

REG10: Regeltechniek - Week 2.2

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vandaag

1. Ontwerpcriteria
2. Ontwerpcriteria in het tijddomein (7.2)
3. Ontwerpcriteria in het s-domein (7.3)

Ontwerpcriteria

Waarom regelen we een systeem?

Ontwerpcriteria

Waarom regelen we een systeem?

- Om het systeem te automatiseren.
- Om de eigenschappen van het systeem te verbeteren.
- Om aan bepaalde (ontwerp)eisen te kunnen voldoen.

Ontwerpcriteria

De systeemeisen waar we in REG10 naar zullen kijken zijn:

- **Stabiliteit:**

Het systeem moet stabiel zijn.

- **Snelheid:**

Hoe snel moet de eindwaarde van de stapresponsie bereikt worden?

Ontwerpcriteria

- Doorschot:

Hoeveel doorschot is toegestaan / acceptabel?

- Statische fout:

Hoeveel mag de eindwaarde van het geregelde systeem afwijken van de ingestelde waarde?

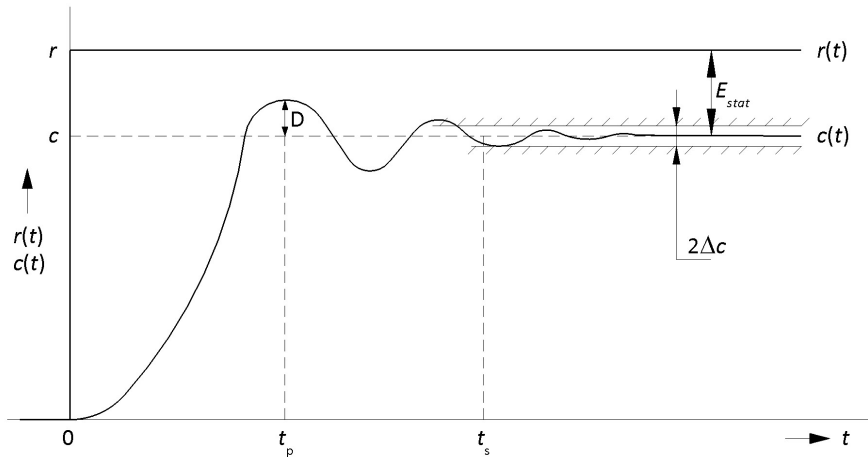
Ontwerpcriteria

We gaan deze verschillende eisen bekijken:

- In het tijddomein (stapresponsie)
- In het s-domein (pn-beeld, poolbaan)

Ontwerpcriteria in het tijddomein

Alle genoemde eigenschappen zijn terug te vinden in de stapresponsie:



Ontwerpcriteria in het tijddomein

- Stabiliteit:

Het systeem is stabiel:

De stapresponsie gaat immers naar een vaste eindwaarde.

Ontwerpcriteria in het tijddomein

- Snelheid:

Voor de snelheid kijken we (met name) naar de settlingtime:

De settlingtime t_s is de tijd die verstrijkt voordat de stapresponsie binnen een bepaalde band Δ_c rond de eindwaarde van de responsie $c(t)$ komt en blijft.

Ontwerpcriteria in het tijddomein

- $t_s(2\%)$:

$$\frac{\Delta c}{c} = \pm 2\%$$

$$t_s(2\%) = \left| \frac{\ln(0,02)}{\lambda} \right| \approx \frac{4}{|\lambda|}$$

- $t_s(5\%)$:

$$\frac{\Delta c}{c} = \pm 5\%$$

$$t_s(5\%) = \left| \frac{\ln(0,05)}{\lambda} \right| \approx \frac{3}{|\lambda|}$$

Wat stelt de λ in de formule voor?

Ontwerpcriteria in het tijddomein

- Doorschot:

We kunnen ook het doorschot bepalen uit de stapresponsie:

$$D_{\%} = \frac{c_{\max} - c_{\text{eind}}}{c_{\text{eind}}} \cdot 100\%$$

En met de formule:

$$D = e^{-\pi \frac{|\lambda|}{|\omega|}}$$

Een andere maat voor snelheid is de bijbehorende piektijd:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega}$$

Ontwerpcriteria in het tijddomein

- Statische fout:

De uiteindelijke afwijking van de waarde van de uitgang $c(t)$ van de gewenste waarde $r(t)$ kunnen we ook aflezen uit de stapresponsie:

$$E_{\text{stat}} = c_{\text{eind}} - r(t)$$

Opgave

Gegeven de volgende overdracht:

$$H(s) = \frac{32}{s^2 + 2s + 16}$$

Er wordt een eenheidsstap aan de ingang van het systeem gezet

- Bepaal de settlingtime $t_s(5\%)$.
- Bepaal het (eventuele) doorschot.
- Bepaal de eindwaarde.
- Is hier sprake van een E_{stat} ?

Opgave

Antwoord:

We bepalen eerst de polen (s-domein!):

$$s = -1 \pm j\sqrt{15} = \lambda \pm j\omega$$

- $t_s(5\%) = \frac{3}{1} = 3.$
- $D = e^{-\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}} \approx 0,44 \quad (\approx 44\%)$
- $y_{t \rightarrow \infty} = H(0) = \frac{32}{16} = 2$
- Er is geen sprake van een statische fout, dit is ook geen proportioneel geregeld systeem: $K_{\text{stat}} > 1 !!$

Voorbeeld 7.1

Gegeven het volgende systeem:

$$H(s) = \frac{4}{2s^2 + 12s + 54}$$

Er wordt een eenheidsstap aan de ingang van het systeem gezet

- Bepaal de settlingtime $t_s(2\%)$.
- Bepaal de settlingtime $t_s(5\%)$.
- Bepaal de piektijd t_p
- Bepaal het doorschot $D\%$

Voorbeeld 7.1

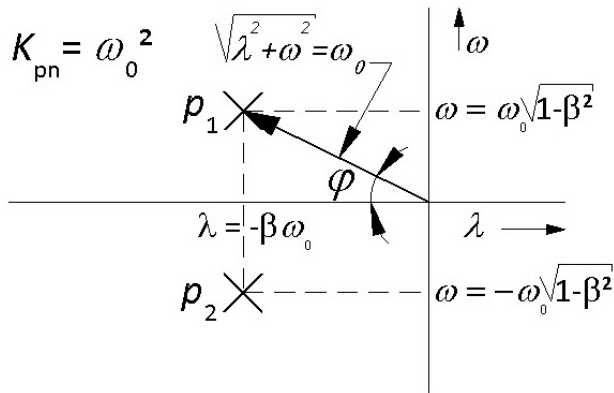
We bepalen eerst de polen (s-domein!):

$$s = -3 \pm 3j\sqrt{2} = \lambda \pm j\omega$$

- De settlingtime $t_s(2\%) = 1,33$.
- De settlingtime $t_s(5\%) = 1$.
- De piektijd $t_p = 0,74$
- Het doorschot $D\% = 11$

Ontwerpcriteria in het s-domein

Hieronder het pn-beeld van een tweede ordesysteem:



Waarbij $\cos(\phi) = \beta$

Ontwerpcriteria in het s-domein

$$H(s) = \frac{K_{stat}\omega_0^2}{s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K_{pn}}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

met:

$$s = -\beta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \beta^2} = \lambda \pm j\omega$$

Ontwerpcriteria in het s-domein

- Snelheid:

De settlingtime t_s vinden we terug in dit pn-beeld:

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{|\lambda|}$$

- De $|\lambda|$ in de formule betreft het reële deel van de polen van het systeem.

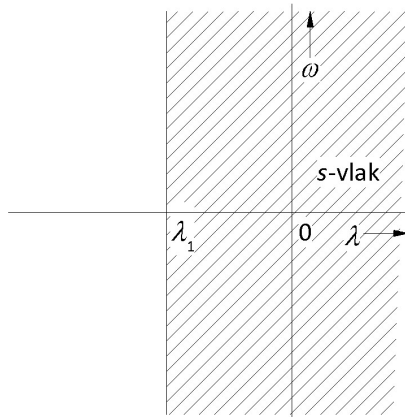
Ontwerpcriteria in het s-domein

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{|\lambda|}$$

- We kijken voor de snelheid naar de $|\lambda|$ van de dominante (meest rechtse) pool.
- Hoe groter deze $|\lambda|$, hoe kleiner t_s , hoe sneller de het systeem.
- Anders gezegd: hoe verder de meest dominante pool naar links ligt, hoe sneller het systeem!

Ontwerpcriteria in het s-domein

Bij een minimaal gewenste t_s is het gebied rechts van de bijbehorende $|\lambda|$ dan ook verboden gebied:



Opgave

Teken het verboden gebied in het pn-beeld als $t_s(2\%)$ van een systeem kleiner moet zijn dan 8 s.

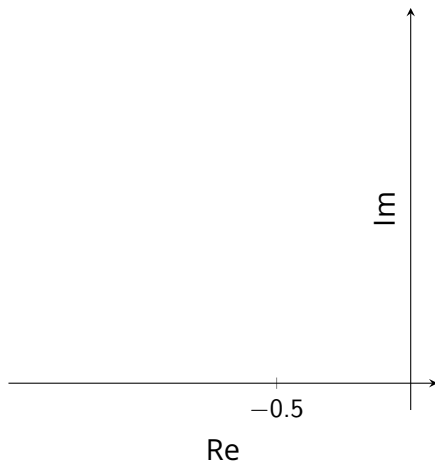
Antwoord

$$t_{s(2\%)} = \frac{4}{|\lambda|}$$

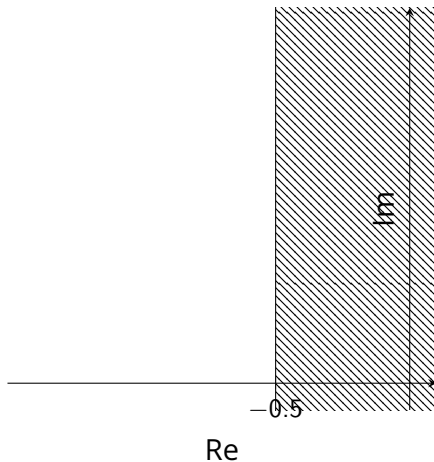
$$\frac{4}{|\lambda|} < 8$$

$$|\lambda| > \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda < -\frac{1}{2}$$

Settlingtime in PN-beeld



Settlingtime in PN-beeld



Doorschot in PN-beeld

- Doorschot:
 - Ook het doorschot is af te lezen uit het pn-beeld:

$$D = e^{-\pi \frac{|\lambda|}{|\omega|}}$$

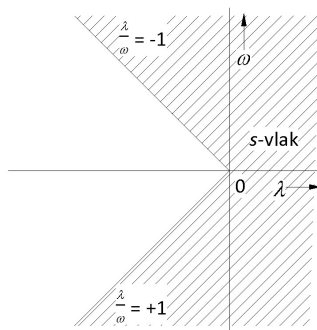
- De verhouding $\frac{|\lambda|}{|\omega|}$ levert hierbij een schuine lijn op in het pn-beeld.

Opgave

- Teken de lijn $\frac{|\lambda|}{|\omega|}$ in het pn-beeld bij een doorschot $D = 4\%$

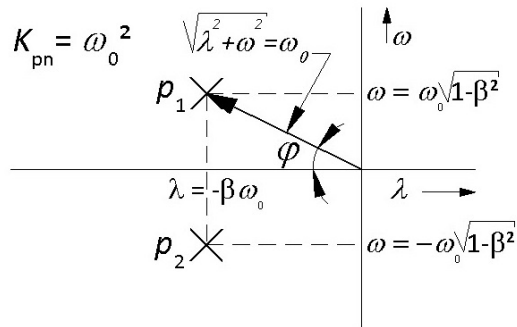
Antwoord

$$\text{Doorschot } D = 4 \% \Rightarrow e^{-\pi \left| \frac{\lambda}{\omega} \right|} = \frac{1}{25} \Rightarrow \left| \frac{\lambda}{\omega} \right| = \frac{-\ln\left(\frac{1}{25}\right)}{\pi} \approx 1$$



Alle polen op deze lijn 'hebben' een doorschot van 4%

Doorschot in PN-beeld



- Verder geldt in het pn-beeld:

$$\cos(\phi) = \frac{\beta\omega_0}{\omega_0} = \beta$$

Doorschot in PN-beeld

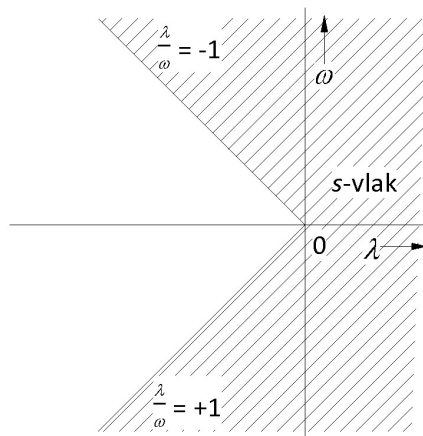
$$\cos(\phi) = \beta$$

- Als $\phi = 0^\circ$ (reële polen) dan is $\beta = 1$: geen doorschot
- Als $\phi = 90^\circ$ (imaginaire polen) dan is $\beta = 0$: oscillatie!

Hoe groter de hoek ϕ met de Re-as, hoe kleiner β , hoe meer doorschot.

Doorschot in PN-beeld

Terug naar de opgave:



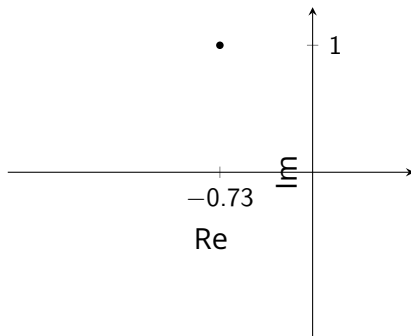
Alle polen boven de lijn met helling -1 hebben dus een doorschot groter dan 4%!

Opgave

- Teken het verboden gebied in het pn-beeld als het doorschot van een systeem kleiner moet zijn dan 10%.

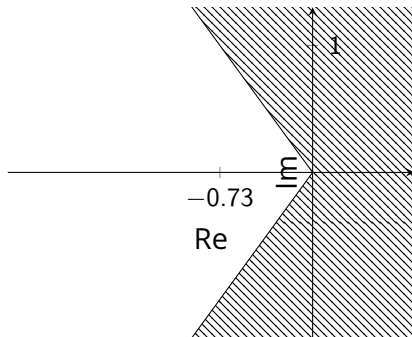
Antwoord

$$\text{Doorschot } D = 10\% \Rightarrow e^{-\pi|\frac{\lambda}{\omega}|} = \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{\lambda}{\omega}\right| = \frac{-\ln(\frac{1}{10})}{\pi} \approx 0,73$$



Antwoord

$$\text{Doorschot } D = 10\% \Rightarrow e^{-\pi \left| \frac{\lambda}{\omega} \right|} = \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{\lambda}{\omega} \right| = \frac{-\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\pi} \approx 0,73$$



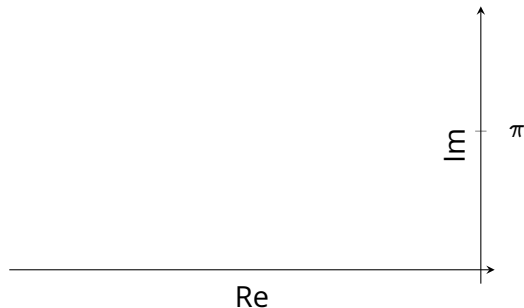
Alle polen in het gearceerde gebied geven een doorschot $D > 10\%$
 Immers: ϕ is groter dus β is kleiner!

Opgave

- Teken het verboden gebied in het pn-beeld als de piektijd t_p van een systeem kleiner moet zijn dan 1 s.

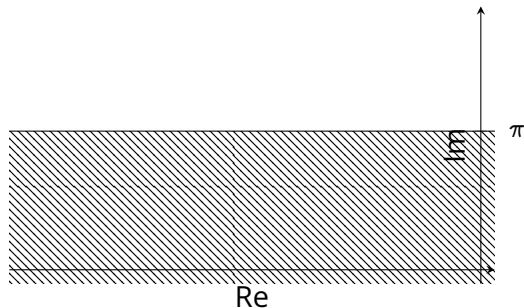
Antwoord

$$\text{Eis: piektijd } t_p < 1 \text{ s} \Rightarrow \frac{\pi}{\omega} < 1 \Rightarrow \omega > \pi$$



Antwoord

Eis: piektijd $t_p < 1 \text{ s} \Rightarrow \frac{\pi}{\omega} < 1 \Rightarrow \omega > \pi$



Ontwerpcriteria in het s-domein

- Statische fout:
 - De statische fout kan niet uit het pn-beeld worden afgelezen!
 - E_{stat} kan wel berekend worden met de formule:

$$E_{stat\%} = \frac{100\%}{1 + K_{lus}}$$

We gaan hier bij de theorie van de PI regelaar verder op in!

Opgave

Bekijk onderstaand geregeld systeem



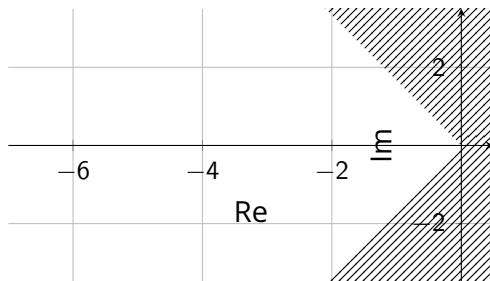
Kan met deze regeling voldaan worden aan de volgende eisen?

- doorschot $D < 15\%$
- piektijd $t_p < 1,8s$

Uitwerking: doorschot

Voor een doorschot van 15% is de verhouding tussen λ en ω te berekenen:

$$e^{-\pi|\frac{\lambda}{\omega}|} = 0,15 \Rightarrow \frac{\lambda}{\omega} = -\frac{\ln 0,15}{\pi} \approx 0,6$$

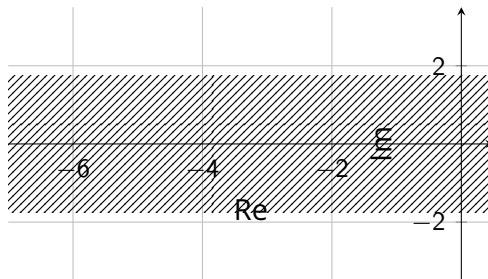


(teken hiervoor de lijnen door de punten $\lambda = -0,6$ en $\omega = \pm 1$)

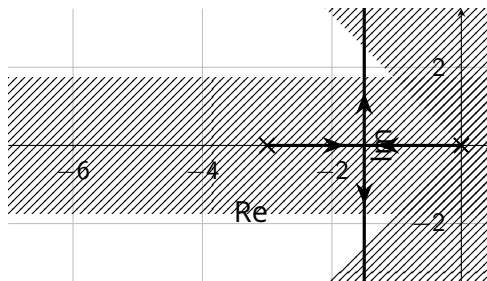
Uitwerking: piektijd

Voor de eis op de piektijd geldt

$$\frac{\pi}{\omega} < 1,8 \Rightarrow \omega > \frac{\pi}{1,8} \approx 1,75$$



Uitwerking: combineren

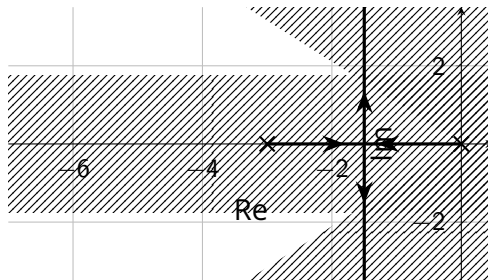


Een deel van de poolbaan loopt door toegestaan gebied.

Conclusie: met een P-regelaar kan er al worden voldaan aan de ontwerpeisen.

Regelaar voldoet niet

Met een strengere eis voor doorschot:



Hier blijkt een P-regelaar onvoldoende!

Uit de poolbaan is te zien dat deze naar links toe moet worden afgebogen om aan de ontwerpeisen te kunnen voldoen.

Dit gaan we in week 2.4 bekijken!

Uitwerking: bepalen K

Soms is het nodig te bepalen bij welke K het doorschot $D > 15\%$

- We bepalen poolbaanvergelijking van het geregelde systeem:

$$s(s + 3) + 10K = 0$$

$$s^2 + 3s + 10K = 0$$

polen:

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 40K}}{2}$$

bij doorschot zijn de polen complex:

$$s = \frac{-3 \pm j\sqrt{40K - 9}}{2} = \lambda \pm j\omega$$

Uitwerking: bepalen K

- Bij een doorschot $D = 15\%$ vonden we:

$$\frac{\lambda}{\omega} = 0,6$$

$$\omega = \frac{\lambda}{0,6}$$

met:

$$|\lambda| = 3/2$$

en

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{40K - 9}$$

Uitwerking: bepalen K

- Invullen geeft:

$$\frac{1}{2}\sqrt{40K - 9} = \frac{1,5}{0,6}$$
$$\sqrt{40K - 9} = \frac{3}{0,6} = 5$$

met:

$$40K - 9 = 25$$

en

$$K = 0,85$$

Uit de poolbaan volgt:

als $K > 0,85$ is het doorschot $D > 15\%$

We kunnen dit controleren met Matlab!

Controle

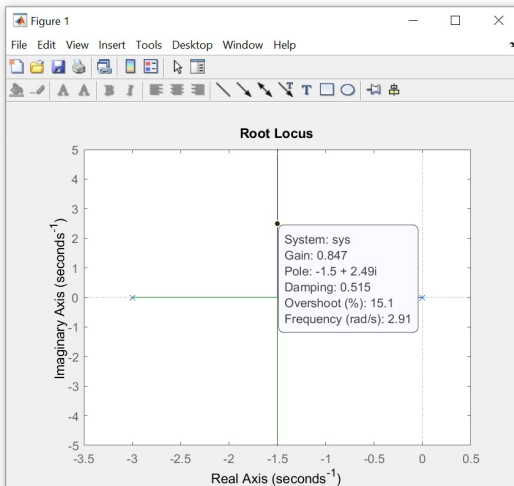
```
>> sys=tf([10],[1 3 0])

sys =

    10
  -----
  s^2 + 3 s

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(sys)
```



Volgende week...

- Ontwerpcriteria in het ω -domein