

REG10: Regeltechniek - Week 1.1

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vandaag

1. Vakorganisatie
2. Wat is regeltechniek?
3. Differentiaalvergelijkingen
4. Laplace-transformatie
 - Inverse transformatie
 - Stapfunctie
 - Deltafunctie

Docenten

- Erwin den Boer
- Robert Inpijn
- Beau Eckhardt
- Elles van den Bergh

Boek



Regeltechniek voor het HBO

6^e druk

Harry van der Pol, Arnoud Thomasse

ISBN: 978-90-820148-1-5



Toegepaste wiskunde deel 2

5^e druk

Jan Blankespoor, Kees de Joode, Aad

Sluijter

ISBN: 978-90-063108-5-6

Weekindeling kwartaal 1

- Week 1: Laplace-transformatie
- Week 2: Modelvorming
- Week 3: Proceseigenschappen
- Week 4: Basissystemen
- Week 5: Bode plot
- Week 6: Nyquist plot
- Week 7: Poolbanen
- Week 8: Uitloop

Weekindeling kwartaal 2

- Week 1: Ontwerpcriteria
- Week 2: Ontwerpcriteria
- Week 3: Ontwerpcriteria
- Week 4: PI- & PD-regelaar
- Week 5: State-space
- Week 6: State-space
- Week 7: State-space
- Week 8: Uitloop

Daarnaast wordt in kwartaal 2 gewerkt aan de praktische opdracht

Regeltechniek

Wat is regeltechniek?

Regeltechniek

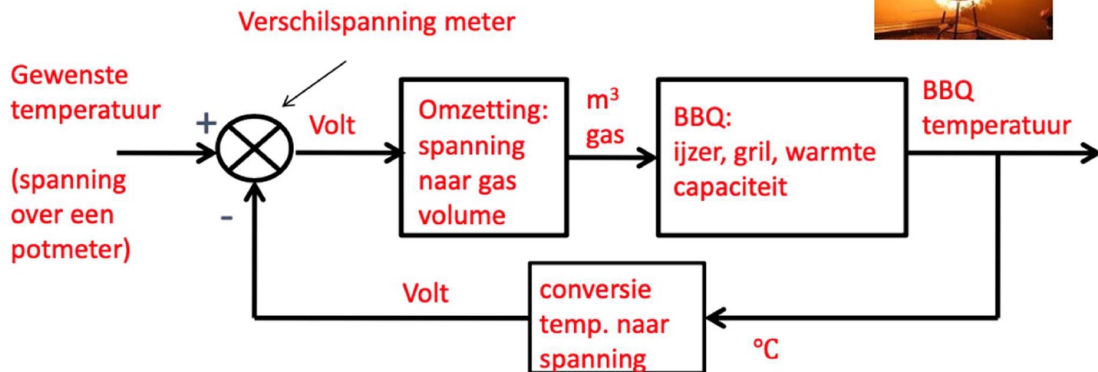
Regeltechniek bestaat uit:

- Het modelleren van (dynamische) systemen
- Het *regelen* van deze systemen met een *regelaar*

Het uiteindelijke doel: systemen beïnvloeden, zodanig dat een gewenste *respons* ontstaat.

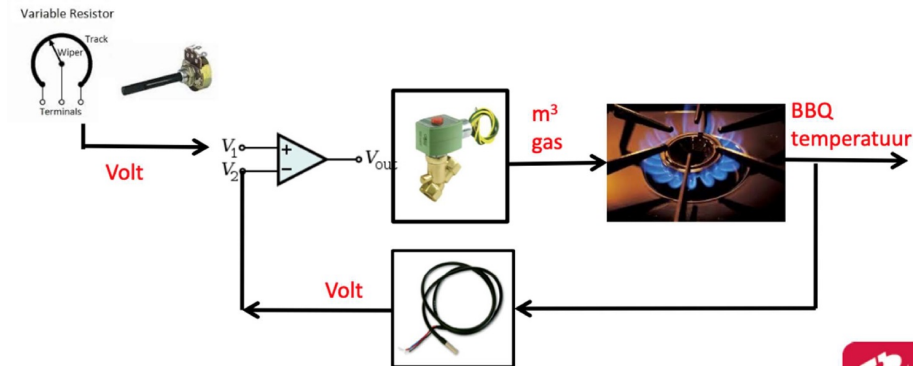
BBQ Voorbeeld

Temperatuurregeling BBQ



BBQ Voorbeeld (vervolg)

BBQ: Schets van uitwerking



Nog meer voorbeelden:

- Cruise control
- Automatische piloot
- Thermostaat
- Uitlijnen van leesarm in een harde schijf
- Elektronische schokdempers
- Stabiliseren van Segway / Solowheel
- Double inverted pendulum
- Badminton robot

Dynamische systemen

Regeltechniek wordt voornamelijk toegepast op *dynamische* systemen.
Wat is een dynamisch systeem?

Dynamische systemen

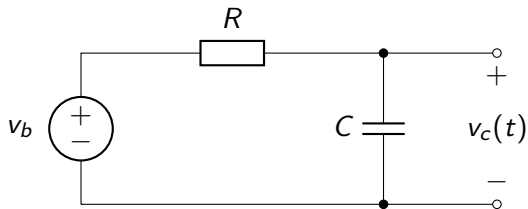
Regeltechniek wordt voornamelijk toegepast op *dynamische* systemen.

Definitie (Dynamisch systeem)

Systeem waarvan het gedrag in de tijd niet uitsluitend wordt bepaald door zijn ingang, maar ook door zijn eigen *toestand*.

Deze systemen worden vaak omschreven met differentiaalvergelijkingen.

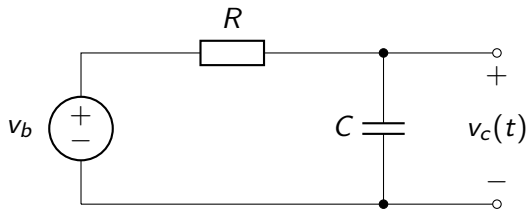
Voorbeeld: RC-netwerk



Stel de knooppuntvergelijking op van dit systeem ($V_b \rightarrow V_c(t)$).

$$i_C = C \frac{du(t)}{dt}$$

Voorbeeld: RC-netwerk



Antwoord:

Met de knooppuntmethode volgt voor de spanning $v_c(t)$ over de condensator:

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_b$$

Hoe kunnen we $v_c(t)$ bepalen?

Bedenker Laplacetransformatie



Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Laplace-transformatie

Binnen de (analoge) regeltechniek wordt vrijwel uitsluitend gewerkt in het *Laplace*-domein (ook wel *s*-domein genoemd).

Definitie (Laplace-transformatie)

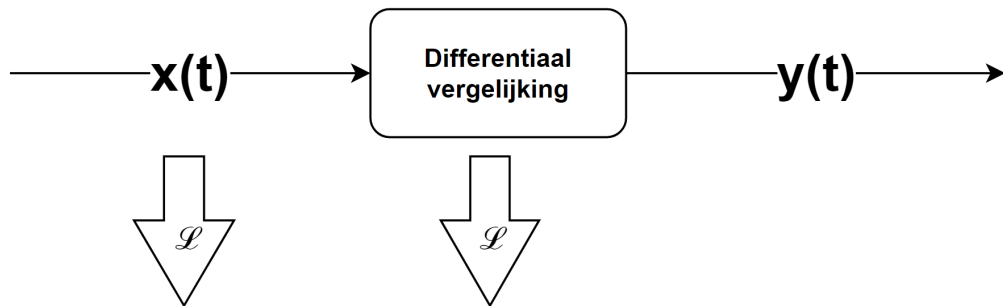
De Laplace-transformatie van een continue tijdsfunctie $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

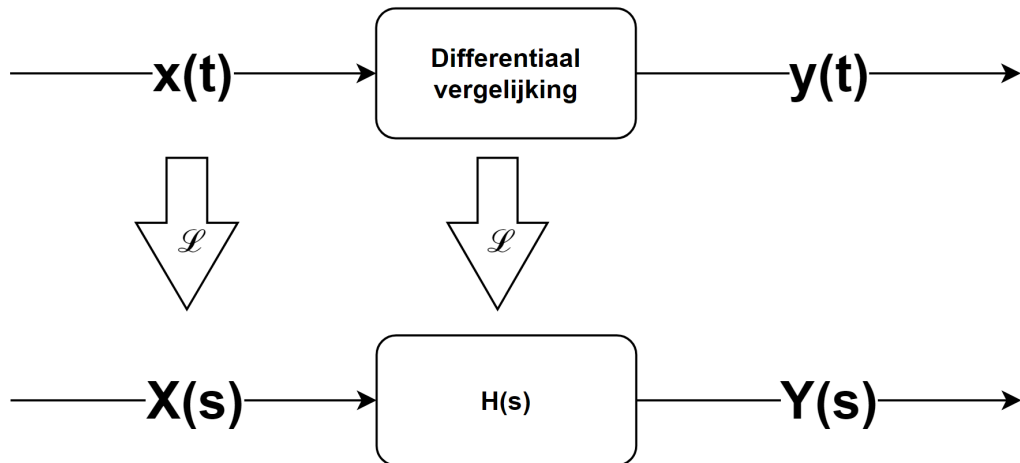
Differentiaalvergelijkingen oplossen



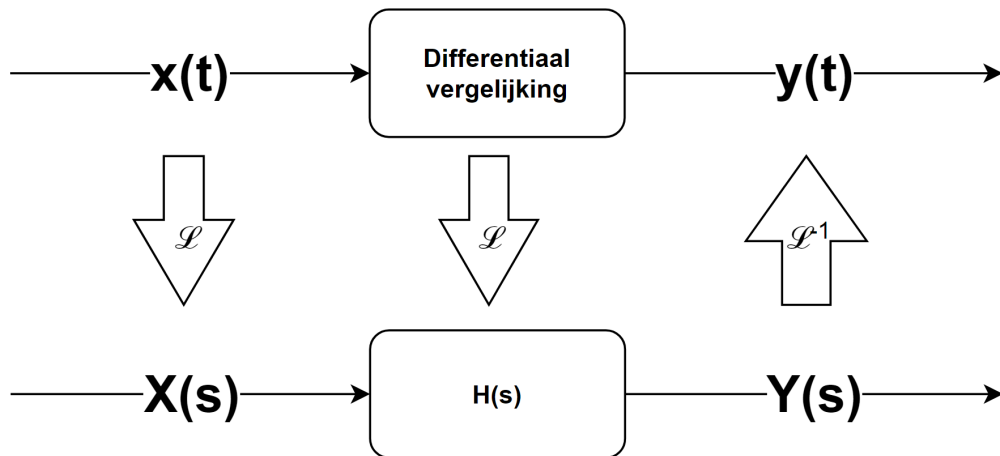
Differentiaalvergelijkingen oplossen



Differentiaalvergelijkingen oplossen



Differentiaalvergelijkingen oplossen



Inverse Laplace-transformatie

Om de oplossing in het tijdsdomein te krijgen moet er terug getransformeerd worden.

Definitie (Inverse Laplace-transformatie)

Als $F(s)$ de Laplace transformatie is van een tijdsfunctie $f(t)$, dan geldt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Deze integraal is lastig te gebruiken!

Opgave:

De Laplace getransformeerde differentiaalvergelijking is gegeven. Bepaal $y(t)$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 1$$

$$e^{-at} \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

Opgave:

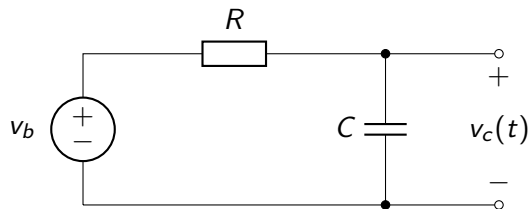
De Laplace getransformeerde differentiaalvergelijking is gegeven. Bepaal $y(t)$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 1$$

Antwoord:

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})Hv(t)$$

Voorbeeld: RC-netwerk



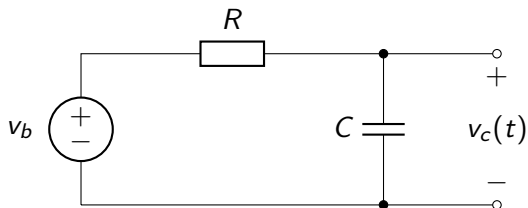
Met de knooppuntmethode volgt voor de spanning $v_c(t)$ over de condensator:

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_b$$

Bepaal $v_c(t)$ met de Laplacetransformatie.

$$e^{-at} \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

Voorbeeld: RC-netwerk



Antwoord:

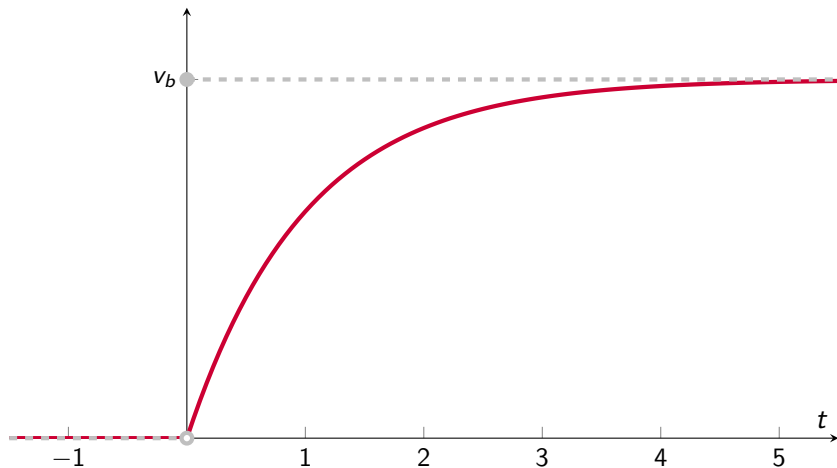
$$\mathcal{L} \left\{ RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \right\} = \mathcal{L} \{ v_b \}$$

$$RCs v_c(s) + v_c(s) = \frac{v_b}{s}$$

$$v_c(s) = \frac{\frac{v_b}{RC}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

$$v_c(t) = v_b \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \text{Hv}(t)$$

Plot condensator spanning



$$v_c(t) = v_b(1 - e^{-\frac{t}{RC}})Hv(t)$$

waarbij geldt dat $\frac{1}{RC} = 1$

Verschuiving en schaling

De Laplacetransformatie bevat de volgende eigenschappen:

Verschuiving in tijd-domein:

$$\mathcal{H}v(t - a) \cdot f(t - a) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} e^{-as} F(s)$$

Verschuiving in Laplace-domein:

$$e^{\lambda t} f(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} F(s - \lambda)$$

Schaling in tijd-domein:

$$f(at) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Eindwaardestelling

Van een stabiel(!) tijdsignaal $f(t)$ kan de eindwaarde bepaald worden met haar Laplace-transformatie:

Stelling (Final Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

De beginwaarde kan op eenzelfde weg worden bepaald:

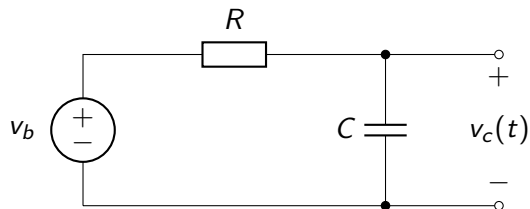
Stelling (Initial Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Eigenschappen

Regel	t-domein	s-domein
lineariteit	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$
demping	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a)$
verschuiving in de tijd	$f(t-a)$	$e^{-as} \cdot F(s)$
afgeleiden (beginvoorwaarden nul)	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n \cdot F(s)$
beginwaardetheorema	$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$
eindwaardetheorema	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$

Eindwaardestelling



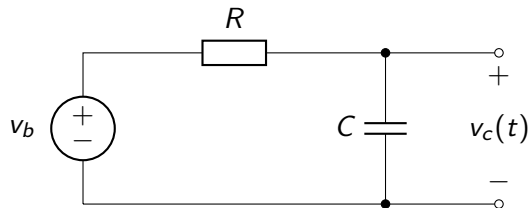
Bepaal met de eindwaardestelling de eindwaarde van het RC-netwerk:

Stelling (Final Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$v_c(s) = \frac{\frac{v_b}{RC}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

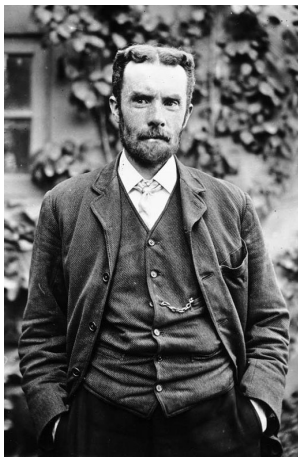
Eindewaardestelling



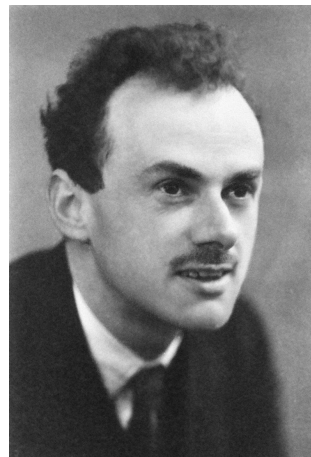
Antwoord:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sV_C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{v_b}{s(RCs + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v_b}{RCs + 1} = v_b$$

Bedenkers bijzondere functies



Oliver Heaviside 1850-1925



Paul Dirac 1902-1984

Stap functie

Zojuist zagen we dat de uitgangsspanning van het RC-netwerk als volgt kan worden uitgedrukt:

$$v_c(t) = v_b(1 - e^{-\frac{t}{RC}})Hv(t)$$

$Hv(t)$ wordt de stap of Heaviside functie genoemd en kan ook worden aangeduid als $1(t)$, $u(t)$ en $\theta(t)$.

Definitie (Stap functie)

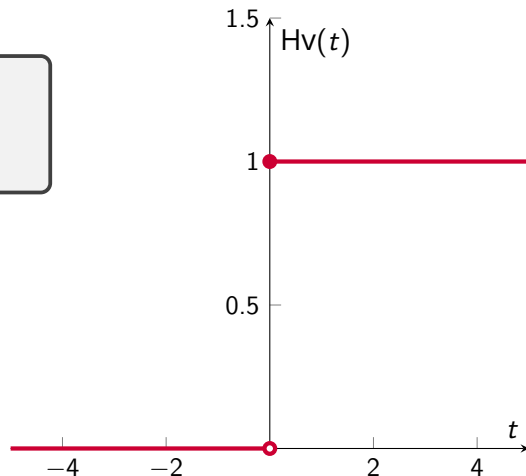
$$Hv(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

De Laplace getransformeerde is:

$$Hv(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$

Plot stap-functie

$$Hv(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Deltafunctie

Definitie (Deltafunctie van Dirac)

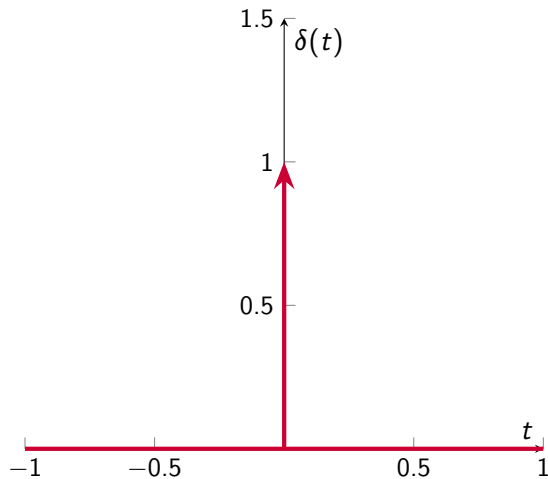
De deltafunctie van Dirac (ook wel impuls genoemd) is gedefinieerd als:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Uit deze definitie volgt dat de deltafunctie $\delta(t)$ een Laplace getransformeerde heeft van 1.

$$\delta(t) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} 1$$

Plot deltafunctie



Benadering delta functie

De deltafunctie van Dirac is een *hypothetisch* signaal. Het bestaat niet in de "echte" wereld. Een functie die de deltafunctie benaderd is:

$$\delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{voor } -\frac{\epsilon}{2} < t < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

De deltafunctie wordt benaderd wanneer ϵ naar 0 gaat.

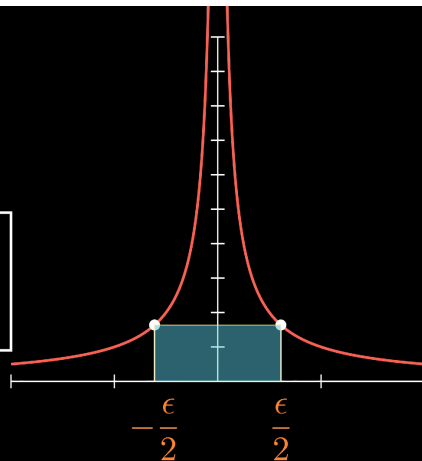
$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t)$$

Video Delta functie

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

$$\delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{voor } -\frac{\epsilon}{2} < t < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t)$$



Afkappen

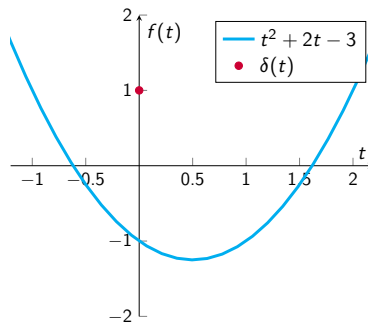
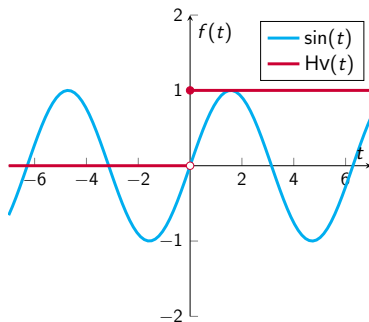
De standaardfuncties kunnen worden gebruikt om signalen af te kappen of te verschuiven.

Voorbeeld (Afkappen & Selecteren)

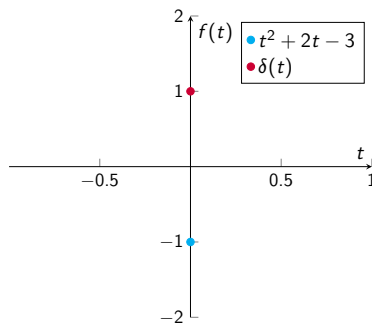
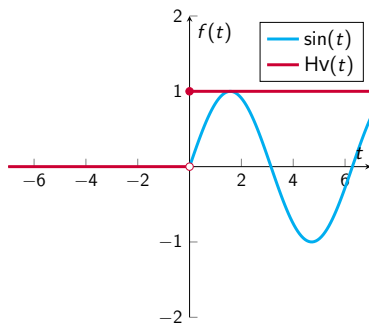
$$f(t) = \sin(t) \cdot \text{Hv}(t)$$

$$f(t) = (t^2 + 2t - 3) \cdot \delta(t)$$

Afkappen

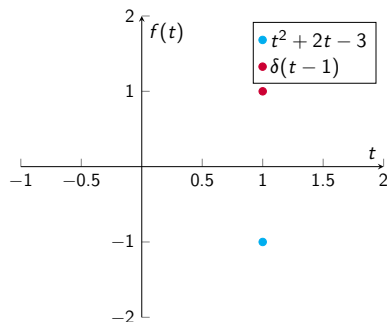
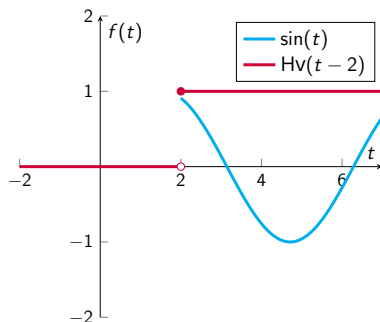


Afkappen



De stap functie kapt functies af. De impuls selecteert een waarde (sample) van de functie.

Afkappen op ander tijdstip



Functies afkappen kan op een ander tijdstip worden gedaan door de stap/impuls te verschuiven.

Verschuiving

Door de t te variëren van de basisfuncties kunnen functies *verschoven* worden.

Voorbeeld (Verschuiving)

$$f(t) = \sin(t) \cdot \text{Hv}(t - 2)$$

$$f(t) = (t^2 + 2t - 3) \cdot \delta(t - 1)$$

Zuivere verschuiving

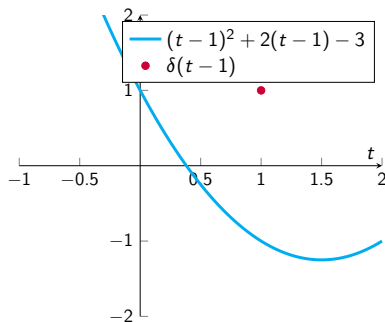
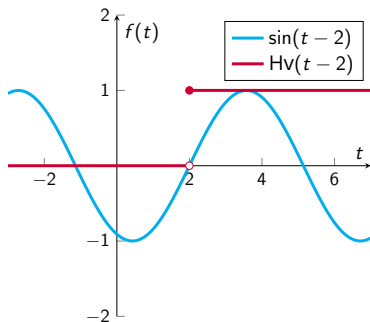
Wanneer ook de functie zelf wordt verschoven spreken we van *zuiver verschuiven*.

Voorbeeld (Zuiver verschuiven)

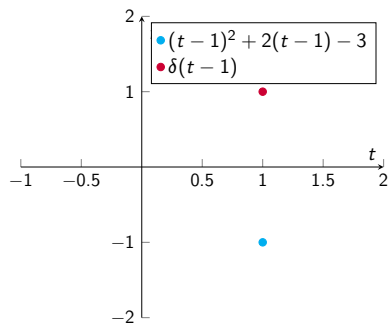
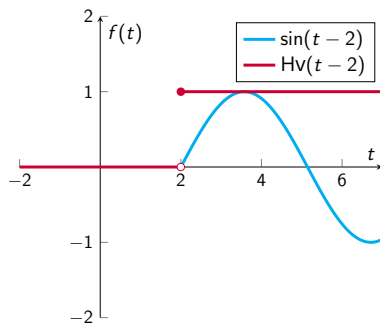
$$f(t) = \sin(t - 2) \cdot \text{Hv}(t - 2)$$

$$f(t) = ((t - 1)^2 + 2(t - 1) - 3) \cdot \delta(t - 1)$$

Zuivere verschuiving



Zuivere verschuiving



De stap functie schakelt op een ander tijdstip de functie in. De impuls selecteert (sampelt) op een ander tijdstip een waarde.

Verschuivingseigenschap

Herinner de verschuivingseigenschap van zojuist:

Definitie (Verschuiving in tijd-domein)

$$\mathcal{H}v(t - a) \cdot f(t - a) \xLeftrightarrow[\mathcal{L}]{\mathcal{L}^{-1}} e^{-as} F(s)$$

Zuivere verschuiving in het tijdsdomein betekent een vermenigvuldiging met een e-macht in het s-domein.

Opgave laplace 1

Bepaal de inverse laplace-transformatie van:

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+3)}$$

Opgave laplace 1

Bepaal de inverse laplace-transformatie van:

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+3)}$$

Antwoord:

$$f(t) = \text{Hv}(t-2) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3(t-2)} \right)$$

Opgave laplace 2

Bepaal de inverse laplace-transformatie van:

$$F(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

Opgave laplace 2

Bepaal de inverse laplace-transformatie van:

$$F(s) = \frac{s^2 + 5s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

Antwoord:

$$f(t) = \text{Hv}(t) \left(\delta(t) + e^{-t} + e^{-2t} \right)$$

Tentamenvraag 2022-2023

Bepaal $H(s)$ met de Laplacetransformatie:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} - 5x(t) + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Tentamenvraag 2022-2023

Bepaal $H(s)$ met de Laplacetransformatie:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} - 5x(t) + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Antwoord:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} - 5x(t) + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

$$s^2Y(s) + 7Y(s) + 12Y(s) = sX(s) + 5X(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 7 + 12) = X(s)(s + 5)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 5}{s^2 + 7s + 12}$$

Tentamenvraag 2021-2022

Bepaal $H(s)$ met de Laplacetransformatie:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} - x(t) + 2y(t) = 6\frac{dx(t)}{dt}$$

Tentamenvraag 2021-2022

Bepaal $H(s)$ met de Laplacetransformatie:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} - x(t) + 2y(t) = 6\frac{dx(t)}{dt}$$

Antwoord:

$$\begin{aligned}s^2Y(s) + 3sY(s) - X(s) + 2Y(s) &= 6sX(s) \\(s^2 + 3s + 2)Y(s) &= (6s + 1)X(s) \\H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{6s + 1}{s^2 + 3s + 2}\end{aligned}$$

Volgende week...

- Modelvorming