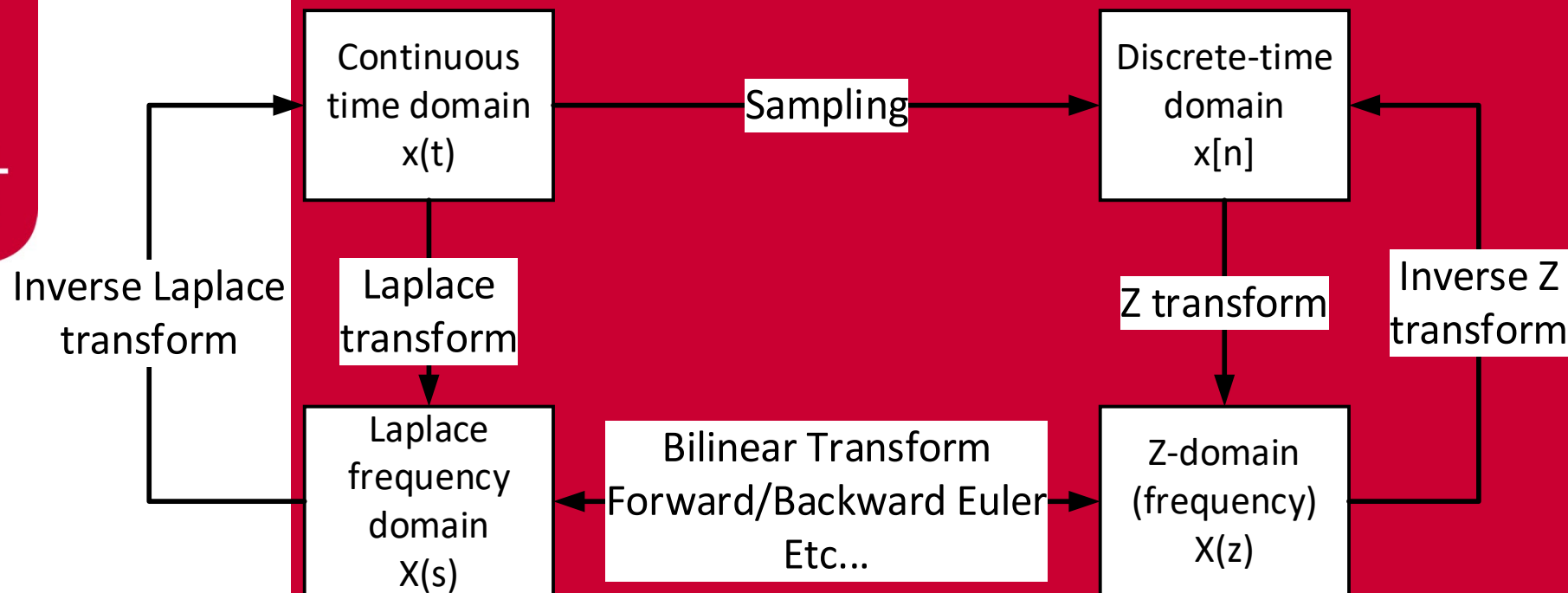




ELEDIS10

# Digitale Systemen

# Ontwerpen van filters

---

- We hebben gezien dat we met behulp van Fourier-analyse periodieke en niet-periodieke discrete signalen efficiënt kunnen beschrijven in het frequentie of Z-domein.
- Vandaag wordt deze technologie gebruikt om systematisch filters te ontwerpen.
- Filters worden gekarakteriseerd door de overdrachtsfunctie:  $H$

# Polen en nulpunten in het Z-domein

- We kunnen deze tekenen in het zogenaamde Z-vlak:
  - Het Z-vlak bevat de eenheidscirkel.
  - De positie van een pool  $p_1$  wordt met een kruisje aangeduid.
  - De positie van een nulpunt  $z_1$  wordt met een rondje aangeduid.
- Effect van polen en nulpunten:
  - Een pool  $p_1 = |p_1|e^{j\alpha_1}$  **versterkt** de signalen van de frequenties die bij de hoek  $\alpha_1$  van de pool horen.
  - Een nulpunt  $z_1 = |z_1| e^{j\beta_1}$  **verzwakt** de signalen van de frequenties die bij de hoek  $\beta_1$  van het nulpunt horen.

# Type filters

---

Er bestaan verschillende type filters:

- **Laagdoorlaatfilter**

laat signalen met lage frequenties door

- **Hoogdoorlaatfilter**

laat signalen met hoge frequenties door

- **Banddoorlaatfilter**

laat signalen binnen een bepaald frequentiebereik door

- **Bandstopfilter**

houdt signalen binnen een bepaald frequentiebereik tegen

Het aantal polen of nulpunten (grootste van beiden) van de overdrachtsfunctie wordt de **orde** van een filter genoemd.

# 2<sup>de</sup> orde banddoorlaatfilters

Een tweede orde banddoorlaatfilter worden door een aantal grootheden gekarakteriseerd:

- **Kritische frequentie  $\Omega_A$ :**

frequentie waarbij de versterking  $|H(\Omega)|$  maximaal is.

- **Maximale versterking  $|H(\Omega_A)|$ :**

de versterking bij de kritische frequentie  $\Omega_A$ .

- **Bandbreedte  $B = \Omega_C - \Omega_B$ :**

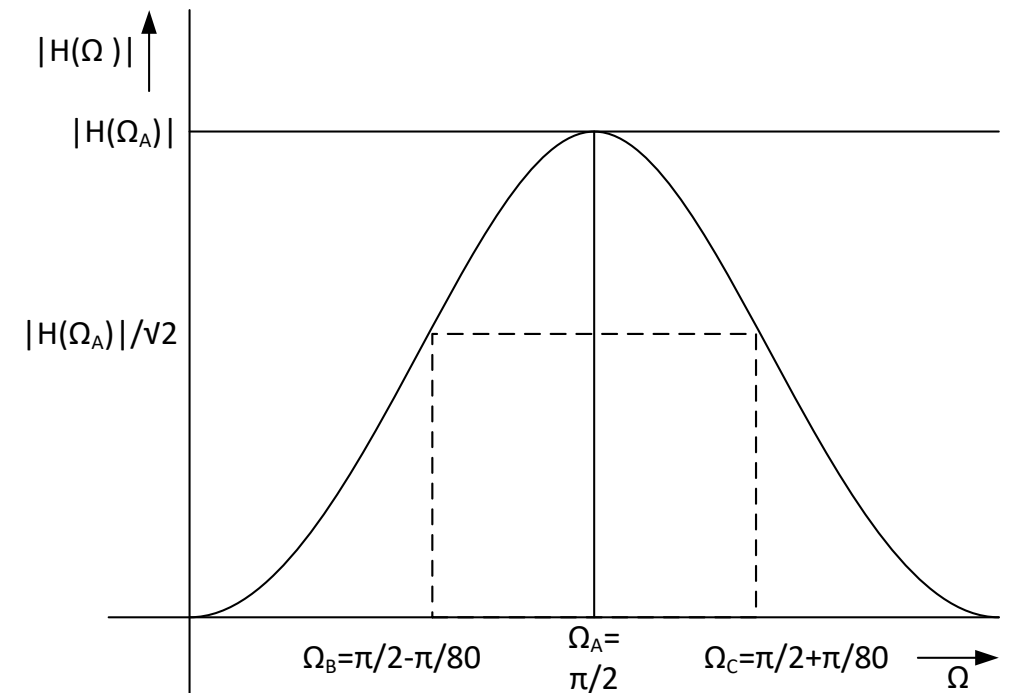
verschil tussen de kantelfrequenties  $\Omega_{B,C}$  waar de versterking -3dB (een factor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ) kleiner is dan de maximale versterking:

$$|H(\Omega_{B,C})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\Omega_A)|, \quad \Omega_B = \Omega_A - \frac{B}{2}, \quad \Omega_C = \Omega_A + \frac{B}{2}.$$

# Voorbeeld: ontwerp een 2<sup>de</sup> orde banddoorlaatfilter

Ontwerp een stabiel recursief tijd-discreet 2<sup>de</sup> orde banddoorlaatfilter dat voldoet aan de volgende eisen:

- 1) Totale onderdrukking bij:  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \pi$
- 2) Doorlaatband met max bij:  $\Omega_A = \frac{\pi}{2}$
- 3) Maximale versterking: 1
- 4) Bandbreedte (-3dB punten):  $B = \frac{\pi}{40}$



# Banddoorlaatfilter ontwerp voorbeeld

**Oplossing:** De condities 1) en 2) leiden tot eisen aan  $H(z)$ :

1) **Totale onderdrukking bij  $0, \pi \Rightarrow$**

Nulpunten bij  $z_1 = e^{j0} = 1$  en  $z_2 = e^{j\pi} = -1$ .

2) **Doorlaatband met maximum bij:  $\Omega_A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$**

Er is een pool met  $p_1 = p e^{\frac{j\pi}{2}} = j p$ ,  $p \in \mathbb{R}$  en  $p < 1$ .

–Complexe polen in paren  $\Rightarrow$  Er is een tweede pool  $p_2 = -j p$ .

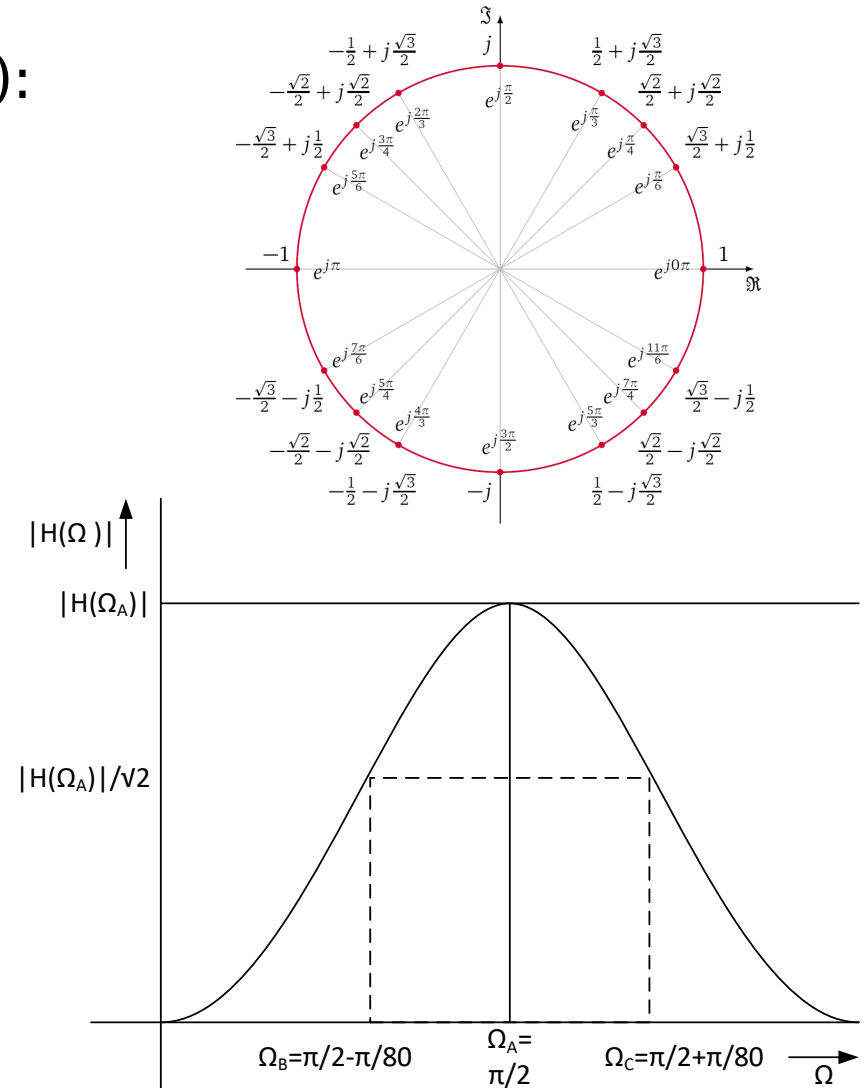
–Twee polen en twee nulpunten, dus 2<sup>de</sup> orde filter!

**Dus gezocht:** Een functie  $H(z)$  met:

–Nulpunten bij  $z_1 = 1$  en  $z_2 = -1$ .

–Polen bij  $p_1 = j p$  en  $p_2 = -j p$ .

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = K \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - jp)(z + jp)} = K \frac{z^2 - 1}{z^2 + p^2}$$



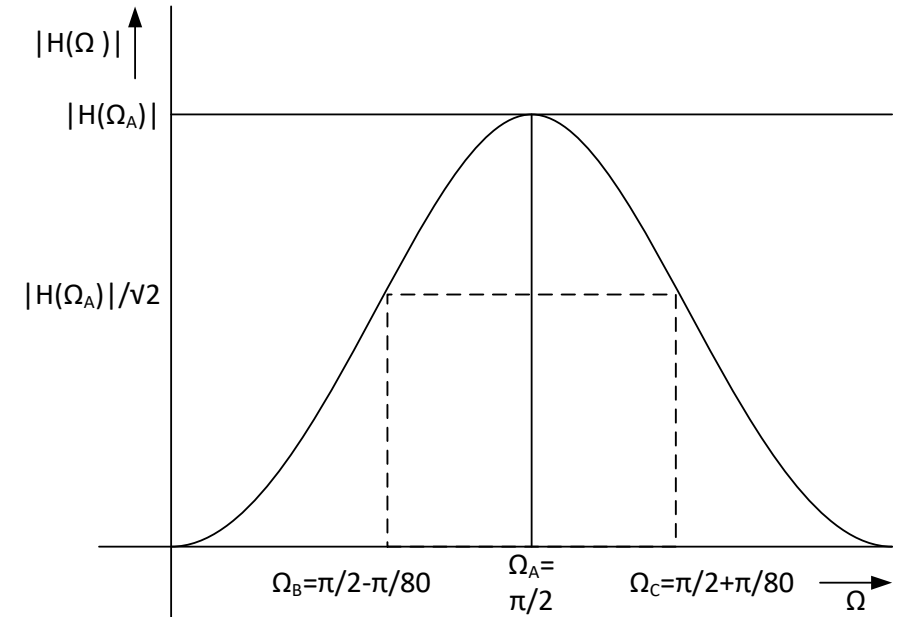
<http://www.micromodeler.com/dsp/>

# Banddoorlaatfilter ontwerp voorbeeld

$$H(z) = K \frac{z^2 - 1}{z^2 + p^2}$$

Twee eisen nog niet meegenomen:

**3) Maximale versterking bij  $\Omega_A = \frac{\pi}{2}$  is 1:**



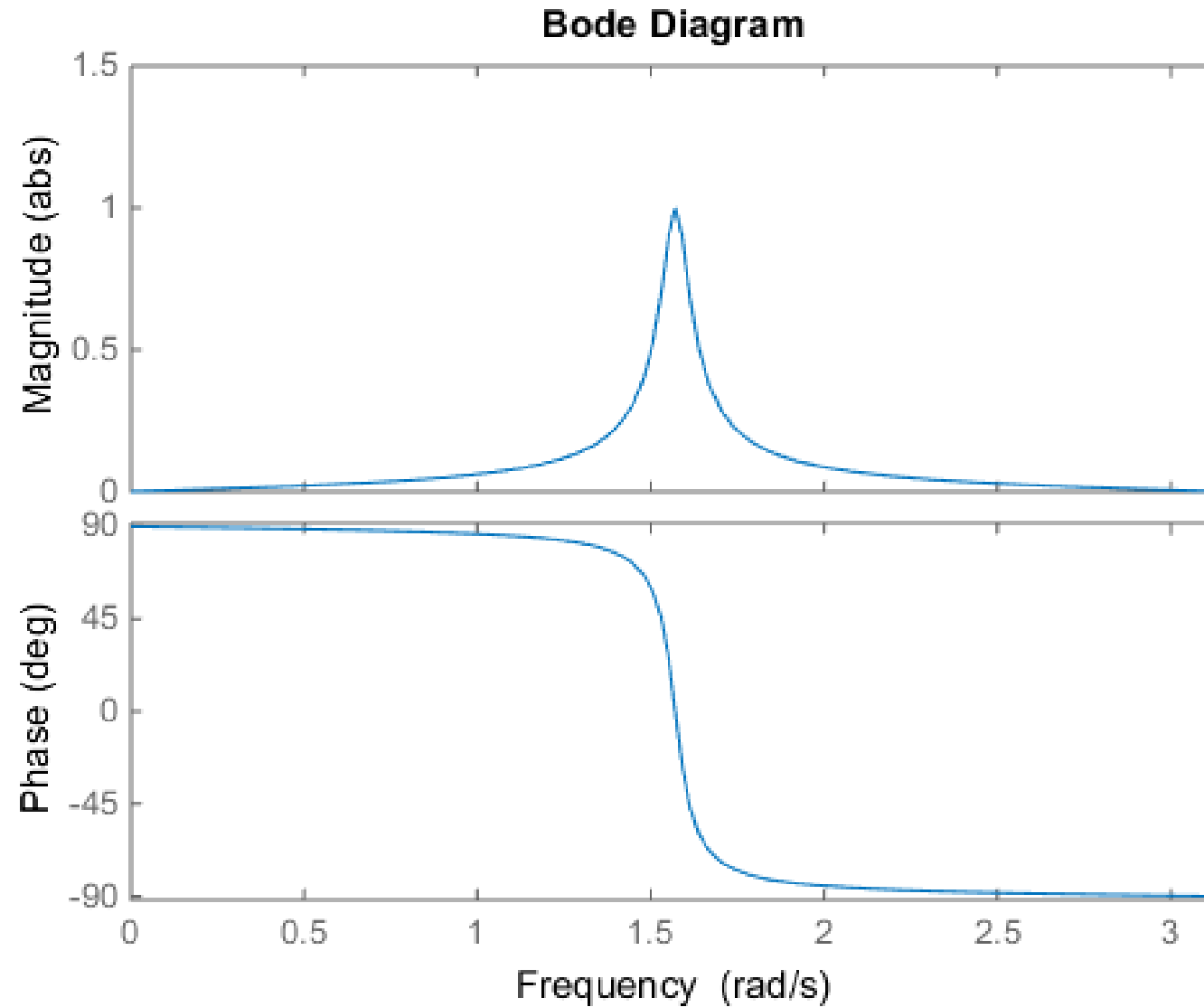
$$\left| H_{\Omega} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right| = 1 \Rightarrow \left| H_z \left( e^{j\frac{\pi}{2}} \right) \right| = |H_z(j)| \Rightarrow \left| K \frac{j^2 - 1}{j^2 + p^2} \right| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2} (1 - p^2)$$

**4) Bandbreedte  $B$ :**  $\Omega_B = \Omega_A - \frac{B}{2}$ ,  $\Omega_C = \Omega_A + \frac{B}{2}$

$$|H(\Omega_{B,C})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left| H \left( \Omega_A \pm \frac{1}{2} B \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos B = \frac{2p^2}{1 + p^4}$$

[Huiswerk WK6.pdf](#)

# Bode diagram



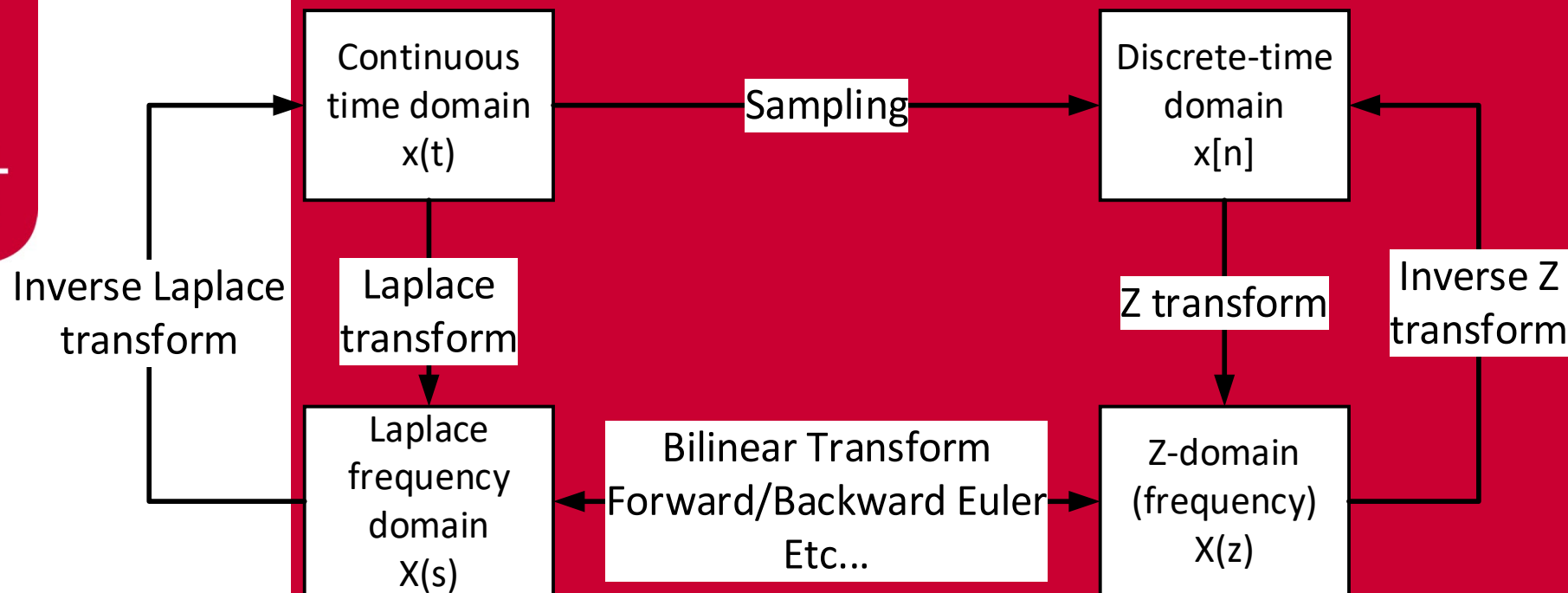
# Bespreken Huiswerkopdrachten week 5

---

# Vorbereiding les 2

---

- [Huiswerk week 6 les 1](#)
- Doornemen presentatie week 6
- Opgave: 4.14 (zonder faseoverdracht)
- [Oefenopgaven week 6](#): 3.6.1 en 3.6.3
- Lezen:
  - §4.3.3 Eerste- en tweede-orde LTI-systemen
  - §6.1 Het ontwerpen van recursieve digitale filters; Inleiding
  - §6.2 Eenvoudige ontwerpmethoden op basis van polen en nulpunten (15 pagina's)
- Extra verdieping: opgaven: 4.13, 4.14 (faseoverdracht), 4.15
- Extra verdieping: [Oefenopgaven week 6](#): 3.6.2



ELEDIS10

# Digitale Systemen

# Vorige week

---

Een LTI-systeem wordt beschreven door een overdrachtsfunctie:

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots}$$

De overdrachtsfunctie bepaalt zowel de versterking  $|H(z)|$  als de fasedraaiing  $\Phi_H(z)$

$$H(z) = |H(z)| e^{j\Phi_H}$$

met:

$$z = e^{j\Omega}$$

# Finite Impulse Response vs. Infinite Impulse Response

- De output van een FIR-filter is een functie van alleen:
  - Huidige input en voorgaande inputs

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n - k]$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}$$

- IIR-filters bevatten terugkoppeling / recursie:
  - Huidige input en voorgaande inputs en voorgaande output

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n - k] + \sum_{k=1}^N a_k \cdot y[n - k]$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}}$$

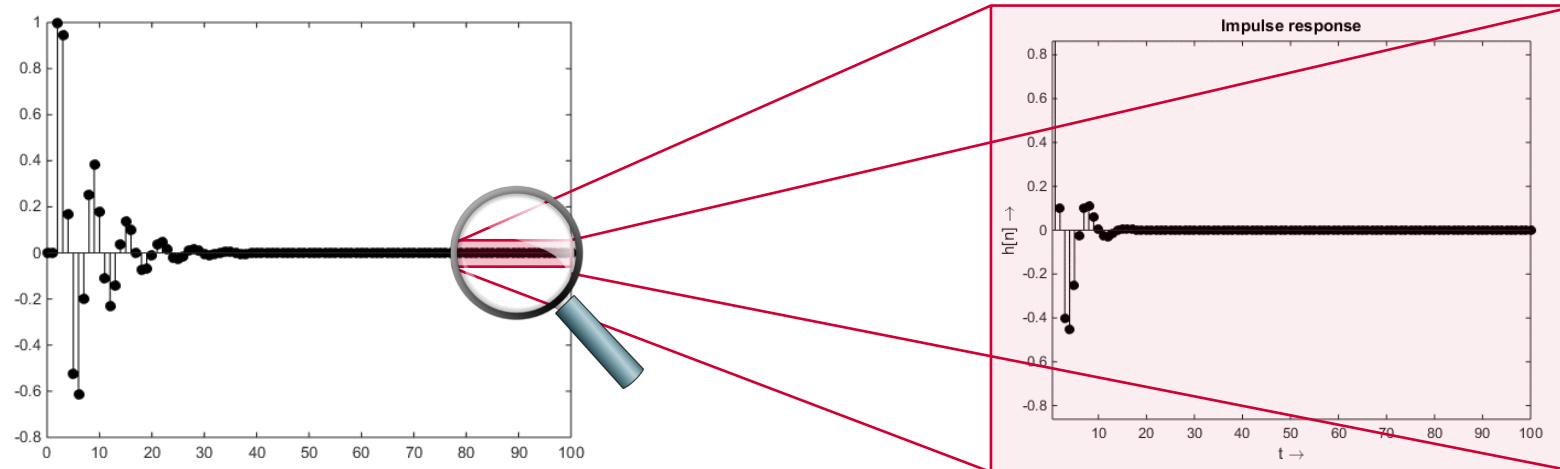
In het boek wordt deze formule gebruikt (zie formule 6.2). Meestal wordt de formule gebruikt waarbij hier een – i.p.v. een + wordt gebruikt. Zie: [https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite\\_impulse\\_response](https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_impulse_response) (ook in [Matlab](#) is dat zo)

# Finite Impulse Response vs. Infinite Impulse Response

- FIR-filters hebben een eindige impulsresponsie:
  - D.w.z. na eindige tijd wordt de impulsresponsie exact gelijk aan 0

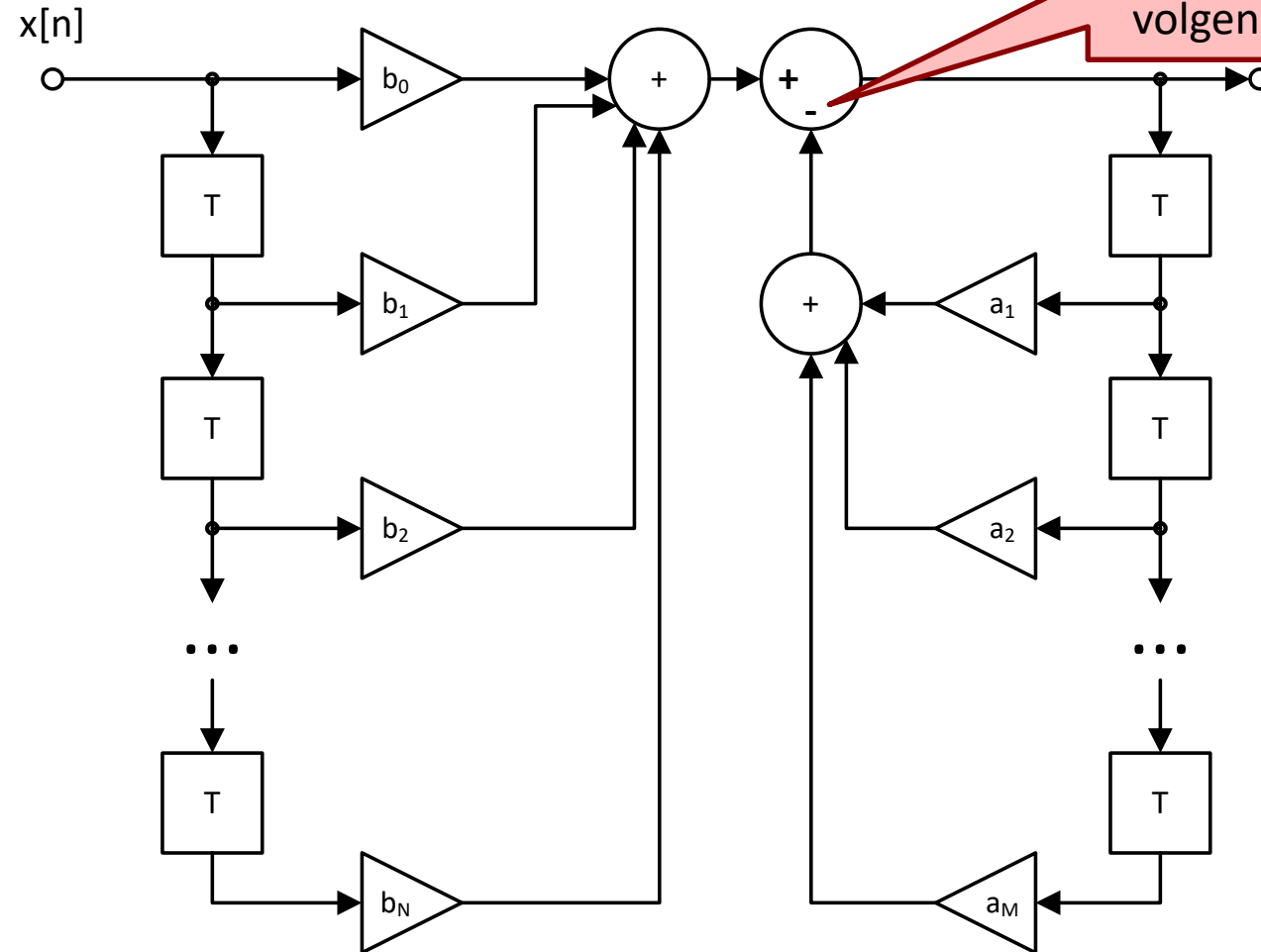
$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x[n - k]$$

- IIR-filters hebben een oneindige impulsresponsie:
  - D.w.z. zelfs na oneindig lang wachten is de impulsresponsie nooit exact 0



# Structuur van een IIR

Volgens het boek moet dit een + zijn, maar volgens Matlab een -.



- Deze structuur wordt de Direct Form I structuur genoemd
- Er bestaan ook andere (betere) structuren (meer hierover in kwartaal 4)
- Vaak wordt alles opgedeeld in tweede-orde secties (BiQuads)

# Ontwerpmethoden voor IIR-filters

---

- Intuïtief plaatsen polen en nulpunten
  - Vorige les gebruikt om een bandpass filter te ontwerpen
- Afleiden van analoge varianten filters (analog prototyping)

# Recyclen van analoge filters

## Converteren van analoge naar digitale filters:

– Impuls-invariantie:

$$h_A(t) \leftrightarrow h_D[n]$$

– Bilineaire transformatie:

$$H_A(s) \leftrightarrow H_D(z)$$

–  $H_A(s)$  : De Laplace getransformeerde van  $h_A(t)$

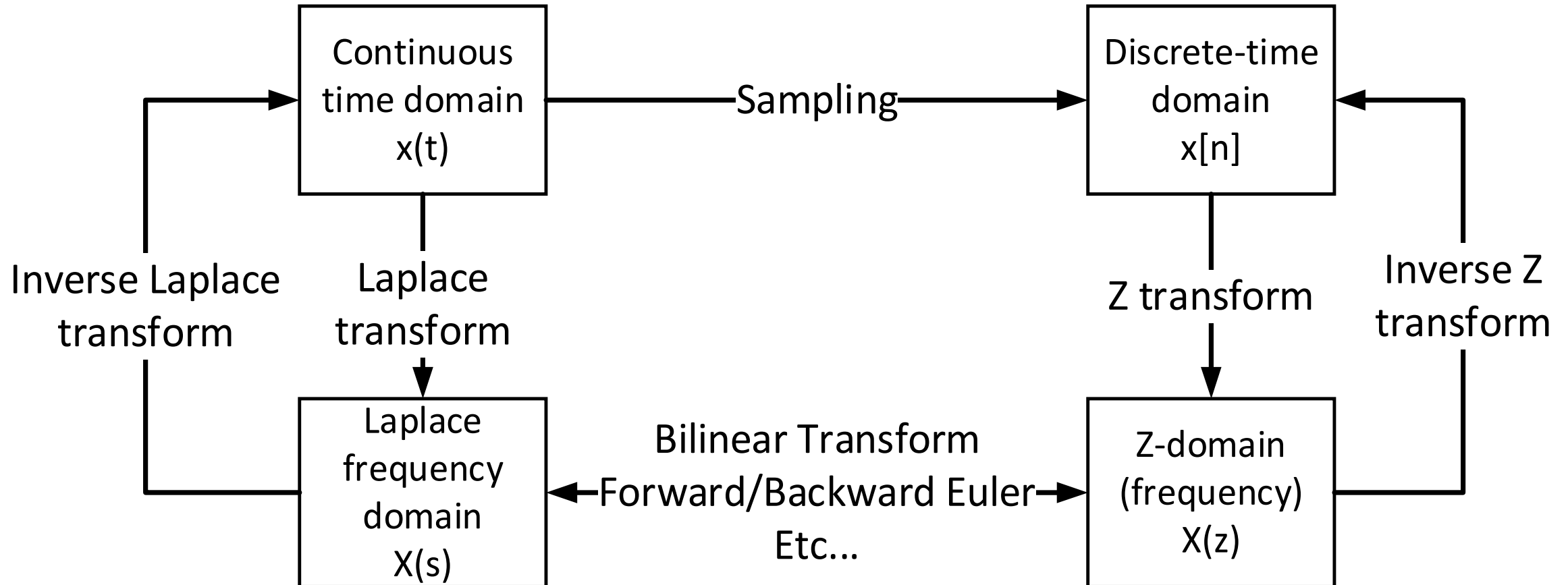
–  $H_D(z)$  : De Z-getransformeerde van  $h_D[n]$

– Relatie tot (hoek)frequenties

–  $s = j\omega$  met  $\omega = 2\pi f$

–  $z = e^{j\Omega}$  met  $\Omega = \frac{2\pi f}{f_s}$

# Recyclen van analoge filters



# Impuls-invariantie

---

- Overgang van het continue tijdsdomein  $t$  naar het discrete  $n$
- Sample de impulsresponsie  $h_A(t)$  van een analoog filter:

$$h_D[n] = h_A(nT_S)$$

–  $f_S = \frac{1}{T_S}$  de sample frequentie

– Hierdoor kan aliasing ontstaan

# Bilineaire transformatie

- Overgang van het continue s-domein naar het discrete Z-domein:

$$s = \frac{2}{T_S} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1 + s \frac{T_S}{2}}{1 - s \frac{T_S}{2}}$$

- Relatie tussen de frequenties

$$e^{j\Omega} = \frac{1 + j \omega \frac{T_S}{2}}{1 - j \omega \frac{T_S}{2}}$$

# Recyclen van standaard analoge filters

---

## Converteren van analoge naar digitale filters:

- Impuls-invariantie
- Bilineaire transformatie

## Bekende standaard analoge filter typen:

- Butterworth
  - Chebyshev I & II
  - Elliptic
- 
- MATLAB kan gebruikt worden om zulke filters te ontwerpen
  - Zie [Filter types wk6.pptx](#)

# Vorbereiding week 7

---

- [Huiswerk week 6 les 2](#)
- Doornemen presentatie week 6
- Lezen:
  - §6.3 Filters afgeleid uit analoge ontwerpmethoden
  - §6.3.1 De bilineaire Z-transformatie: Butterworth- en Chebyshev-filters
  - §6.3.2 Impuls-invariante filters
  - (22 pagina's)
- Volgende week: Matlabopdracht 2
- Laatste week: geen nieuwe stof. Behandelen opgaven.