}$
0	3	1	3
1	1,707	$0,707 - 0,707j$	$1,207 - 1,207j$
2	0	$-j$	0
3	1,707	$-0,707 - 0,707j$	$-1,207 - 1,207j$
4	3	-1	-3
5	0,293	$-0,707 + 0,707j$	$-0,207 + 0,207j$
6	-2	j	$-2j$
7	0,293	$0,707 + 0,707j$	$0,207 + 0,207j$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

We bekijken eigenlijk hoeveel sinus/cosinus met $\Omega = 2\pi \frac{k}{N} = \frac{1}{4}\pi$ in het signaal zit.

Invullen voor $k = 1$ geeft:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x[n] \cdot e^{-j\pi n/4} \\ &= \frac{1}{8} \cdot (3 + 1,207 - 1,207j - 1,207 - 1,207j - 3 - 0,207 + 0,207j - 2j + 0,207 + 0,207j) \\ &= \frac{1}{8} \cdot (0 - 4j) = -\frac{1}{2}j \end{aligned}$$

Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (6/7)

- Als je zo verder gaat vind je:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}j$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = 1$$

$$a_7 = \frac{1}{2}j$$

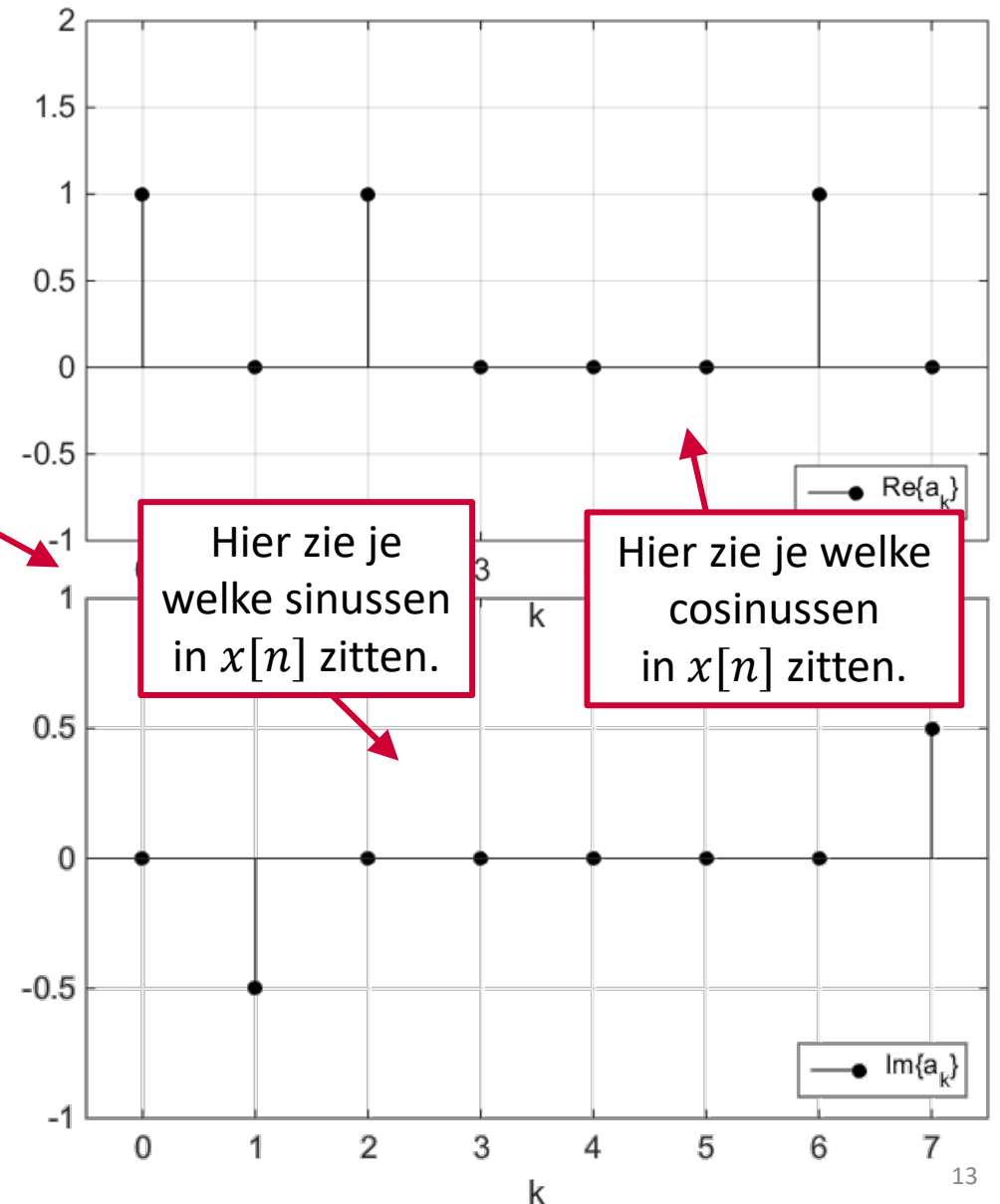
f geeft de frequentie
weer die bij a_k hoort:

$$f = k \cdot \frac{f_s}{N}$$

De bijbehorende
genormeerde
hoekfrequenties is:

$$\Omega = k \cdot \frac{2\pi}{N}$$

Dit zou je uit kunnen zetten in twee grafieken:

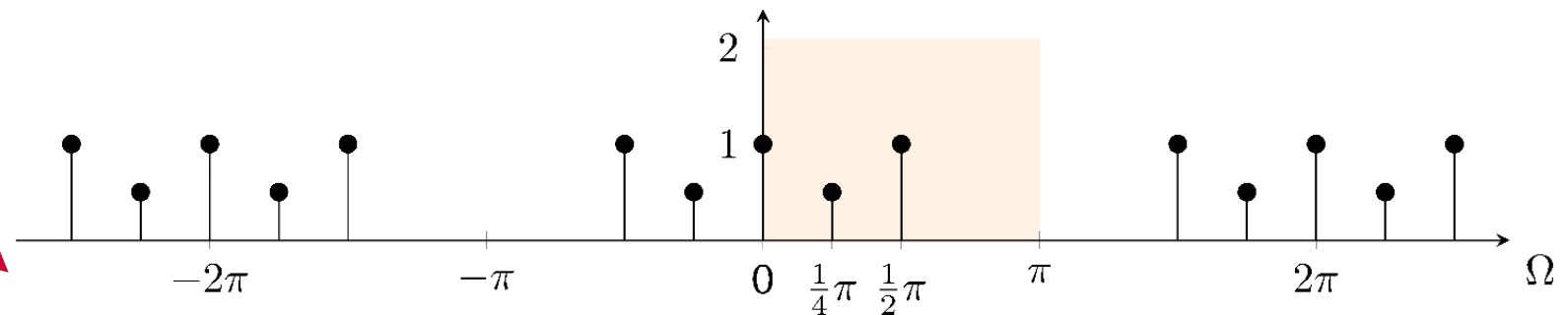


Voorbeeld 1 Discrete Fourier-reeks (7/7)

- Het amplitude-spectrum kunnen we nu vinden door de modulus te nemen van iedere $a_k = a + jb \rightarrow |a_k| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Dit komt overeen met het al bekende spectrum (sheet 9):

De genormeerde hoekfrequentie
die bij a_k hoort:

$$\Omega = k \cdot \frac{2\pi}{N}$$



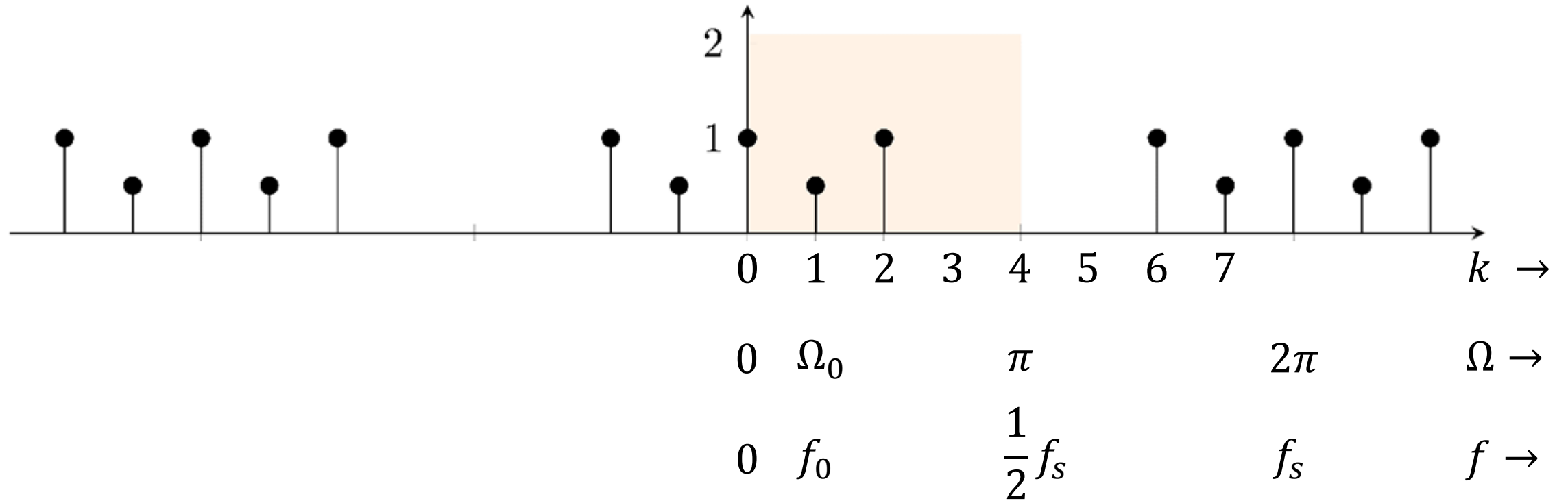
Genormeerde hoekfrequentie Ω

- We beschouwen een periodiek discreet signaal met N samples per periode.
- De periodetijd van dit signaal is T_0 , de (grond)frequentie is $f_0 = 1/T_0$ (eerste harmonische).
- De hoekfrequentie van de eerste harmonische is $\omega_0 = 2\pi f_0$
- De sample-frequentie is f_s , de sampletijd is $T_s = 1/f_s$.
- Er zijn dus $T_0/T_s = f_s/f_0$ samples per periode, dus $N = f_s/f_0$.
- De genormeerde hoekfrequentie Ω is gedefinieerd als $\Omega = \frac{2\pi k}{N} \rightarrow \Omega = 2\pi \cdot k \cdot \frac{f_0}{f_s} = \omega_0 \cdot k \cdot T_s$.
- Voor de **gelijkspanningscomponent** ($k = 0$) geldt: $\Omega = 0$
- Voor de **eerste harmonische** ($k = 1$) geldt: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \omega_0 \cdot T_s = 2\pi \cdot \frac{f_0}{f_s}$
- Voor de **tweede harmonische** ($k = 2$) geldt: $\Omega = \frac{4\pi}{N} = \omega_0 \cdot 2T_s = 4\pi \cdot \frac{f_0}{f_s}$
- ...
- Voor de **laatste harmonische** ($k = N$) geldt: $\Omega = 2\pi = \omega_0 \cdot N \cdot T_s = 2\pi \cdot N \cdot \frac{f_0}{f_s}$

Verband tussen k , $\Omega = 2\pi k/N$ en $f = f_s k/N$

k	Ω	f	opmerking
0	0	0	gelijkspanningscomponent
1	$\frac{2\pi}{N} = \Omega_0$	$\frac{f_s}{N} = f_0$	eerste harmonische
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\frac{1}{2}N$	π	$\frac{1}{2}f_s$	Nyquist-frequentie
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
N	2π	f_s	samplefrequentie

Verband tussen k , Ω en f



Symmetrie in het spectrum (bij reële $x[n]$)

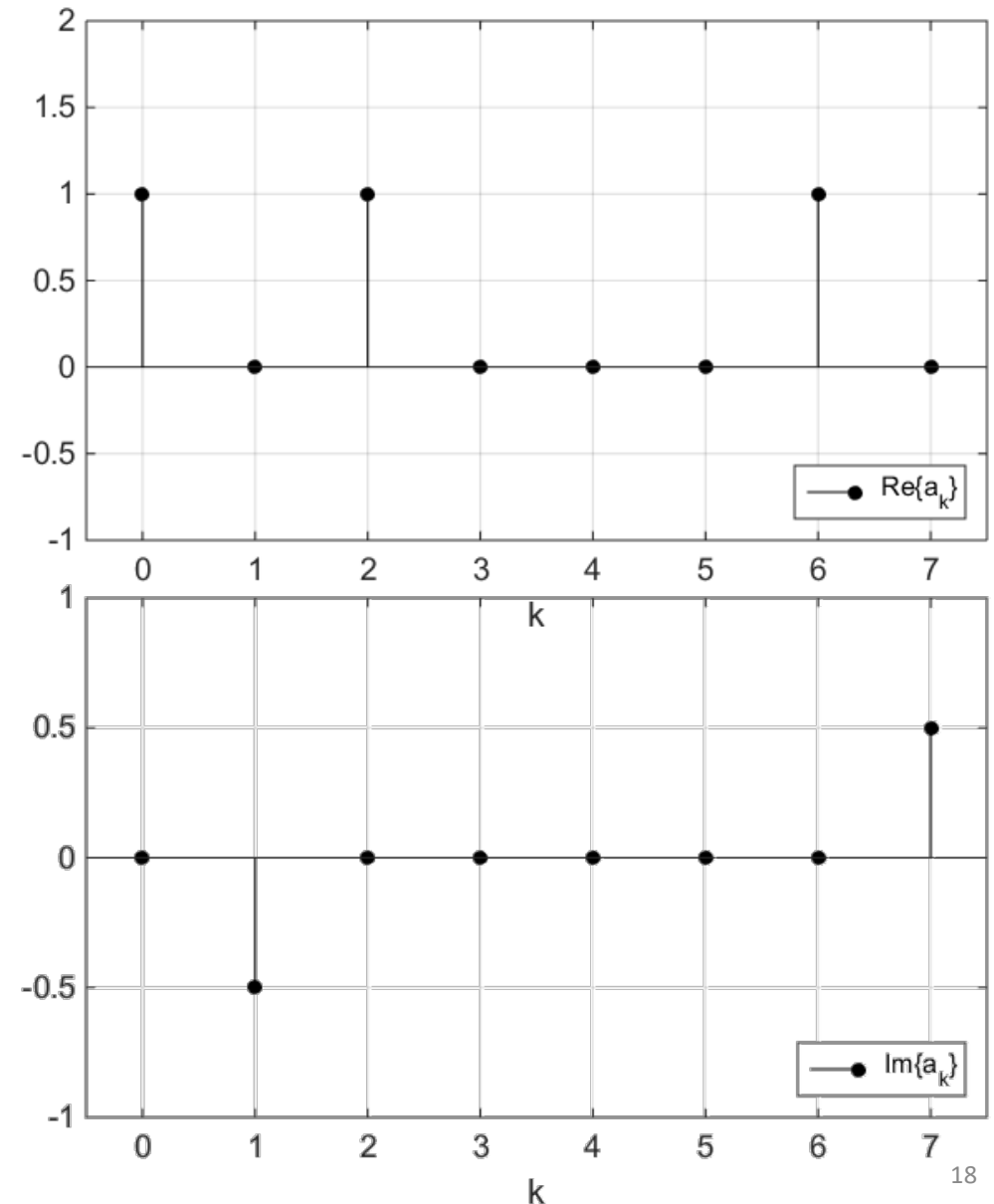
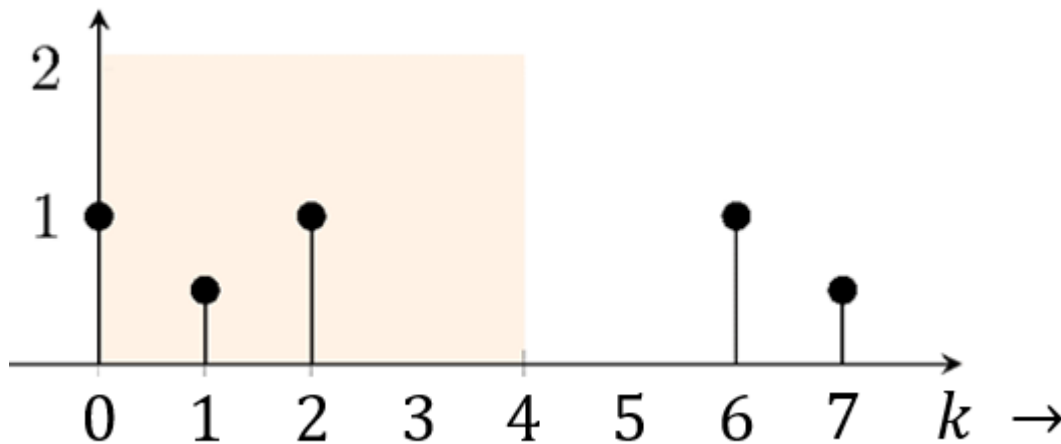
Er geldt: $a_{N-k} = \overline{a_k}$

$\overline{a_k}$ is [complex geconjugeerde](#) van a_k

Als $a_k = a + jb$,

dan geldt $a_{N-k} = a - jb$.

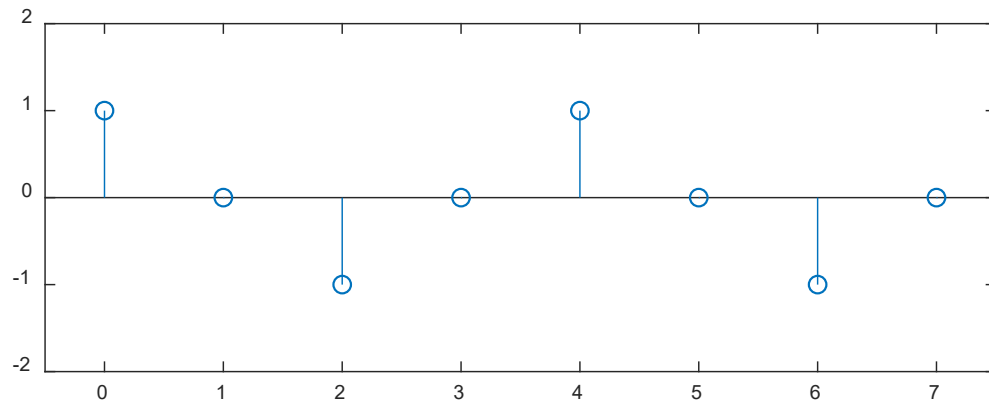
Dus: $|a_{N-k}| = |a_k|$



Voorbeeld 2 Discrete Fourier-reeks

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

Gegeven het volgende *periodieke* signaal:



We kunnen de coëfficiënten van a_k dan bepalen door de analysevergelijking in te vullen en uit te rekenen.

Hieruit krijgen wij dan een spectrum in het frequentiedomein.

n	$x[n]$	e^0	$e^{-j\pi n/4}$	$e^{-j\pi n/2}$	...
0	1	1	1	1	...
1	0	x	X	x	...
2	-1	1	-j	-1	...
3	0	x	x	x	...
4	1	1	-1	1	...
5	0	x	x	x	...
6	-1	1	j	-1	...
7	0	x	x	x	...

Oefening Discrete Fourier-reeks

Bepaal de spectrale coëfficiënten a_k en teken het spectrum ($|a_k|$ t.o.v. k) van het volgende **periodieke** signaal $x[n]$:

Geef vervolgens de syntheseformule voor dit signaal in termen van sinussen en cosinussen.

n	$x[n]$
0	2
1	1
2	0
3	1
4	2
5	1
6	0
7	1

Synthesevergelijking

Om vanuit het spectrum terug te gaan naar het gesampled signaal gebruiken we de **synthesevergelijking** van de discrete Fourier-reeks:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

Voorbeeld 3: Synthesevergelijking

Gegeven periodiek spectrum met $N = 4$: $a_0 = -1$, $a_1 = 2 + j$, $a_2 = -11$ en $a_3 = 2 - j$.
Bepaal $x[n]$ voor $n = 0$ tot N .

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

$$x[0] = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot e^{j2\pi k0/4} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -1 + 2 + j - 11 + 2 - j = -8$$

$$x[1] = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot e^{j\pi k1/2} = a_0 + a_1 e^{j\frac{1}{2}\pi} + a_2 e^{j\pi} + a_3 e^{j\frac{3}{2}\pi} = -1 + (2 + j) \cdot j + 11 + (2 - j) \cdot -j = 8$$

$$x[2] = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot e^{j\pi k} = a_0 + a_1 e^{j\pi} + a_2 e^{j2\pi} + a_3 e^{j3\pi} = -1 - 2 - j - 11 - 2 + j = -16$$

$$x[3] = \sum_{k=0}^3 a_k \cdot e^{j\pi k3/2} = a_0 + a_1 e^{j\frac{3}{2}\pi} + a_2 e^{j3\pi} + a_3 e^{j\frac{9}{2}\pi} = -1 + (2 + j) \cdot -j + 11 + (2 - j) \cdot j = 12$$

Lineariteit

Stel we hebben twee periodieke signalen met periode N : $x_1[n] \leftrightarrow a_{k_1}$ en $x_2[n] \leftrightarrow a_{k_2}$, d.w.z.:

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_{k_1} \cdot e^{j2\pi nk/N}, \quad x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_{k_2} \cdot e^{j2\pi nk/N},$$

dan:

$$x_1[n] + x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k_1} + a_{k_2}) \cdot e^{j2\pi nk/N}, \quad c \cdot x_1[n] = \sum_{k=0}^{N-1} (c \cdot a_{k_1}) \cdot e^{j2\pi nk/N}$$

Dus we hebben lineariteit:

$$x_1[n] + x_2[n] \leftrightarrow a_{k_1} + a_{k_2}, \quad c \cdot x_1[n] \leftrightarrow c \cdot a_{k_1}$$

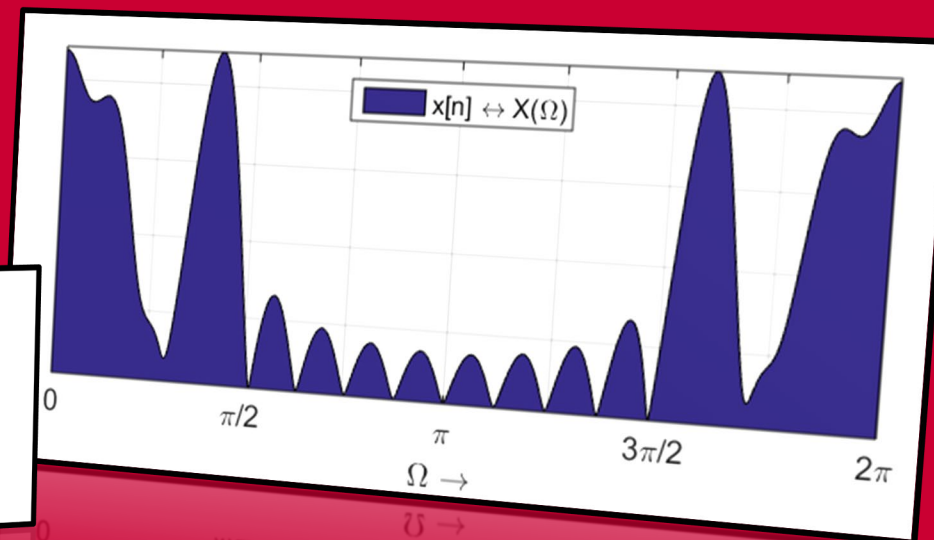
Vorbereiding les 2

- [Huiswerk week 3 les 1](#)
- Opgave: [3.1](#)
- Doornemen presentatie week 3
- Lezen (verdieping):
 - §3.1 Analyse in het frequentiedomein
 - §3.2 De discrete Fourier-reeks
 - (16 pagina's)
- Extra verdieping:
 - Opgaven [3.2 \(met de hand of met een programma\)](#), [3.5](#)



HOGESCHOOL
ROTTERDAM

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

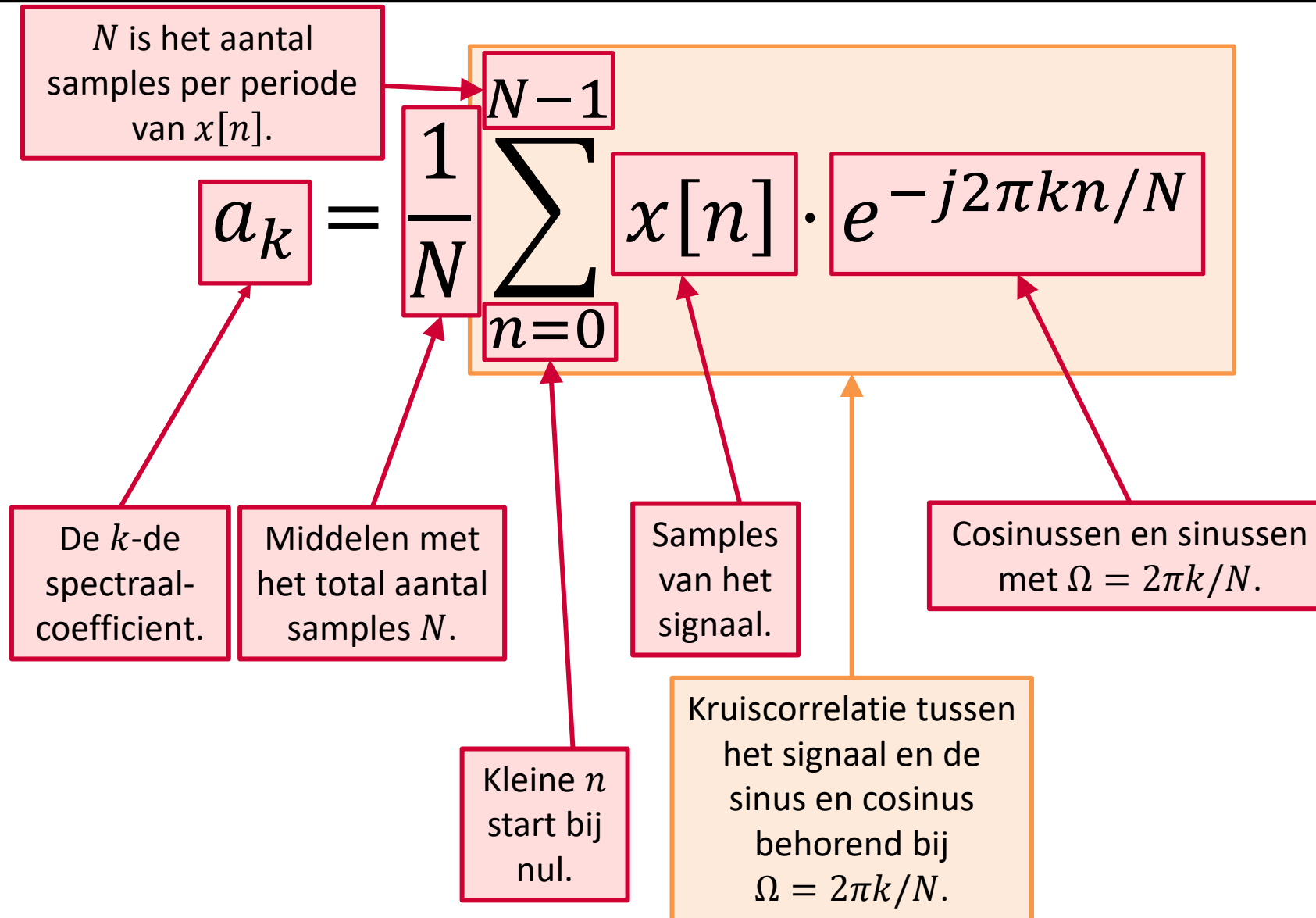


ELEDIS10

Digitale Systemen

Opleiding Elektrotechniek

Vorige Les: Discrete Fourier-reeks voor periodieke signalen



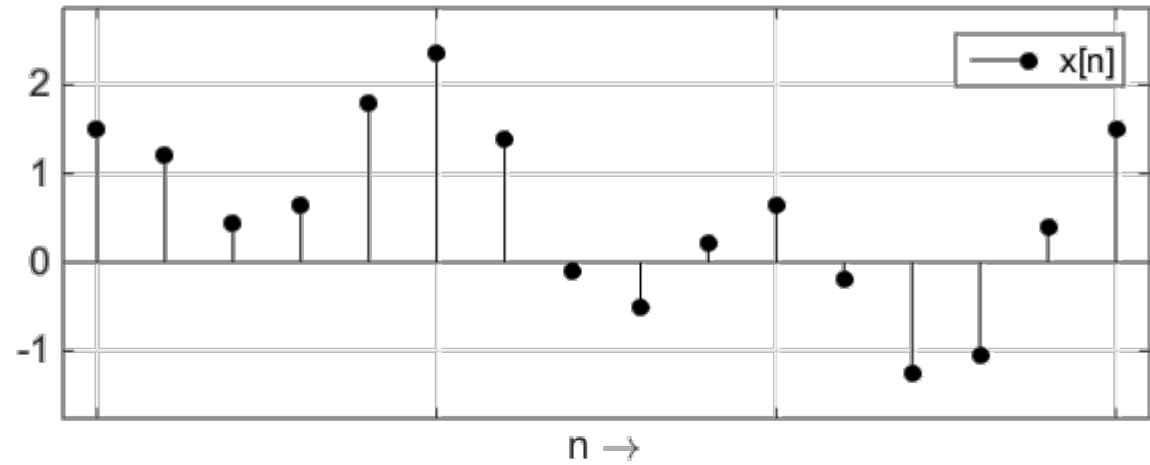
Overzicht deze les

Discrete Fourier-transformaties (niet periodieke signalen)

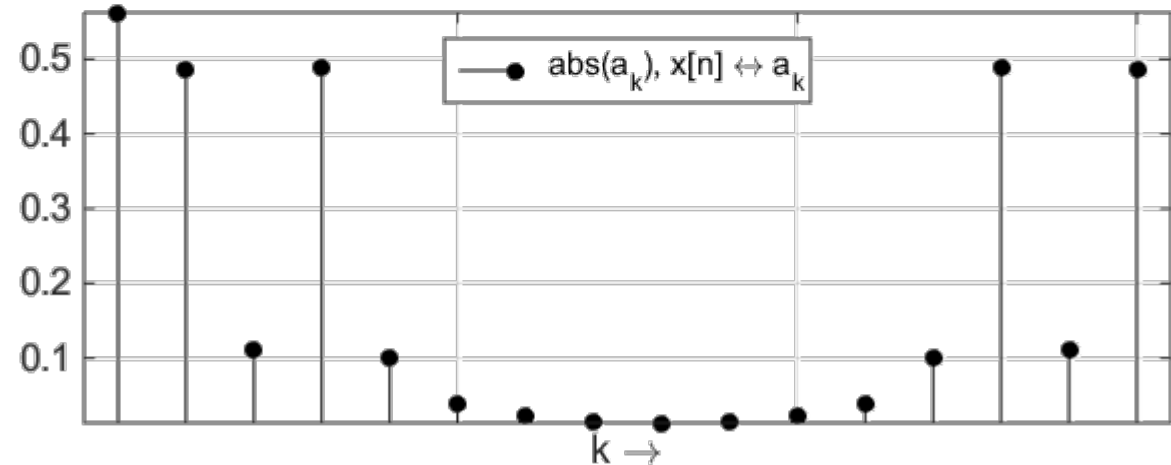
- Inverse
- Lineariteit
- Tijdsverschuiving
- Convolutie
- Overdrachtsfuncties

$$N = 16$$

Stel we hebben een
niet-periodiek
signaal:



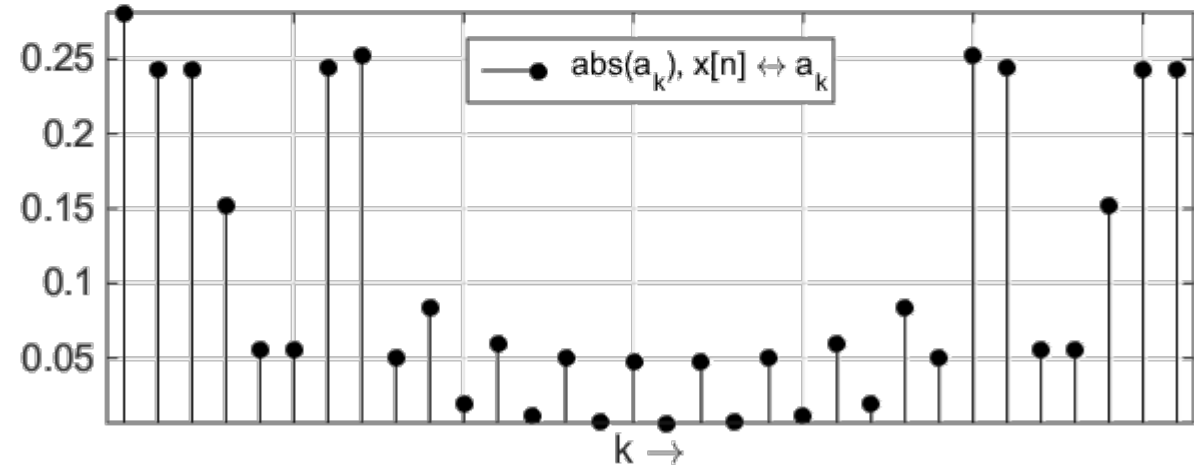
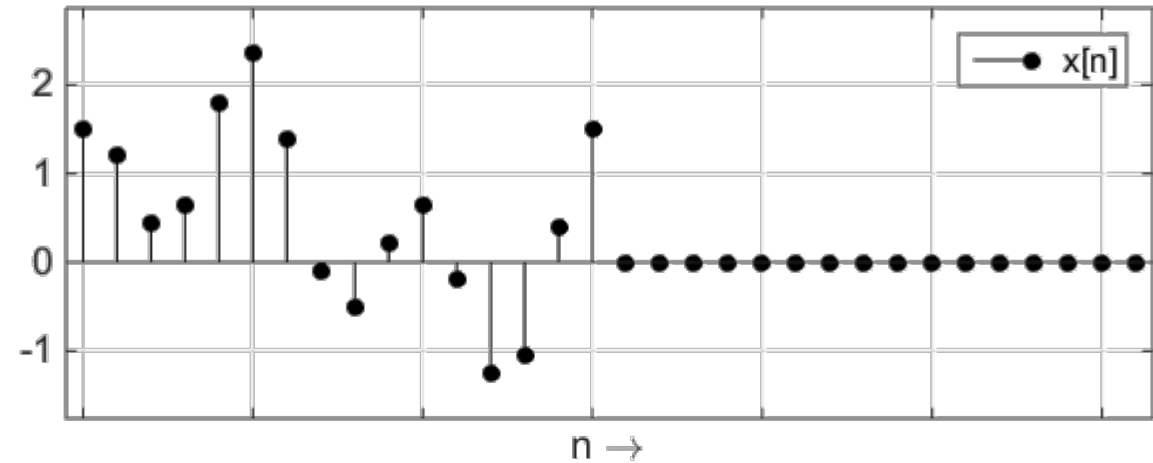
Spectrum:



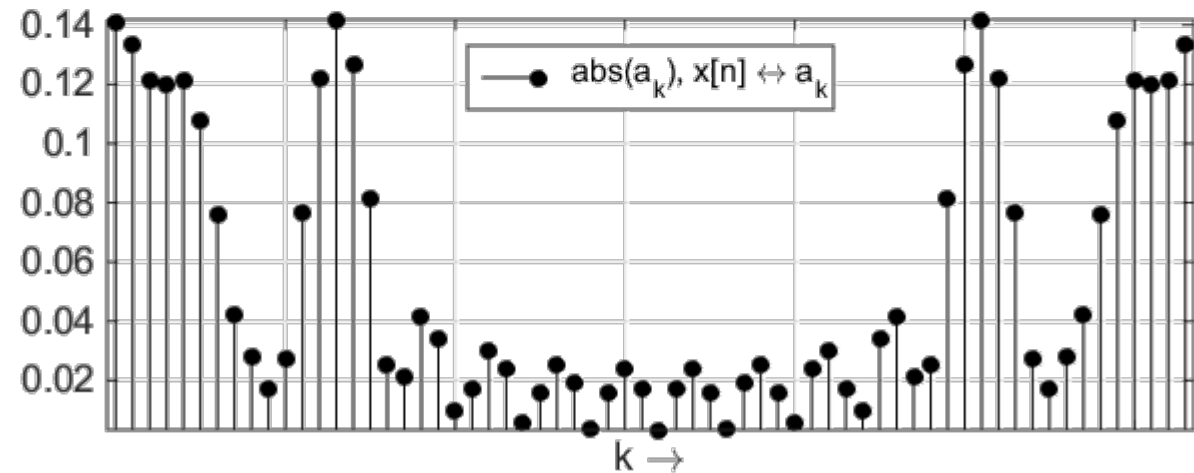
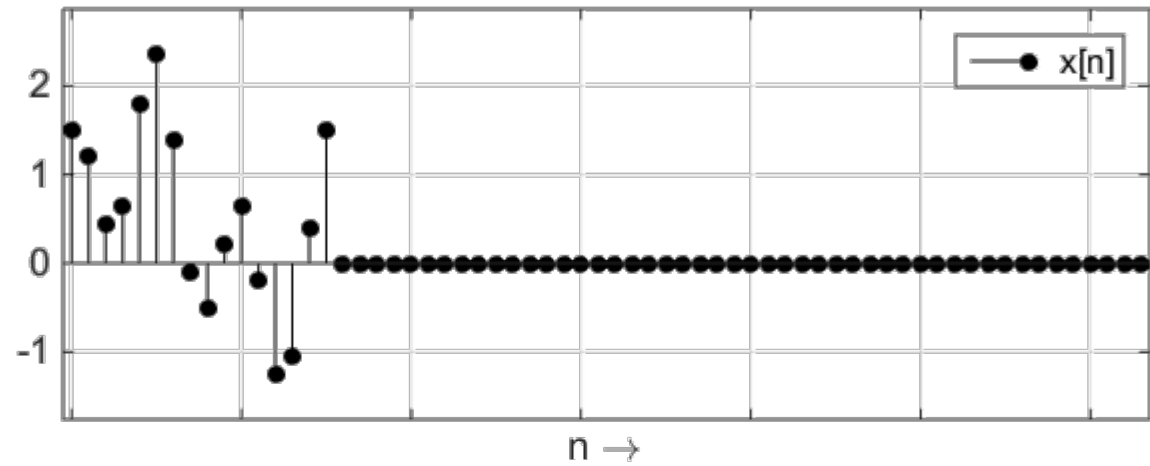
$N = 32$

- Stel we maken N steeds groter.
- We vullen $x[n]$ aan met nullen.
- De resolutie van het spectrum wordt beter!
- Voor de afstand tussen van de bijbehorende frequenties van een a_k en a_{k+1} in het spectrum geldt namelijk:

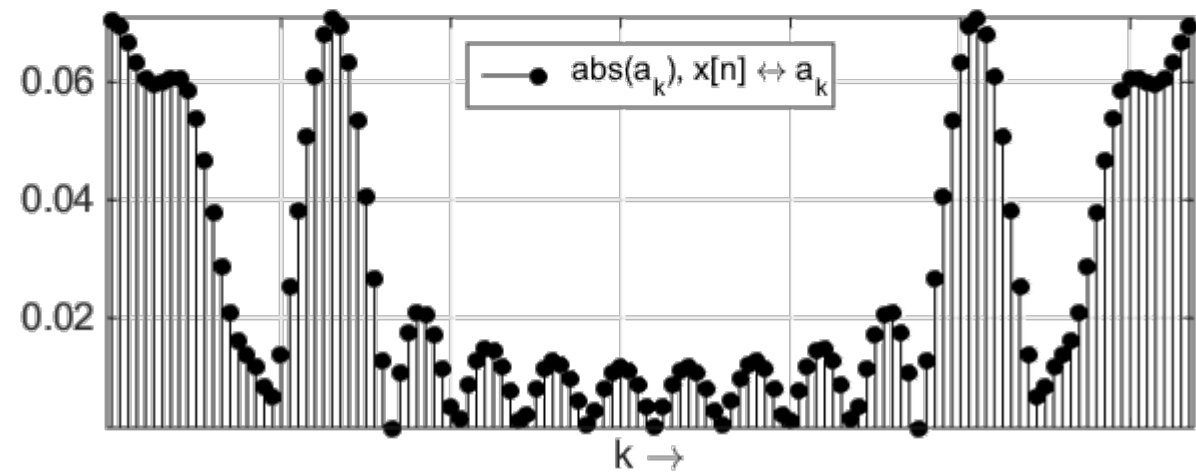
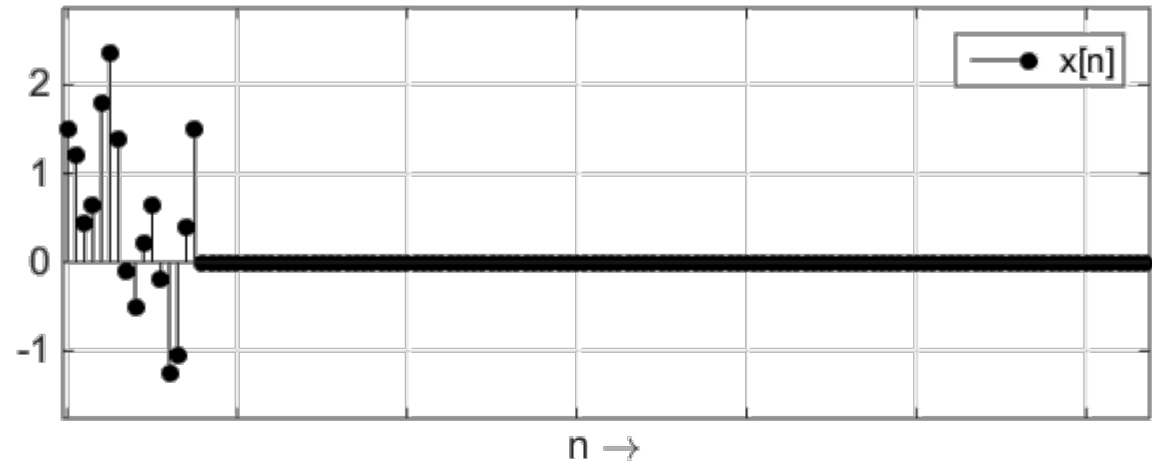
$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$$



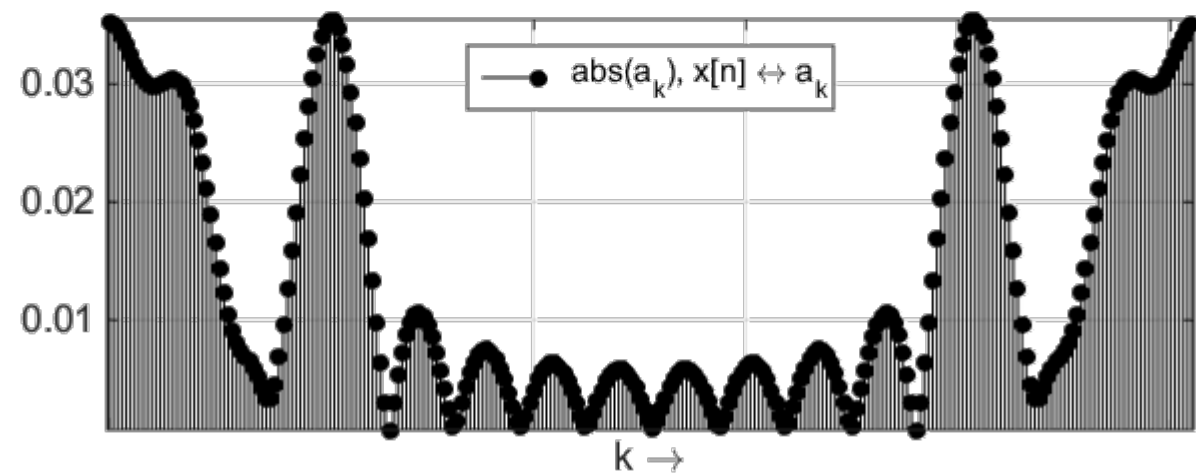
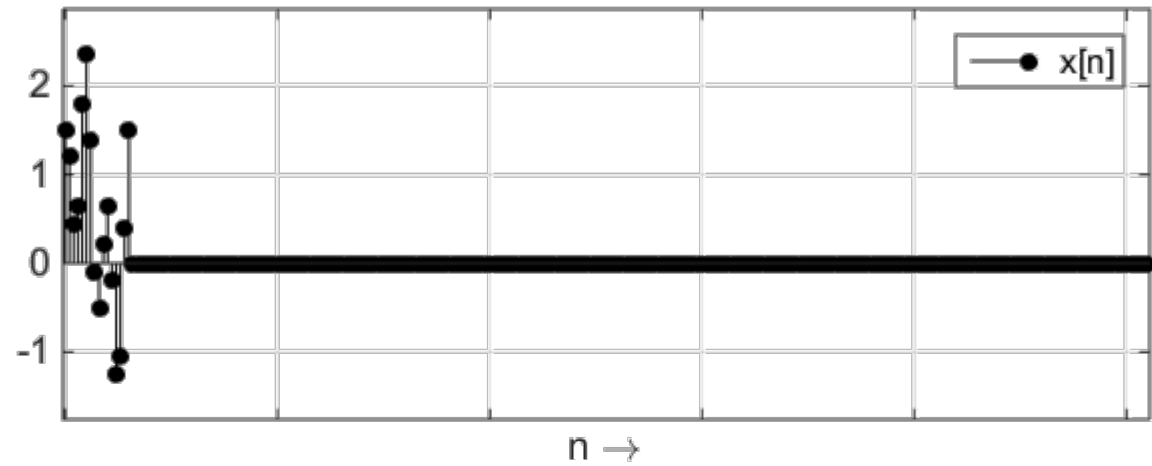
$$N = 64$$



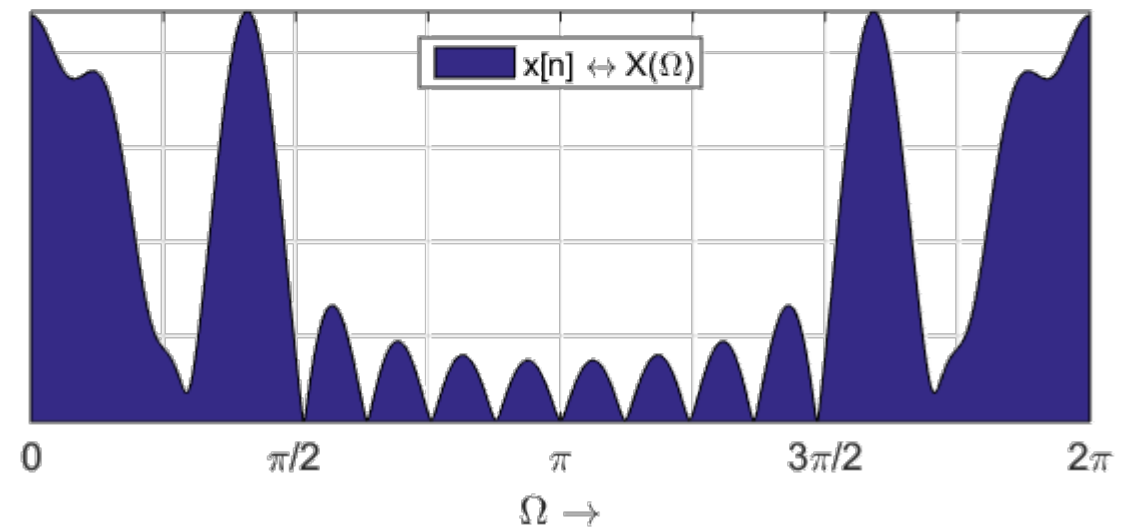
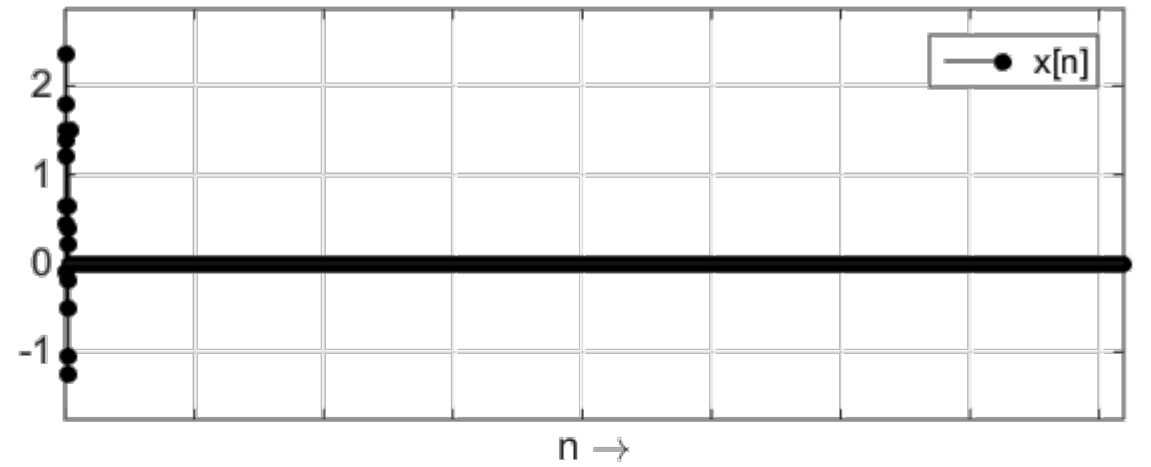
$$N = 128$$



$$N = 256$$

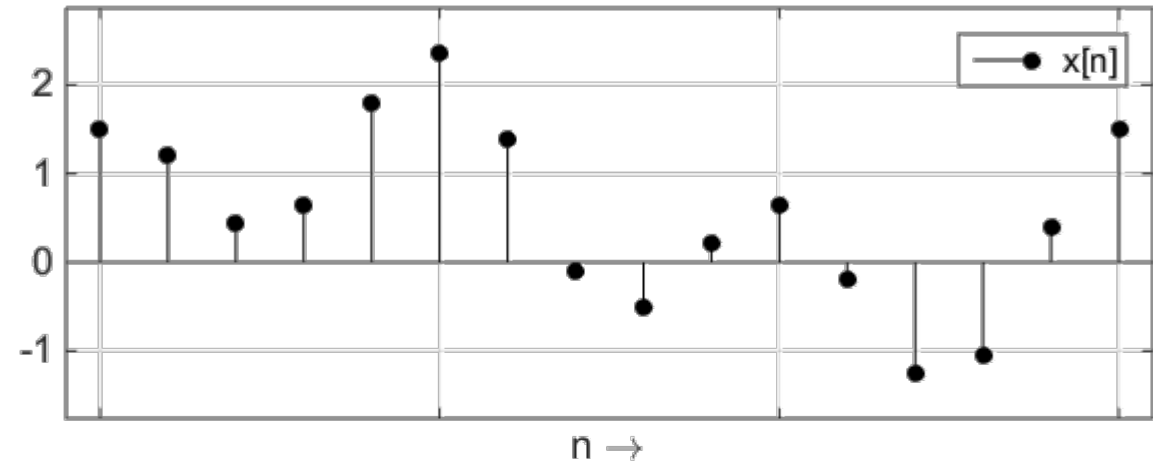


$$N \rightarrow \infty$$

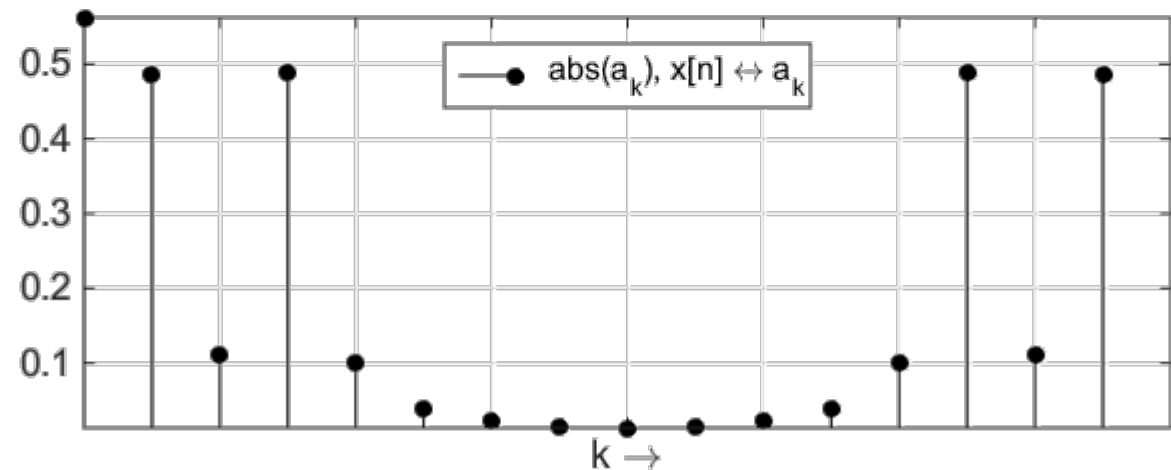


$$N = 16$$

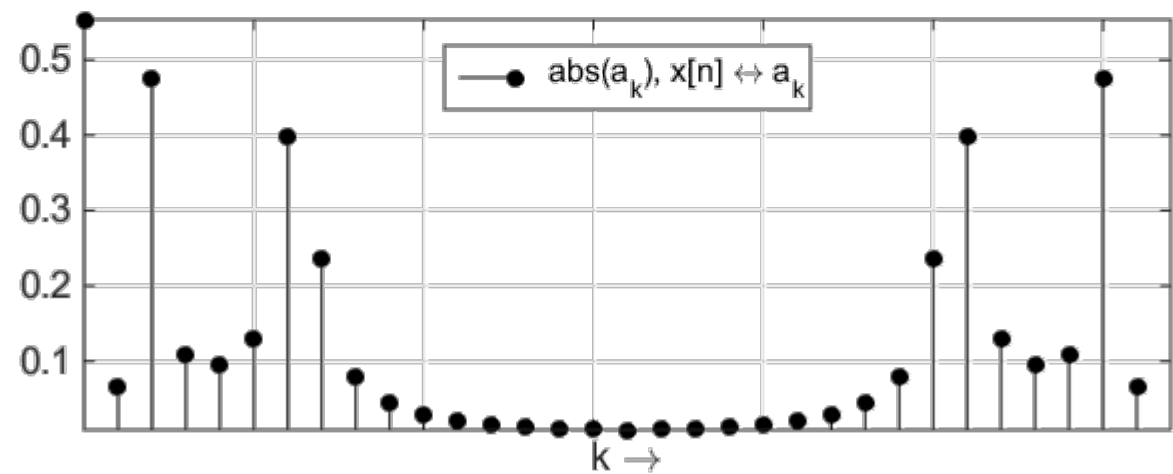
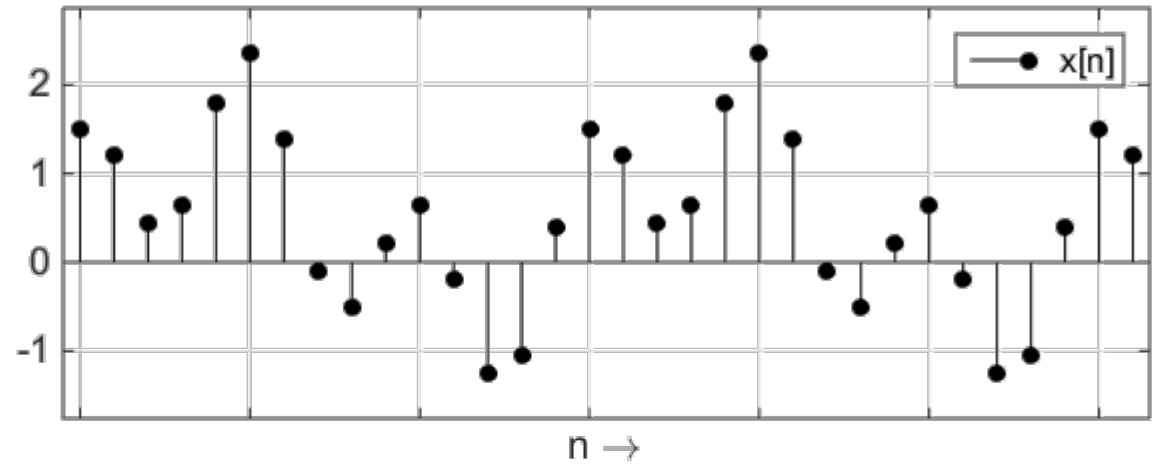
Stel dat het
signaal *wel*
periodiek is
(met $N=15$):



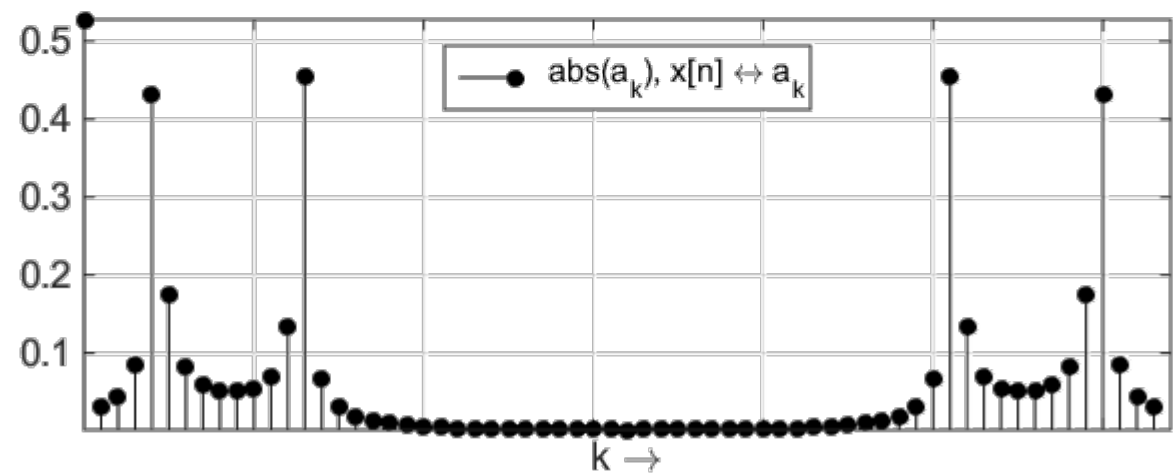
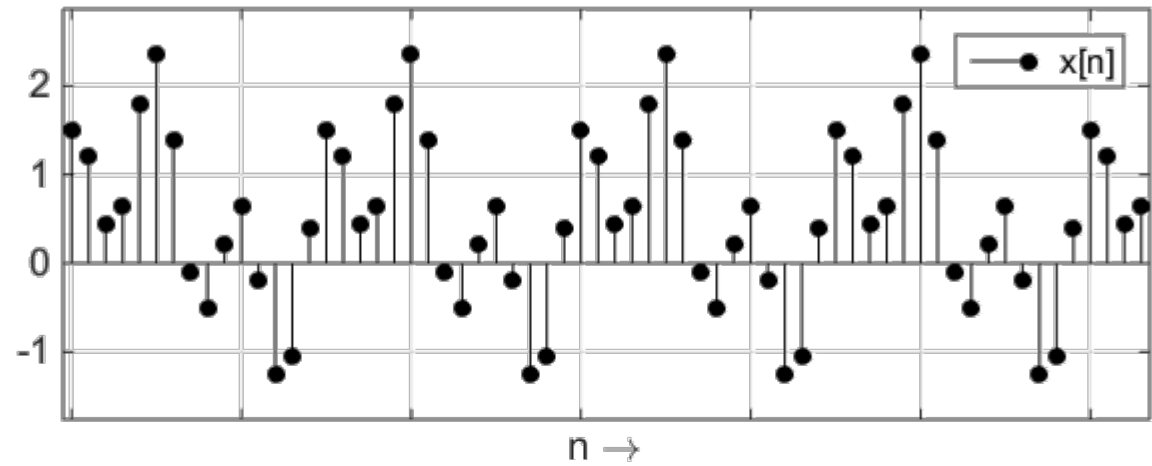
Spectrum:



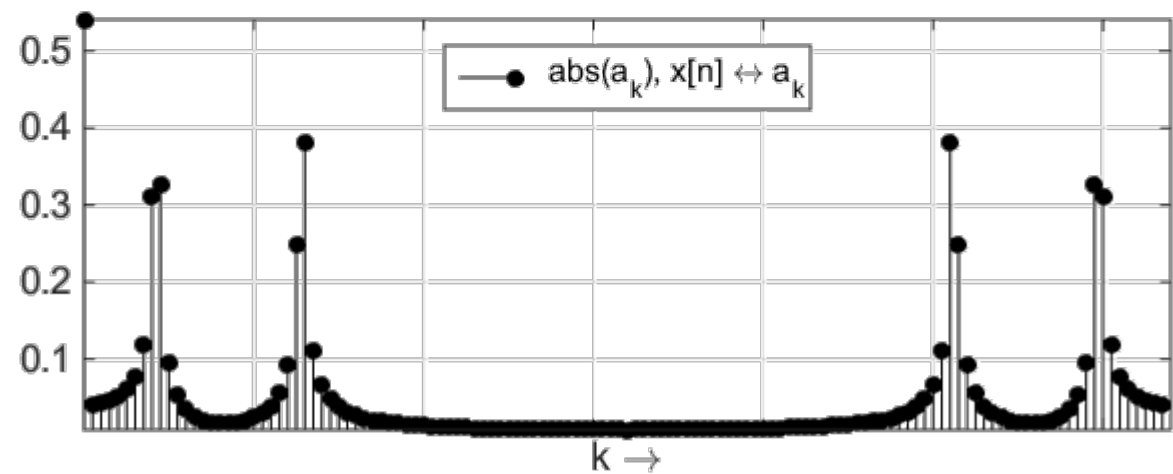
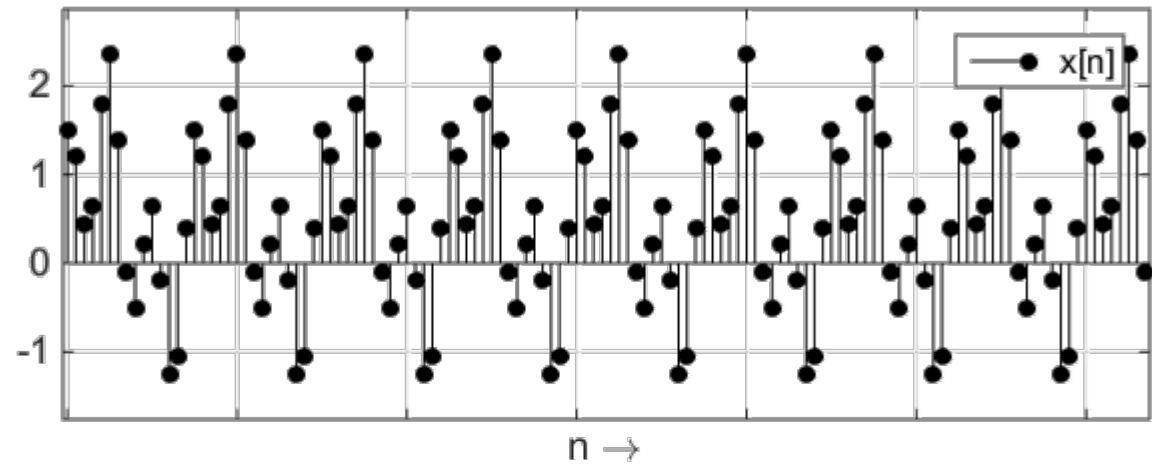
$$N = 32$$



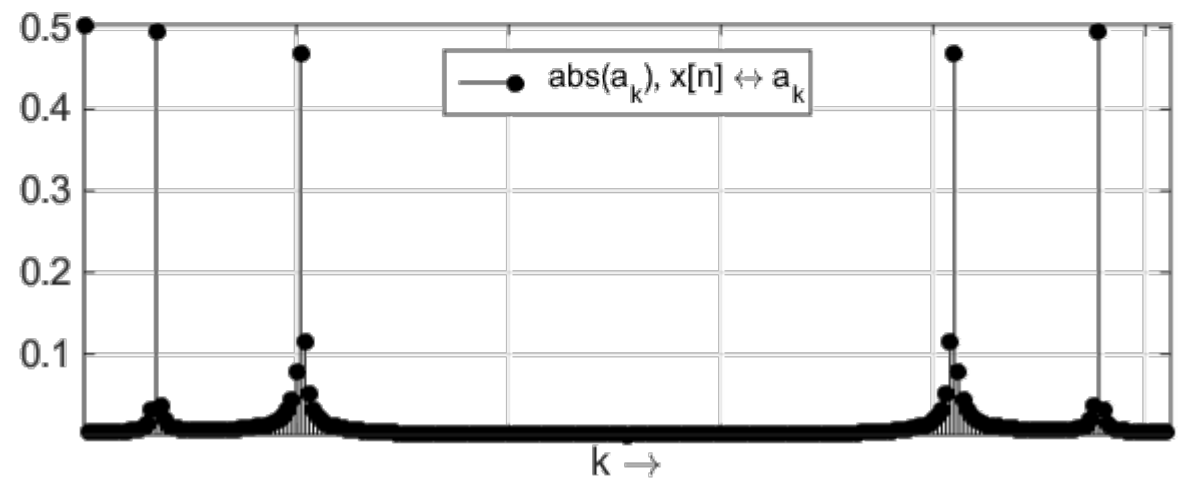
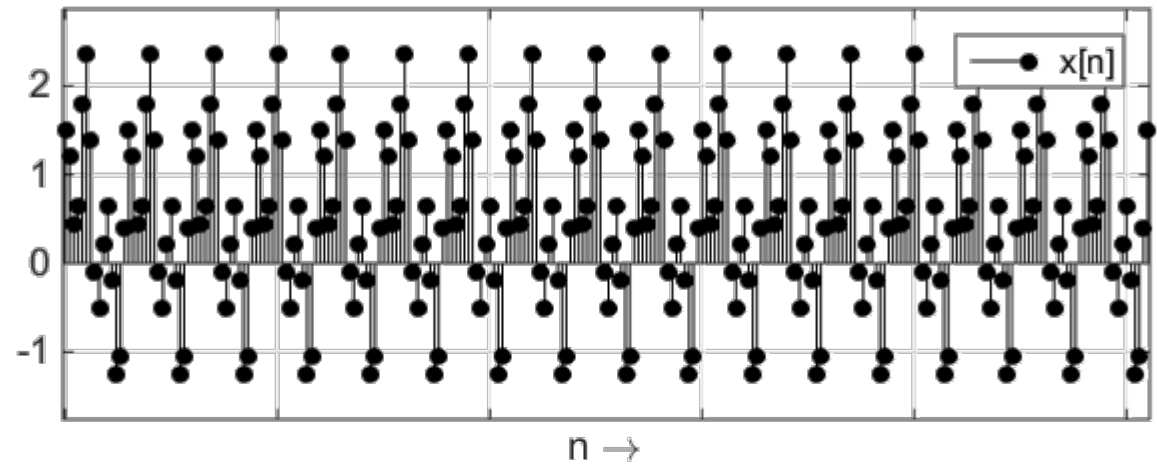
$$N = 64$$



$$N = 128$$



$$N = 256$$

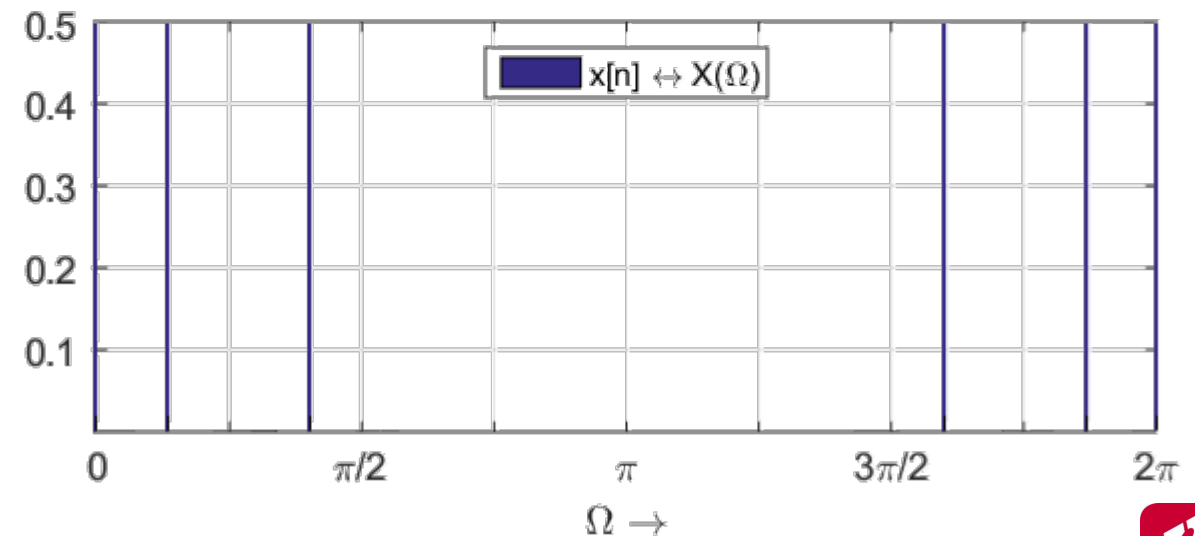
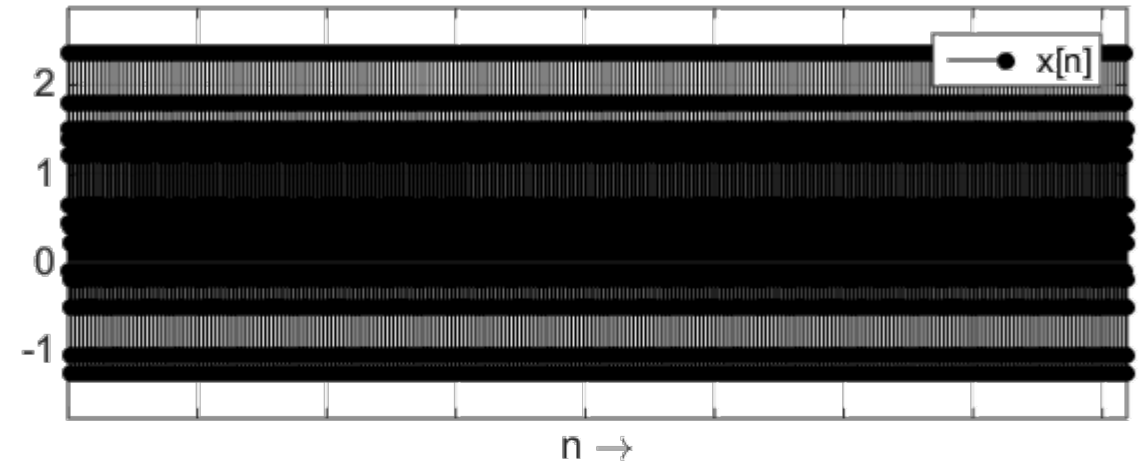


$$N \rightarrow \infty$$

Hoe meer samples we hebben van het signaal, hoe nauwkeuriger het spectrum.

Oorspronkelijk was dit signaal:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{15}n\right) + 1/2$$



Discrete-Time Fourier Transform

- Als we (doen alsof we) oneindig veel samples hebben, dan wordt het spectrum continu.
- De formule van de Discrete Fourier-reeks gaat over in de zogenaamde **Discrete-Tijd Fourier-transformatie** (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT).

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N} \xRightarrow{N \rightarrow \infty} X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

- En de inverse DTFT; de IDTFT:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{j2\pi kn/N} \xRightarrow{N \rightarrow \infty} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

Integreren over 2π (het spectrum is periodiek over 2π). Dus b.v. integreren van 0 tot 2π of van $-\pi$ tot π

Zie [formuleblad](#)

Lineariteit

Stel we hebben twee signalen $x_1[n]$ en $x_2[n]$:

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega) \cdot d\Omega \quad , \quad x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_2(\Omega) \cdot d\Omega$$

dan:

$$x_1[n] + x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} (X_1(\Omega) + X_2(\Omega)) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega \quad ;$$

$$c \cdot x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} (c \cdot X_1(\Omega)) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

Dus we hebben lineariteit:

$$x_1[n] + x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega) + X_2(\Omega) \quad , \quad c \cdot x_1[n] \leftrightarrow c \cdot X_1(\Omega)$$

Zie [formuleblad](#)

Impulsspectrum

Het spectrum $\Delta(\Omega)$ van het signaal $\delta[n]$.

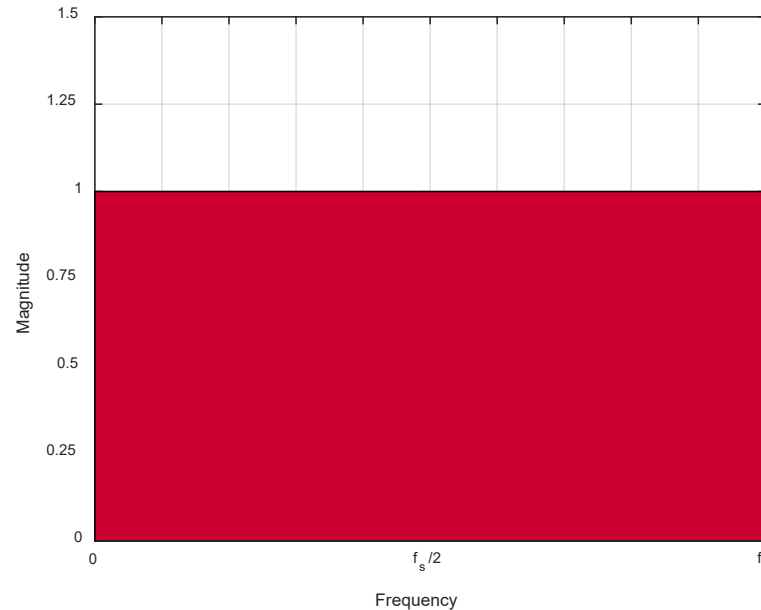
$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$\delta[n] \leftrightarrow \Delta(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \delta[0] \cdot e^0 = 1$$

Zie [formuleblad](#)

Impulsspectrum

Het genormaliseerde spectrum van de impulsfunctie $\delta[n]$ is:



De impulsfunctie bevat alle frequenties met een amplitude van 1.

We kunnen dus het **spectrum van de overdracht** van een systeem $H(\Omega)$ bepalen door het **spectrum van de impulsresponsie** $h[n]$ te bepalen.

Voorbeeld tijdsverschuiving

Het signaal $\delta[n]$ gedurende n_0 sampletijden vertragen (verschuiven in de tijd) geeft: $\delta[n - n_0]$.

$$\delta[n] \leftrightarrow \Delta(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

$$\delta[n - n_0] \leftrightarrow \Delta_{n_0}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}$$

Zie [formuleblad](#)

Tijdsverschuiving

Als we een signaal $x[n]$ gedurende n_0 sampletijden vertragen (verschuiven in de tijd):

$$x[n] \rightarrow x[n - n_0] = y[n]$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] \cdot e^{-j\Omega n}$$

Stel: $m = n - n_0 \rightarrow n = n_0 + m$

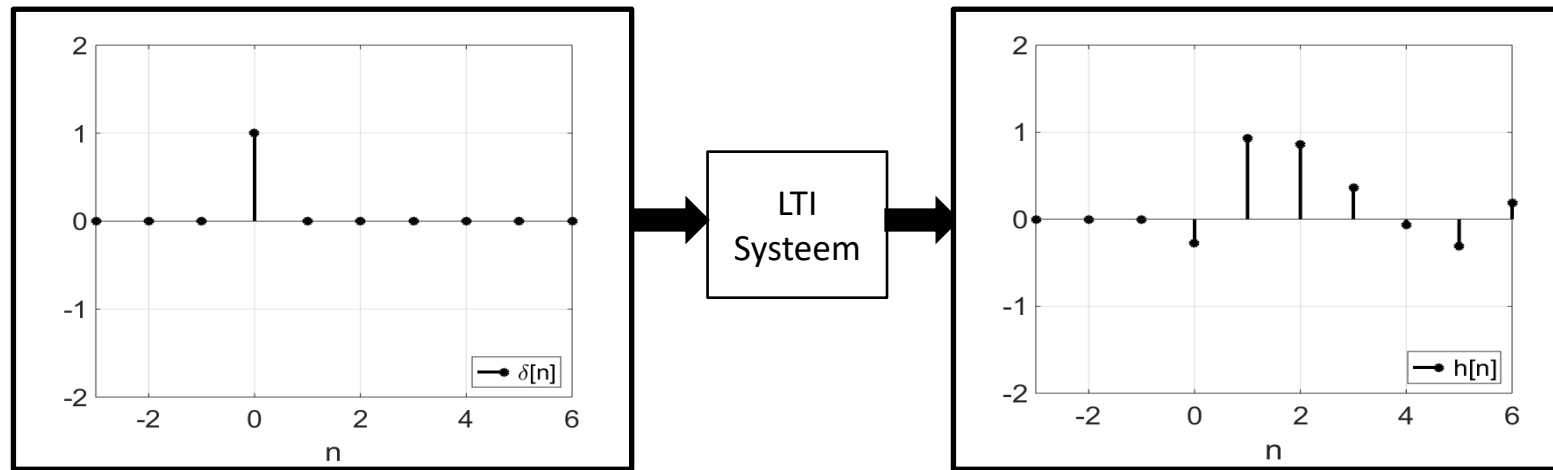
$$Y(\Omega) = \sum_{n_0+m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot e^{-j\Omega(n_0+m)} = e^{-j\Omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot e^{-j\Omega m}$$

Dus:

$$Y(\Omega) \rightarrow X(\Omega) e^{-j\Omega n_0}$$

Zie [formuleblad](#)

Herhaling: convolutie



- Als de impulsresponsie $h[n]$ bekend is...
- Kan de uitgang van een LTI-systeem met willekeurige input worden berekenend d.m.v. convolutie:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Fourier-transformatie van een convolutie

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k] \cdot e^{-j\Omega n}$$

Stel: $m = n - k \rightarrow n = m + k$

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \sum_{m+k=-\infty}^{+\infty} h[m] \cdot e^{-j\Omega(k+m)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\Omega k} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] \cdot e^{-j\Omega m}$$

↓

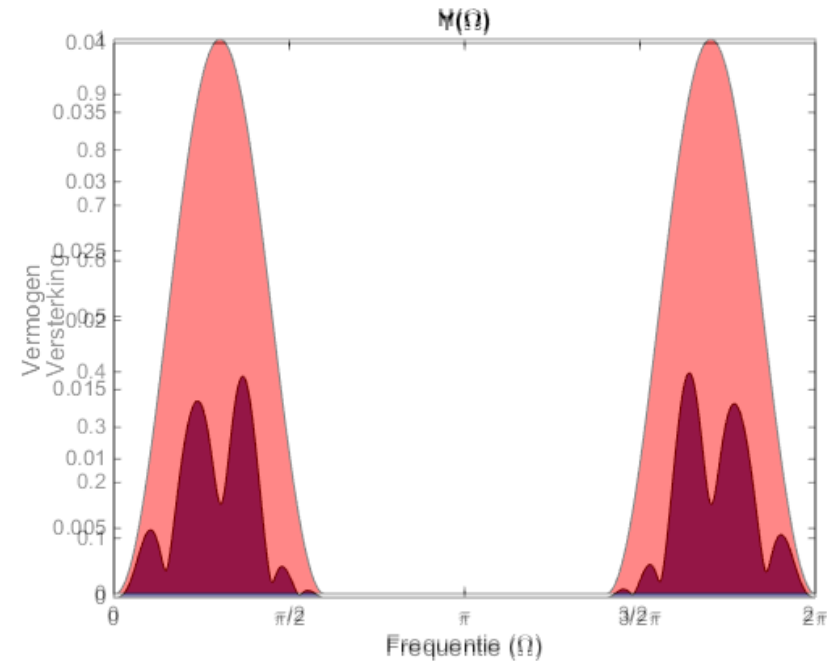
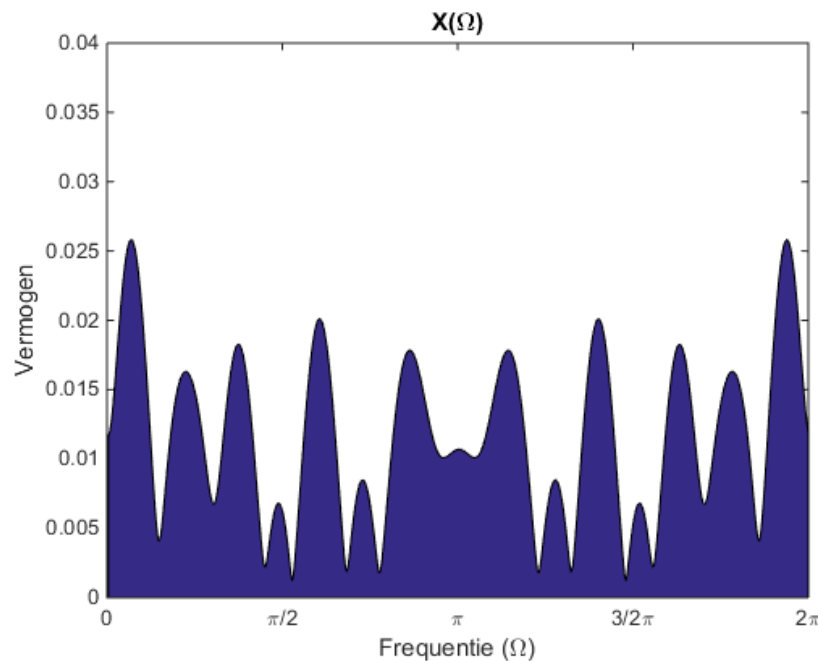
$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

Zie [formuleblad](#)

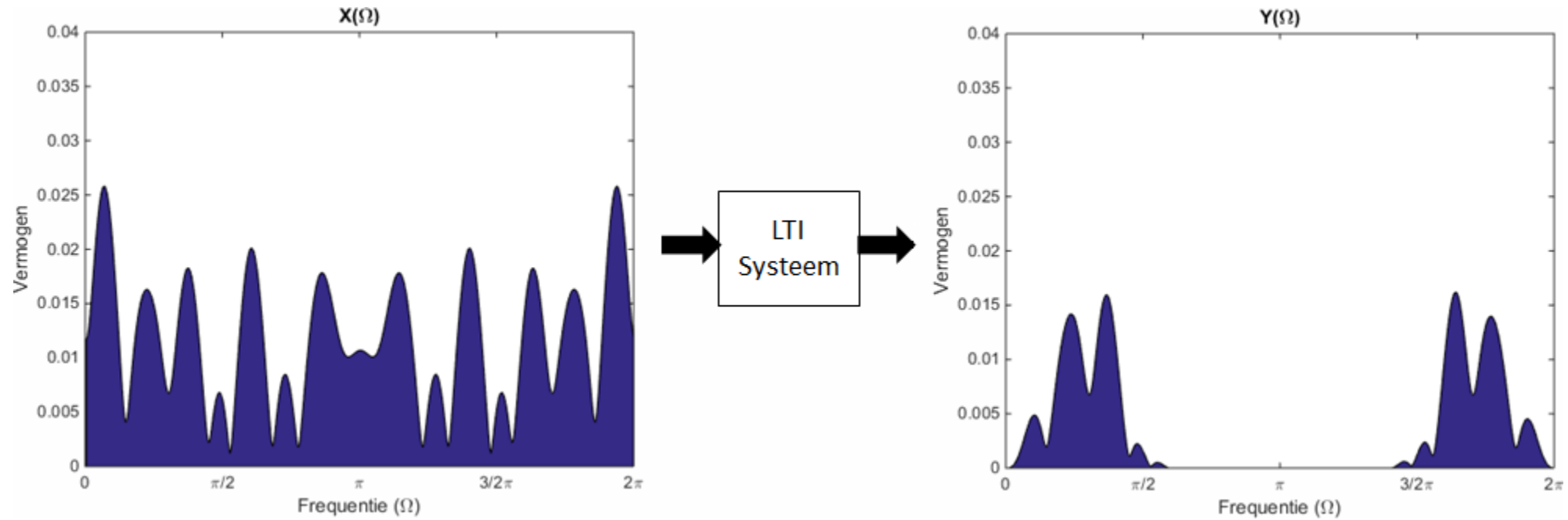
Dus convolutie in tijddomein $\leftrightarrow$ vermenigvuldiging in frequentiedomein.

De convolutie eigenschap van de DTFT

- Convolutie in het tijddomein: $y[n] = x[n] * h[n]$
- Is vermenigvuldiging in het frequentiedomein: $Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$
- Voorbeeld:



Overdracht in het frequentiedomein: $H(\Omega)$

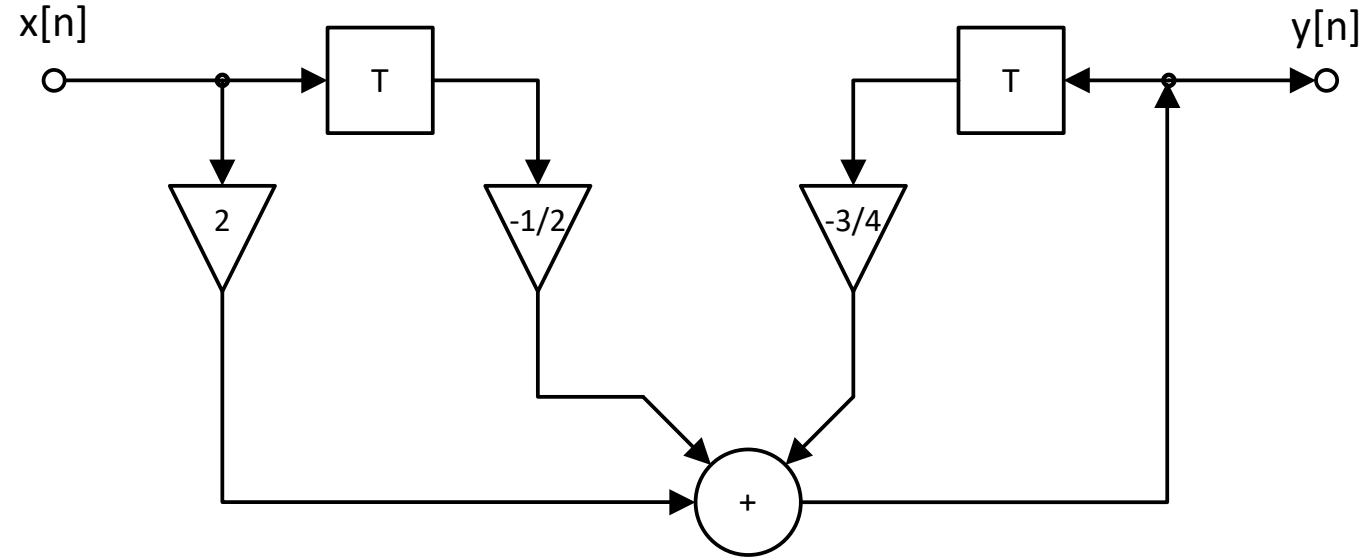


$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

• Dus:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Herhaling: LTI-systemen



Bepaal de output $y[n] = \dots$

$$y[n] = 2 \cdot x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n-1] - \frac{3}{4} \cdot y[n-1]$$

De overdrachtsfunctie: $H(\Omega)$

- $H(\Omega)$ wordt de **overdrachtsfunctie** genoemd en bepaalt hoe het LTI-systeem het ingangssignaal $X(\Omega)$ omzet naar uitgangssignaal $Y(\Omega)$

- Voorbeeld:

$$y[n] = 2 \cdot x[n] - \frac{1}{2} \cdot x[n-1] - \frac{3}{4} \cdot y[n-1]$$

- DTFT uitvoeren:

$$Y(\Omega) = 2 \cdot X(\Omega) - \frac{1}{2} \cdot X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega} + -\frac{3}{4} \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j\Omega}$$
$$Y(\Omega) \left(1 + \frac{3}{4} \cdot e^{-j\Omega} \right) = X(\Omega) \left(2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega} \right)$$

- Overdracht $H(\Omega)$:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}}{1 + \frac{3}{4} \cdot e^{-j\Omega}}$$

De overdrachtsfunctie: $H(\Omega)$

- Overdracht $H(\Omega)$:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}}{1 + \frac{3}{4} e^{-j\Omega}}$$

- Bepaal de versterking $|H(\Omega)|$ en de fasedraaiing $\Phi_H(\Omega)$ voor $f = 0 \dots \frac{1}{2} f_s$.
- Welke waarden van Ω moet je gebruiken?

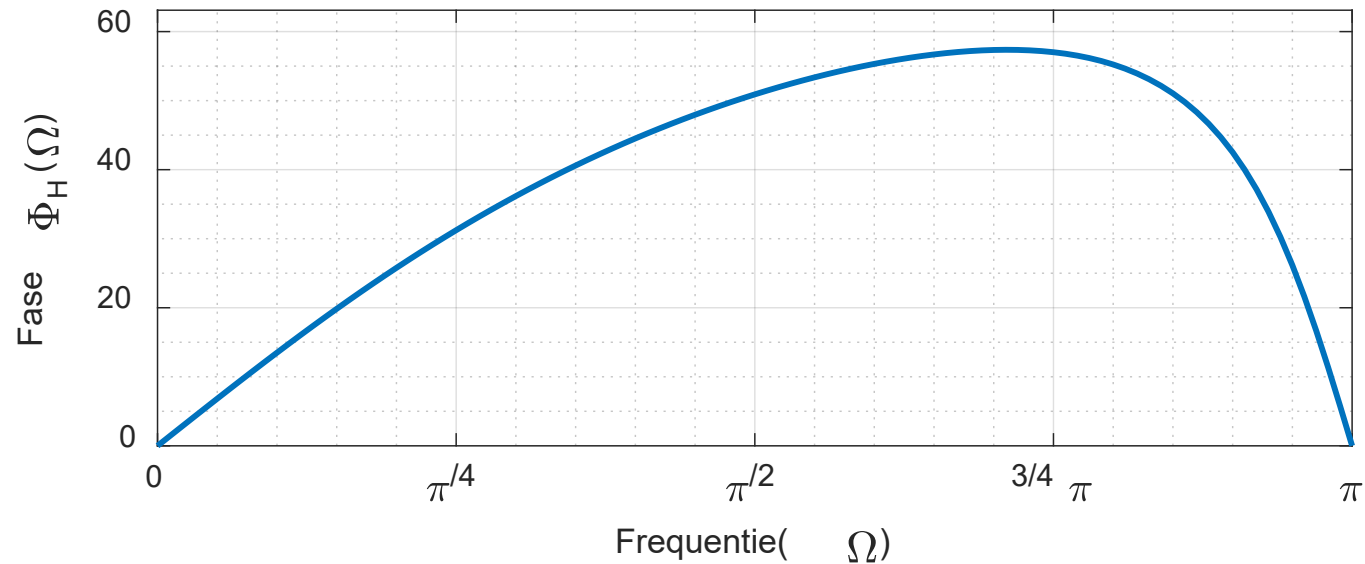
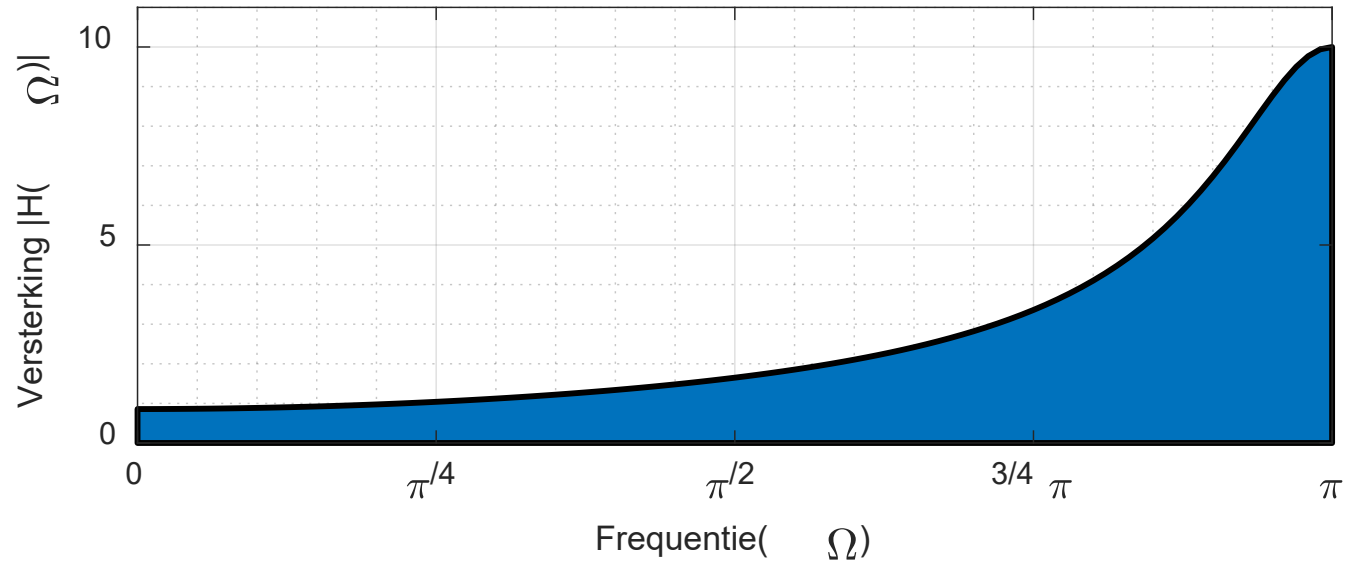
$$\Omega = 2\pi f / f_s \text{ dus: } \Omega = 0 \dots \pi$$

De overdrachtsfunctie: $H(\Omega)$

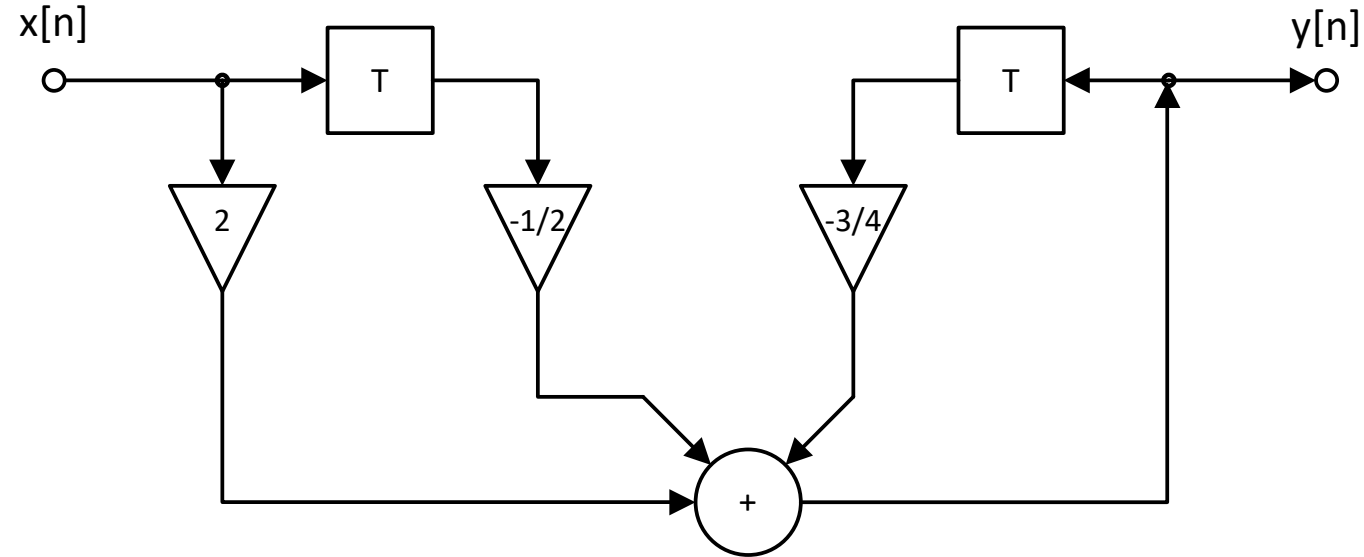
$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}}{1 + \frac{3}{4} e^{-j\Omega}}$$

f	Ω	$ H(\Omega) $	$\Phi_H(\Omega)$
0	0	$\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{4}} = 0,857$	0
$\frac{1}{8}f_s$	$\frac{1}{4}\pi$	?	?
$\frac{1}{4}f_s$	$\frac{1}{2}\pi$		
$\frac{3}{8}f_s$	$\frac{3}{4}\pi$		
$\frac{1}{2}f_s$	π	$\frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = 10,000$	0

$H(\Omega)$ versterking en fasedraaiing



Herhaling: LTI-systemen



Algemene vorm uitgang LTI-systeem:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m \cdot x[n-m] + \sum_{m=1}^K a_m \cdot y[n-m]$$

Hier:

$$b_0 = 2, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{3}{4}$$

LTI-systeem DTFT

- Algemene vorm uitgang LTI-systeem:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m \cdot x[n-m] + \sum_{m=1}^K a_m \cdot y[n-m]$$

- DTFT toepassen:

$$y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega)$$

$$y[n-m] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega) e^{-j\Omega m}$$

$$x[n-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega) e^{-j\Omega m}$$

$$Y(\Omega) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m} + \sum_{m=1}^K a_m \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m}$$

De overdrachtsfunctie: $H(\Omega)$

- De overdrachtsfunctie $H(\Omega)$ is te vinden door:

$$Y(\Omega) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m} + \sum_{m=1}^K a_m \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m}$$

om te schrijven naar de vorm:

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

- $X(\Omega)$ is het spectrum van de ingang.
- $H(\Omega)$ afleiden:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$
$$Y(\Omega) \left(1 - \sum_{m=1}^N a_m \cdot e^{-j\Omega m} \right) = X(\Omega) \left(\sum_{m=0}^K b_m \cdot e^{-j\Omega m} \right)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot e^{-j\Omega m}}{1 - \sum_{m=1}^K a_m \cdot e^{-j\Omega m}}$$

Oefening

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Wat is de overdrachtsfunctie $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$?
- Welke frequentie wordt maximaal versterkt door dit systeem?
- Wat is de versterking van deze frequentie?

Gebruik voor deze vraag de substitutie:

$$\Omega = \frac{2\pi f}{f_s}$$

waarbij: $f_s = 1 \text{ kHz}$



De laatste twee vragen zijn niet (eenvoudig) zonder Matlab of Python op te lossen.

Oefening

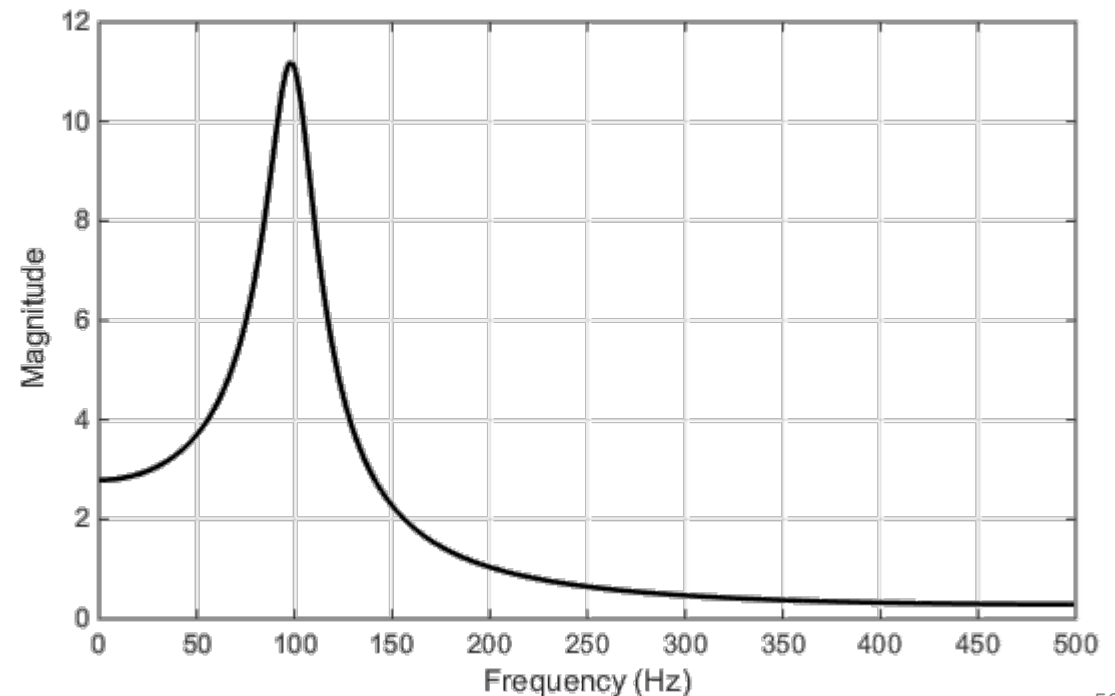
$$y[n] = 1,5 \cdot y[n - 1] - 0,85 \cdot y[n - 2] + x[n]$$

- Wat is de overdrachtsfunctie $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$?
- Welke frequentie wordt maximaal versterkt door dit systeem?
- Wat is de versterking van deze frequentie?

Gebruik voor deze vraag de substitutie:

$$\Omega = \frac{2\pi f}{f_s}$$

waarbij: $f_s = 1 \text{ kHz}$



Voorbeeld 1 Discrete-Time Fourier Transform

Het Fourier-spectrum van verschillende basissignalen is bekend.

Zie eventueel boek blz. 106 en [formuleblad](#).

Wat is het Fourier-spectrum van:

$$x[n] = 0.5^n \cdot u[n] + \delta[n - 3]$$

Voorbeeld 2: Convolutie

Bereken de discrete Fourier-getransformeerde van:

$$y[n] = x[n] * x[n]$$

Waarbij:

$$x[n] = \delta[n + 1] + \delta[n - 1]$$

Vorbereiding week 4

- [Huiswerk week 3 les 2](#)
- Opgaven: [3.11, 3.12 en 3.13](#)
- Doornemen presentatie week 3
- Lezen (verdieping):
 - §3.3 De Fourier-tranformatie van niet-periodieke digitale reeksen (15 pagina's)
- Extra verdieping:
 - Opgave: [3.14](#), oefening op sheet 58.
- **Installeer Matlab en Jupyter-Notebook** op je pc als je dat nog niet gedaan hebt, zie: [wiki](#)