



Instituut voor
Engineering en Applied Science

Naam deelnemer:

Studentnummer:

0							
---	--	--	--	--	--	--	--

Opleiding	:	ELE
Cursusnaam	:	Digitale Systemen
Cursuscode	:	ELEDIS10
Tentamenperiode	:	OEFENTOETS
Toetsdatum	:	
Begintijd	:	
Duur (in minuten)	:	135 min
Docent	:	
Collegiale review	:	
Cesuur	:	45 %
Aantal pagina's	:	7 (exclusief voorblad, exclusief formuleblad)
Toetsen inleveren	:	Nee
Kladpapier inleveren	:	Nee

Toegestande hulpmiddelen:

- Normale rekenmachine.

**Overige
opmerkingen:**

- Indien een antwoord niet wordt verklaard, worden geen punten toegekend.
- Voor taalfouten worden geen punten afgetrokken.

1. Stel dat het signaal:

$$x(t) = -1 + 4 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

gesampled moet worden, waarbij $T = 1$ ms.

- a. [2 punten]** (Leerdoel 1) Leg uit hoe de samplefrequentie f_s gekozen moet worden om er voor te zorgen dat er geen informatieverlies van het signaal optreed en bepaal deze frequentie voor het bovenstaande signaal.

Antwoord: Voor de sinusterm geldt $f = \frac{1}{T} = 1000$ Hz
Voor de cosinusterm geldt $f = \frac{1}{2T} = 500$ Hz
 $f_s > 2 \cdot f_{\max} = 2000$ Hz

- b. [3 punten]** (Leerdoel 1) Bepaal de samplefunctie $x[n]$ als functie van het samplenummer n als $x(t)$ gesampled wordt met samplefrequentie $f_s = 10$ kHz.

Antwoord: sampling: $t = nT_s = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{10^4}$

$$x[n] = -1 + 4 \sin\left(\frac{2\pi n}{10^4 T}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{10^4 T}\right)$$

$$x[n] = -1 + 4 \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)$$

2. Gegeven is de impulsresponsie van een LTI-systeem:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n = 1, \\ -\frac{2}{3}, & n = 2, \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

- a. [4 punten]** (Leerdoel 1) Leg uit welke van de volgende kenmerken waar zijn voor dit systeem:
1. Causaal
 2. Stabiel
 3. Geheugen

Antwoord:

1. Het systeem is causaal omdat $h[n]$ alleen voor $n \geq 0$ coëfficiënten heeft die ongelijk zijn aan 0.
2. Het systeem is stabiel omdat $h[n]$ een eindig aantal coëfficiënten heeft.
3. Het systeem heeft geheugen omdat het huidige uitgangssignaal is gebaseerd op het ingangssignaal van 1 sample en 2 samples uit het verleden. Deze moeten ergens worden opgeslagen.

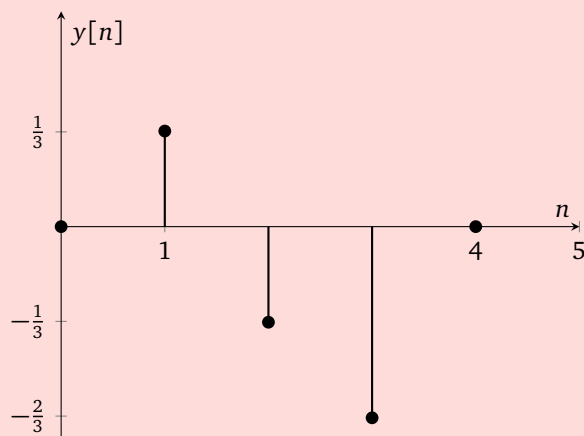
- b. [6 punten]** (Leerdoel 1) Op dit systeem wordt het volgende ingangssignaal gezet:

$$x[n] = u[n] - u[n-2]$$

Bepaal de uitgang $y[n]$ van dit systeem en ingangssignaal met behulp van convolutie voor $0 \leq n \leq 4$.

Antwoord: Onderstaand is één mogelijke manier van oplossen. Grafisch of met een tabel is ook goed. De schets is ter illustratie.

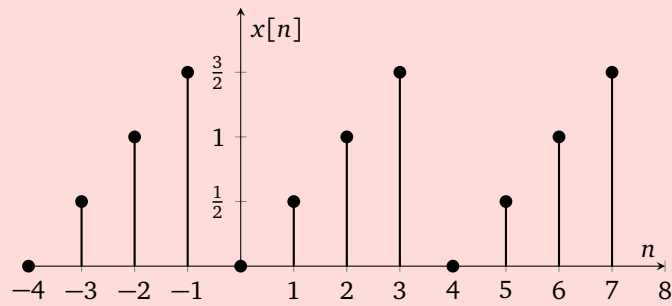
$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h[k]x[n-k] \\
 &= \sum_{k=1}^{k=2} h[k]x[n-k] \text{ andere waarden van } h[k] \text{ zijn } 0 \\
 &= h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] \\
 &= \frac{1}{3}(u[n-1] - u[n-3]) - \frac{2}{3}(u[n-2] - u[n-4]) \\
 y[0] &= \frac{1}{3}(u[-1] - u[-3]) - \frac{2}{3}(u[-2] - u[-4]) = 0 \\
 y[1] &= \frac{1}{3}(u[0] - u[-2]) - \frac{2}{3}(u[-1] - u[-3]) = \frac{1}{3} \\
 y[2] &= \frac{1}{3}(u[1] - u[-1]) - \frac{2}{3}(u[0] - u[-2]) = -\frac{1}{3} \\
 y[3] &= \frac{1}{3}(u[2] - u[0]) - \frac{2}{3}(u[1] - u[-1]) = -\frac{2}{3} \\
 y[4] &= \frac{1}{3}(u[3] - u[1]) - \frac{2}{3}(u[2] - u[0]) = 0
 \end{aligned}$$



- 3. [5 punten]** (Leerdoel 2) Bereken de spectrale coëfficiënten a_0 , a_1 en a_3 voor onderstaand periodiek digitaal signaal:

$$x[n] = \frac{1}{2}n, \quad 0 \leq n \leq 3, \text{ daarvoor en daarna herhalend.}$$

Antwoord:



$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] = \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{\pi}{2}n} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

$$a_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{3\pi}{2}n} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{3\pi}{2}n}$$

Tabel 1: Berekening a_1

n	$x[n]$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$	$x[n] \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$
0	0	$1 + 0j$	$0 + 0j$
1	$\frac{1}{2}$	$0 - j$	$0 - \frac{1}{2}j$
2	1	$-1 + 0j$	$-1 + 0j$
3	$\frac{3}{2}$	$0 + j$	$0 + \frac{3}{2}j$

$$a_1 = \frac{-\frac{1}{2}j - 1 + \frac{3}{2}j}{4} = \frac{-1 + j}{4}$$

Tabel 2: Berekening a_3

n	$x[n]$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)$	$x[n] \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)\right)$
0	0	$1 + 0j$	$0 + 0j$
1	$\frac{1}{2}$	$0 + j$	$0 + \frac{1}{2}j$
2	1	$-1 + 0j$	$-1 + 0j$
3	$\frac{3}{2}$	$0 - j$	$0 - \frac{3}{2}j$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{2}j - 1 - \frac{3}{2}j}{4} = \frac{-1 - j}{4} = a_1^*, \text{ de complex toegevoegde van } a_1$$

4. a. [3 punten] (Leerdoel 2) Bereken de Fourier-getransformeerde $X(\Omega)$ van het niet-periodieke signaal:

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

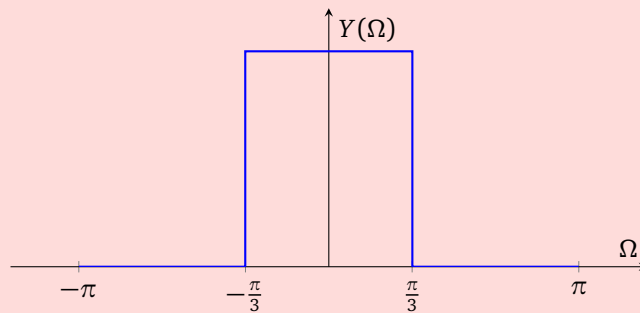
Antwoord:

$$X(\Omega) = 2 - 3e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}$$

b. [7 punten] (Leerdoel 2) Bepaal het signaal $y[n]$ in het discrete tijddomein voor:

$$Y(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Antwoord:



$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{2\pi jn} (e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n}) \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \\ y[0] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\Omega = \frac{1}{2\pi} [\Omega]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{1}{3} \\ y[n] &= \begin{cases} \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) & \text{als } n \neq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{als } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Gegeven de onderstaande overdrachtsfunctie van een LTI-systeem/filter:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}}$$

a. [5 punten] (Leerdoel 3) Bepaal een uitdrukking voor $y[n]$ in de vorm $y[n] = \dots$ zodat het een causaal LTI-systeem beschrijft.

Antwoord:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$Y(z) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-2} \right) = X(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-2} \right)$$

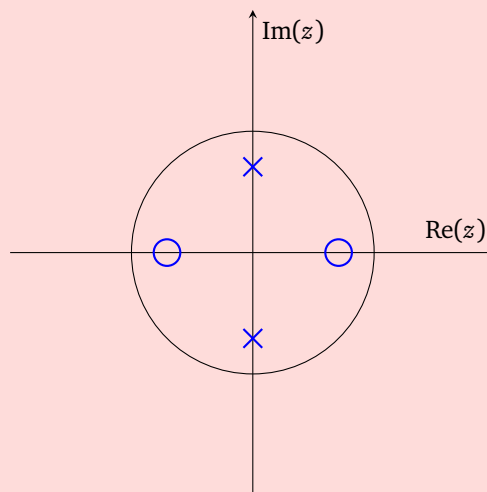
$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

$$y[n] = -\frac{1}{2}y[n-2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

- b. [5 punten]** (Leerdoel 3) Bepaal de polen en nulpunten, schets deze in het z-vlak en bepaal of dit een stabiel filter is.

Antwoord:

Nulpunten:	$z^2 = \frac{1}{2},$	$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2},$	$z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Polen:	$z^2 = -\frac{1}{2},$	$p_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}j,$	$p_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}j$



Het betreft een stabiel filter omdat de polen binnen de eenheidscirkel liggen.

- c. [10 punten]** (Leerdoel 3) Bepaal de versterkingsfactor voor de hoekfrequenties $\Omega = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ en schets vervolgens de versterkingsfunctie $|H(\Omega)|$ voor $0 \leq \Omega \leq \pi$.

Antwoord:

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{|e^{j2\Omega} - \frac{1}{2}|}{|e^{j2\Omega} + \frac{1}{2}|}$$

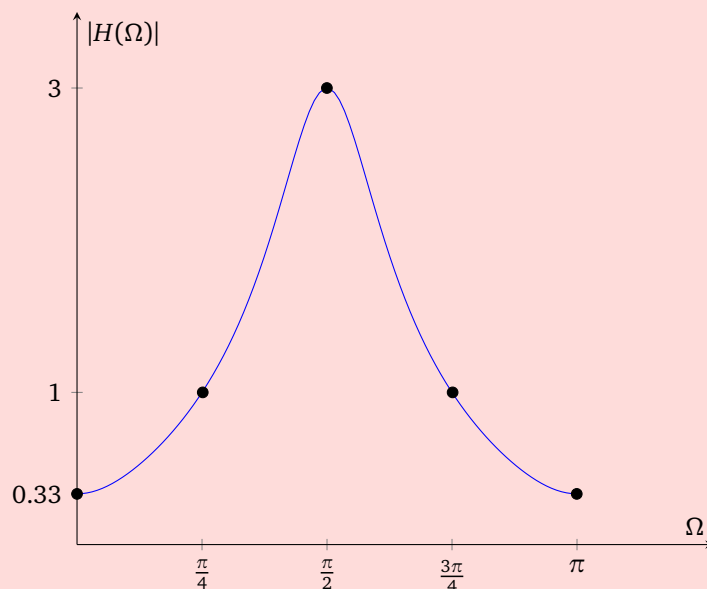
$$\Omega = 0, \quad \rightarrow \quad |H(0)| = \frac{|e^0 - \frac{1}{2}|}{|e^0 + \frac{1}{2}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Omega = \frac{\pi}{4}, \quad \rightarrow \quad \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \frac{|e^{j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}|}{|e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}|} = \frac{|j - \frac{1}{2}|}{|j + \frac{1}{2}|} = 1$$

$$\Omega = \frac{\pi}{2}, \quad \rightarrow \quad \left| H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{|e^{j\pi} - \frac{1}{2}|}{|e^{j\pi} + \frac{1}{2}|} = \frac{|-1 - \frac{1}{2}|}{|-\frac{1}{2}|} = 3$$

$$\Omega = \frac{3\pi}{4}, \quad \rightarrow \quad \left| H\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right| = \frac{|e^{j\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{2}|}{|e^{j\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}|} = \frac{|-j - \frac{1}{2}|}{|-j + \frac{1}{2}|} = 1$$

$$\Omega = \pi, \quad \rightarrow \quad |H(\pi)| = \frac{|e^{j2\pi} - \frac{1}{2}|}{|e^{j2\pi} + \frac{1}{2}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$



- d. [2 punten] (Leerdoel 3) Stel dat de samplerate van dit systeem $f_s = 6\text{ kHz}$ is, wat is de versterking bij $f_x = 2250\text{ Hz}$?

Antwoord:

$$\Omega = \frac{2\pi f}{f_s} \quad \rightarrow \quad \Omega_x = \frac{2\pi f_x}{f_s} = \frac{2\pi 2250}{6000} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\left| H\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right| = 1$$

- e. [1 punt] (Leerdoel 3) Leg uit of dit een recursief (IIR) of niet-recursief (FIR) filter is?

Antwoord: Mogelijke correcte antwoorden zijn:

- De overdrachtsfunctie is een breuk waarbij zowel de teller als noemer afhankelijk is van variabele z , daarom is dit een recursief filter.
- De overdracht bevat polen, daarom is dit een recursief filter.

f. [2 punten] (Leerdoel 3) Leg uit of het een low-pass, high-pass, band-pass, band-stop-filter?

Antwoord: Mogelijke correcte antwoorden zijn: Het betreft een band-pass filter. Dit is op 2 manieren te zien. Ofwel de schets gevonden bij deelvraag c geeft duidelijk een band-pass karakteristiek, of aan het polen en nulpuntenbeeld in het Z-vlak uit deelvraag b (loop over de eenheidscirkel voor $0 \leq \Omega \leq \pi$ en stel vast dat het nulpunt voor $\Omega = 0$ het dichtstbijzijnd is (dus verzwakking). Waarna op $\Omega = \frac{\pi}{2}$ een pool wordt gepasseerd (dus versterking) en vervolgens weer een nulpunt het dichtstbijzijnd is voor $\Omega = \pi$ (dus verzwakking)).

Einde van dit tentamen.

Vraag:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	5	10	5	10	25	55