

REG10: Regeltechniek - Week 1.7

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vorige week

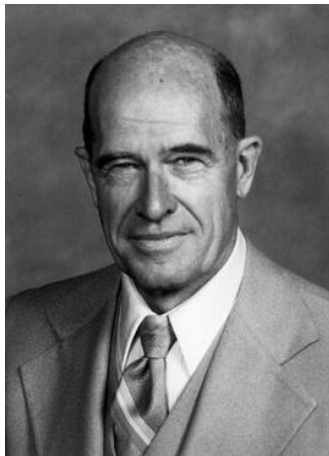
- Basissystemen in het ω -domein
- Stabiliteit

Vandaag

1. Introductie/motivatie poolbanen

2. Poolbaanregels

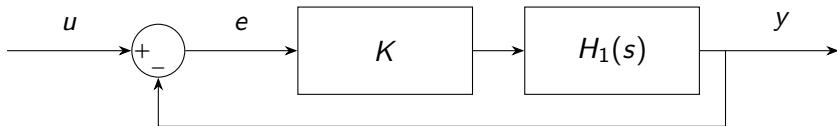
Inleiding



Walter R. Evans (1920-1999)

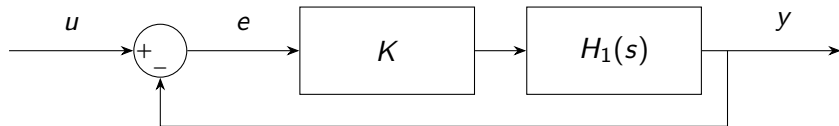
Terugkoppeling

Herinner het teruggekoppelde systeem. Bepaal de overdracht.



Terugkoppeling

Herinner het teruggekoppelde systeem. Bepaal de overdracht.



Antwoord:

$$H(s) = \frac{KH_1(s)}{1 + KH_1(s)}$$

De polen van het systeem bepalen de eigenschappen van het systeem (stabiliteit, doorschot, etc.)

Veranderen K

Wanneer de K wordt aangepast zullen de polen van de overdracht veranderen. Ter oefening zullen we dit voor drie situaties van K doen.

Links	Midden	Rechts
$K=\frac{1}{2}$	$K=1$	$K=2$

$$H_1 = \frac{1}{s(s+2)}$$
$$H(s) = \frac{KH_1(s)}{1 + KH_1(s)}$$

Veranderen K (Uitwerking)

Noemer gelijkstellen aan nul:

$$s(s + 2) + K = 0$$

$$s^2 + 2s + K = 0$$

ABC-formule geeft:

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

K invullen:

Links	Midden	Rechts
$K = \frac{1}{2}$	$K = 1$	$K = 2$
$-1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-1 \pm i$

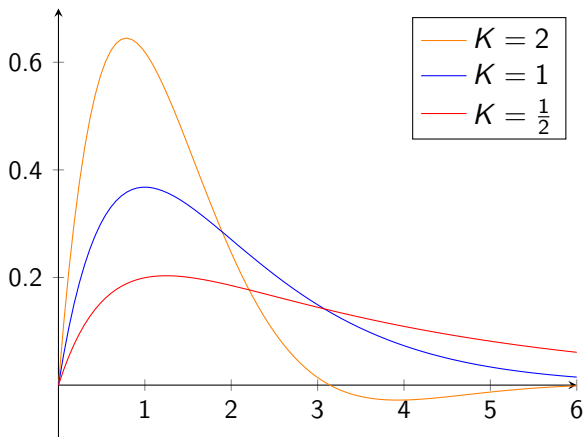
Observatie

Belangrijke observatie!

Door het veranderen van de K kan de responsie worden beïnvloed. We gaan dit beschouwen met het voorgaande systeem.

Links	Midden	Rechts
$K=\frac{1}{2}$	$K=1$	$K=2$
$-1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-1 \pm i$

Impulsresponsie verschillende K



Polen nulpunten plot

Om te begrijpen welke invloed het veranderen van de K heeft zullen we de open-loop polen in het complexe vlak tekenen.

$$H_1 = \frac{1}{s(s+2)}$$

Bepaal de *open-loop* polen van dit systeem.

Polen nulpunten plot

Om te begrijpen welke invloed het veranderen van de K heeft zullen we de open-loop polen in het complexe vlak tekenen.

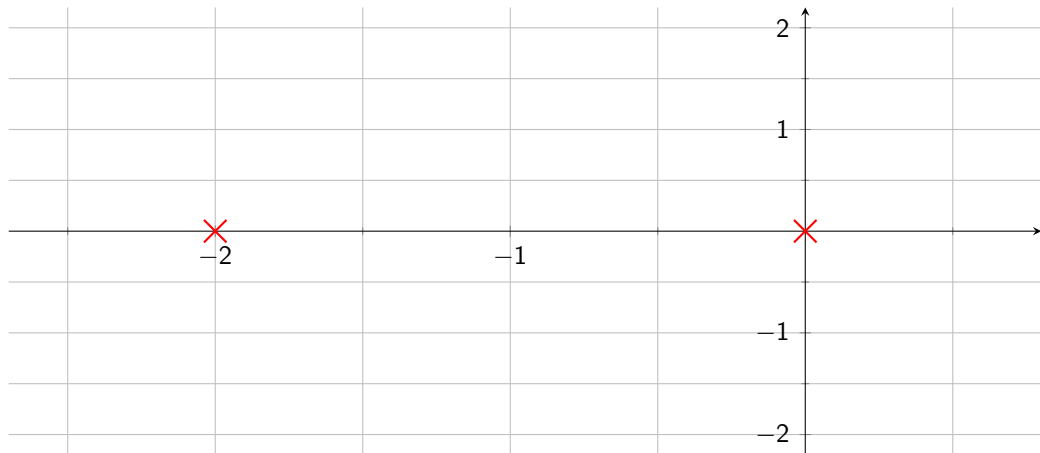
$$H_1 = \frac{1}{s(s+2)}$$

Antwoord:

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -2$$

Polen plot

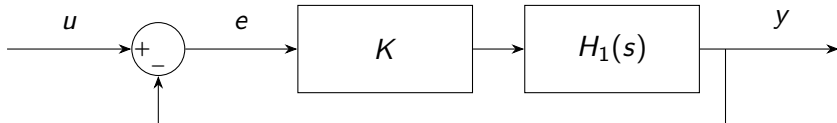


Closed-loop polen

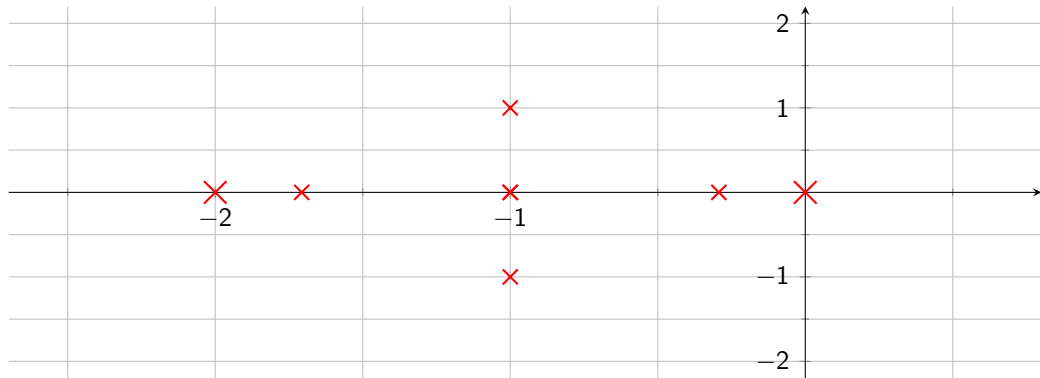
In dezelfde plot kunnen we nu ook de *closed-loop* polen invullen.

Links	Midden	Rechts
$K = \frac{1}{2}$	$K = 1$	$K = 2$
$-1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	$-1 \pm i$

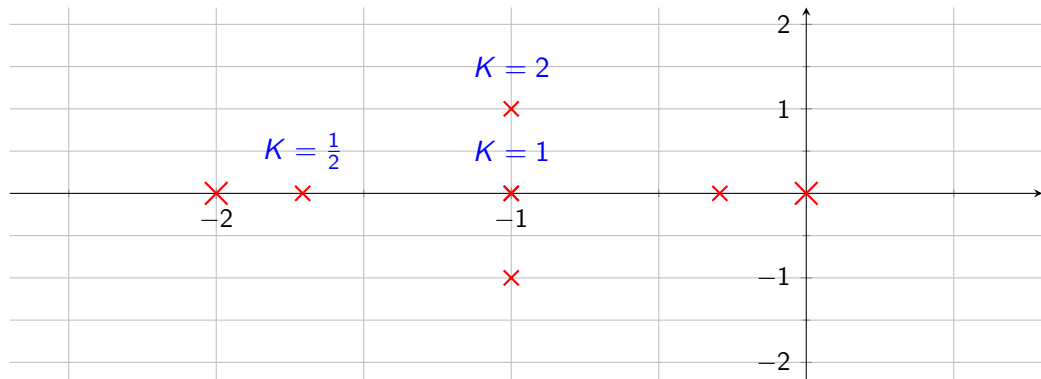
Houd onderstaand plaatje in gedachten:



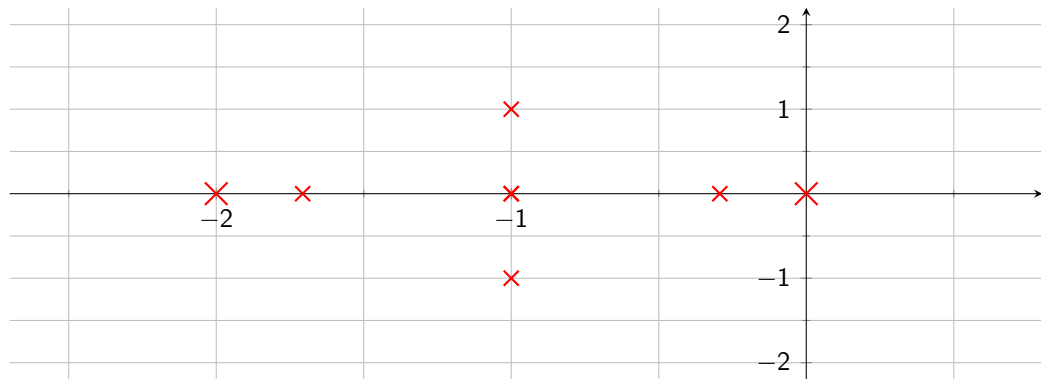
Polen plot



Polen plot

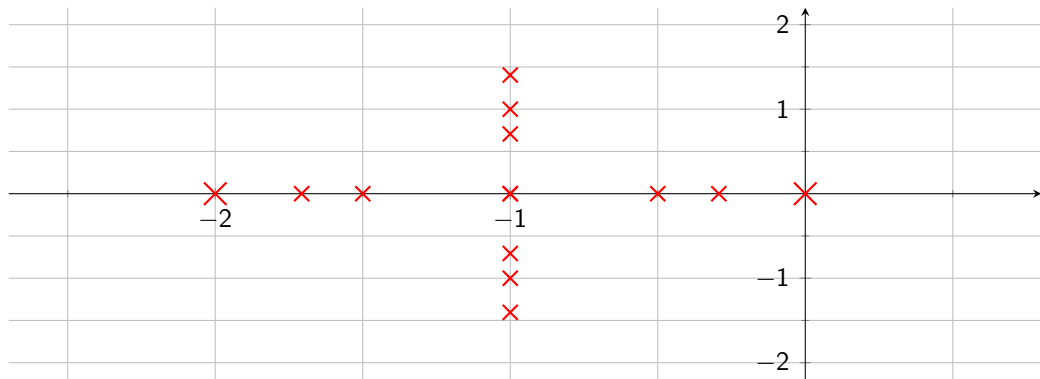


Polen plot



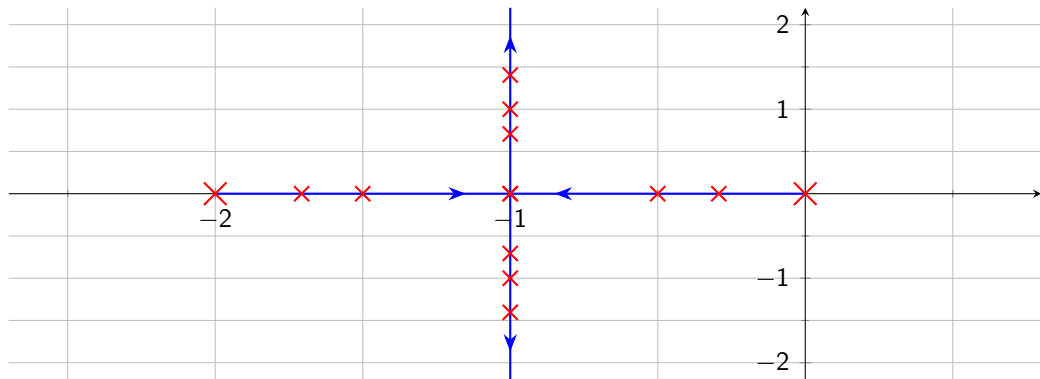
We kunnen nu meer waarden voor K kiezen en invullen in de plot.

Polen plot



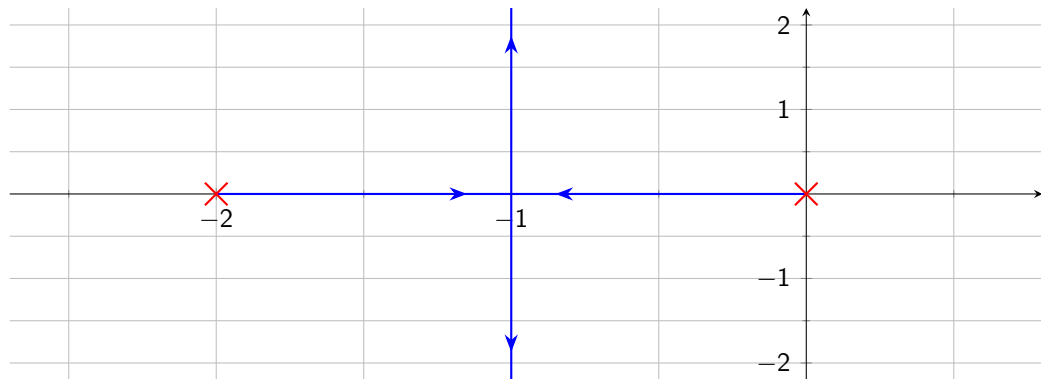
Er is nu een patroon te herkennen...

Polen plot



Er is nu een patroon te herkennen...

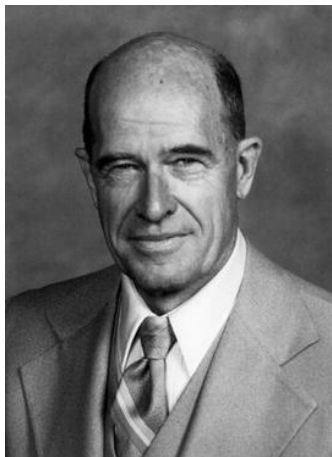
Polen plot



De blauwe lijn wordt een *poolbaan** genoemd. Het geeft weer hoe de *closed-loop* polen variëren bij een veranderende K .

*Engels: Root locus (meervoud: root loci)

Poolbaanregels



Walter R. Evans (1920-1999)

De vorm van de poolbaan in voorgaand voorbeeld is niet toevallig. Er zijn regels op te stellen die dit gedrag verklaren.

Poolbaanregels

Aanschouw opnieuw de overdracht van een teruggekoppeld systeem.

$$H(s) = \frac{KH_1(s)}{1 + KH_1(s)}$$

Als we de noemer gelijk stellen aan 0 krijgen we de zogeheten *poolbaanvergelijking*[†]:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

Uit deze vergelijking zijn zogeheten *poolbaanregels* te herleiden.

[†]Ook wel karakteristieke vergelijking
(Engels: Characteristic equation) genoemd.

Begin- en eindpunten

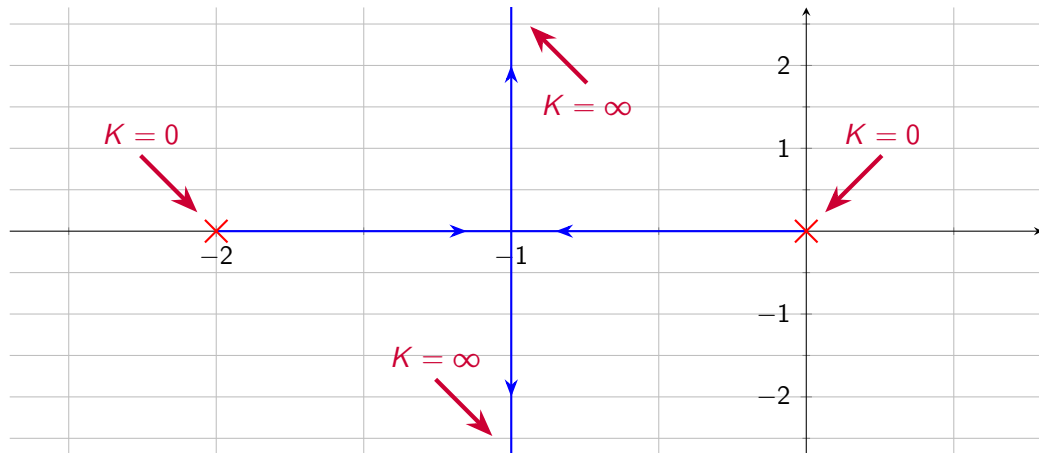
Als we $K = 0$ en $K = \infty$ invullen verkrijgen we respectievelijk de begin- en eindpunten van de poolbaan.

$$H_1(s) = -\frac{1}{K} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T(s)}{N(s)} = -\frac{1}{K}$$

Poolbaanregel 1: Begin- en eindpunten

De begin- en eindpunten van een poolbaan zijn respectievelijk de *open-loop* polen en nulpunten van het systeem

Verificatie



Fasevoorwaarde

De *closed-loop* polen voldoen **altijd** aan poolbaanvergelijking:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

$H_1(s)$ is een complexe breuk en kan als fasor worden beschouwd.

Fasevoorwaarde

De *closed-loop* polen voldoen **altijd** aan poolbaanvergelijking:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

$H_1(s)$ is een complexe breuk en kan als fasor worden beschouwd.

$$\angle H_1(s)$$

Fasevoorwaarde

De *closed-loop* polen voldoen **altijd** aan poolbaanvergelijking:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

$H_1(s)$ is een complexe breuk en kan als fasor worden beschouwd.

$$\angle H_1(s) \Rightarrow \angle \frac{T(s)}{N(s)}$$

Fasevoorwaarde

De *closed-loop* polen voldoen **altijd** aan poolbaanvergelijking:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

$H_1(s)$ is een complexe breuk en kan als fasor worden beschouwd.

$$\angle H_1(s) \Rightarrow \angle \frac{T(s)}{N(s)} \Rightarrow \angle T(s) - \angle N(s) = \angle -\frac{1}{K}$$

Fasevoorwaarde

De *closed-loop* polen voldoen **altijd** aan poolbaanvergelijking:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

$H_1(s)$ is een complexe breuk en kan als fasor worden beschouwd.

$$\angle H_1(s) \Rightarrow \angle \frac{T(s)}{N(s)} \Rightarrow \angle T(s) - \angle N(s) = \angle -\frac{1}{K} \Leftarrow \pi + k2\pi$$

Fasevoorwaarde

De *closed-loop* polen voldoen **altijd** aan poolbaanvergelijking:

$$1 + KH_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1(s) = -\frac{1}{K}$$

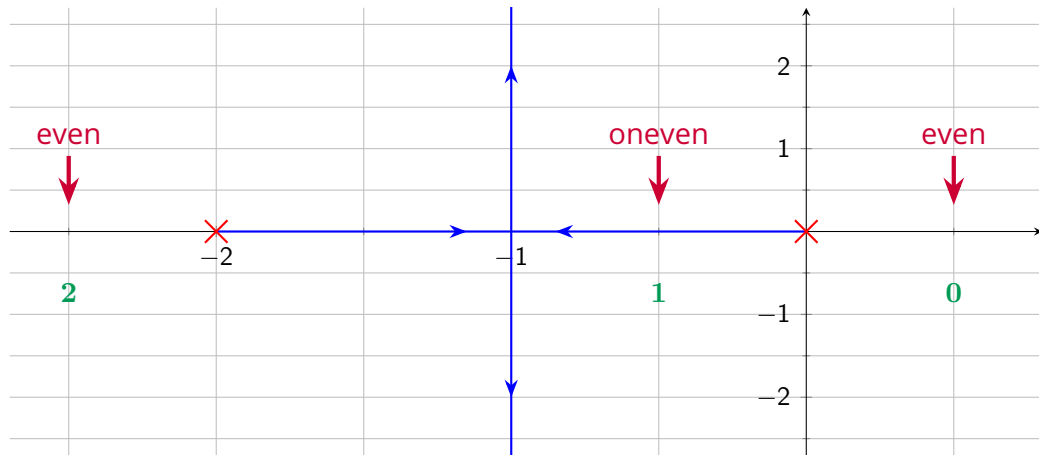
$H_1(s)$ is een complexe breuk en kan als fasor worden beschouwd.

$$\angle H_1(s) \Rightarrow \angle \frac{T(s)}{N(s)} \Rightarrow \angle T(s) - \angle N(s) = \angle -\frac{1}{K} \Leftarrow \pi + k2\pi$$

Poolbaanregel 2: Reële as

Punten op de reële as die links van een oneven aantal nulpunten en polen liggen behoren tot een poolbaan.

Verificatie



Donkergroen: Aantal polen/nulpunten bekeken van rechts

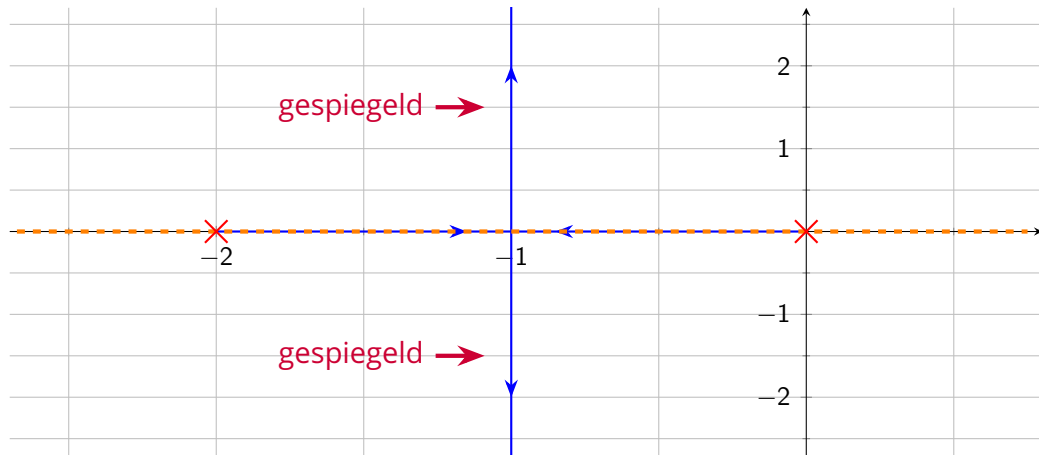
Symmetrie van poolbaan

Als er een complexe pool $p = \alpha + j\beta$ is, dan is ook zijn complex geconjugeerde $\bar{p} = \alpha - j\beta$ een pool.

Poolbaanregel 3: Symmetrie

Poolbanen zijn symmetrisch ten opzichte van de reële as.

Verificatie



Oranje: De spiegellijn.

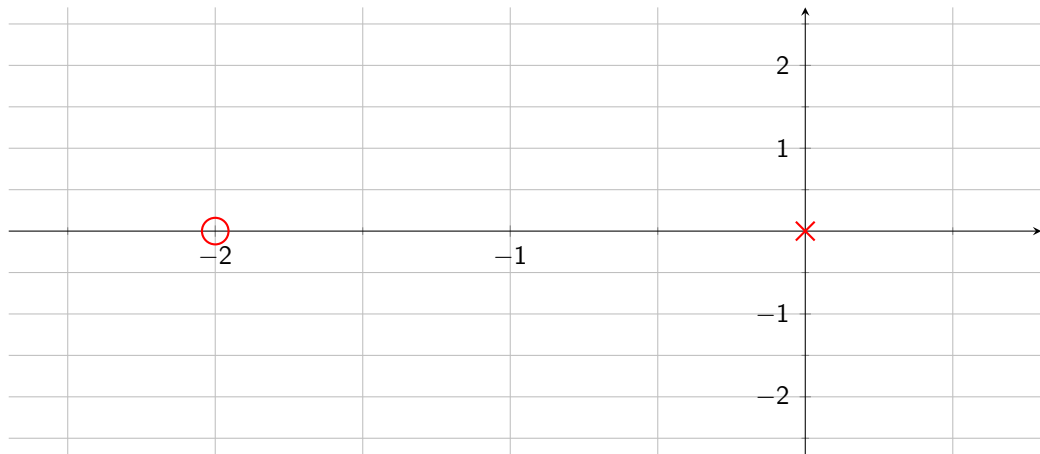
Tussentijdse samenvatting

Tot nu toe zijn er drie regels opgesteld. Samengevat:

- 1 De begin- en eindpunten van een poolbaan zijn respectievelijk de *open-loop* polen en nulpunten van het systeem
- 2 Punten op de reële as die links van een oneven aantal nulpunten en polen liggen behoren tot een poolbaan.
- 3 Poolbanen zijn symmetrisch ten opzichte van de reële as.

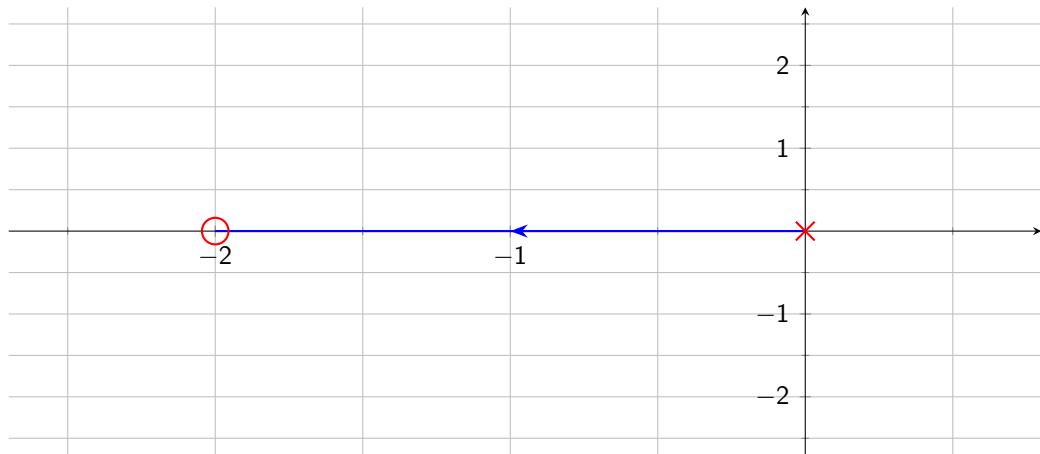
Opgave 1

Teken de root locus:



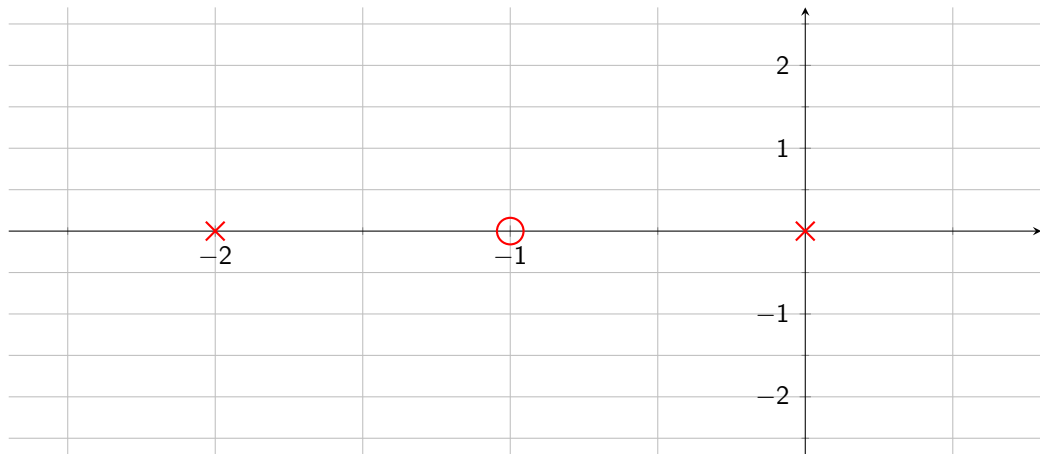
Opgave 1

Teken de root locus:



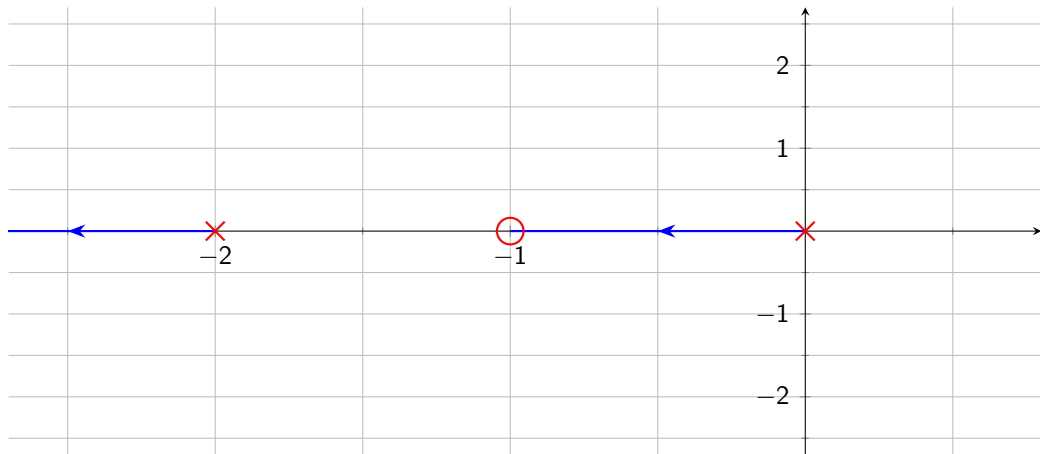
Opgave 2

Teken de root locus:



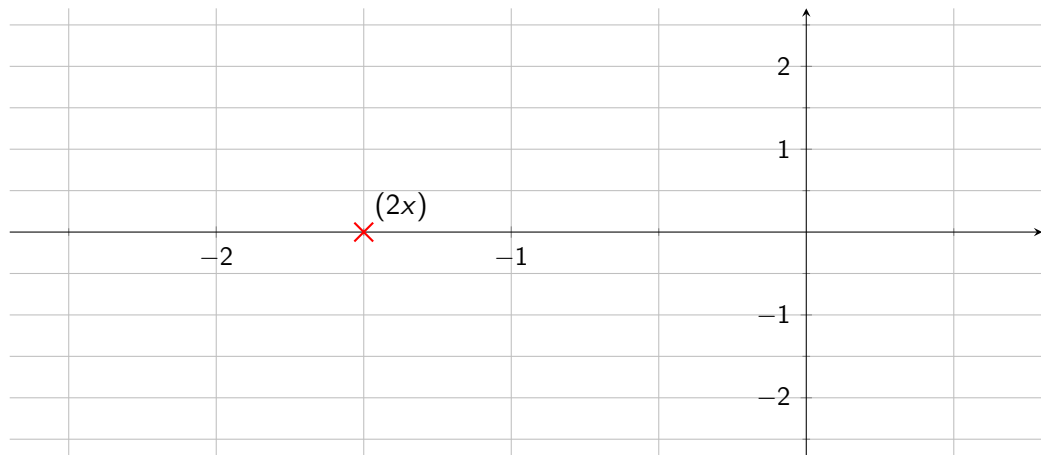
Opgave 2

Teken de root locus:



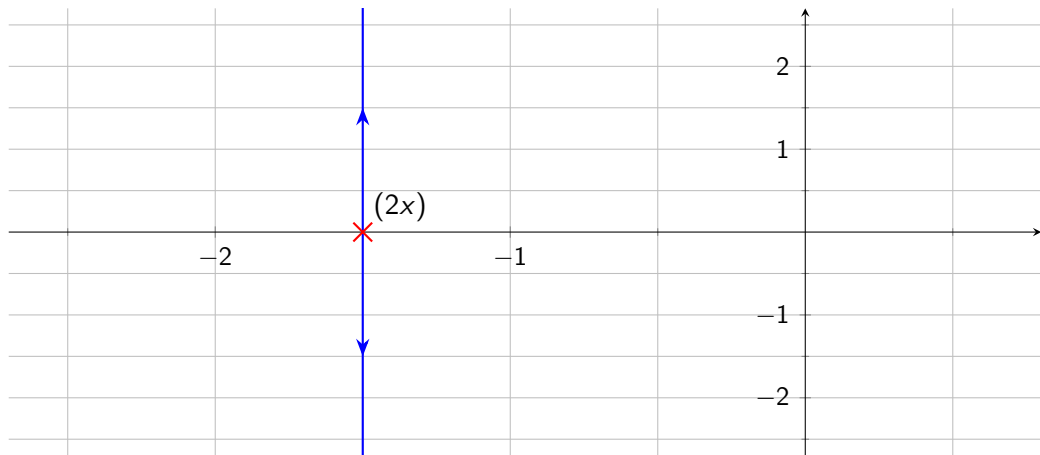
Opgave 3

Teken de poolbaan:



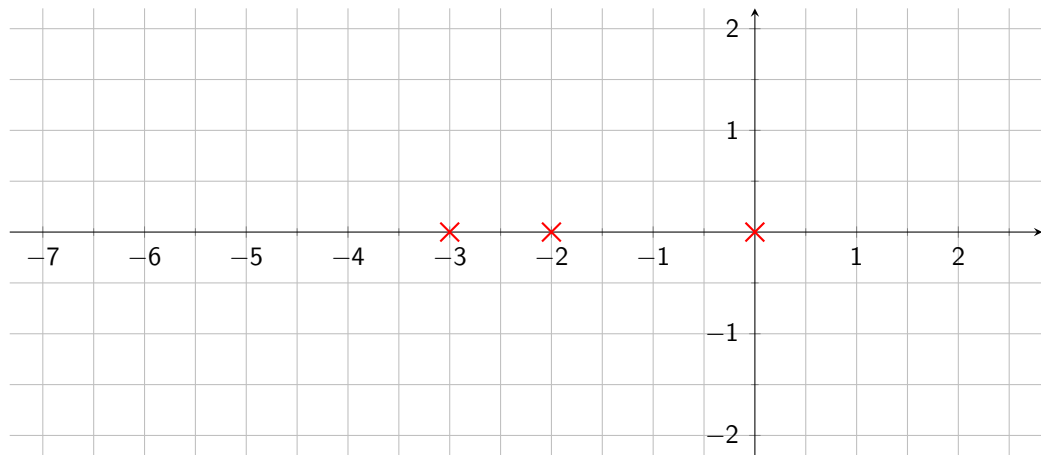
Opgave 3

Teken de poolbaan:



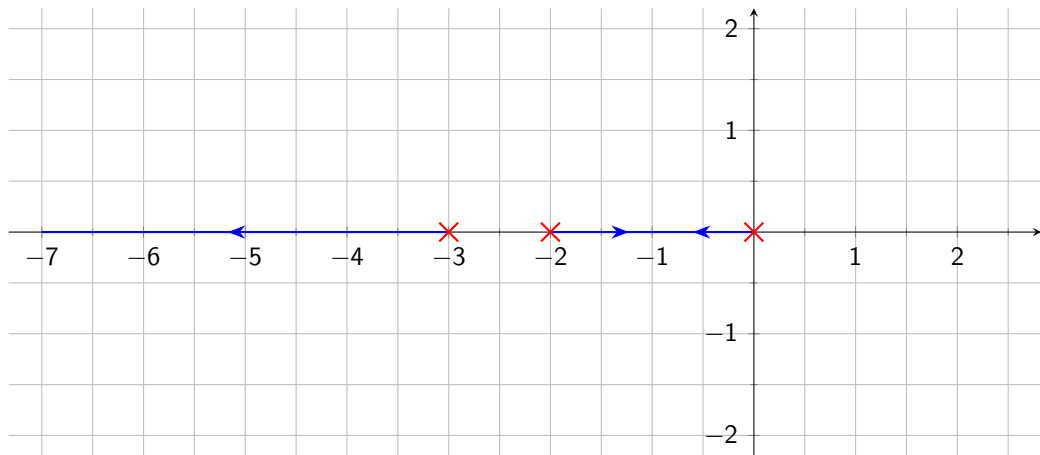
Opgave 4

Schets de poolbaan...



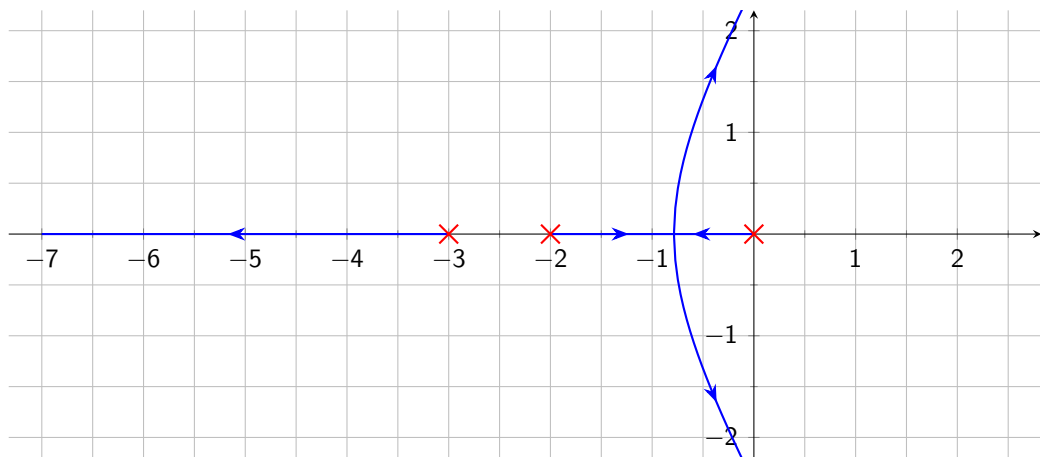
Opgave 4

Schets de poolbaan...



Opgave 4

Schets de poolbaan...



Meer informatie nodig

Laatste opdracht is nog niet te schetsen met kennis die we tot nu toe hebben. We hebben meer kennis/poolbaanregels nodig. Afleiding van deze poolbaanregels zijn zeer wiskundig en kennis over de afleiding is niet nodig om poolbanen te schetsen. Geïnteresseerden kunnen de afleiding [hier](#) bestuderen.

Asymptoten van de poolbaan (startpunt)

De poolbanen volgen bepaalde asymptoten. De asymptoten geven dus *ongeveer* aan hoe een poolbaan zal lopen. De hoek en het startpunt van de asymptoten kunnen we berekenen.

Poolbaanregel 4: Startpunt van asymptoten op reële as

De asymptoten vertrekken vanaf de reële as vanuit punt α , welke gegeven wordt door

$$\alpha_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

waarin z_i en p_i de *open-lus* locaties van nulpunten en polen zijn.
 n is het aantal polen en m het aantal nulpunten.

Asymptoten van de poolbaan (hoek)

De hoeken van de asymptoten kunnen we berekenen met de volgende definitie:

Poolbaanregel 5: Hoek van asymptoot t.o.v. de reële as

De asymptoten vertrekken vanaf de reële as vanuit punt α , welke gegeven wordt door

$$\alpha_h = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{n - m} = \frac{\pi + 2k\pi}{n - m}$$

waarin n het aantal polen en m het aantal nulpunten is.

Opgave

Bereken het startpunt van de asymptoten van het systeem:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Poolbaanregel 4: Startpunt van asymptoten op reële as

De asymptoten vertrekken vanaf de reële as vanuit punt α , welke gegeven wordt door

$$\alpha_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

waarin z_i en p_i de open-lus locaties van nulpunten en polen zijn.
 n is het aantal polen en m het aantal nulpunten.

Opgave

Bereken het startpunt van de asymptoten van het systeem:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Antwoord:

$$\alpha_s = \frac{0 - 2 - 3 - 0}{3 - 0}$$

$$\alpha_s = -\frac{5}{3} \approx -1,67$$

Opgave

Bereken de hoeken van de asymptoten van het systeem:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Poolbaanregel 5: Hoek van asymptoot t.o.v. de reële as

De asymptoten vertrekken vanaf de reële as vanuit punt α , welke gegeven wordt door

$$\alpha_h = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{n - m} = \frac{\pi + 2k\pi}{n - m}$$

waarin n het aantal polen en m het aantal nulpunten is.

Opgave

Bereken de hoeken van de asymptoten van het systeem:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Antwoord:

$$\begin{aligned}\alpha_h &= \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} \\ &= 60^\circ + 120^\circ k\end{aligned}$$

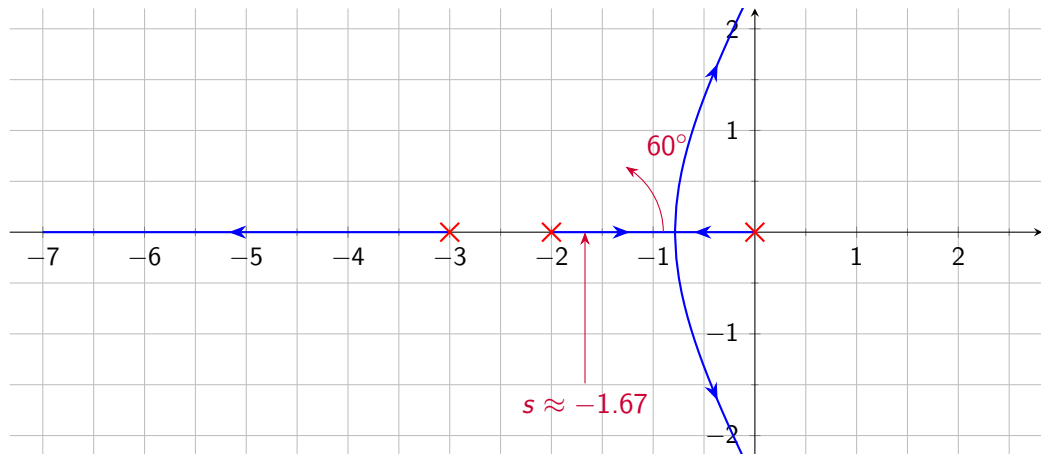
dus de hoeken zijn:

$$k = 0 \Rightarrow 60^\circ$$

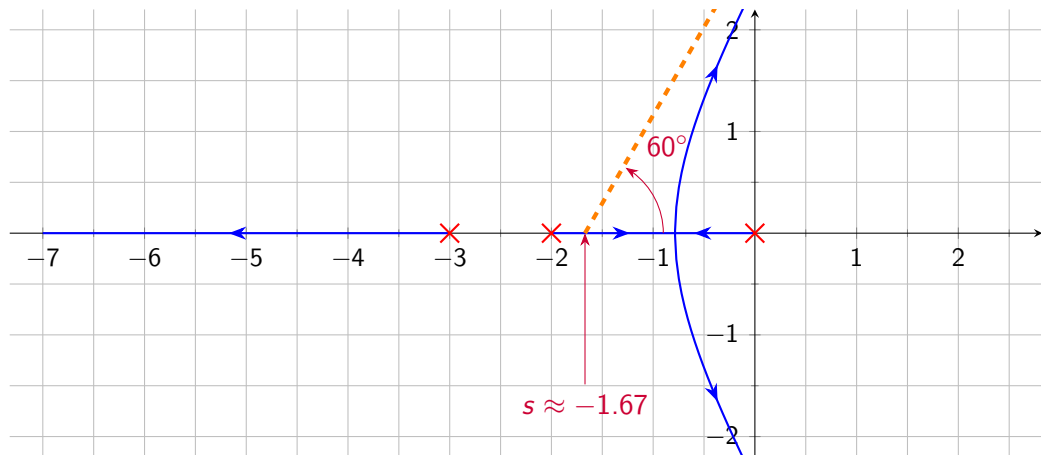
$$k = 1 \Rightarrow 180^\circ$$

$$k = 2 \Rightarrow 300^\circ$$

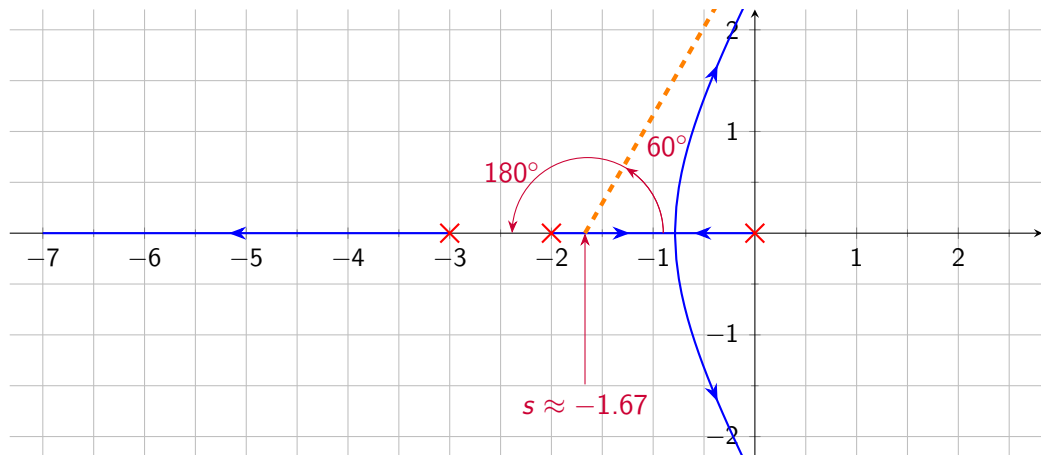
Verificatie



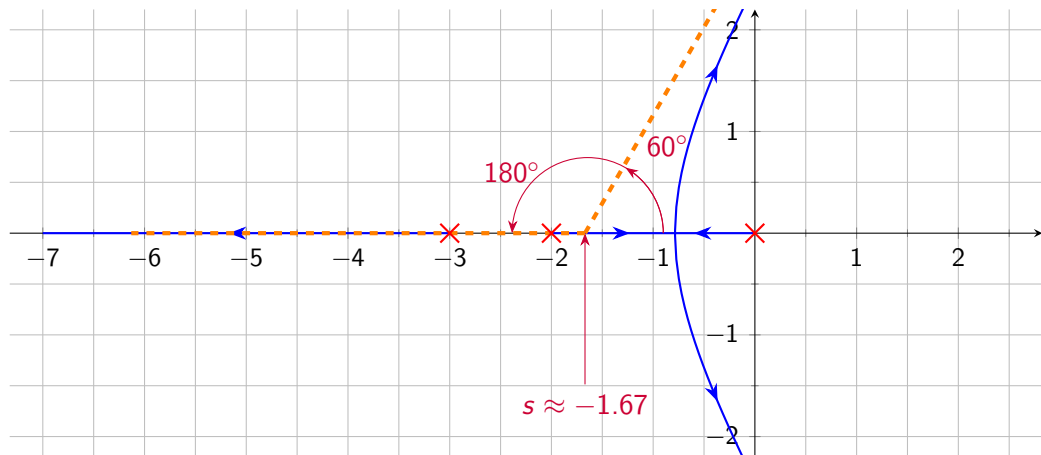
Verificatie



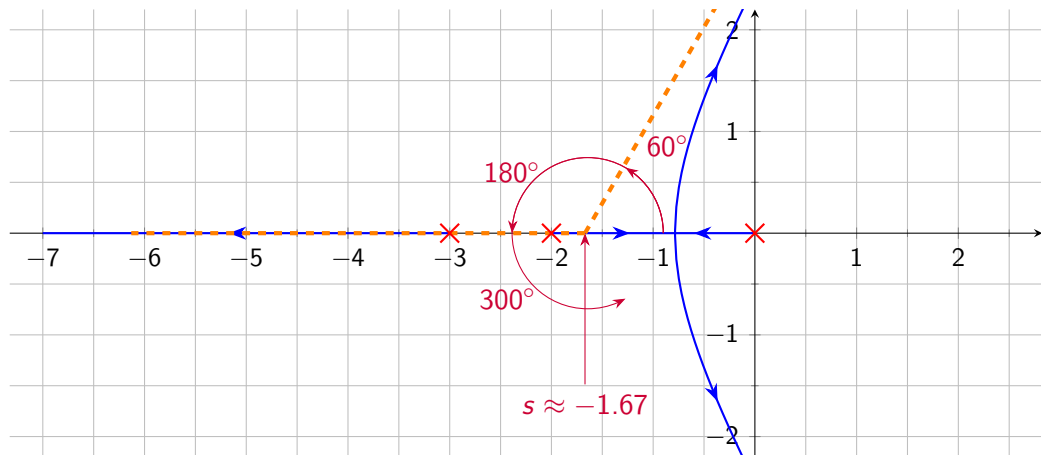
Verificatie



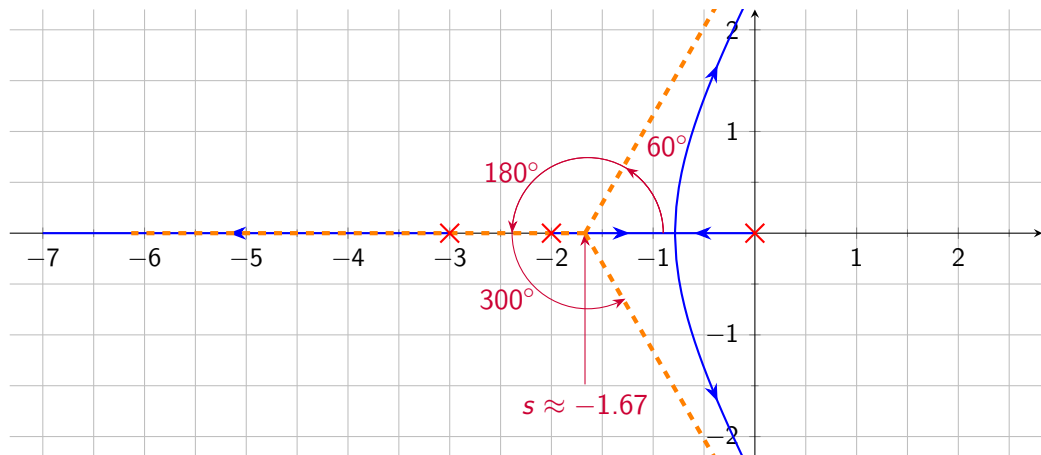
Verificatie



Verificatie



Verificatie



Vertrek en aankomstpunten

We kunnen wiskundig bepalen op welke (reële) punten de poolbanen uit zullen breken. Even zo kunnen we ook de inbreek punten berekenen.

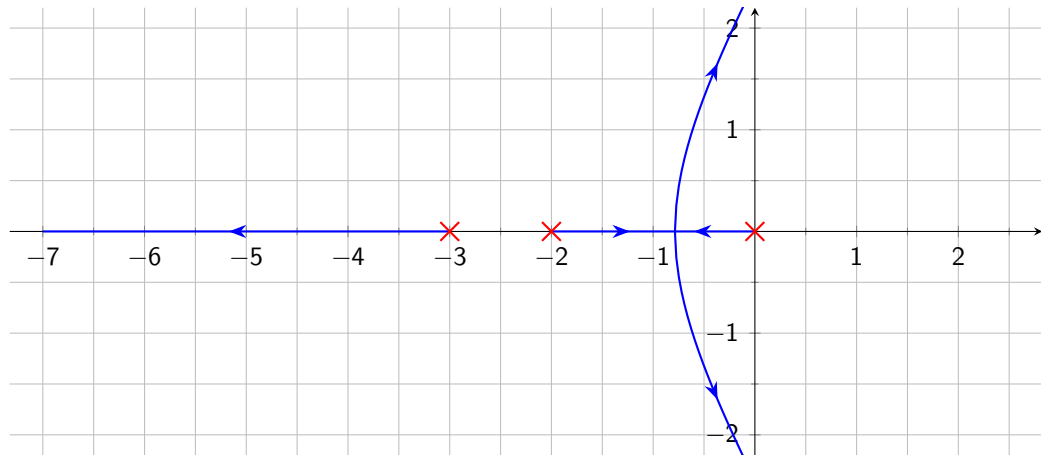
Poolbaanregel 6: Aankomst- en vertrekpunten

De punten waar de poolbanen uitbreken of samenkomen op de reële as worden gevonden door de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)}$$

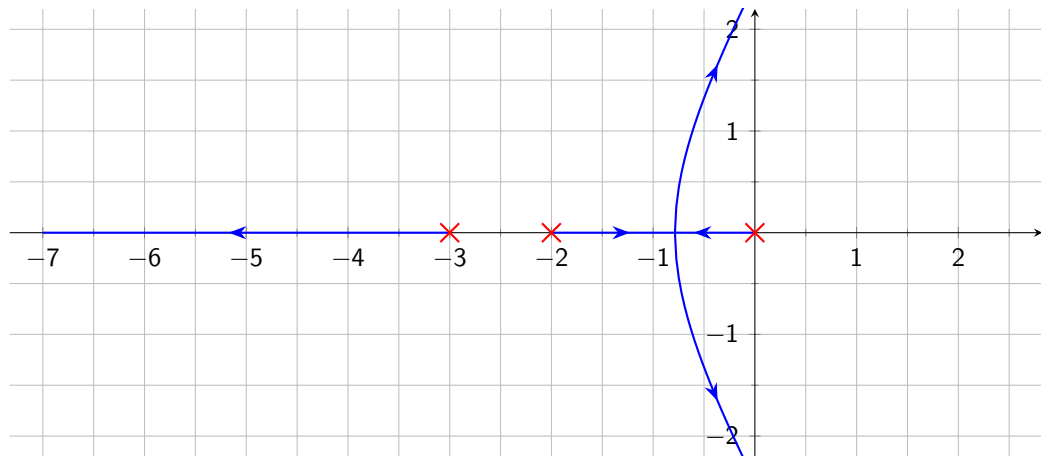
op te lossen voor s .

Aankomst-/vertrekpunten bepalen



Bepaal van dit *open-loop* systeem de overdracht.

Aankomst-/vertrekpunten bepalen



Antwoord:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Aankomst-/vertrekpunten bepalen

Maak gebruik van de zojuist geleerde definitie om de aankomst- en vertrekpunten te bepalen:

Poolbaanregel 6: Aankomst- en vertrekpunten

De punten waar de poolbanen uitbreken of samenkomen op de reële as worden gevonden door de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)}$$

op te lossen voor s .

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Uitwerking

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = 0$$

$$(s+3)(s+2) + s(s+3) + s(s+2) = 0$$

$$3s^2 + 10s + 6 = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{5}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

De aankomst- en vertrekpunten zijn dus:

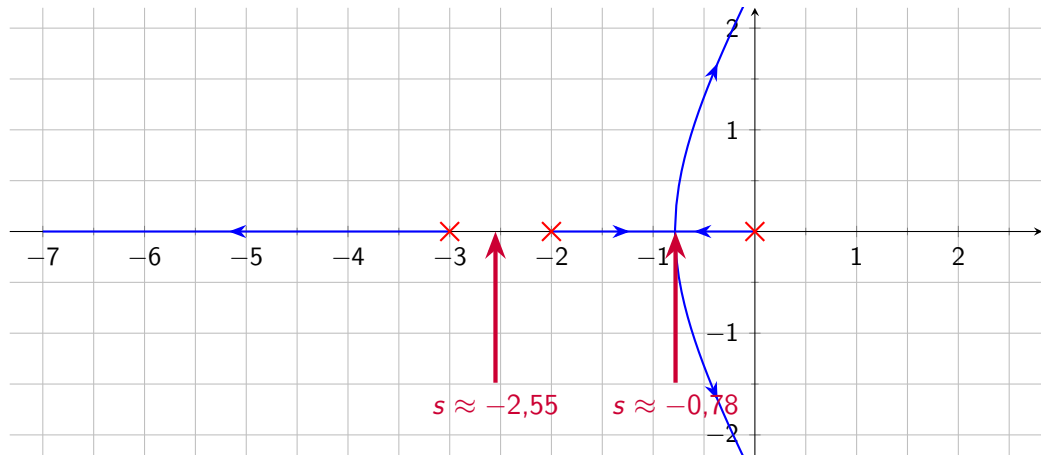
$$s_1 = -\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$s_1 \approx -0.78$$

$$s_2 = -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$s_2 \approx -2.55$$

Verificatie



Belangrijk! Alleen punten op een poolbaan zijn geldig!

Samenvatting

- 1 De begin- en eindpunten van een poolbaan zijn respectievelijk de *open-loop* polen en nulpunten van het systeem
- 2 Punten op de reële as die links van een oneven aantal nulpunten en polen liggen behoren tot een poolbaan.
- 3 Poolbanen zijn symmetrisch ten opzichte van de reële as.
- 4 De asymptoten vertrekken vanaf de reële as vanuit punt α , welke gegeven wordt door

$$\alpha_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

waarin z_i en p_i de open-lus locaties van nulpunten en polen zijn. n is het aantal polen en m het aantal nulpunten.

Samenvatting (vervolg)

- 5 De asymptoten vertrekken met een hoek van de reële as vanuit punt α , welke gegeven wordt door

$$\alpha_h = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{n - m} = \frac{\pi + 2k\pi}{n - m}$$

waarin n het aantal polen en m het aantal nulpunten is.

- 6 De punten waar de poolbanen uitbreken of samenkomen op de reële as worden gevonden door de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(s - z_i)}$$

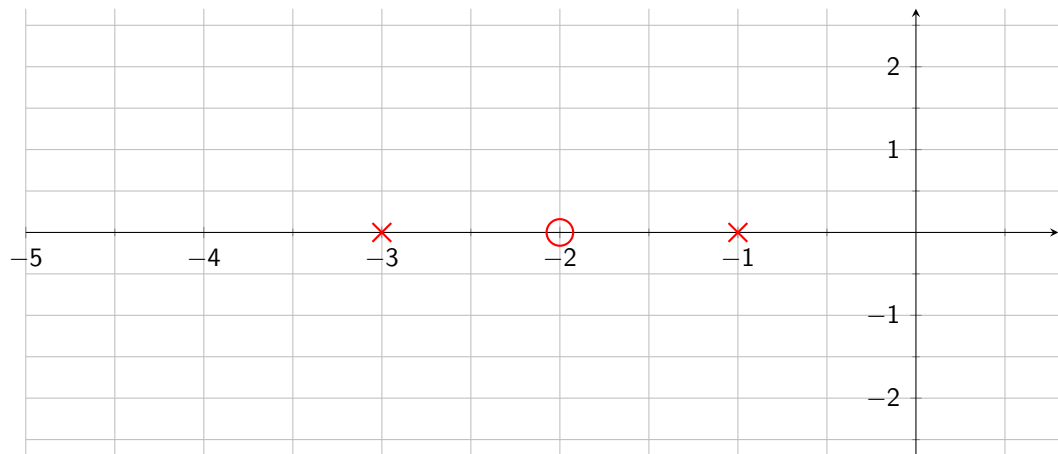
op te lossen voor s .

Goed nieuws!

Let op! Er zijn meer regels. Geïnteresseerden kunnen de extra regels **hier** bestuderen. De extra regels zijn **géén** tentamenstof. De regels die je wel moet beheersen staan gepresenteerd op de vorige twee dia's.

Opgave 1

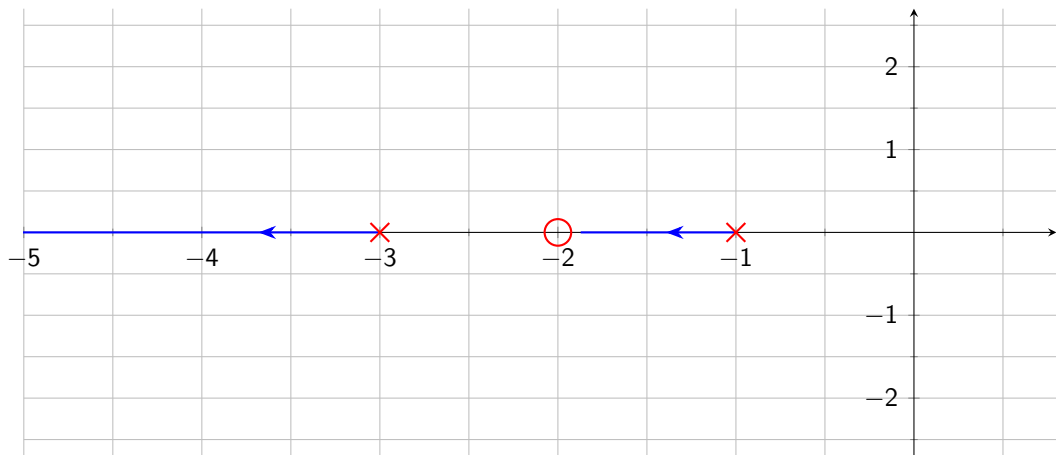
Teken de poolbaan:



uit-/inbreek = $\dots$, $\alpha_s = \dots$, $\alpha_h = \dots$

Opgave 1

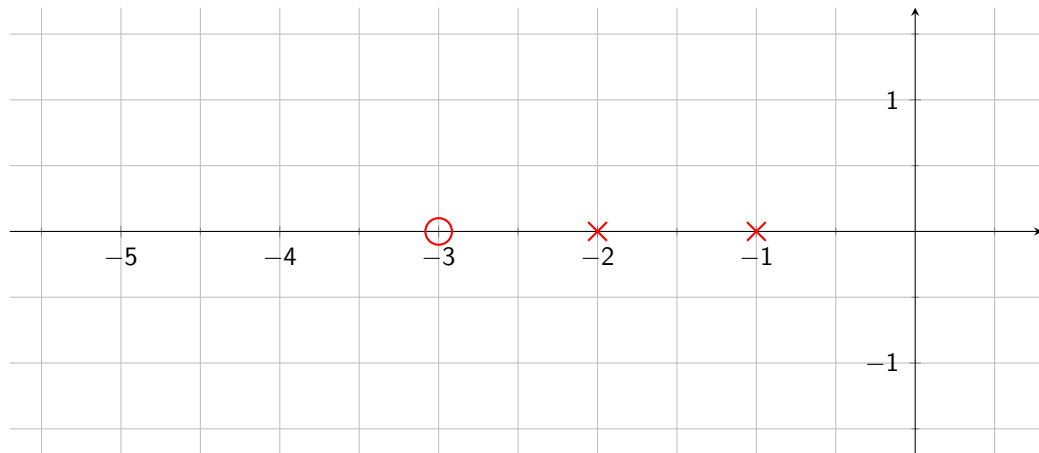
Teken de poolbaan:



uit-/inbreek = geen, $\alpha_s = \text{nvt}$, $\alpha_h = \text{nvt}$

Opgave 2

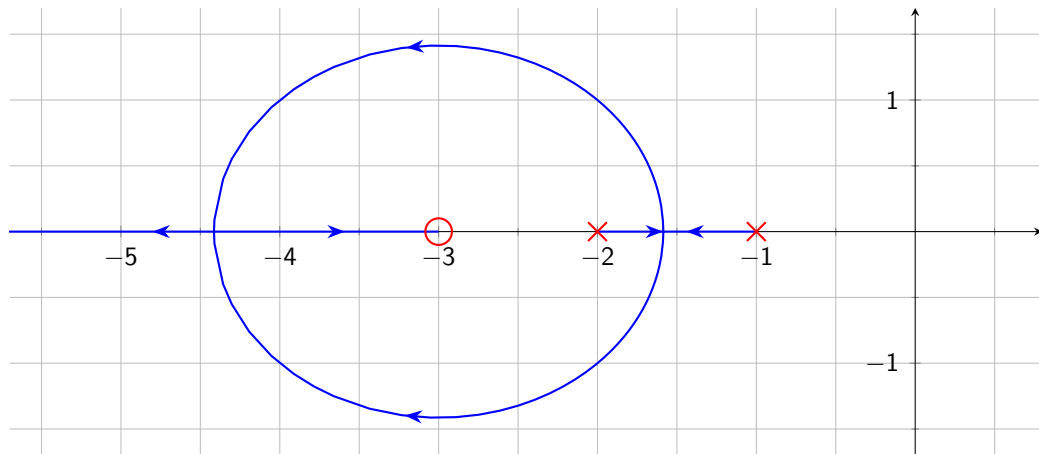
Teken de poolbaan:



uit-/inbreek = $\dots$, $\alpha_s = \dots$, $\alpha_h = \dots$

Opgave 2

Teken de poolbaan:



uit-/inbreek = $-3 \pm \sqrt{2}$, $\alpha_s = 0$, $\alpha_h = 0^\circ$ en 180°

Volgende week

- Proeftoets