

REG10: Regeltechniek - Week 1.3

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vorige week

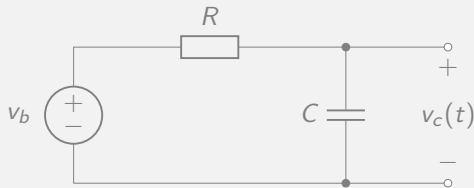
- Modelvorming

Vandaag

1. Procesbeschrijving in het t-domein (hst 3.2)
2. Procesbeschrijving in het s-domein (hst 3.3)

Procesbeschrijving in het t-domein

Herinner week 1:



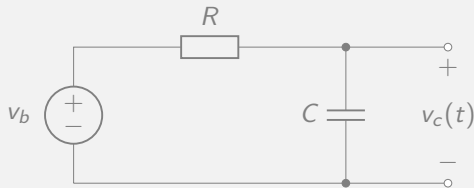
Met de knooppuntmethode volgt voor de spanning $v_c(t)$ over de condensator:

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_b$$

Is dit een eerste of een tweede orde proces?

Procesbeschrijving in het t-domein

Herinner week 1:



Met de knooppuntmethode volgt voor de spanning $v_c(t)$ over de condensator:

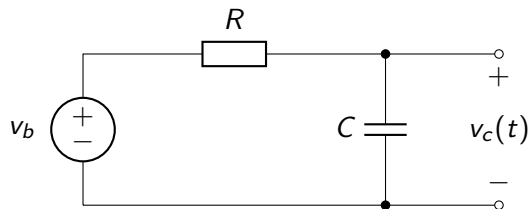
$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_b$$

Is dit een eerste of een tweede orde proces?

Antwoord:

Eerste orde proces

3.2.3 Tijdresponsie

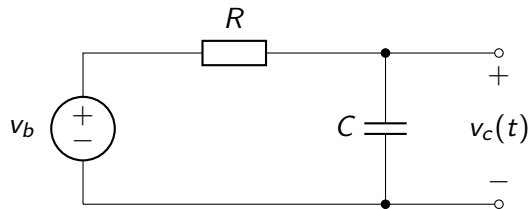


Bepaal (opnieuw) de tijdsoplossing $v_c(t)$ met $v_b(t) = Hv(t)$:

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_b(t)$$

$$e^{-at} \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

3.2.3 Tijdresponsie



$$\mathcal{L} \left\{ RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \right\} = \mathcal{L} \{ v_b \}$$

$$RCs v_c(s) + v_c(s) = \frac{v_b}{s}$$

$$v_c(s) = \frac{\frac{v_b}{RC}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

$$v_c(t) = v_b (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{Hv}(t)$$

Tijdsconstante

We vergelijken de differentiaalvergelijking met haar Laplacegetransformeerde oplossing:

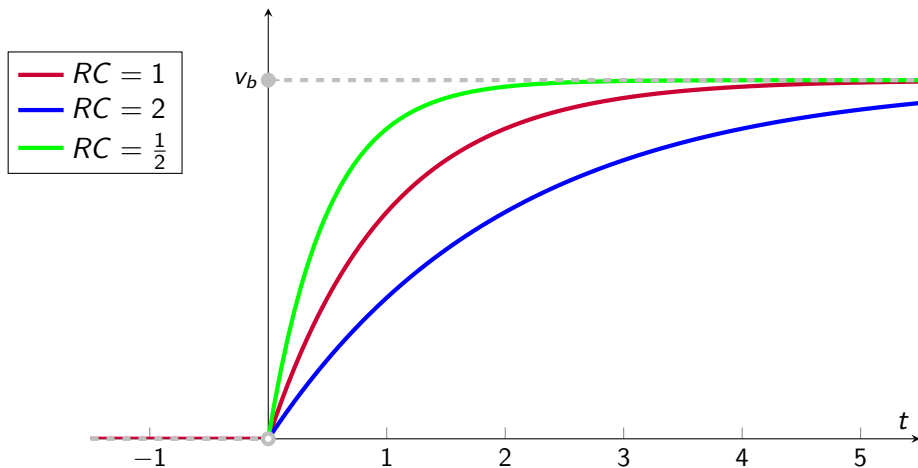
$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_b(t)$$
$$v_c(t) = v_b(1 - e^{-\frac{t}{RC}})Hv(t)$$

Hierin wordt de factor RC de tijdsconstante genoemd.

Definitie (Tijdsconstante)

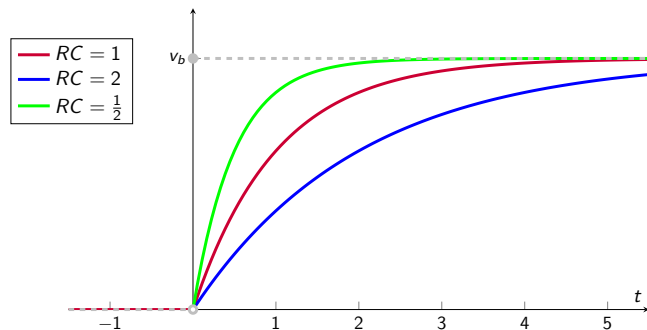
De tijdsconstante τ geeft de *snelheid* van het systeem aan. Hoe kleiner de tijdsconstante, des te sneller het systeem.

Verskillende tijdsconstanten



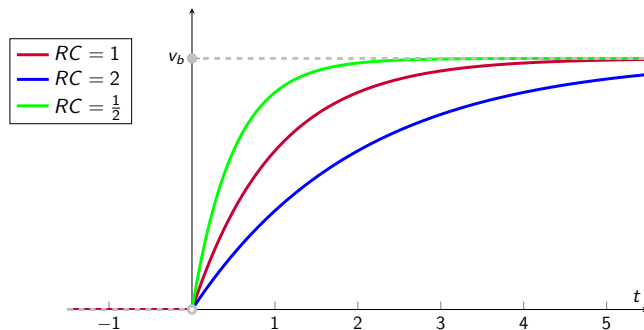
$$v_c(t) = v_b(1 - e^{-\frac{t}{RC}})Hv(t)$$

3.2.3 Tijdresponsie



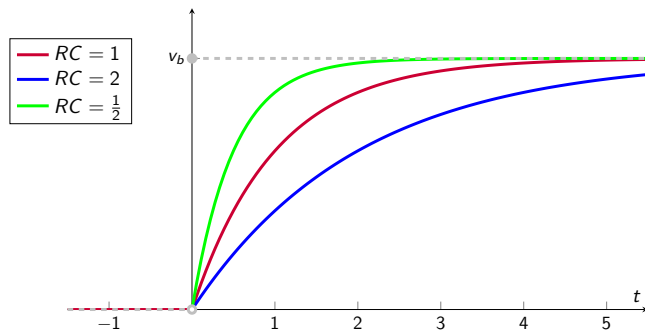
Deze plot wordt de stapresponsie genoemd. We hebben namelijk op de ingang een stap gezet en het systeem geeft als "antwoord" (respons) deze grafiek.

3.2.3 Tijdresponsie



Wat kunnen we concluderen uit de stapresponsie?

3.2.3 Tijdresponsie



Wat kunnen we concluderen uit de stapresponsie?

- Het uitgangssignaal loopt asymptotisch naar de eindwaarde V_b .
- Hoe kleiner de tijdconstante τ , hoe sneller deze eindwaarde wordt bereikt.

Oefening (herhaling)

Gegeven onderstaande differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 6x(t)$$

- Bepaal $y(t)$ als $x(t) = 1(t)$
- Bepaal de tijdconstante τ en de eindwaarde van $y(t)$
- Bepaal $y(t)$ als $x(t) = \delta(t)$

Antwoord stapresponsie

- Transformeren naar het s-domein:

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{6}{s}$$
$$Y(s) = \frac{6}{s(s+3)}$$

- Na breuksplitsen en terugtransformeren volgt:

$$y(t) = 2(1 - e^{-3t}) \cdot 1(t)$$

- Hierbij is de tijdconstante $\tau = \frac{1}{3}$ en de eindwaarde $y(t) = 2$.

Antwoord impulsresponsie

Voor de impulsresponsie geldt:

- Transformeren naar het s-domein:

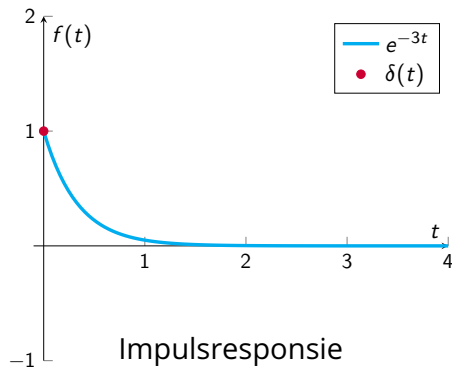
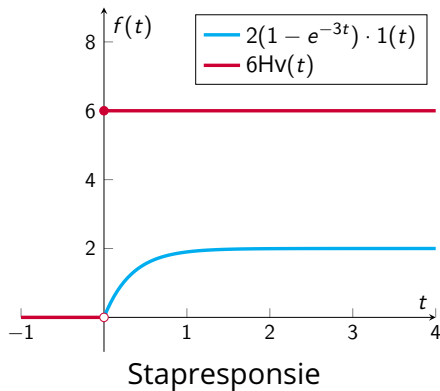
$$sY(s) + 3Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

- Terugtransformeren geeft:

$$y(t) = e^{-3t} \cdot 1(t)$$

Plot responsies



Overdrachtsfunctie

De overdrachtsfunctie $H(s)$ kan algemeen worden geschreven als een breuk van twee polynomen:

$$H(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Procesbeschrijving in het s-domein

Een andere vorm van de overdrachtsfunctie is:

$$H(s) = K_{pn} \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$

Hierin zijn direct de **nulpunten** z_i en **polen** p_i af te lezen.
Wat zijn polen en nulpunten?

Procesbeschrijving in het s-domein

Een andere vorm van de overdrachtsfunctie is:

$$H(s) = K_{pn} \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$

Hierin zijn direct de **nulpunten** z_i en **polen** p_i af te lezen.

- **nulpunten** (z_i) geven aan waar de overdracht gelijk is aan 0
- **polen** (p_i) zijn de punten waar de overdracht gelijk is aan ∞ .
- Om de polen te berekenen stel je de noemer van $H(s)=0$

Procesbeschrijving in het s-domein

$$H(s) = K_{pn} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots}{(s - p_1)(s - p_2) \dots} = K_{pn} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- $K_{pn} = \frac{b_m}{a_n}$ is de versterking van het polen- en nulpuntenbeeld
- Verwar K_{pn} niet met de statische versterking K_{stat} !
 K_{stat} verkrijgen we door $s = 0$ in te vullen in $H(s)$.

Opgave 1

Gegeven onderstaande overbrengingsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem.

Opgave 1

Gegeven onderstaande overbrengingsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem.

Antwoord:

nulpunten: -2, -5

polen: 0, -1, -3, -4

$$K_{pn} = 1$$

$$K_{stat} = \frac{5}{6}$$

Opgave 2

Gegeven onderstaande overbrengingsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s + 3)}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem.

Opgave 2

Gegeven onderstaande overbrengingsfunctie:

$$H(s) = \frac{(s + 3)}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem.

Antwoord:

nulpunten: -3

polen: 0, -1+2i, -1-2i

$$K_{pn} = 1$$

$$K_{stat} = \infty$$

Opgave 3

Gegeven onderstaande overbrengingsfunctie:

$$H(s) = \frac{4s^2 + 16s + 12}{2s^3 + 8s^2 + 26s}$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem.

Opgave 3

Gegeven onderstaande overbrengingsfunctie:

$$H(s) = \frac{4s^2 + 16s + 12}{2s^3 + 8s^2 + 26s}$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem.

Antwoord:

$$H(s) = 2 \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2+3j)(s+2-3j)}$$

nulpunten: -1; -3

polen: 0; -2-3j; -2+3j

$$K_{pn} = 2$$

$$K_{stat} = \infty$$

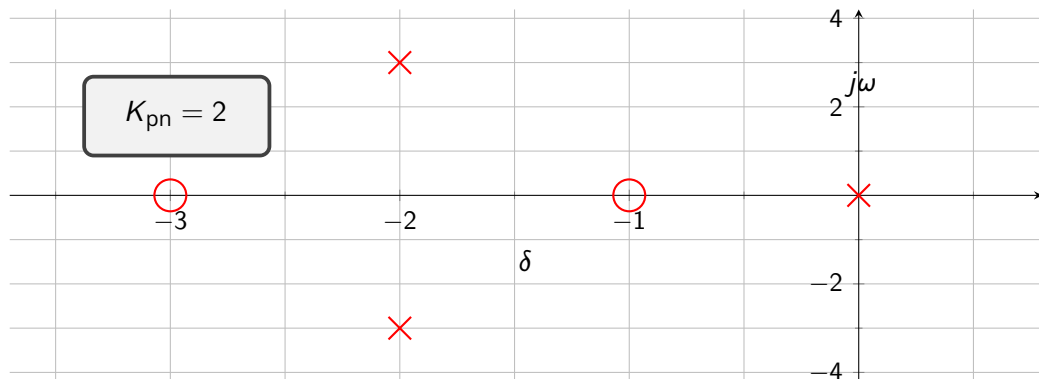
Pssst Is het je al opgevallen dat wanneer je pool op locatie 0 hebt, je $K_{stat} = \infty$?

3.3.3 Polen- en nulpuntenbeeld

We kunnen $H(s)$ weergeven in het pn-beeld in het s-vlak:

- Teken polen met een kruisje en nulpunten met een rondje
- Er geldt: $s = \lambda + j\omega$
- Vergeet niet ook de K_{pn} versterking toe te voegen

Polen- en nulpuntenbeeld



$$H(s) = 2 \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2+3j)(s+2-3j)}$$

Voorbeeld 3.1

Gegeven de onderstaande d.v:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 25 \frac{dy(t)}{dt} = 4 \frac{dx(t)}{dt} + 24x(t)$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem

Voorbeeld 3.1

Gegeven de onderstaande d.v:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 25 \frac{dy(t)}{dt} = 4 \frac{dx(t)}{dt} + 24x(t)$$

Bepaal de nulpunten, polen, K_{pn} en K_{stat} van dit systeem

Antwoord:

$$H(s) = \frac{4s+24}{s^3+8s^2+25s} = 4 \frac{s+6}{s(s+4+3j)(s+4-3j)}$$

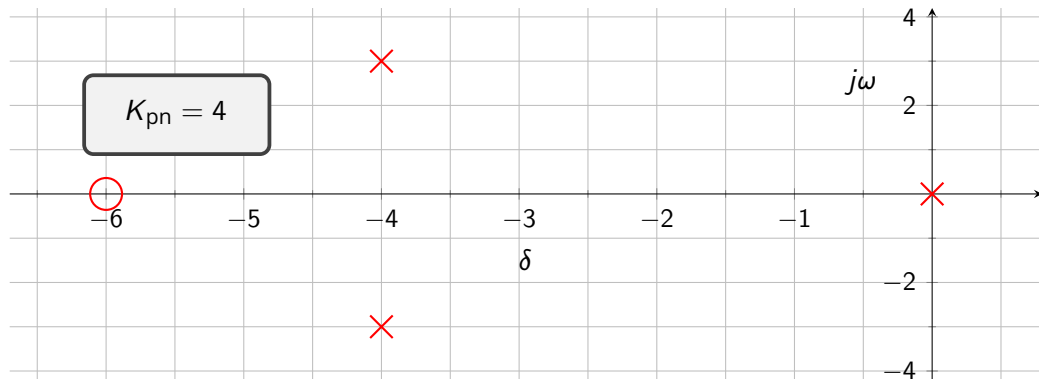
nulpunt: -6

polen: 0; -4-3j; -4+3j

$$K_{pn} = 4$$

$$K_{stat} = \infty$$

Voorbeeld 3.1



$$H(s) = \frac{4s + 24}{s^3 + 8s^2 + 25s}$$

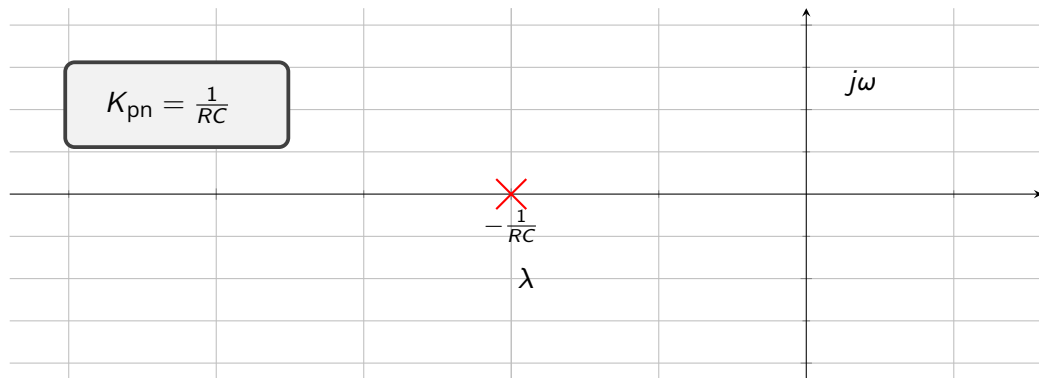
Oefening: pn beeld van een RC netwerk:

$$RC \frac{d u_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_1(t)$$

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{(RCs + 1)}$$

Teken het pn-beeld van $H(s)$

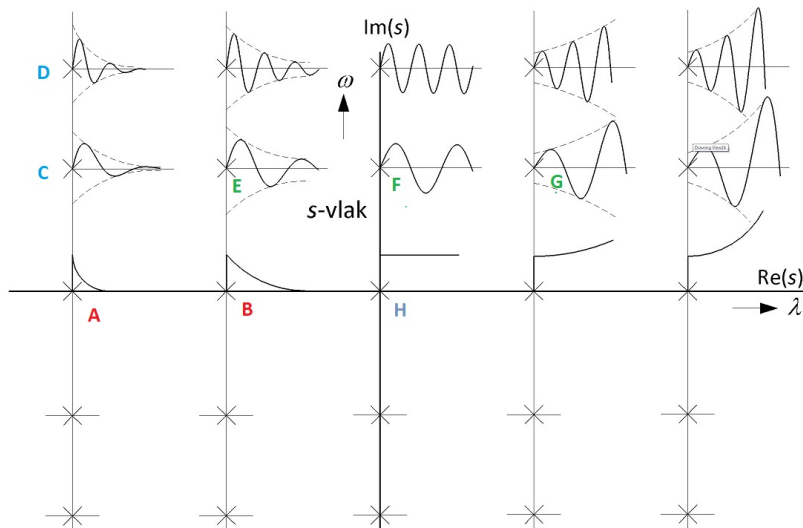
Antwoord: pn beeld van een RC netwerk:



$$H(s) = \frac{1}{(RCs + 1)}$$

Poolposities en impulsresponsies

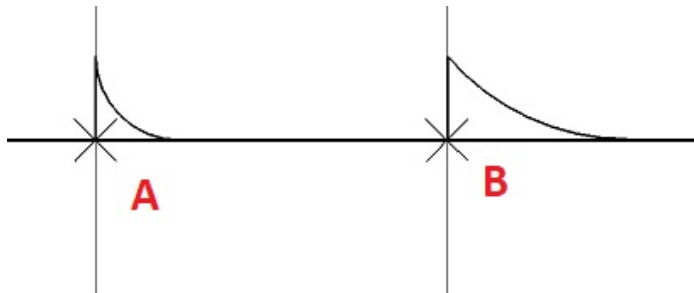
Wat valt je op als je de impulsresponsies van pool A en pool B vergelijkt?



Poolposities en impulsresponsies

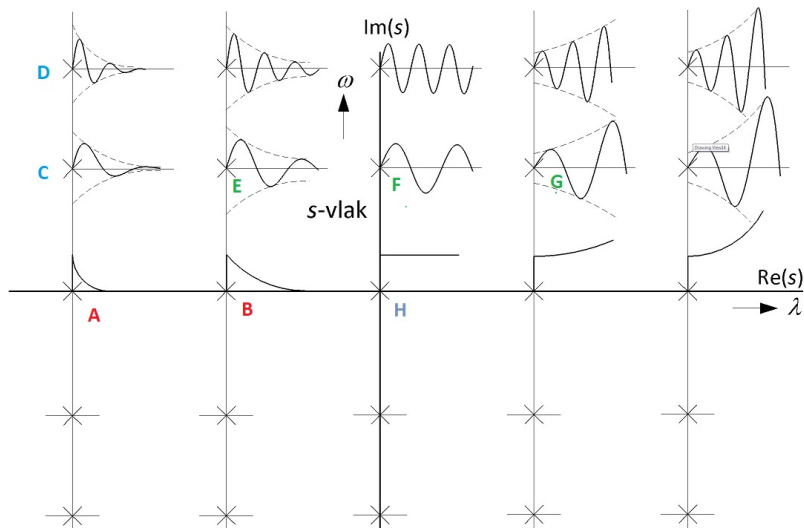
Antwoord:

Naar mate een pool op de negatief reële as meer naar links ligt, neemt de bijdrage in de responsie sneller af doordat de amplitude snel kleiner wordt.



Poolposities en impulsresponsies

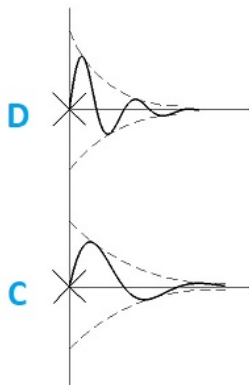
Wat valt je op als je de impulsresponsies van pool C en pool D vergelijkt?



Poolposities en impulsresponsies

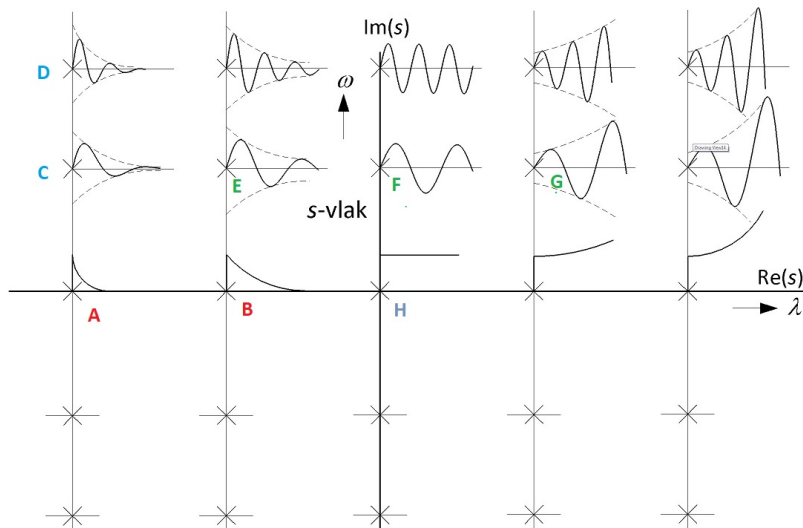
Antwoord:

- Elk toegevoegd complex poolpaar in het linkerhalfvlak geeft een gedempt sinusvormig signaal met afnemende amplitude.
- Ligt een dergelijk poolpaar verder weg van de reële as (de λ as) dan wordt de frequentie groter bij dezelfde damping.



Poolposities en impulsresponsies

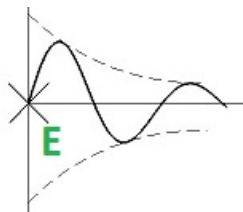
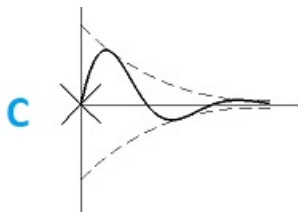
Wat valt je op als je de impulsresponsies van pool C en E met elkaar vergelijkt?



Poolposities en impulsresponsies

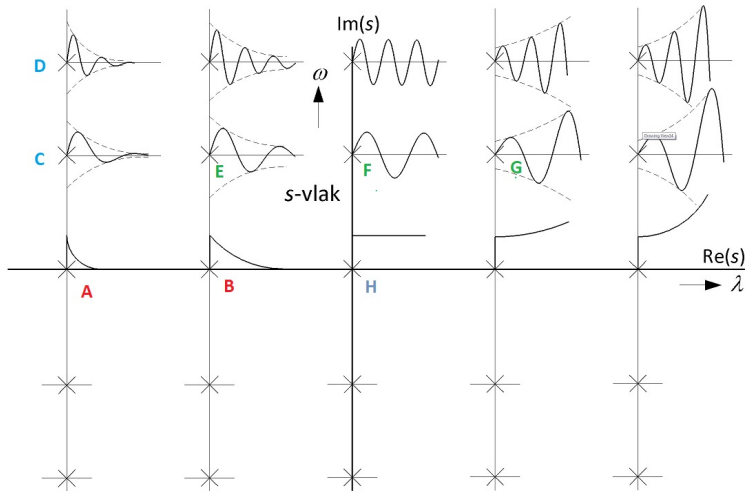
Antwoord:

- Elk toegevoegd complex poolpaar in het linkerhalfvlak geeft een gedempt sinusvormig signaal met afnemende amplitude.
- Ligt een dergelijk poolpaar verder weg van de imaginaire as (de ω as) dan neemt de damping toe bij gelijke frequentie.



Poolposities en impulsresponsies

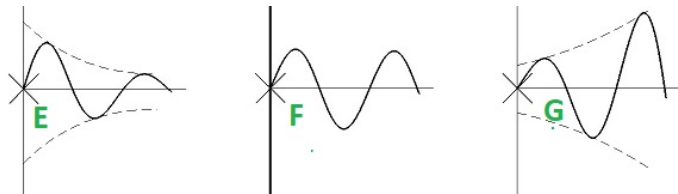
Wat valt je op als je de impulsresponsies van pool E, F en G met elkaar vergelijkt?



Poolposities en impulsresponsies

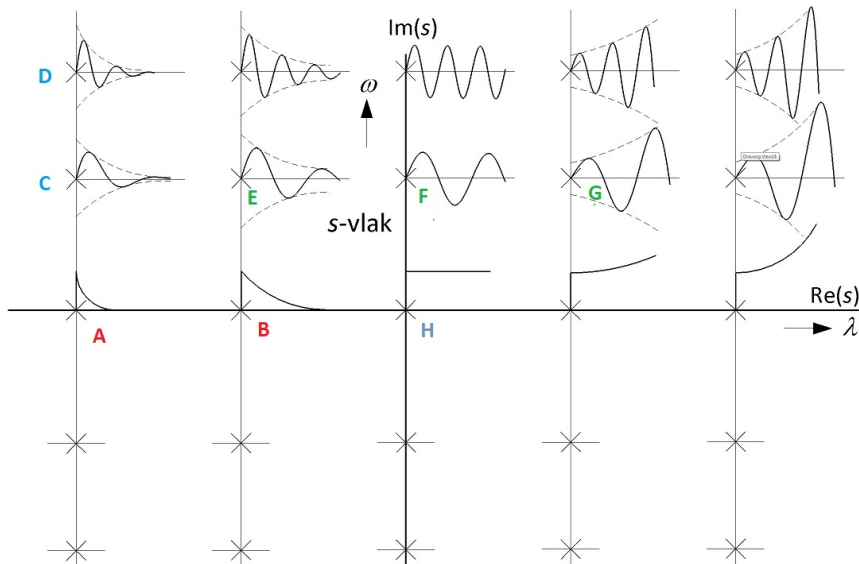
Antwoord:

- Pool E: Elk toegevoegd complex poolpaar in het linkerhalfvlak geeft een gedempt sinusvormig signaal met afnemende amplitude
- Pool F: Een toegevoegd complex poolpaar op de imaginaire as geeft een sinusvormig signaal met constante amplitude
- Pool G: Een pool in het rechter halfvlak (complex of reëel) veroorzaakt signalen met toenemende amplitude.



Poolposities en impulsresponsies

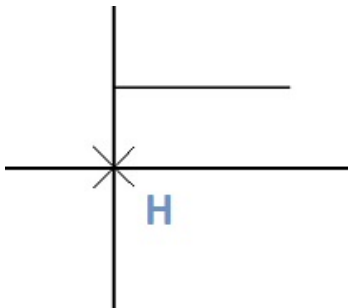
Wat kan je zeggen over de impulsresponsie van pool H?



Poolposities en impulsresponsies

Antwoord:

Een pool in de oorsprong staat voor een stapvormig uitgangssignaal.

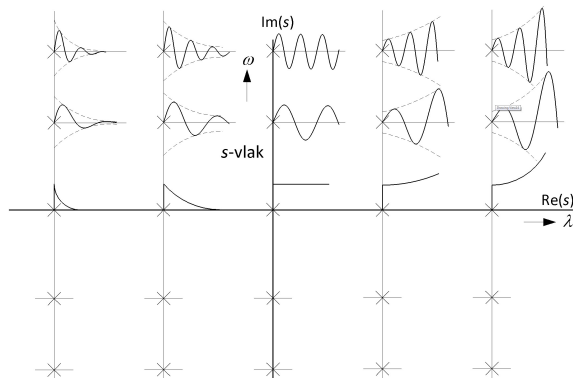


Poolposities en impulsresponsies

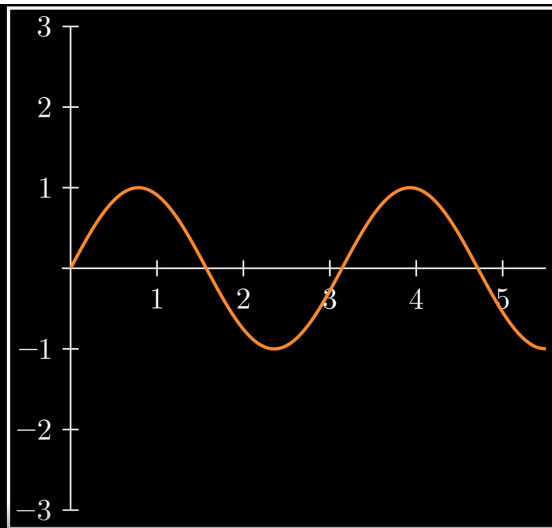
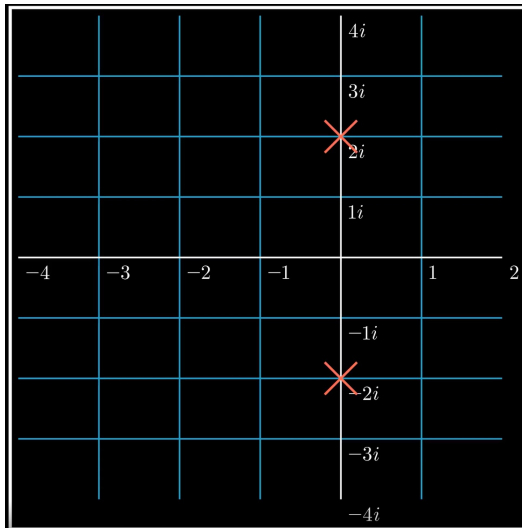
Het pn beeld geeft informatie over de eigenschappen van $H(s)$.

Definitie (Poollocatie en respons)

Er is een verband tussen de poollocatie(s) en de respons van het systeem.



Poolposities en hun impulsrespons



Volgende week...

- Basissystemen.