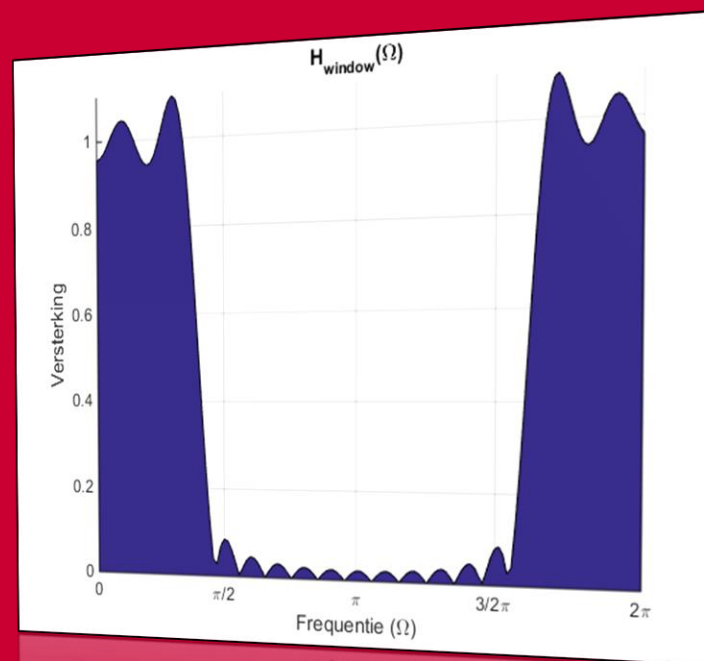
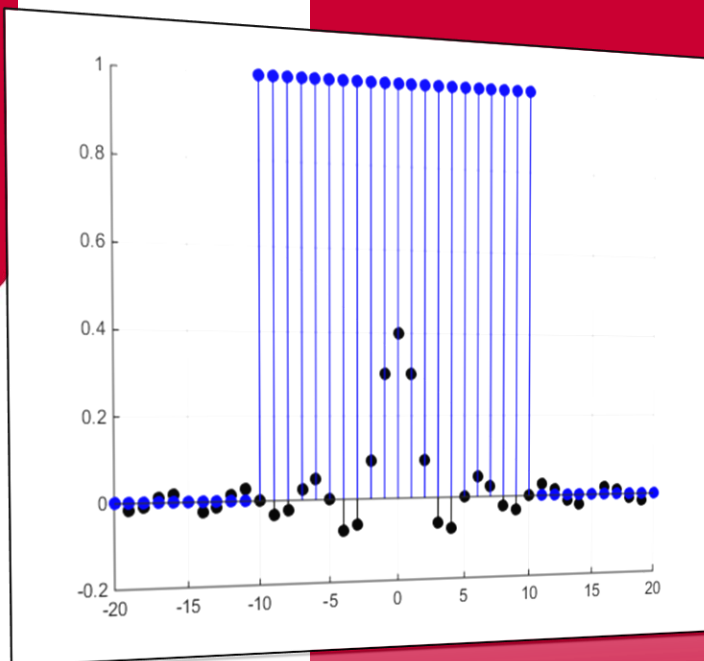




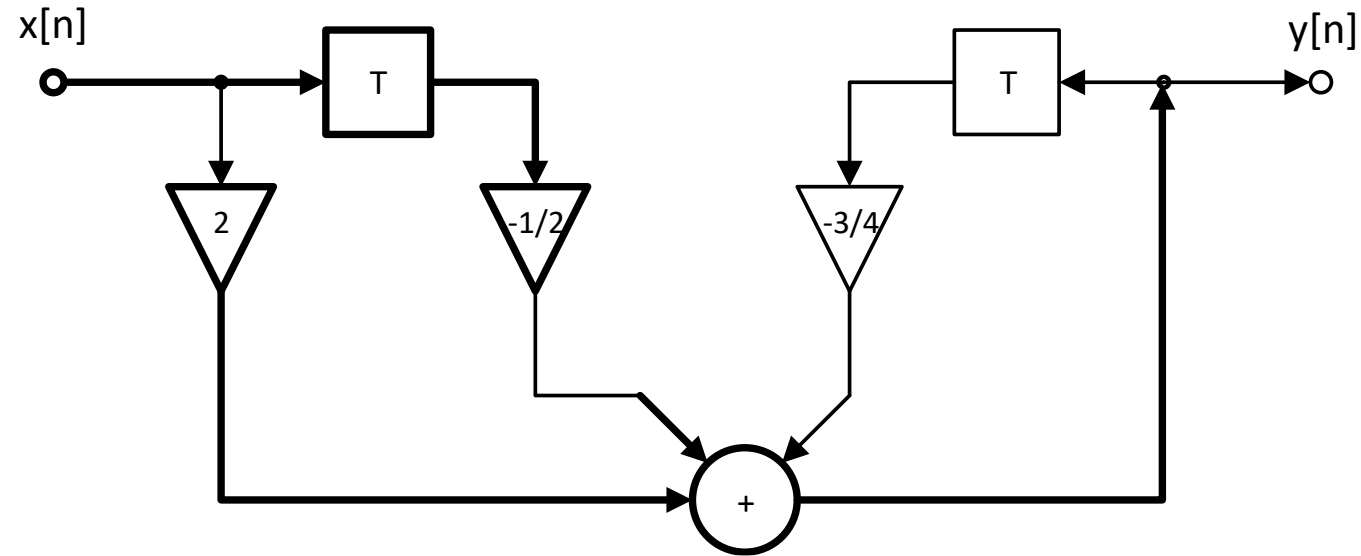
HOGESCHOOL
ROTTERDAM



ELEDIS10

Digitale Systemen

Herhaling: LTI-systemen



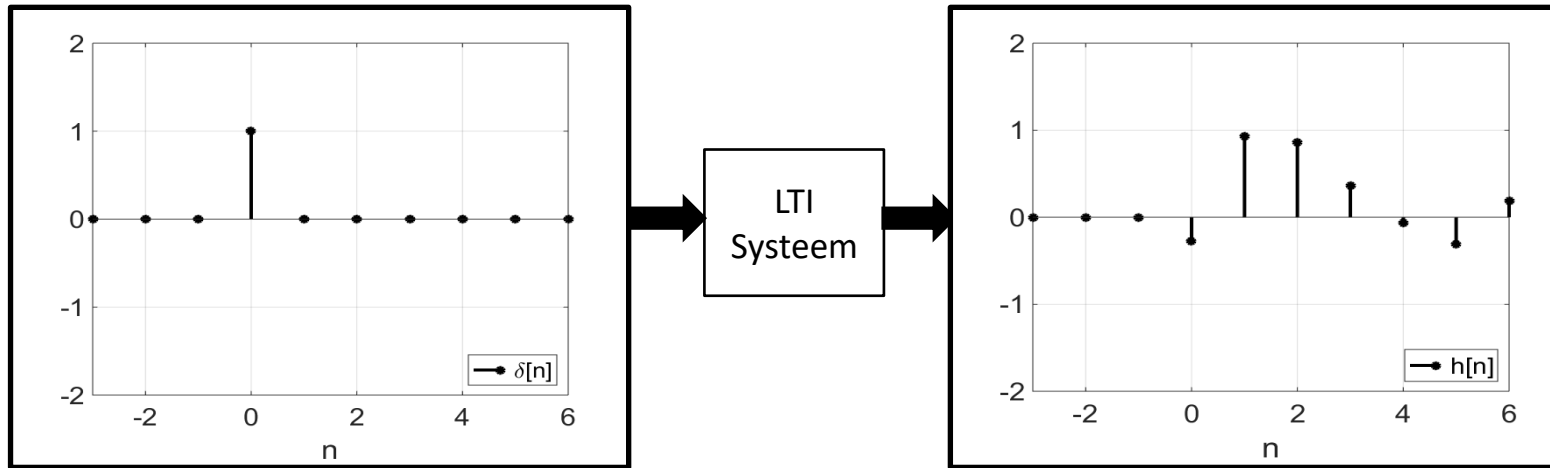
Algemene vorm uitgang LTI-systeem:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m \cdot x[n-m] + \sum_{m=1}^K a_m \cdot y[n-m]$$

Hier: $y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + a_1 \cdot y[n-1]$

Met: $b_0 = 2, b_1 = -\frac{1}{2}, a_1 = -\frac{3}{4}$

Herhaling: convolutie



- Als de impulsresponsie $h[n]$ bekend is...
- Kan de uitgang van een LTI-systeem met willekeurige input worden berekenend d.m.v. convolutie:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Herhaling: LTI-systeem DTFT

- Algemene vorm uitgang LTI-systeem:

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m \cdot x[n-m] + \sum_{m=1}^K a_m \cdot y[n-m]$$

- DTFT toepassen:

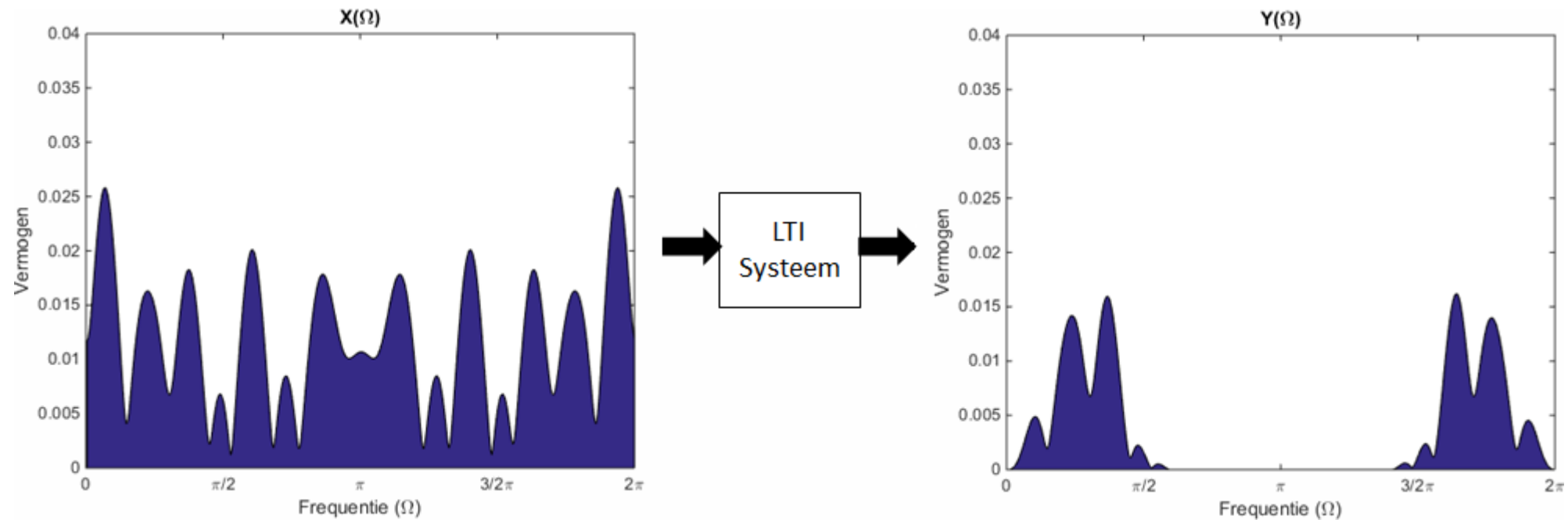
$$y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega)$$

$$y[n-m] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega) e^{-j\Omega m}$$

$$x[n-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega) e^{-j\Omega m}$$

$$Y(\Omega) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m} + \sum_{m=1}^K a_m \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m}$$

Herhaling: Overdracht in het frequentiedomein



$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

• Dus:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Herhaling: De overdrachtsfunctie: $H(\Omega)$

- De overdrachtsfunctie $H(\Omega)$ is te vinden door

$$Y(\Omega) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot X(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m} + \sum_{m=1}^K a_m \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j\Omega m}$$

om te schrijven naar de vorm

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

- $H(\Omega)$ afleiden:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

$$Y(\Omega) \left(1 - \sum_{m=1}^N a_m \cdot e^{-j\Omega m} \right) = X(\Omega) \left(\sum_{m=0}^K b_m \cdot e^{-j\Omega m} \right)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot e^{-j\Omega m}}{1 - \sum_{m=1}^K a_m \cdot e^{-j\Omega m}}$$

Herhaling: De overdrachtsfunctie: $H(\Omega)$

- $H(\Omega)$ wordt de **overdrachtsfunctie** genoemd en bepaalt hoe het LTI-systeem het ingangssignaal $X(\Omega)$ omzet naar uitgangssignaal $Y(\Omega)$

- Voorbeeld LTI-systeem:

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n - 1] + a_1 \cdot y[n - 1]$$

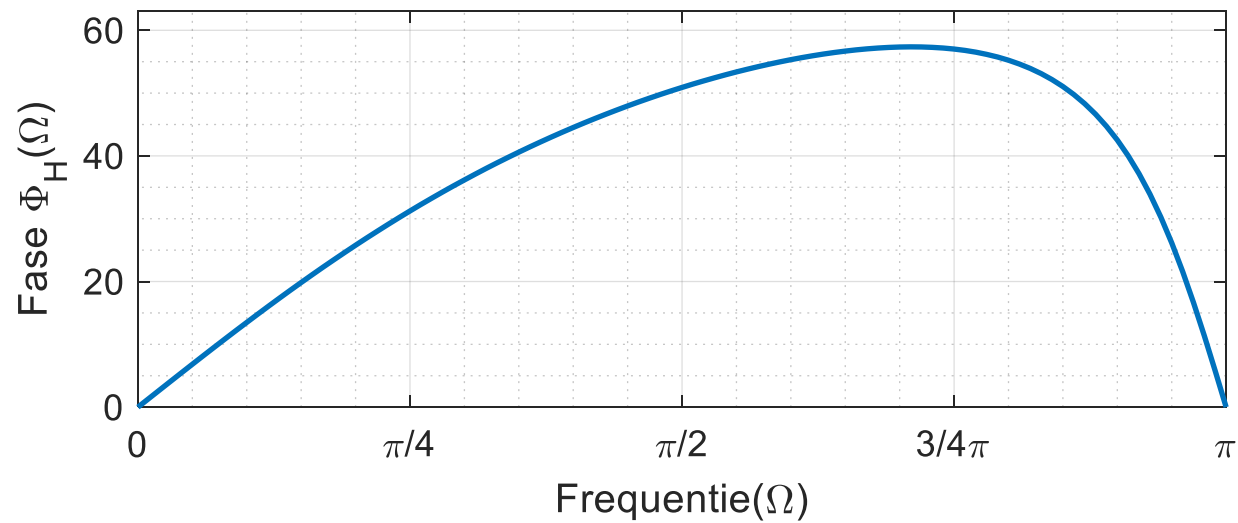
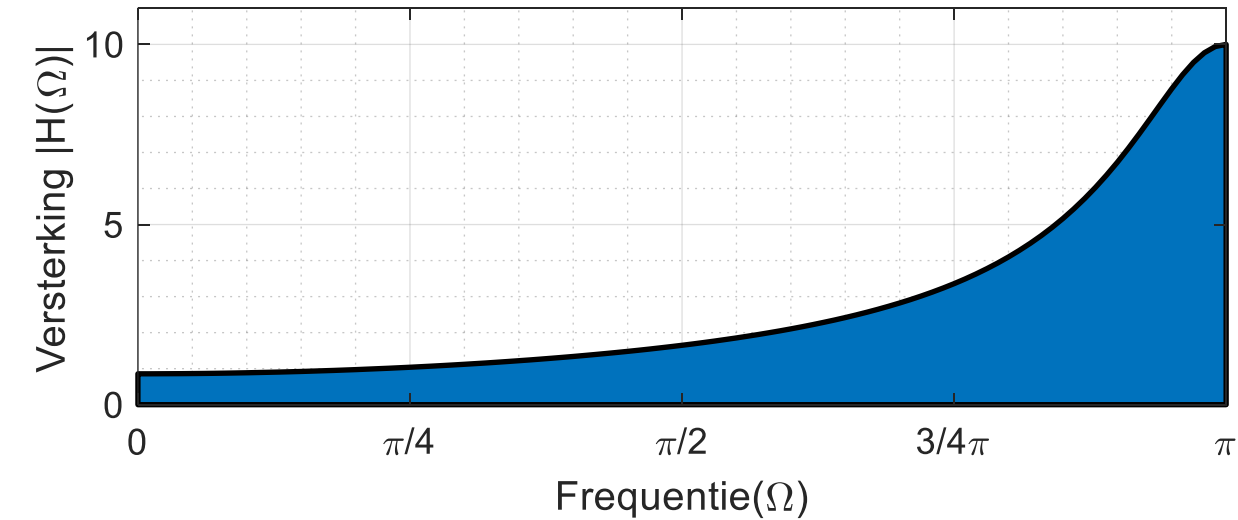
- Met

$$b_0 = 2, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{3}{4}$$

- Overdracht:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}}{1 + \frac{3}{4} \cdot e^{-j\Omega}}$$

Herhaling: $H(\Omega)$ van voorbeeld (versterking en fasedraaiing)



Deze week

- Filterontwerp d.m.v. de Inverse Discrete Fouriertransformatie (IDFT)
- Z-transformatie
- Filterontwerp d.m.v. polen-nulpunten-beeld in het Z-domein

Filterontwerp d.m.v. de Fouriertransformatiemethode

- Stel, we willen een LTI-systeem ontwerpen dat zich gedraagt als een bepaald filter.
- De coëfficiënten zijn nog onbekend.
- We kunnen simpelweg $H(\Omega)$ definiëren zoals we willen.
- Probleem: $H(\Omega)$ is een functie van frequentie Ω , gedefinieerd in het frequentiedomein.
- Werkelijkheid: een LTI-filter werkt als functie van de tijd.

- Oplossing: transformeer: $H(\Omega) \xrightarrow{IDTFT} h[n]$ (IDTFT = Inverse Discrete-Time Fourier Transform)

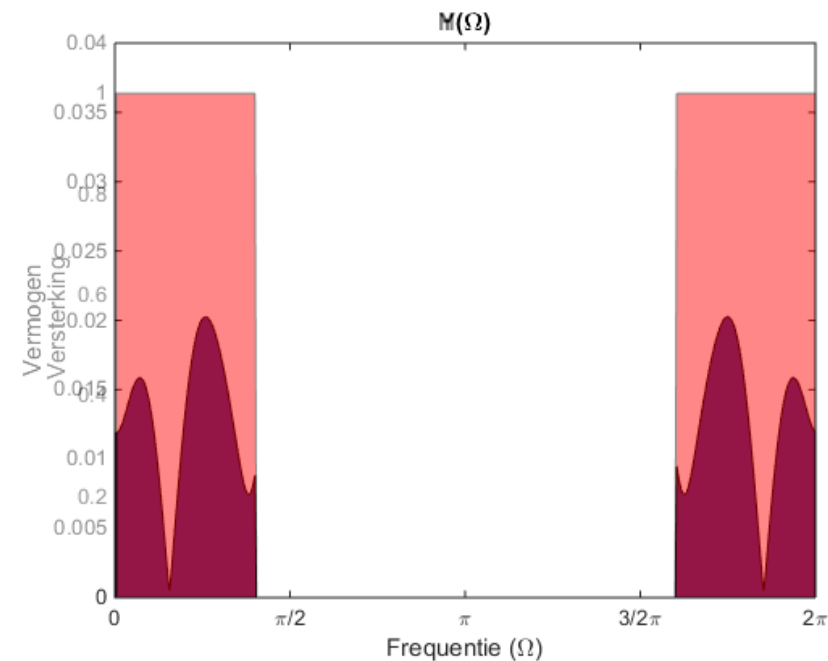
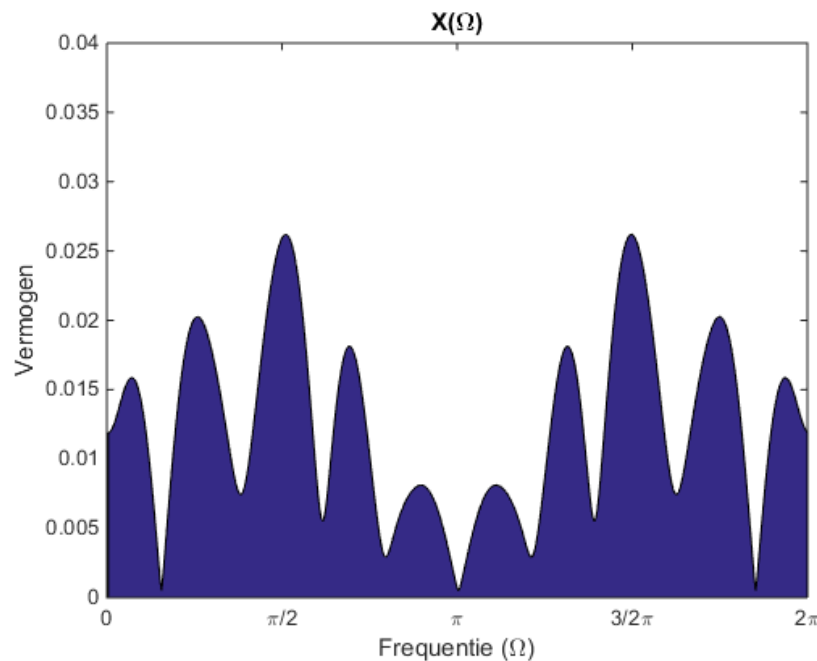
- Implementeer:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n - k]$$

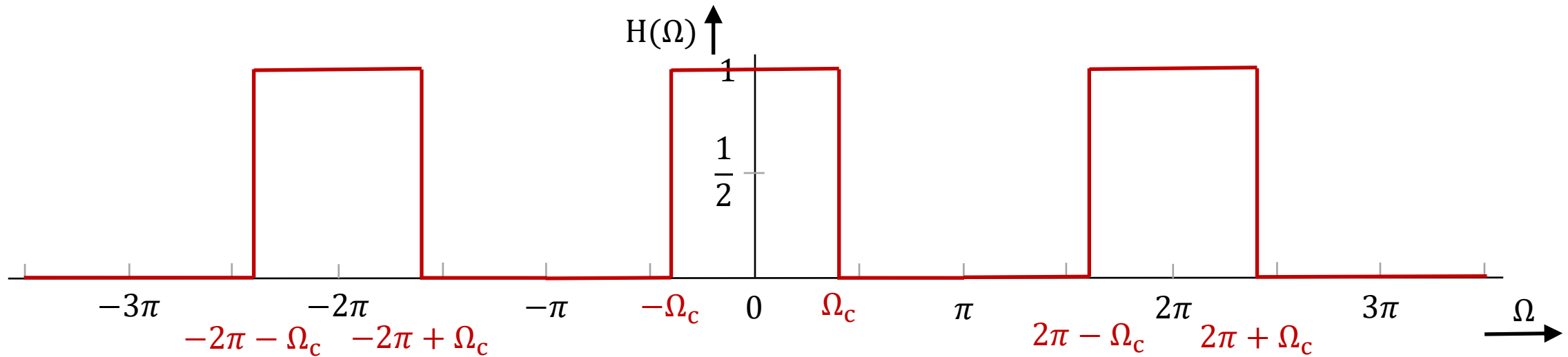
Het LTI-systeem moet causaal zijn.

Voorbeeld laagdoorlaatfilter d.m.v. Fouriertransformatie

- Voorbeeld: We willen een (ideaal) laagdoorlaatfilter dat alle frequenties na $\Omega_c = \frac{2}{5}\pi$ afkapt:



Gewenste overdracht laagdoorlaatfilter $H(\Omega)$



- Bepaal:
$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$
- Handige keuze:
$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

Voorbeeld laagdoorlaatfilter d.m.v. Fouriertransformatie

- Definitie filter in frequentiedomein:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & -\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c \\ 0, & -\pi \leq \Omega < -\Omega_c \vee \Omega_c < \Omega \leq \pi \end{cases}$$

- Inverse Discrete-Time Fourier Transform (IDTFT):

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega \text{ bijvoorbeeld: } h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Wordt hier:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} dj\Omega n$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi jn} \left[e^{j\Omega n} \right]_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n})$$

Voorbeeld laagdoorlaatfilter d.m.v. Fouriertransformatie

- Uitwerken geeft:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}) = \frac{1}{2\pi j n} (\cos(\Omega_c n) + j \sin(\Omega_c n) - \cos(\Omega_c n) + j \sin(\Omega_c n)) = \frac{2j \sin(\Omega_c n)}{2\pi j n}$$

- Overdracht in de tijd:

$$h[n] = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}$$

Problemen:

1. $h[0]$ bestaat niet
2. $h[n]$ is niet eindig
3. $h[n]$ is niet causaal

- Uitzondering voor $h[0]$ oplossen:

$$h[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) e^{j\Omega 0} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1 d\Omega = \frac{1}{2\pi} [\Omega]_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{\Omega_c}{\pi} = \frac{2}{5}$$

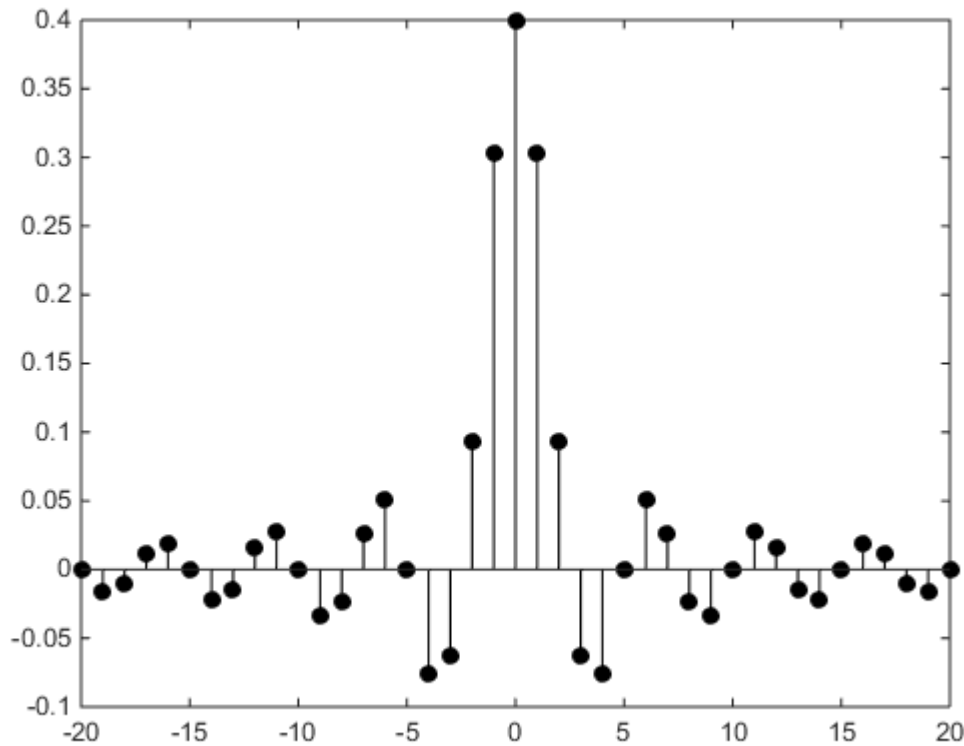
- Kan in dit geval ook met [l'Hôpital](#):

$$h[0] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{d(\sin(\Omega_c n))}{dn}}{\frac{d(\pi n)}{dn}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\Omega_c \cos(\Omega_c n)}{\pi} = \frac{\Omega_c \cos(0)}{\pi} = \frac{2}{5}$$

$$\Omega_c = \frac{2}{5}\pi$$

Voorbeeld laagdoorlaatfilter d.m.v. Fouriertransformatie

$h[n]$:

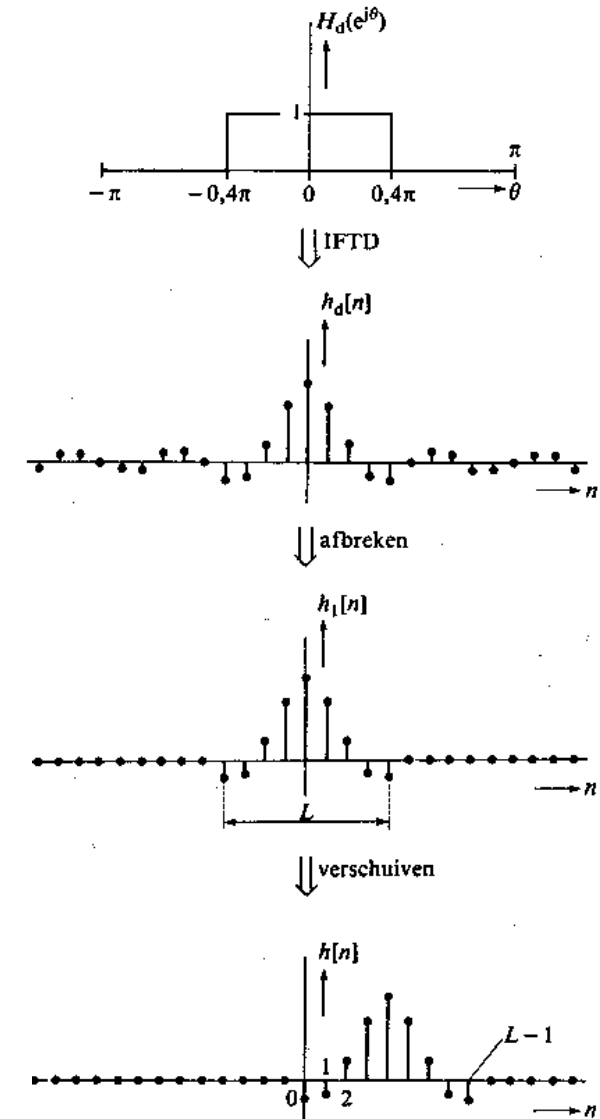


Probleem: $h[n]$ strekt zich uit over $n \in \mathbb{Z}$.

We hebben oneindig veel coëfficiënten!

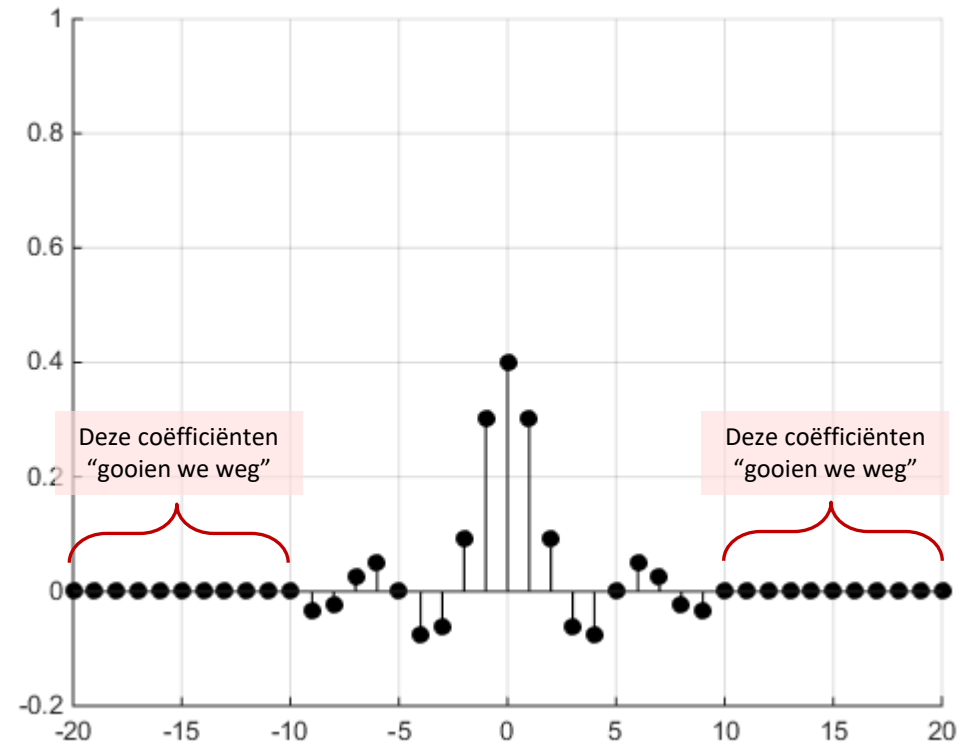
Kan niet geïmplementeerd worden in werkelijkheid.

$h[n]$ moet worden afgekapt met een zogenaamd "Window".



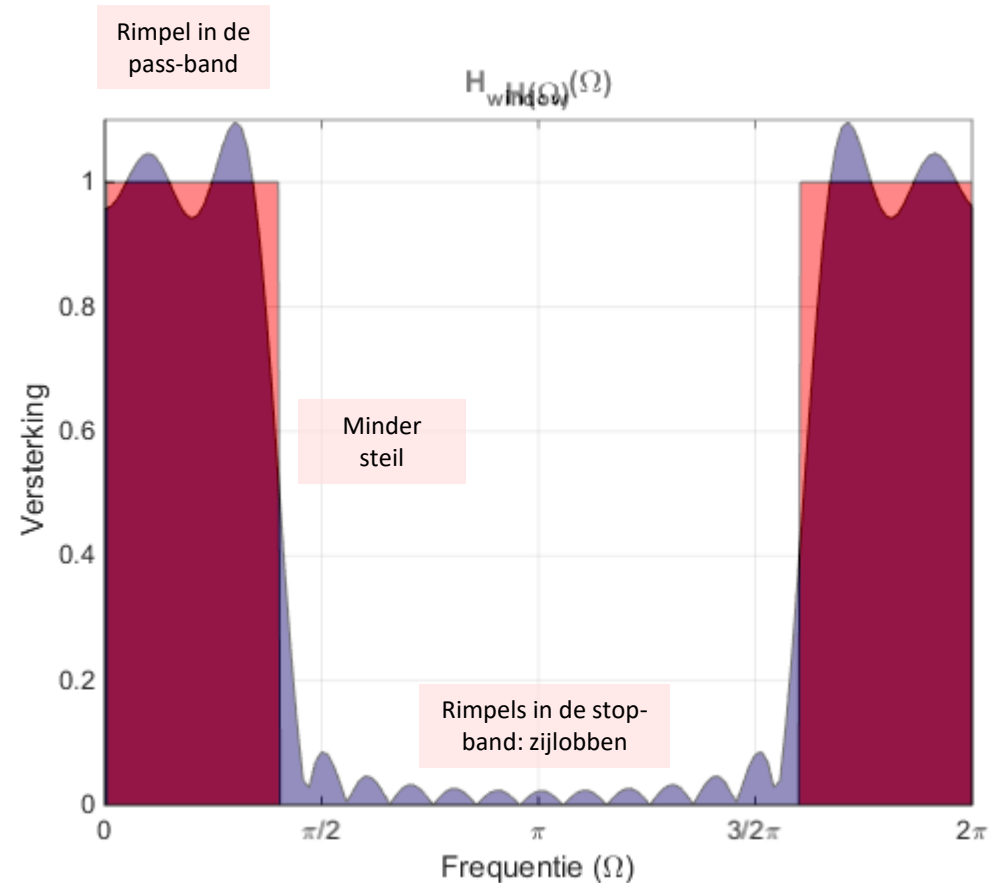
Rectangular window

- Simpelste window: rectangular.
 - Vermenigvuldig coëfficiënten met 1 waar je de coëfficiënten wilt bewaren.
 - Vermenigvuldig met 0 waar niet.
- We hebben alle coëfficiënten $h[n], n \in \mathbb{Z}$ nodig om de oorspronkelijke frequentieresponsie $H(\Omega)$ te krijgen.
- Wat is het effect van een window op $H(\Omega)$?



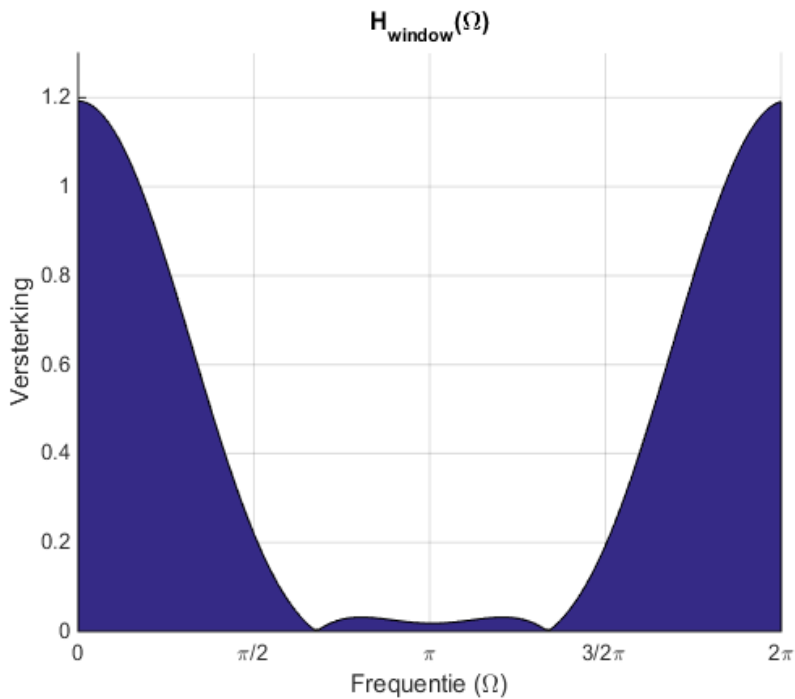
Zijlobben / Sidelobes

- We transformeren de afgekapte $h[n]$ terug naar $H(\Omega)$.
- Doordat $h[n]$ is afgekapt ontstaan in $H(\Omega)$ allerlei ongewenste effecten t.o.v. het ideale filter.
- Hoe minder coëfficiënten we nemen van de ideale $h[n]$, hoe meer deze effecten zichtbaar worden.
 - Of: hoe hoger de orde van het filter, hoe beter het filter op een ideaal filter lijkt.

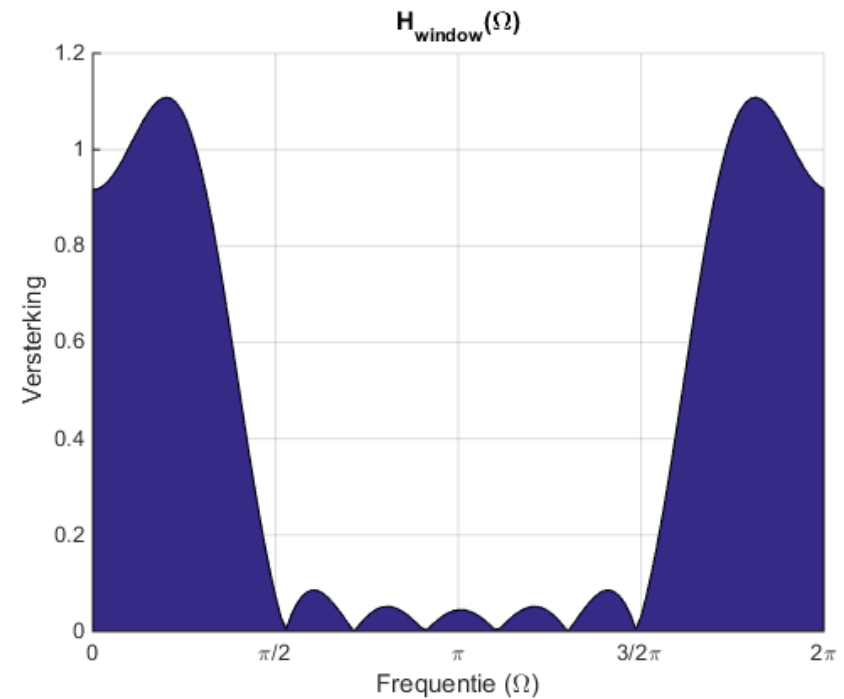


Kleinere windows

- 4^e orde:
- 5 waarden van $h[n]$ overgelaten

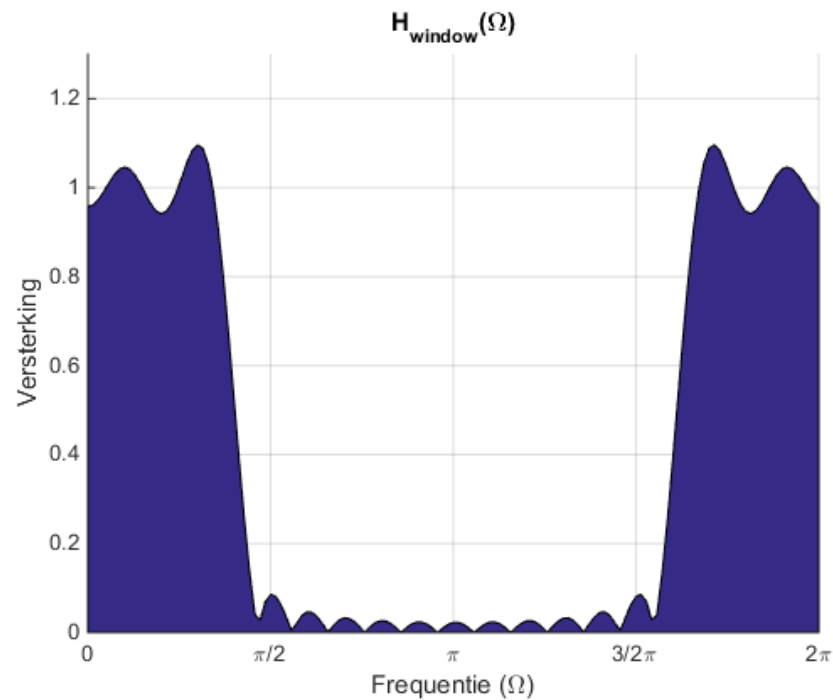


- 10^e orde:
- 11 waarden van $h[n]$ overgelaten

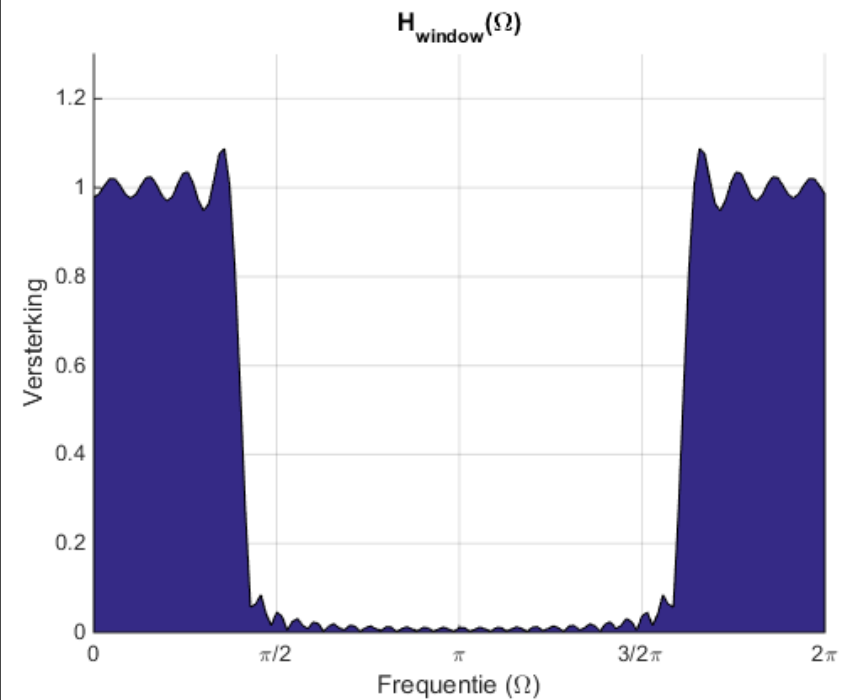


Grotere windows

- 20^e orde:
- 21 waarden van $h[n]$ overgelaten

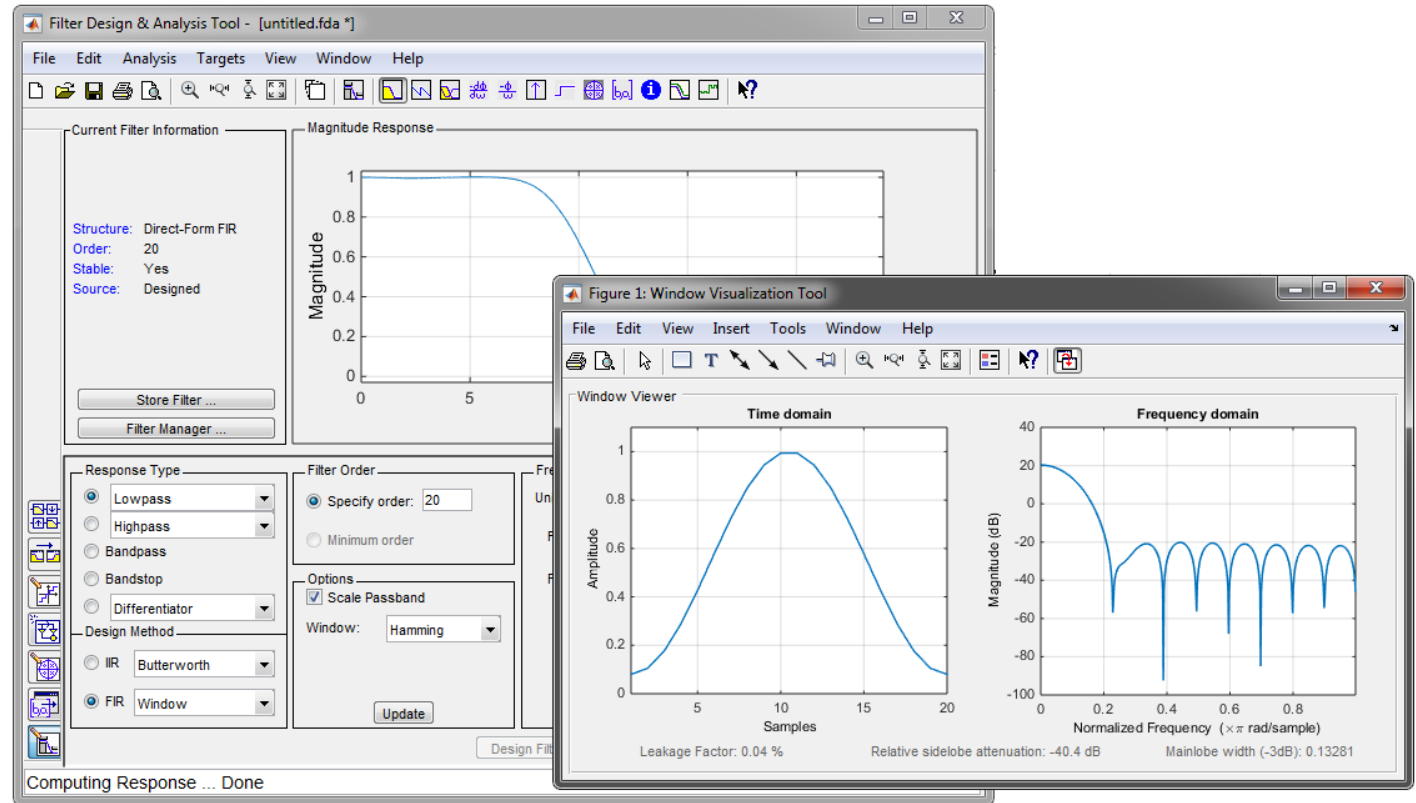


- 40^e orde:
- 41 waarden van $h[n]$ overgelaten



Verschillende windows

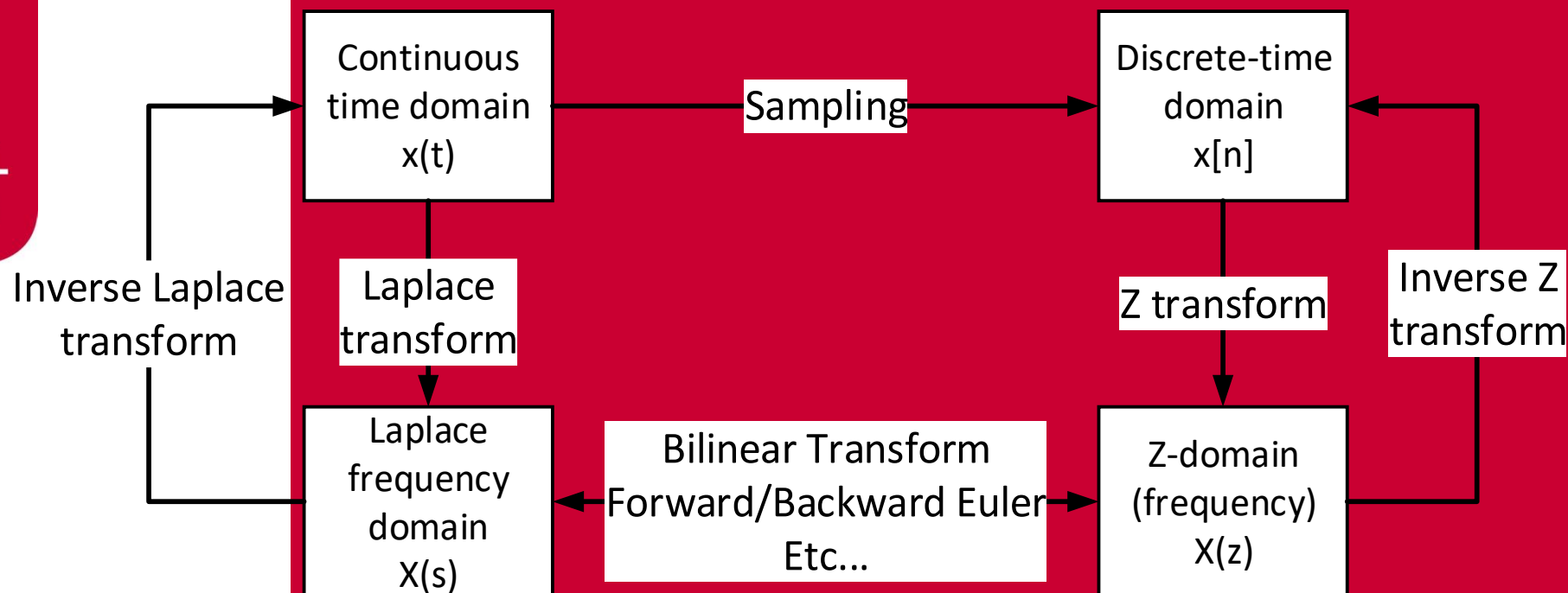
- Rectangular window is een naïef window.
- Er bestaan windows die “geleidelijker” afkappen bij de grenzen van het filter.



- Het effect in het frequentiedomein wordt dan anders...
 - meestal minder steil filter.
 - maar minder last van zijlobben/rimpel.
- Met `FilterDesigner` kan je deze berekenen en visualiseren.

Vorbereiding les 2

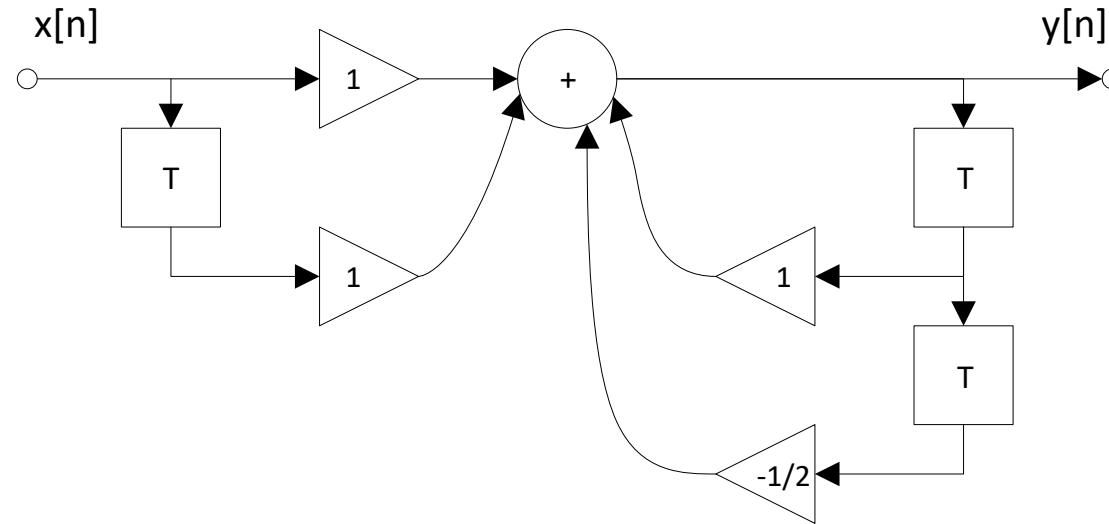
- [Huiswerk week 5 les 1](#)
- [Oefenopgaven week 5](#): 3.5.3
- Doornemen presentatie week 5
- Lezen:
 - §5.1 Het ontwerpen van niet-recursieve digitale filters
 - §5.3.1 De Fouriertransformatiemethode; De basis van de methode
 - §5.3.2 Afkapping en tijdvensters: rechthoekige en driehoekige vensters (16 pagina's)
- Extra verdieping: [Oefenopgaven week 5](#): 3.5.4
- Herhaling (week 3) : [Oefenopgaven week 5](#): 3.5.1 en 3.5.2



ELEDIS10

Digitale Systemen

LTI-systeem



Algemene vorm van een uitgang van een LTI-systeem:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n-k] + \sum_{k=1}^K a_k \cdot y[n-k]$$

Hier:

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2]$$

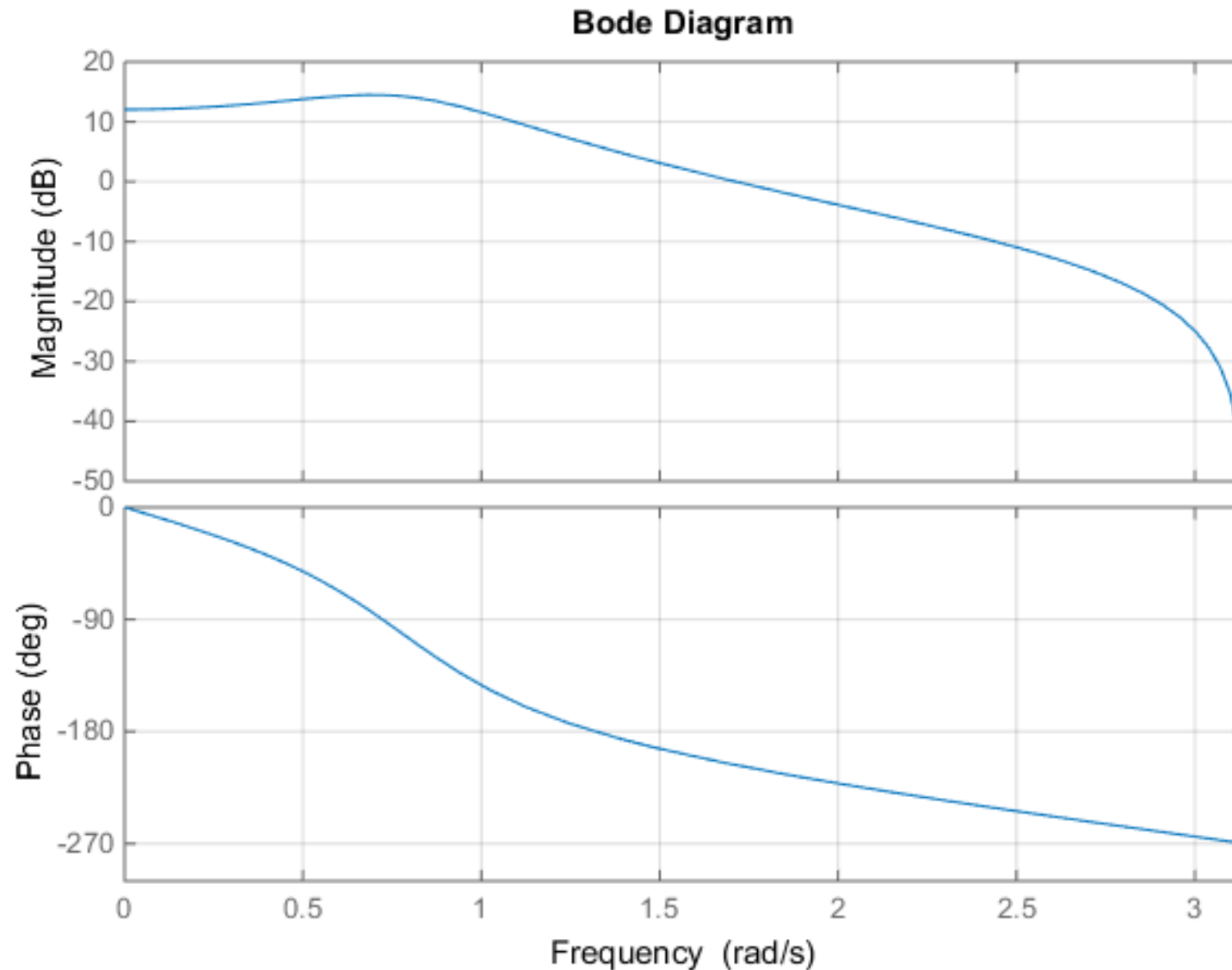
Met:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}$$

Overdrachtsfunctie:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\Omega}}$$

$H(\Omega)$ van systeem vorige slide



Vorige les

- Vorige les hebben we een filter ontworpen d.m.v. de Inverse Discrete Fouriertransformatie (IDFT).
- Dit levert een N^{de} orde filter op met een impulsresponsie die $N+1$ samples duurt.
- Het outputsignaal kan als volgt worden berekend:

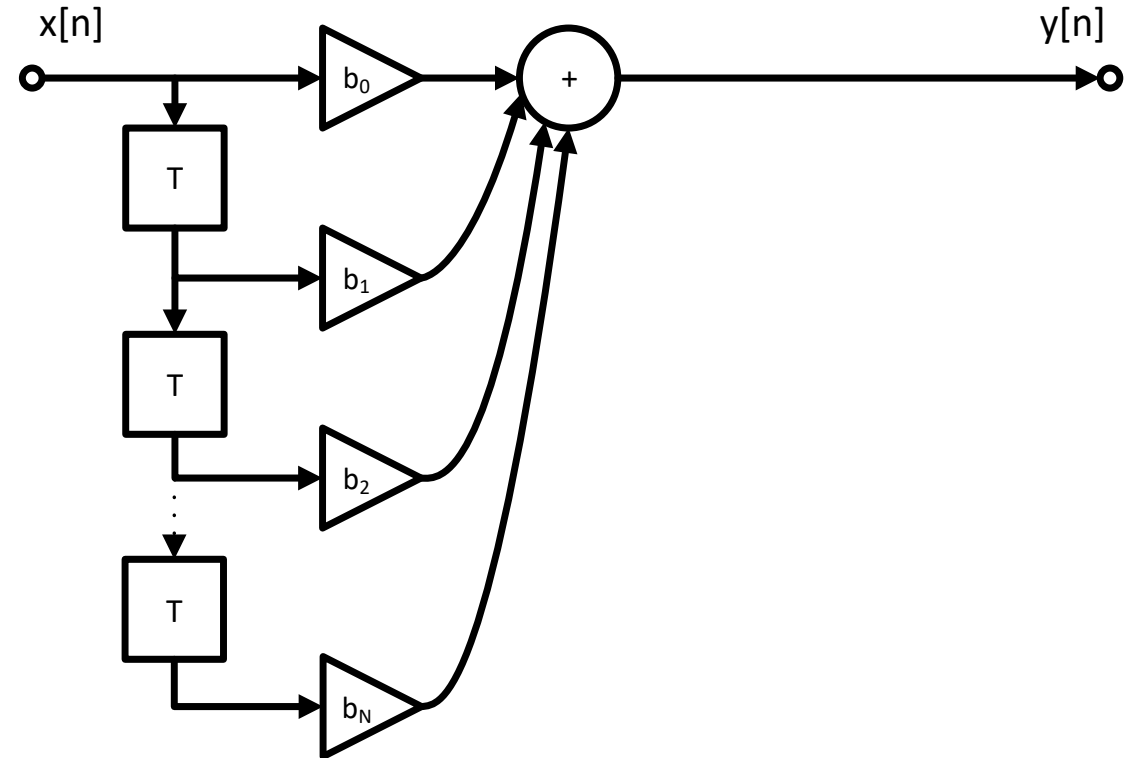
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^N h[k] \cdot x[n - k]$$

- Dit komt overeen met het volgende LTI-systeem:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x[n - k] \text{ met } b_k = h[k]$$

- We noemen zo'n filter een **Finite Impulse Response** filter (FIR-filter) omdat de $h[n]$ eindig is.

FIR-filter als LTI-systeem



Uitgangssignaal van een FIR-filter:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x[n - k]$$

Overdrachtsfunctie:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega} + \dots + b_N e^{-jN\Omega}}{1}$$

Filter typen

Niet-Recursieve Filters (**FIR** = Finite Impulse Response):

- Uitgang alleen afhankelijk van huidige en voorgaande ingangen.
- De noemer van $H(\Omega)$ is constant (onafhankelijk van Ω).

Recursieve Filters (**IIR** = Infinite Impulse Response):

- Uitgang afhankelijk van huidige en voorgaande ingangen en voorgaande uitgangen
- De noemer van $H(\Omega)$ is niet constant (afhankelijk van Ω).

Recursieve filters zijn vaak effectiever omdat er meestal minder coëfficiënten nodig zijn:

- Reductie van rekenwerk (DSP, PLC, microcontroller efficiënter)
- Minder vertraging tussen in- en output (signaalverwerking sneller)

Z-domein

- In veel DSP toepassingen wordt vaak het zogenaamde Z-domein gebruikt.
- Het Z-domein maakt (o.a.) het ontwerpen van niet-recursieve en recursieve filters gemakkelijker.
- Het Z-domein is een vorm van het frequentiedomein.

Praktisch komt het hier op neer:

Fourier-frequentiedomein

$e^{j\Omega}$

$\leftrightarrow$

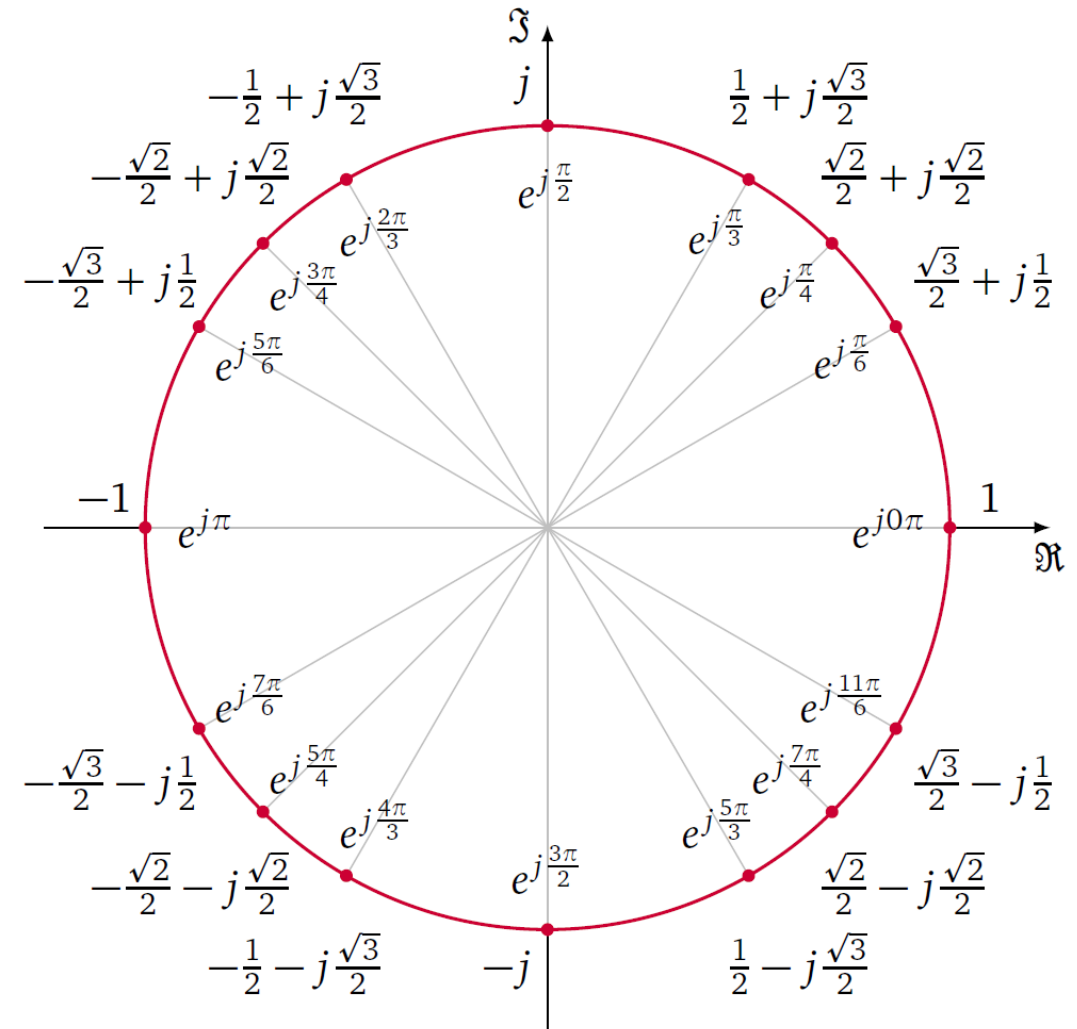
Z-domein

$\leftrightarrow$

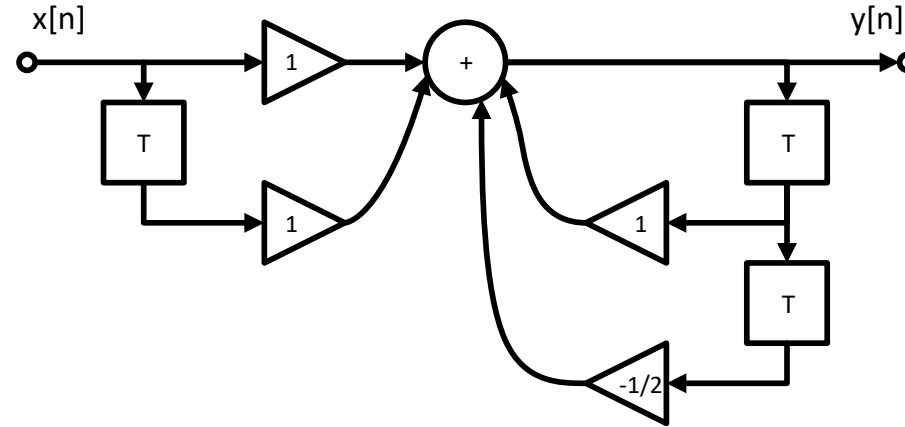
z

Verband tussen f , Ω en $z = e^{j\Omega}$

f	Ω	z	opmerking
0	0	1	gelijkspanningscomponent
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\frac{1}{4}f_s$	$\frac{1}{2}\pi$	j	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\frac{1}{2}f_s$	π	-1	Niquist-frequentie
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\frac{3}{4}f_s$	$1\frac{1}{2}\pi$	$-j$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
f_s	2π	1	samplefrequentie



Z-domein



$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\Omega}}$$

Onder de Z-transformatie: $e^{j\Omega} \rightarrow z$ gaat deze overdrachtsfunctie $H(\Omega)$ over in:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Polen en nulpunten (1/2)

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

- Voor welke z wordt $H(z)$ groot?

$$z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j \quad \vee \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

- Voor welke z wordt $H(z)$ klein?

$$z^2 + z = 0$$

$$z = 0 \quad \vee \quad z = -1$$

Polen en nulpunten (2/2)

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

- Dit systeem heeft zogenaamde **POLEN** en **NULPUNTEN** in het Z-domein, waardoor de overdracht van dit filter wordt bepaald!

- Algemene vorm:

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots}$$

- Polen en nulpunten zijn (vaak) complexe getallen.
- De polen (**p**oles) p_n en nulpunten (**z**eros) z_n van dit systeem zijn:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j, \quad p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -1.$$

Effect van één pool

Stel we hebben een overdrachtsfunctie met slechts één pool:

$$H(z) = \frac{1}{z - p_1}$$

Het corresponderende LTI-filter heeft de differentievergelijking (leidt dit zelf af!):

$$y[n] = p_1 y[n - 1] + x[n - 1]$$

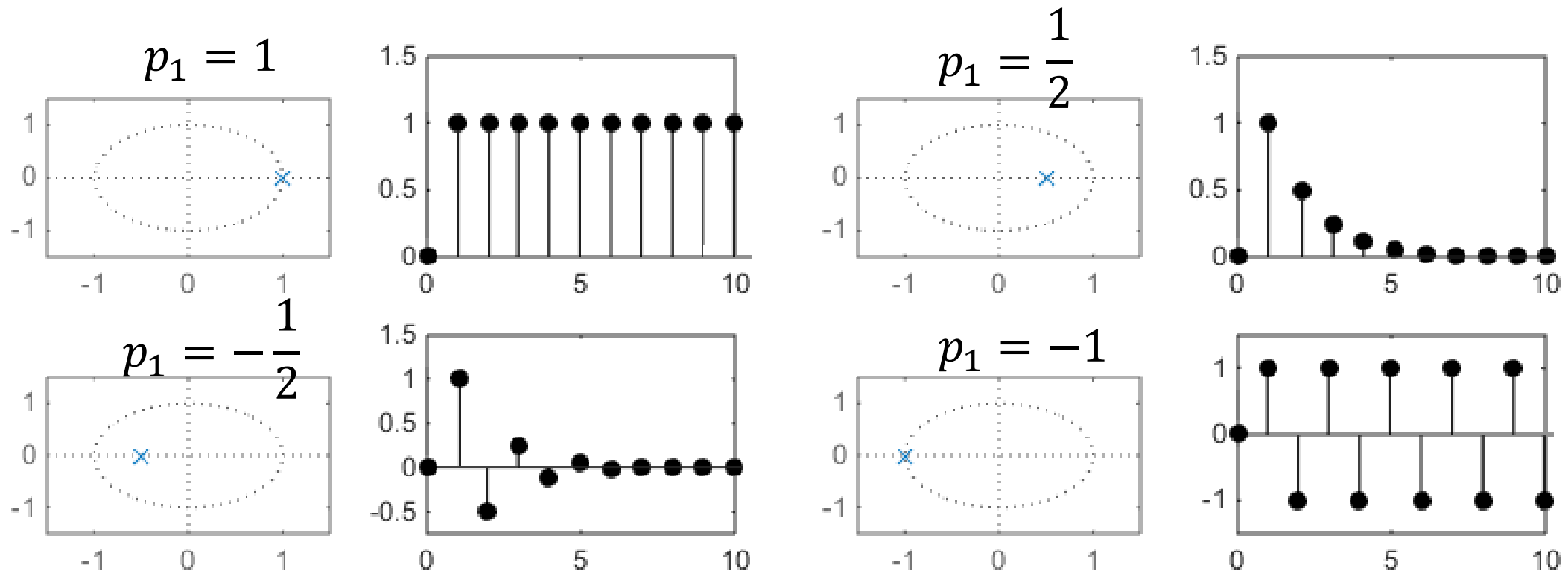
p_1 is dus reëel en het systeem is stabiel als $|p_1| < 1$.

Ligging pool en gedrag

Een filter met overdrachtsfunctie:

$$H(z) = \frac{1}{z - p_1} \quad \leftrightarrow \quad y[n] = p_1 y[n-1] + x[n-1]$$

heeft de volgende impulsresponsie $x[n] = \delta[n]$:



Effect van één pool en een nulpunt in de oorsprong

Het systeem met één pool heeft een onnodige vertraging van 1 sampleperiode. Dit kunnen we voorkomen door een nulpunt toe te voegen in de oorsprong ($z_1 = 0$):

$$H(z) = \frac{z}{z - p_1}$$

Het corresponderende LTI-filter heeft de differentievergelijking (leidt dit zelf af!):

$$y[n] = p_1 y[n - 1] + x[n]$$

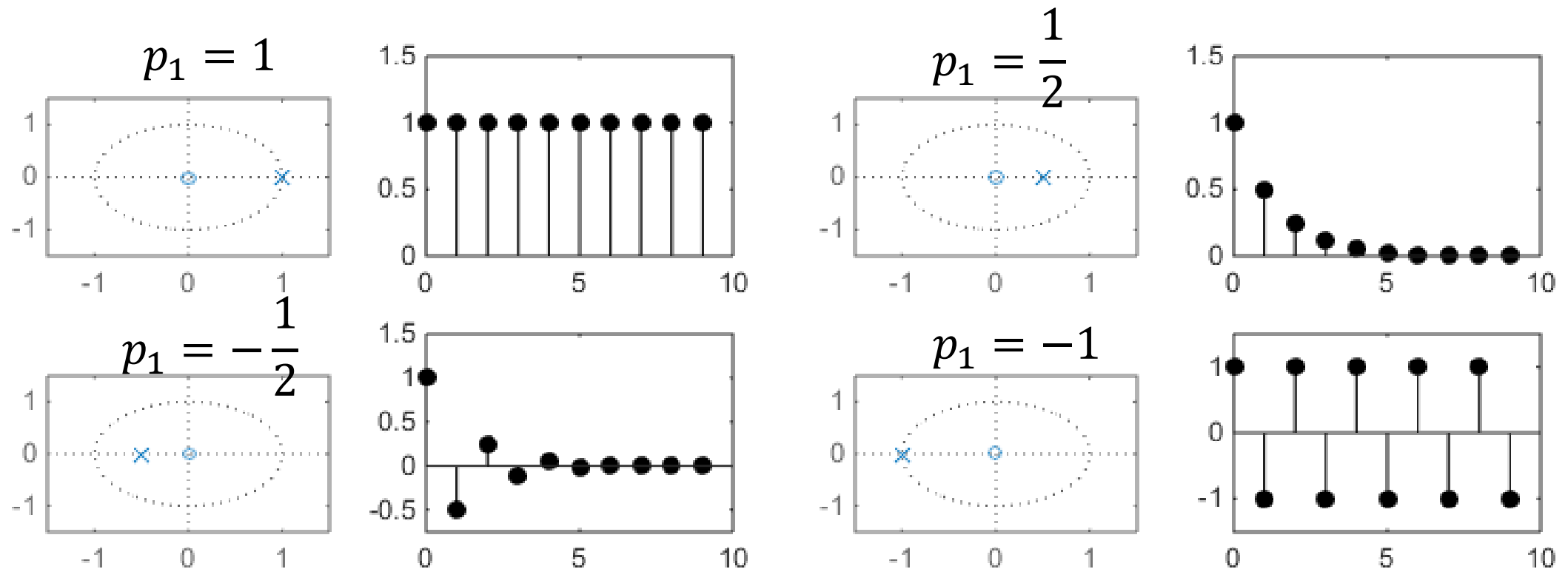
p_1 is dus reëel en het systeem is stabiel als $|p_1| < 1$.

Ligging pool en gedrag

Een filter met overdrachtsfunctie:

$$H(z) = \frac{z}{z - p_1} \leftrightarrow y[n] = p_1 y[n - 1] + x[n]$$

heeft de volgende impulsresponsie $x[n] = \delta[n]$:



Effect van twee polen

Stel we hebben een overdrachtsfunctie met twee polen:

$$H(z) = \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Het corresponderende LTI-filter heeft de differentievergelijking (leidt dit zelf af!):

$$y[n] = (p_1 + p_2) y[n - 1] - p_1 p_2 y[n - 2] + x[n - 2]$$

$p_1 + p_2$ en $p_1 p_2$ zijn dus reëel, dat kan alleen als $p_1 = \overline{p_2}$ ([complex geconjugeerde](#)).

Dus als: $p_1 = r e^{j\theta}$ dan: $p_2 = r e^{-j\theta}$

$$y[n] = 2r \cos \theta y[n - 1] - r^2 y[n - 2] + x[n - 2]$$

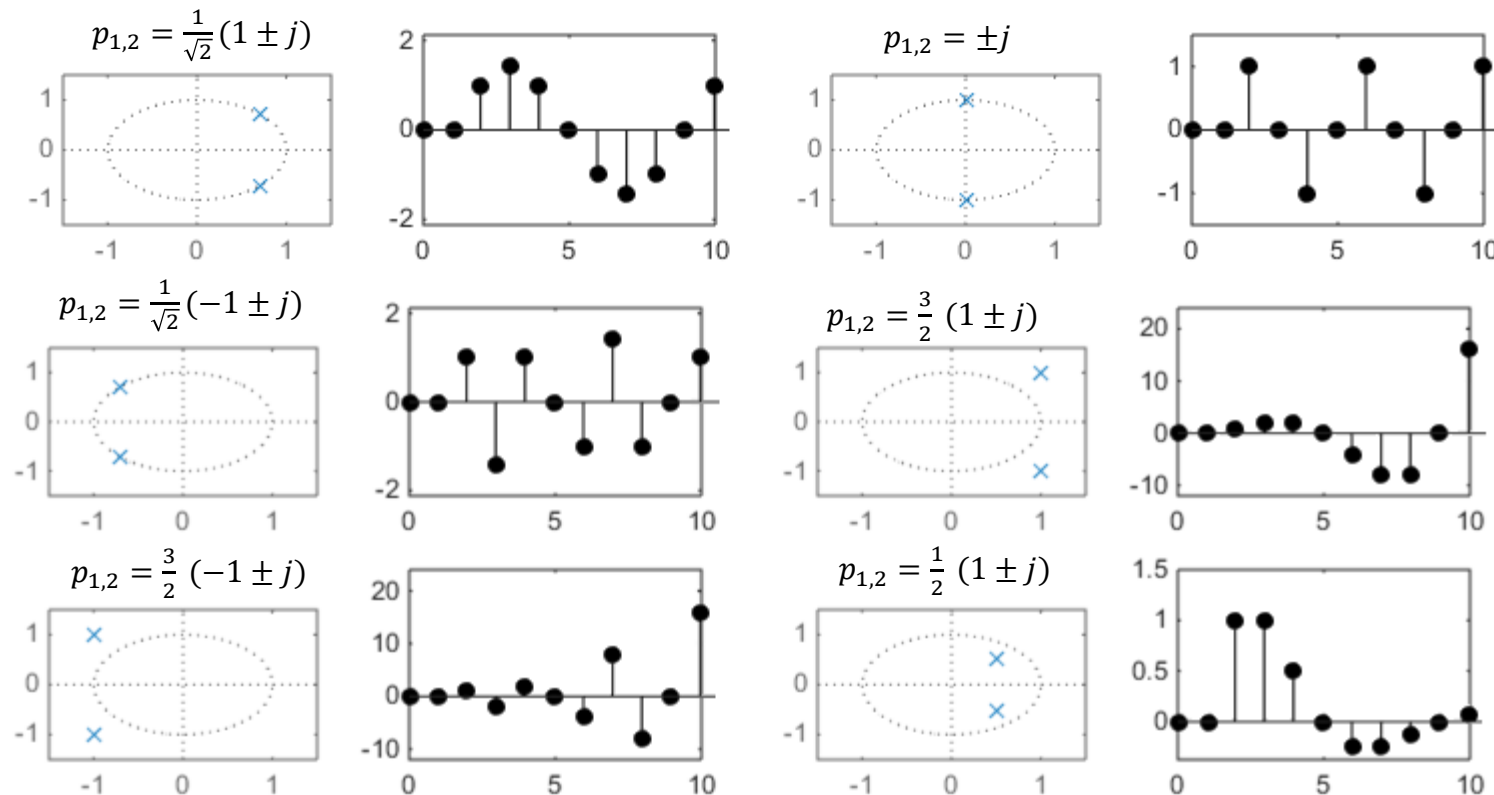
Het systeem is stabiel als $|r^2| < 1$ dus als $|r| < 1$ dus als $|p_1| < 1$.

Ligging polen en gedrag

$$H(z) = \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)} \leftrightarrow$$

$$y[n] = (p_1 + p_2) y[n - 1] - p_1 p_2 y[n - 2] + x[n - 2]$$

heeft de volgende impulsresponsie $x[n] = \delta[n]$:



Effect van 2 polen en 2 nulpunten in de oorsprong

Het systeem met 2 polen heeft een onnodige vertraging van 2 sampleperiode. Dit kunnen we voorkomen door 2 nulpunten toe te voegen in de oorsprong ($z_1 = z_2 = 0$):

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Het corresponderende LTI-filter heeft de differentievergelijking (leidt dit zelf af!):

$$y[n] = (p_1 + p_2) y[n - 1] - p_1 p_2 y[n - 2] + x[n]$$

Effect van één nul en een pool in de oorsprong

Stel we hebben een overdrachtsfunctie met slechts één nulpunt:

$$H(z) = \frac{z - z_1}{1}$$

Het corresponderende LTI-filter heeft de differentievergelijking (leidt dit zelf af!):

$$y[n] = x[n + 1] + z_1 x[n]$$

Dit systeem is niet causaal. We maken het causaal door een pool toe te voegen in de oorsprong ($p_1 = 0$):

$$H(z) = \frac{z - z_1}{z} \Leftrightarrow y[n] = x[n] + z_1 x[n - 1]$$

z_1 is dus reëel en het systeem is altijd stabiel

Effect van twee nulpunten

Stel we hebben een *causale* overdrachtsfunctie met twee nulpunten:

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z^2}$$

Het corresponderende LTI-filter heeft de differentievergelijking (leidt dit zelf af!):

$$y[n] = x[n] - (z_1 + z_2) x[n - 1] + z_1 z_2 x[n - 2]$$

$z_1 + z_2$ en $z_1 z_2$ zijn dus reëel, dat kan alleen als $z_1 = \overline{z_2}$ ([complex geconjugeerde](#)).

Dus als: $z_1 = r e^{j\theta}$ dan: $z_2 = r e^{-j\theta}$

$$y[n] = x[n] - 2r \cos \theta x[n - 1] - r^2 x[n - 2]$$

Het systeem is altijd stabiel.

Effect van een pool in het frequentiedomein

Stel we hebben nu een overdrachtsfunctie in het Z-domein:

$$H(z) = \frac{z}{z - p_1} \Leftrightarrow H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - p_1}, \quad p_1 \in \mathbb{R} \wedge |p_1| < 1$$

De versterkingsfactor:

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\cos(\Omega) - p_1)^2 + \sin^2(\Omega)}}$$

Maximale versterking bij $\Omega = 0$ als $p_1 > 0$ of bij $\Omega = \pi$ als $p_1 < 0$

$$|H(\Omega)|_{\max} = \frac{1}{1 - |p_1|}$$

Versterking gaat naar oneindig voor $|p_1| \rightarrow 1$

Effect van een nulpunt in het frequentiedomein

Stel we hebben nu een overdrachtsfunctie in het Z-domein:

$$H(z) = \frac{z - z_1}{z} \Leftrightarrow H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - z_1}{e^{j\Omega}}, \quad z_1 \in \mathbb{R}$$

De versterkingsfactor:

$$|H(\Omega)| = \sqrt{(\cos(\Omega) - z_1)^2 + \sin^2(\Omega)}$$

Maximale verzwakking bij $\Omega = 0$ als $z_1 > 0$ of bij $\Omega = \pi$ als $z_1 < 0$

$$|H(\Omega)|_{\min} = 1 - |z_1|$$

Versterking gaat naar nul voor $|z_1| \rightarrow 1$

Effect van meerdere polen en nulpunten in het frequentiedomein

- Dit wordt als snel een lastige rekenklus.
- In de praktijk gebruiken we computerprogramma's om het effect van meerdere polen en nulpunten te bestuderen:
 - Een eenvoudig matlabscript is beschikbaar op de wiki: zpgui.m en plot_z_surface.m
 - Een uitgebreid programma is te vinden op: <http://www.micromodeler.com/dsp/>

Polen-Nulpunten-Beeld

- Pool **versterkt** signalen met frequenties in de buurt van de hoek die bij deze pool hoort.
- Nulpunt **onderdrukt** signalen met frequenties in de buurt van de hoek die bij dit nulpunt hoort.
- Hoe dichterbij een pool of nulpunt bij de eenheidscirkel komt, hoe **selectiever** de frequentie wordt waarop de pool/nulpunt opereert.
- We kunnen met behulp van het Z-domein polen en nulpunten plaatsen om recursieve filters te ontwerpen!

Complexe polen of nulpunten

De polen of de nulpunten van de overdrachtsfunctie zijn in het algemeen complexe getallen.

De beschouwde filters zijn reëel:

- zowel het ingangssignaal $x[n]$ als het uitgangssignaal $y[n]$ zijn reële functies van de discrete tijd n .

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

Daarom kunnen complexe polen of nulpunten alleen in complex-toegevoegde paren voorkomen:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z^2 - a_1)z - a_2} = \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Als $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, dan vormen ze een paar van complex-toegevoegden:

$$p_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{a_2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}$$

Z-transformatie

- Om in het Z-domein te komen voeren we de volgende transformatie uit:

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

De Z-getransformeerde van de eenheidspuls $\delta[n]$:

$$\delta[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1$$

De Z-getransformeerde van de stapfunctie $u[n]$:

$$u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Vergelijk met tabel 4.1 (pag. 142)!

Belangrijke eigenschappen Z-transformatie

Tijdverschuiving:

$$x[n - n_0] \cdot u[n - n_0] \xrightarrow{Z} X(z) \cdot z^{-n_0}$$

- *Naar voren schuiven in de tijd met n_0 , is vermenigvuldigen met z^{-n_0} in het Z-domein.*

Convolutie:

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{Z} X_1(z) \cdot X_2(z)$$

- *Convolutie in het tijddomein is vermenigvuldigen in het Z-domein.*

Lineariteit:

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

- *De Z-transformatie is een lineaire transformatie.*

Voorbeeld

$$y[n] = 1,5 \cdot y[n-1] - 0,85 \cdot y[n-2] + x[n]$$

Bepaal de overdracht $H(z)$ van dit systeem:

Toepassen van lineariteit en tijdverschuiving:

$$Y(z) = 1,5 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} - 0,85 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} + X(z)$$

Alle Y links en X rechts:

$$Y(z) - 1,5 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} + 0,85 \cdot Y(z) \cdot z^{-2} = X(z)$$

$H(z)$ oplossen:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 1,5 \cdot z^{-1} + 0,85 \cdot z^{-2}}$$

Opgave

- Uitgang systeem:

$$y[n] = y[n - 1] + 2 \cdot y[n - 2] + 2 \cdot x[n - 2] + x[n]$$

- Bepaal de overdrachtsfunctie $H(z)$

Inverse Z-transformatie: inspectiemethode

Golfvorm	Niet-periodiek signaal $x[n]$	Spectrum $X(z)$
Eenheidsimpuls	$\delta[n]$	1
Eenheidsstap	$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
Helling	$r[n] = n \cdot u[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
Macht	$a^n \cdot u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
Inverse macht	$(1-a^n) \cdot u[n]$	$\frac{z(1-a)}{(z-a)(z-1)}$
Cosinus	$\cos(n \cdot \Omega_0) \cdot u[n]$	$\frac{z(z - \cos(\Omega_0))}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Omega_0) + 1}$
Sinus	$\sin(n \cdot \Omega_0) \cdot u[n]$	$\frac{z \cdot \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Omega_0) + 1}$
Gedempte sinus	$a^n \cdot \sin(n \cdot \Omega_0) \cdot u[n]$	$\frac{a \cdot z \cdot \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2 \cdot a \cdot z \cdot \cos(\Omega_0) + a^2}$

Inspectiemethode: gebruik tabel

- Voorbeeld: Stel:

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

Dan:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Inverse Z-transformatie: breuksplitsing

Bepaal de differentievergelijking behorende bij:

$$H(z) = \frac{1}{z(z-1)(2z-1)}$$

Met behulp van breuksplitsen vinden we:

$$H(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{4}{2z-1}$$

Deze termen staan niet in tabel, maar wel: 1 , $\frac{z}{z-1}$ en $\frac{z}{z-a}$

$$H(z) = z^{-1} \left(1 + \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right)$$

$$h[n] = \delta[n-1] + u[n-1] - 2 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} \cdot u[n-1]$$

Vorbereiding week 6

- [Huiswerk week 5 les 2](#)
- Doornemen presentatie week 5
- Opgaven: 4.2, 4.6b, 4.8a t/m c, 4.9b, 4.11a en c
- [Oefenopgaven week 5](#): 3.5.5, 3.5.6A, 3.5.7A en C
- Lezen:
 - §4.1 Analyse in het frequentiedomein: de Z-transformatie
 - §4.2 Definitie en eigenschappen van de Z-transformatie
 - §4.3.1 Beschrijving van signalen en systemen met polen en nulpunten
 - §4.3.2 Geometrische evaluatie van de Fouriertransformatie in het Z-vlak (19 pagina's)
- Extra verdieping: opgaven: 4.1, 4.6a, 4.8d, 4.9a, 4.11b, 4.12
- Extra verdieping: [Oefenopgaven week 5](#): 3.5.6B en C, 3.5.7B