

REG10: Regeltechniek - Week 1.5

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vandaag

1. Connectie Laplace en Fourier
2. Systemen in het frequentiedomein
3. Opstellen Bode plot (eerste-orde)
4. Opstellen Bode plot (tweede-orde)

Belangrijke personen



Hendrik Wade Bode 1905-1982

De domeinen

Tot nu toe kunnen we systemen analyseren in het

- Tijddomein:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

- s-domein (Laplace transformatie):

$$RCsY(s) + Y(s) = X(s)$$

Vandaag voegen we een nieuw domein toe aan deze lijst.

Laplace-transformatie

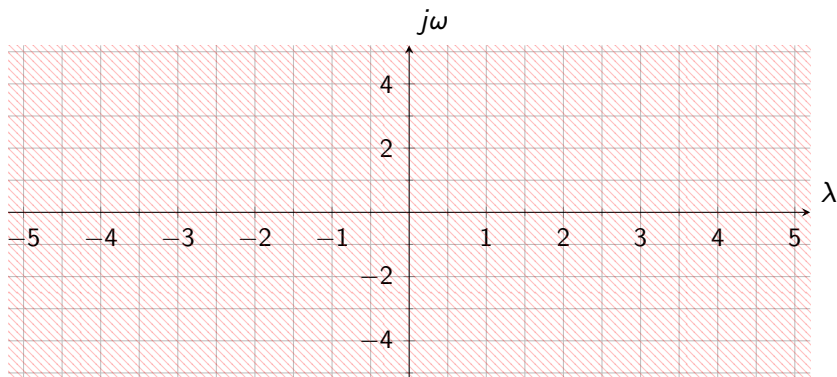
Herinner week 1:

Definitie (Laplace-transformatie)

De Laplace-transformatie van een continue tijdsfunctie $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

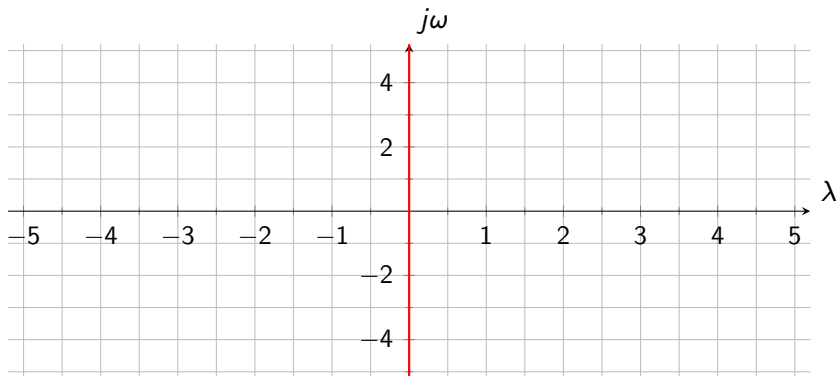
Laplace naar Fourier



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Onthoud: s is complex en dus $s = \lambda + j\omega$

Laplace naar Fourier



Wanneer we s laten beperken tot $j\omega$ (dus $s = j\omega$) verkrijgen we de *Fourier transformatie*:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Gevolg: we kunnen *niet* meer de in-/uitschakelverschijnselen analyseren.

Laplace naar Fourier

Definitie (Laplace-transformatie)

De Laplace-transformatie van een continue tijdsfunctie $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Definitie (Fourier-transformatie)

De Fourier-transformatie van een continue tijdsfunctie $f(t)$ wordt gegeven door:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

De Fourier-transformatie is dus een speciaal geval van de Laplace-transformatie!

Opgave 1

Bepaal de Fourier-transformatie:

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Opgave 1

Bepaal de Fourier-transformatie:

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Antwoord:

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

Opgave 2

Bepaal de Fourier-transformatie:

$$y(t) = e^{-t} + \sin(2t)$$

Opgave 2

Bepaal de Fourier-transformatie:

$$y(t) = e^{-t} + \sin(2t)$$

Antwoord:

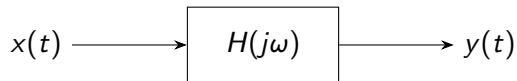
$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{2}{4 - \omega^2}$$

Voordelen $j\omega$ - t.o.v. s-domein

Het frequentiedomein geeft ons twee belangrijke voordelen.

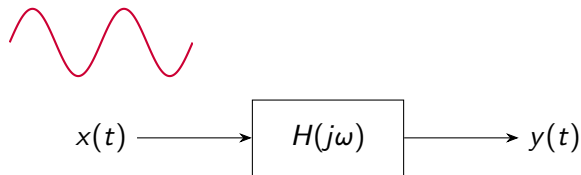
- 1 Overdracht kan worden gemeten i.p.v. berekend.
- 2 Regelaarontwerp (kwartaal 2) kan worden bereikt puur op experimentele basis (oscilloscoop, spectrumanalyzer)

Wisselsignalen en systemen



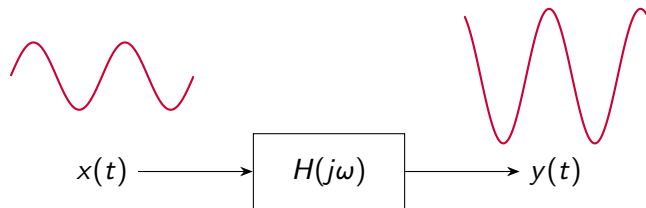
We beschouwen een systeem.

Wisselsignalen en systemen



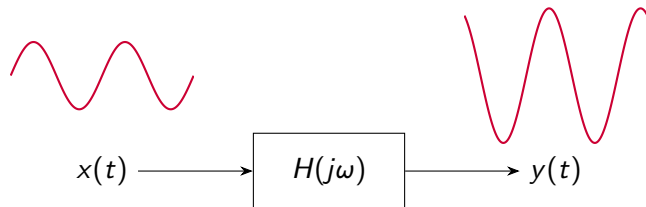
Wanneer we een sinusoïde signaal op de ingang $x(t)$ zetten...

Wisselsignalen en systemen



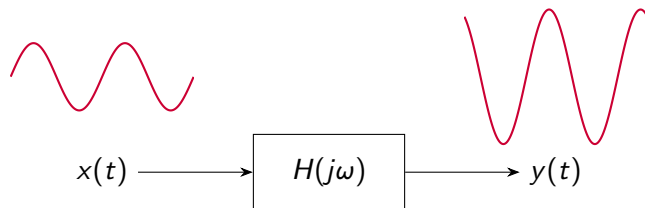
Wanneer we een sinusoïde signaal op de ingang $x(t)$ zetten ontstaat er een sinusoïde op de uitgang.

Wisselsignalen en systemen



De amplitude en fase van de uitgang sinusoïde zijn veranderd ten opzichte van de ingang sinusoïde. We kunnen deze verandering uitrekenen met de overdracht. Waarom is de frequentie niet veranderd?

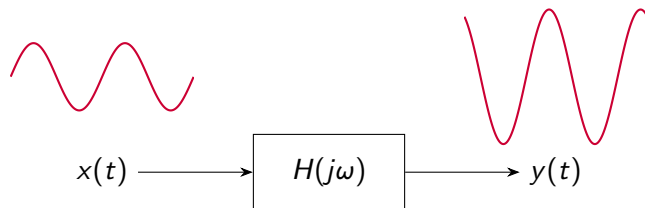
Wisselsignalen en systemen



De ingang kunnen we beschrijven als:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

Wisselsignalen en systemen



De ingang kunnen we beschrijven als:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

De uitgang wordt als volgt door het systeem beïnvloed:

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

3.4.3 Bode diagram en Nyquist plot

Om $y(t)$ te bepalen is dus alleen de volgende informatie nodig:

- $|H(j\omega)|$: de modulus van $H(j\omega)$
- $\angle H(j\omega)$: de hoek van $H(j\omega)$

3.4.3 Bode diagram en Nyquist plot

Om $y(t)$ te bepalen is dus alleen de volgende informatie nodig:

- $|H(j\omega)|$: de modulus van $H(j\omega)$
- $\angle H(j\omega)$: de hoek van $H(j\omega)$

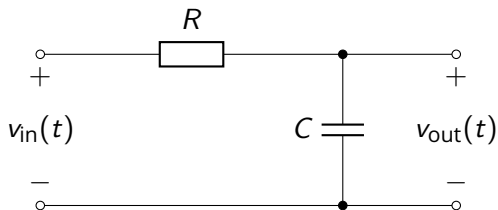
We kunnen de modulus en hoek van $H(j\omega)$ voor elke frequentie (ω) weergeven in:

- het Bode diagram van $H(j\omega)$
- het Nyquist diagram* van $H(j\omega)$ (volgende week)

*Het boek gebruikt de term polair figuur

Voorbeeld

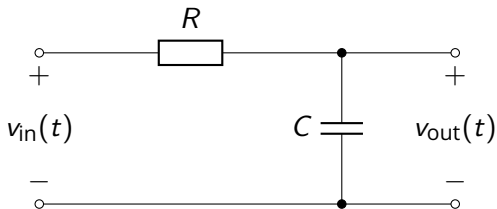
We bekijken de overdracht van onderstaand RC-netwerk:



Welk type filter is deze schakeling?

Voorbeeld

We bekijken de overdracht van onderstaand RC-netwerk:

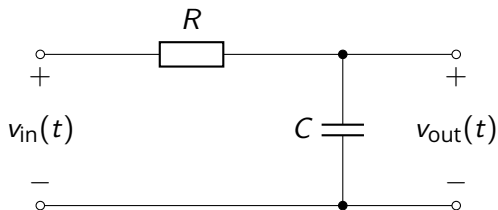


Antwoord: Laagdoorlaatfilter.

Makkelijk, maar we gaan het wiskundig aantonen.

Voorbeeld

We bekijken de overdracht van onderstaand RC-netwerk:



De overdracht hiervan is:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Opgave

Bepaal de Fourier-transformatie van:

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Opgave

Bepaal de Fourier-transformatie van:

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Antwoord:

$$H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

Voorbeeld

Bepaal de modulus, de hoek en de polen van $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

Voorbeeld

Bepaal de modulus, de hoek en de polen van $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

Antwoord:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan(RC\omega)$$

$$j\omega = s = -\frac{1}{RC}$$

Bode plot voorbeeld

We zullen de modulus plotten als functie van ω .

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \right)$$

Waarom wordt een logaritme gebruikt?

(Intermezzo) Logaritmies

— 36 —

G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.
Mantissen of decimalen van de log.											
760	.88	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763	254	258	264	270	275	281	287	292	298	304	
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	6
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	1 0,6
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	2 1,2
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	3 1,8
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	4 2,4
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	5 3,0
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	6 3,6
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	7 4,2
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	8 4,8
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	9 5,4
776	986	992	997	003	009	014	020	025	031	037	
777	.89	042	048	053	059	064	070	076	081	087	
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	5
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	1 0,5
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	2 1,0
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	3 1,6
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	4 2,1
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	5 2,6
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	6 3,1
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	7 3,6
787	597	603	609	614	619	625	631	636	642	647	8 4,1
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	9 4,6
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	10 5,1
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	
G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.

— 37 —

G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.
Mantissen of decimalen van de log.											
790	.89	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	
794	982	988	993	998	004	009	015	020	026	031	
795	.90	037	042	048	053	059	064	069	075	080	086
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	6
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	1 0,6
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	2 1,2
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	3 1,8
800	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	4 2,4
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	5 3,0
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	6 3,6
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	7 4,2
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	8 4,8
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806	634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	5
810	849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	1 0,5
811	903	908	913	918	924	929	934	940	945	950	2 1,0
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	004	3 1,6
813	.91	009	014	020	025	030	036	041	046	052	4 2,1
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	5 2,6
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	6 3,1
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	7 3,6
817	223	228	233	238	244	249	254	259	265	270	8 4,1
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	9 4,6
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	10 5,1
820	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	
G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \log(a)$$

(Intermezzo) Logaritmes

— 36 —

G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.
Mantissen of decimalen van de log.											
760	.88	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763	254	258	264	270	275	281	287	292	298	304	
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	6
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	1
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	0,6
769	593	598	604	610	615	621	627	633	638	643	1,2
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	1,8
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	2,4
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	3,0
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	3,6
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	4,2
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	4,8
776	986	992	997	003	009	014	020	025	031	037	5,4
777	.89	042	048	053	059	064	070	076	081	087	
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	5
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	0,5
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	1,0
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	1,5
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	2,0
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	2,5
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	3,0
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	3,5
787	597	603	609	614	619	625	631	636	642	647	4,0
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	4,5
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	
G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.

— 37 —

G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.
Mantissen of decimalen van de log.											
790	.89	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	
794	982	988	993	998	004	009	015	020	026	031	
795	.90	037	042	048	053	059	064	069	075	080	086
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	6
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	1
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	0,6
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	1,2
800	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	1,8
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	2,4
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	3,0
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	3,6
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	4,2
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	4,8
806	634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	5,4
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	5
810	849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	0,5
811	907	912	917	923	928	934	939	944	949	955	1,0
812	956	961	967	972	977	982	988	993	998	004	1,5
813	.91	009	014	020	025	030	036	041	046	052	2,0
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	2,5
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	3,0
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	3,5
817	223	228	233	238	244	249	254	259	265	270	4,0
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	4,5
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	
820	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	
G.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E. D.

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \log(a)$$

Logaritmes maken het rekenwerk gemakkelijker!

Bode plot voorbeeld

We zullen de modulus plotten als functie van ω .

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \right)$$

Dankzij logaritmes mogen we nu schrijven:

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = 20 \underbrace{\log_{10}(1)}_0 - 20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

Naar de Bode plot

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1^2} \right)$$

Bovenstaande functie kunnen we plotten in een grafiek. Dit wordt een Bode plot genoemd. We nemen voor $RC = 0,001 = 10^{-3}$.

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(10^{-3}\omega)^2 + 1} \right)$$

De variabele is ω . We variëren dus de frequentie. We onderscheiden drie gevallen.

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

Wanneer $\omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \underbrace{\log_{10} \left(\sqrt{0^2 + 1} \right)}_0 = 0 \text{ dB}$$

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

Wanneer $\omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \underbrace{\log_{10} \left(\sqrt{0^2 + 1} \right)}_0 = 0 \text{ dB}$$

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

Wanneer $\omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

Wanneer $\omega = \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(1)^2 + 1} \right)$$

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

Wanneer $\omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

Wanneer $\omega = \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| = -3 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| \text{ dB} &= -20 \log_{10} \left(\sqrt{(1)^2 + 1} \right) \\ &= -20 \log_{10} \left(\sqrt{2} \right) \approx -3 \text{ dB} \end{aligned}$$

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

Wanneer $\omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

Wanneer $\omega = \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| = -3 \text{ dB}$$

Wanneer $\omega \gg \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{\infty^2 + 1} \right)$$

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

$$\text{Wanneer } \omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$$

$$|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Wanneer } \omega = \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$$

$$|H(j\omega)| = -3 \text{ dB}$$

$$\text{Wanneer } \omega \gg \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$$

$$|H(j\omega)| = -\infty \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| \text{ dB} &= -20 \log_{10} \left(\sqrt{\infty^2 + 1} \right) \\ &= -20 \log_{10} (\infty) = -\infty \text{ dB} \end{aligned}$$

Drie gevallen (magnitude)

$$|H(j\omega)| \text{ dB} = -20 \log_{10} \left(\sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \right)$$

$$\text{Wanneer } \omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$$

$$|H(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Wanneer } \omega = \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$$

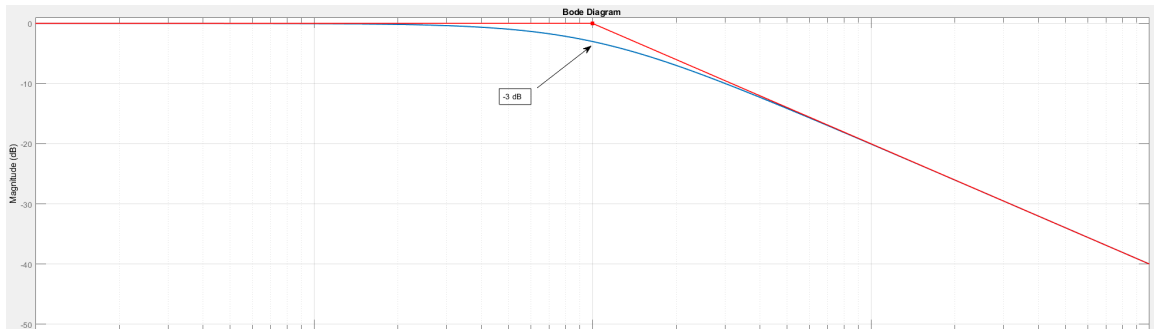
$$|H(j\omega)| = -3 \text{ dB}$$

$$\text{Wanneer } \omega \gg \left(\frac{1}{RC} = 1000 \right)$$

$$|H(j\omega)| = -\infty \text{ dB}$$

Met bovenstaande informatie kunnen we een schets maken van onze Bode plot.

Bode plot (Magnitude)



We zien dat het dus inderdaad een laagdoorlaatfilter is.

Drie gevallen (fase)

Zojuist is de Bode plot van de amplitude gemaakt. We kunnen ook een schets maken van de fase van het systeem. Hiervoor onderscheiden we weer de drie gevallen.

$$\underline{\angle H(j\omega)} = -\arctan(RC\omega)$$

Drie gevallen (fase)

Zojuist is de Bode plot van de amplitude gemaakt. We kunnen ook een schets maken van de fase van het systeem. Hiervoor onderscheiden we weer de drie gevallen.

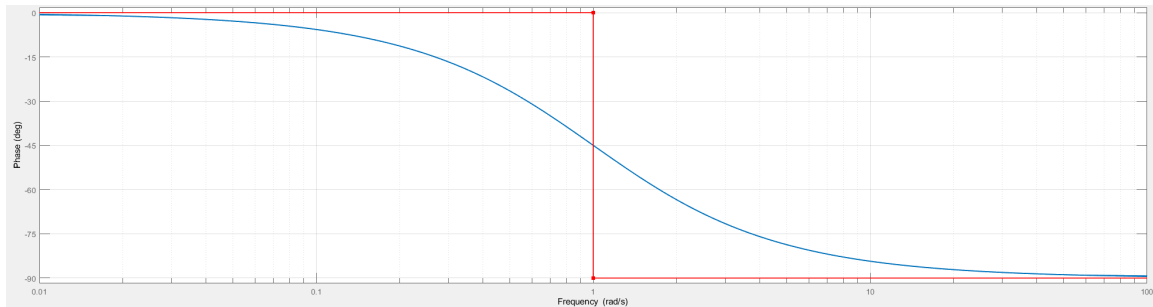
$$\underline{\angle H(j\omega)} = -\arctan(RC\omega)$$

$$\text{Wanneer } \omega \ll \left(\frac{1}{RC} = 1000\right) \quad \underline{\angle H(j\omega)} = 0^\circ$$

$$\text{Wanneer } \omega = \left(\frac{1}{RC} = 1000\right) \quad \underline{\angle H(j\omega)} = -45^\circ$$

$$\text{Wanneer } \omega \gg \left(\frac{1}{RC} = 1000\right) \quad \underline{\angle H(j\omega)} = -90^\circ$$

Bode plot (fase)



Samenvatting

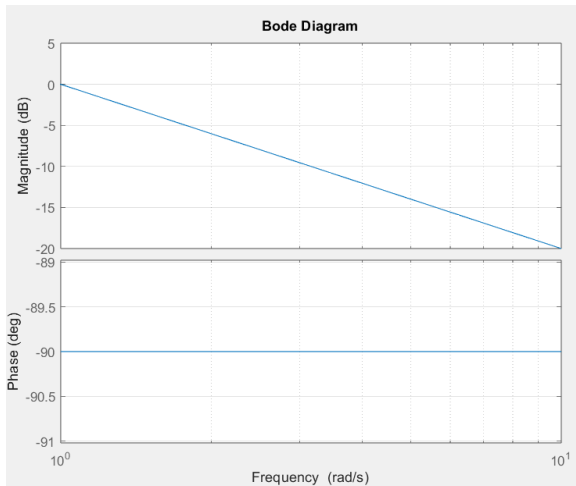
Op de kantelfrequentie van een pool zijn

- $\angle H(j\omega) = -45^\circ$
- $|H(j\omega)| \text{ dB} = -3 \text{ dB}$

Asymptoot heeft een helling van -20 dB per decade.

Speciaal geval

Voor een integrator (pool in de oorsprong) daalt de magnitudekarakteristiek al met -20 dB per decade en begint de fasekarakteristiek met -90° .



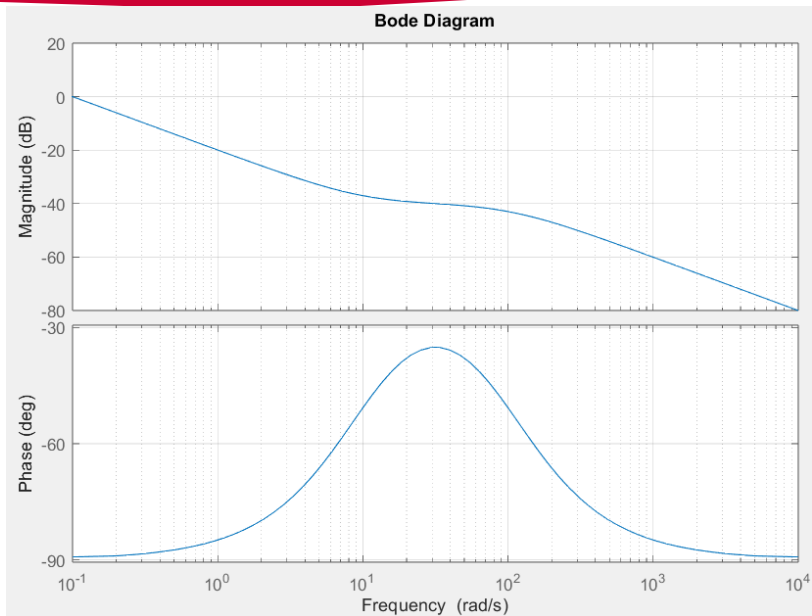
Opgave

Teken de Bode plot voor het volgende systeem.

$$H(s) = \frac{s + 10}{s(s + 100)}$$

Hint: Als polen de magnitude doen dalen met -20 dB per decade, wat doen nulpunten dan? Hetzelfde geldt voor de fase ...

Antwoord



Tweede-orde systeem in Bode-vorm

Herinner het tweede-orde systeem van vorige week:

$$H(s) = K_{\text{stat}} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Tweede-orde systeem in Bode-vorm

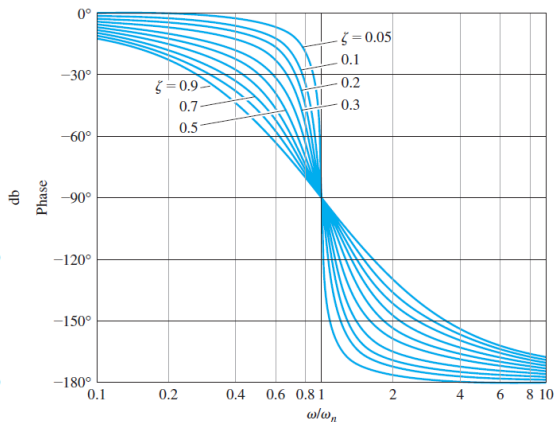
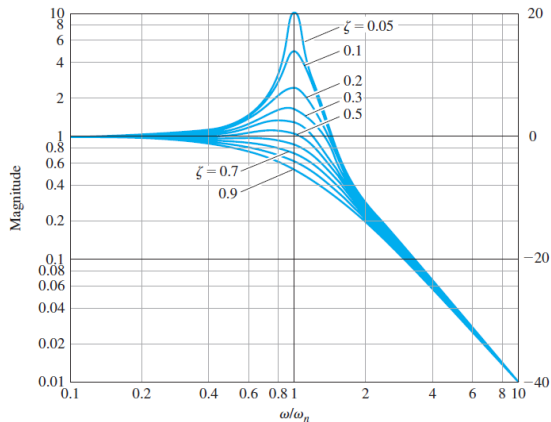
Herinner het tweede-orde systeem van vorige week:

$$H(s) = K_{\text{stat}} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

De Fourier getransformeerde hiervan is:

$$H(s) = K_{\text{stat}} \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\beta\frac{j\omega}{\omega_0} + 1}$$

Tweede-orde voorbeeld



Het boek gebruikt β in plaats van ζ .[†]

[†]Plaatjes afkomstig uit: Feedback control of dynamic systems, Pearson, 2016, Gene F. Franklin

Belangrijke kenmerken tweede-orde

Belangrijke kenmerken van de kantelfrequentie:

- $\angle H(j\omega) = -90^\circ$
- $|H(j\omega)| \text{ dB} = -6 \text{ dB}$

Asymptoot heeft een helling van -40 dB per decade.

De β bepaalt de mate van *opslingering* of *resonantie* van het systeem. Bekijk paragraaf 4.8.3.

Schetsen van een Bode plot

Recept voor het schetsen van een Bode plot:

- 1 Zet de overdracht om in de Bode vorm.
- 2 Sorteert (complexe paren) nulpunten en polen op hun (kantel)frequentie.
- 3 Bepaal magnitude/fase van $K_o(j\omega)^n$ term.
- 4 Ga de nulpunten en polen in oplopende frequentie af om te zien hoe magnitude/fase veranderen.

Wat is de bode vorm?

Stap 1: Bode vorm

De bode vorm van een systeem is:

$$K_o(j\omega)^n \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{\omega_1} + 1\right) \dots}{\left(\frac{j\omega}{\omega_a} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{\omega_b} + 1\right) \dots}$$

Vergelijk met de al bekende vorm[‡]:

$$H(s) = K_{pn} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots}{(s - p_1)(s - p_2) \dots}$$

[‡]Dit wordt de *evans vorm* genoemd

Voorbeeldopgave

Bepaal de Bode vorm van de overdrachtsfunctie

$$H(s) = 16 \frac{50s + 5}{s(4s^2 + 40s + 400)}$$

Voorbeeldopgave

Bepaal de Bode vorm van de overdrachtsfunctie

$$H(s) = 16 \frac{50s + 5}{s(4s^2 + 40s + 400)}$$

Antwoord:

$$H(j\omega) = \frac{1}{5}(j\omega)^{-1} \frac{10j\omega + 1}{\frac{1}{100}(j\omega)^2 + \frac{1}{10}j\omega + 1}$$

Stap 2: Sorteren van kantelfrequenties

$$H(j\omega) = \frac{1}{5}(j\omega)^{-1} \frac{10j\omega + 1}{\left(\frac{j\omega}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}j\omega + 1}$$

De kantelfrequenties zijn (in oplopende volgorde):

- $\omega = 0.1 \text{ rad s}^{-1}$ (een nulpunt)
- $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ (een complex polenpaar)

Stap 3: $K_o(j\omega)^n$ term

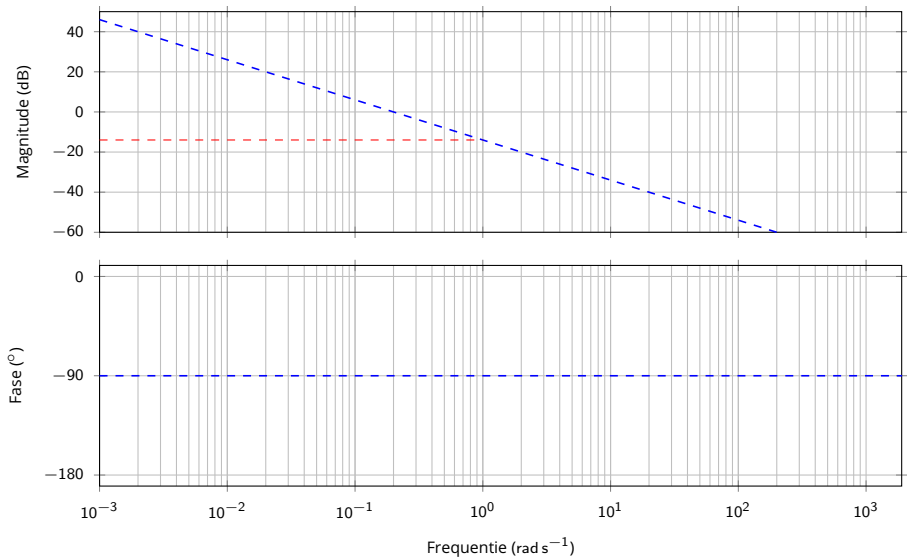
$$H(j\omega) = \frac{1}{5}(j\omega)^{-1} \frac{10j\omega + 1}{\left(\frac{j\omega}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}j\omega + 1}$$

De laagste frequentie is $\omega = 0.1 \text{ rad s}^{-1}$.

De term $\frac{1}{5}(j\omega)^{-1}$ geeft aan dat:

- De magnitude bij $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ gelijk is aan $20 \log\left(\frac{1}{5}\right) \approx -14 \text{ dB}$.
- De magnitude afloopt met $-1 \cdot 20 \text{ dB}$ per decade.
- $\angle \frac{1}{5}(j\omega)^{-1} = -1 \cdot \angle \frac{1}{5}(j\omega) = -90^\circ$.

Tussenstand



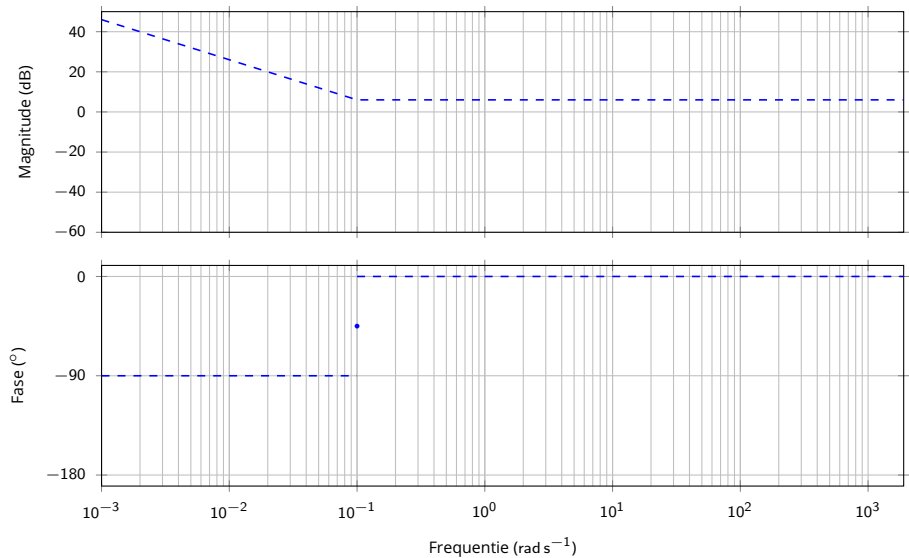
Stap 4: Nulpunt op $\omega = 0.1 \text{ rad s}^{-1}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{5}(j\omega)^{-1} \frac{10j\omega + 1}{\left(\frac{j\omega}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}j\omega + 1}$$

Op de frequentie $\omega = 0.1 \text{ rad s}^{-1}$ bevindt zich een nulpunt. Dit houdt in dat:

- De magnitude met 20 dB per decade *toeneemt*.
- De fase in totaal met 90° *toeneemt*.
- Op $\omega = 0.1 \text{ rad s}^{-1}$ zelf is de fase met 45° *toegenomen*.

Tussenstand



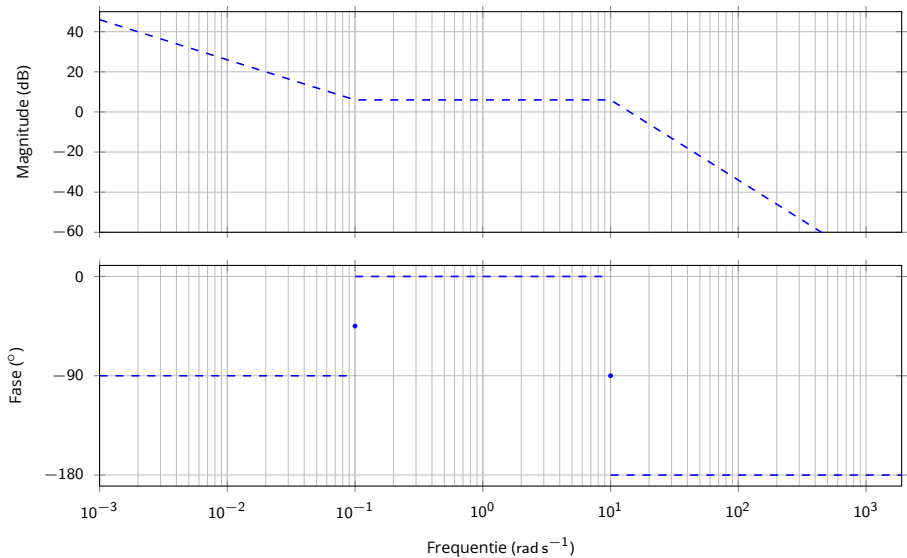
Stap 4: Polenpaar op $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{5}(j\omega)^{-1} \frac{10j\omega + 1}{\left(\frac{j\omega}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}j\omega + 1}$$

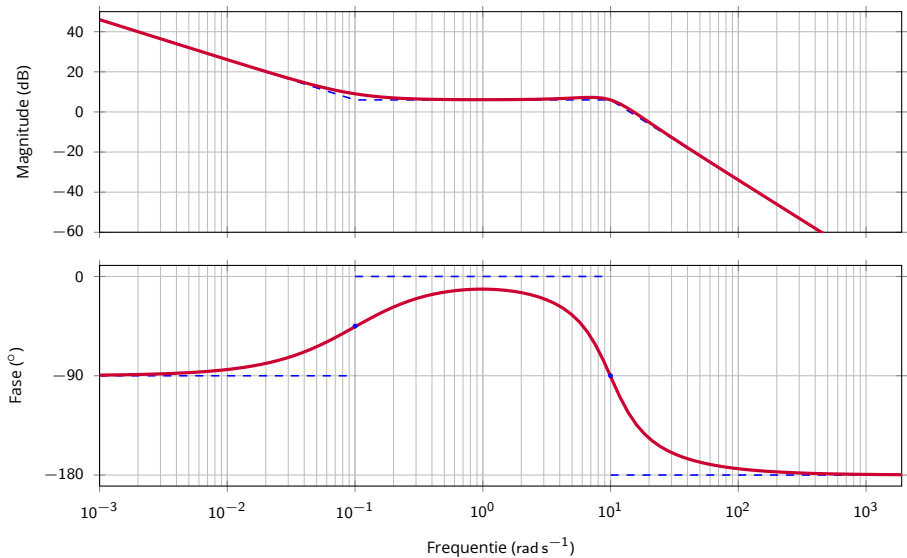
Op de frequentie $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ bevindt zich een polenpaar. Dit houdt in dat:

- De magnitude met 40 dB per decade *afneemt*.
- De fase in totaal met 180° *afneemt*.
- Op $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ zelf de fase met 90° is *afgenomen*.

Antwoord



Antwoord



Volgende week...

- Nyquist plot