

REG10: Regeltechniek - Week 2.3

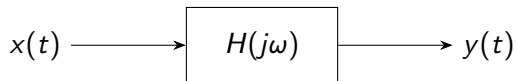
Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vandaag

1. Stabiliteitsonderzoek in het ω domein

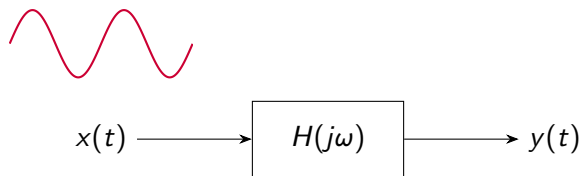
2. Fase- en versterkingsmarge

Herhaling: Wisselsignalen en systemen



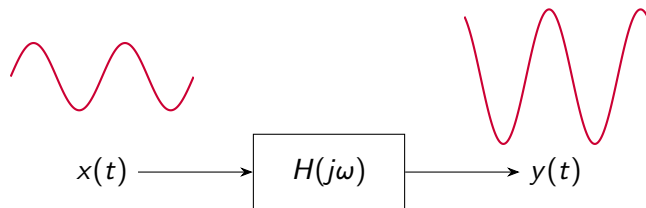
We beschouwen een systeem in het ω domein.

Herhaling: Wisselsignalen en systemen



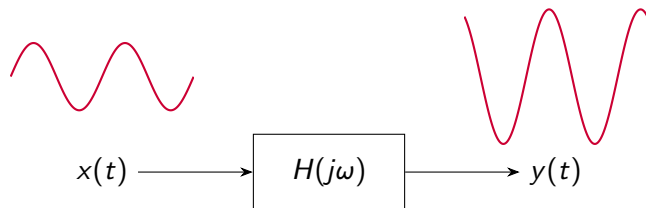
Wanneer we een sinusoïde signaal op de ingang $x(t)$ zetten...

Herhaling: Wisselsignalen en systemen



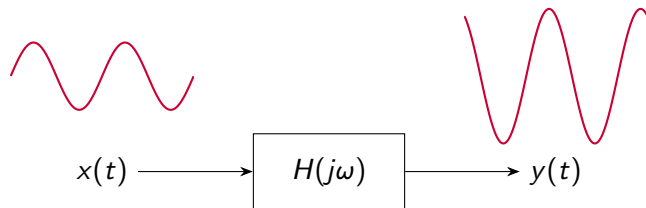
Wanneer we een sinusoïde signaal op de ingang $x(t)$ zetten ontstaat er een sinusoïde op de uitgang.

Herhaling: Wisselsignalen en systemen



De amplitude en fase van de uitgang sinusoïde zijn veranderd ten opzichte van de ingang sinusoïde.

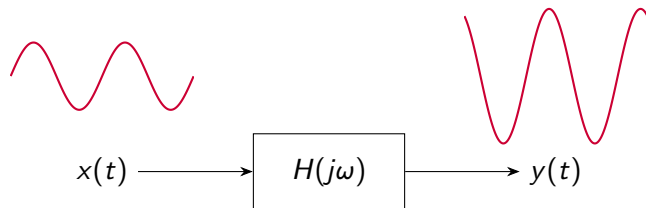
Herhaling: Wisselsignalen en systemen



De ingang beschrijven we als volgt:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

Herhaling: Wisselsignalen en systemen



De ingang beschrijven we als volgt:

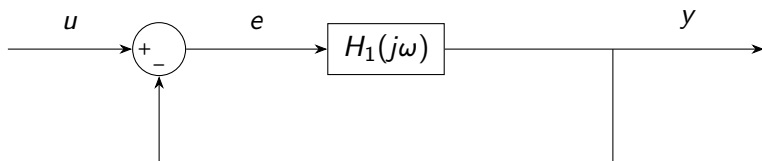
$$x(t) = \cos(\omega t)$$

De uitgang wordt als volgt door het systeem beïnvloed:

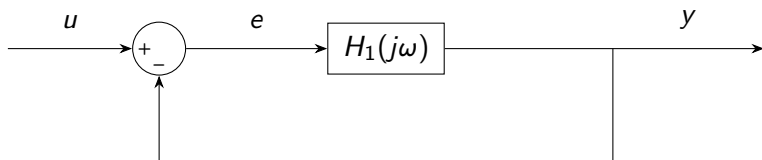
$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

Herhaling: Stabiliteit in het frequentiedomein

We bekijken nu onderstaand geregelde systeem:



Herhaling: Stabiliteit in het frequentiedomein



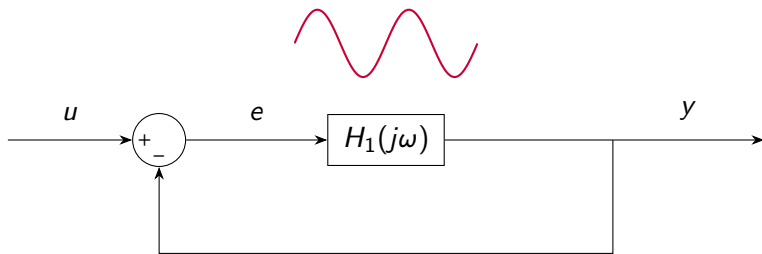
We gaan hierbij uit van de volgende beginsituatie:

- $\angle H_1(j\omega) = -180^\circ$

Verder:

- $u(t) = 0$
- Het optelpunt geeft ook een fasedraaiing van -180° ($e = 0 - y$)

Herhaling: Stabiliteit in het frequentiedomein

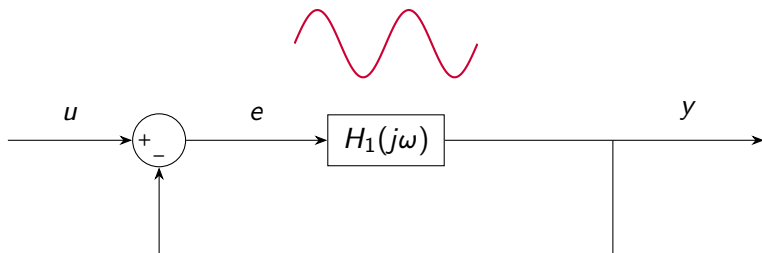


Stel:

- Er zingt een sinusvormig (stoor)signaal rond in het systeem.

Herhaling: Stabiliteit in het frequentiedomein

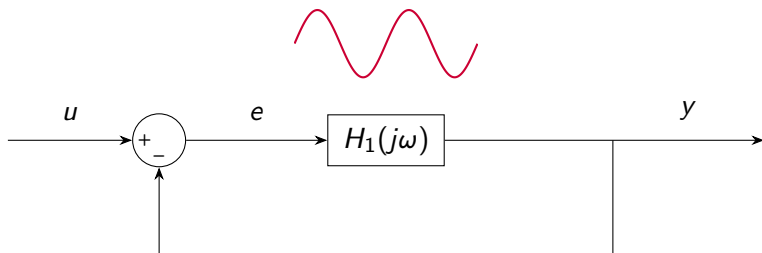
Er zijn nu de volgende situaties mogelijk bij $\angle H_1(j\omega) = -180^\circ$:



- $|H_1(j\omega)| < 1$
- $|H_1(j\omega)| = 1$
- $|H_1(j\omega)| > 1$

Herhaling: Stabiliteit in het frequentiedomein

Voor de rondzingende sinus geldt dan:



- $|H_1(j\omega)| < 1$: de sinus dooft uit.
- $|H_1(j\omega)| = 1$: de sinus blijft rondzingen met dezelfde amplitude.
- $|H_1(j\omega)| > 1$: de amplitude van de sinus neemt almaar toe!

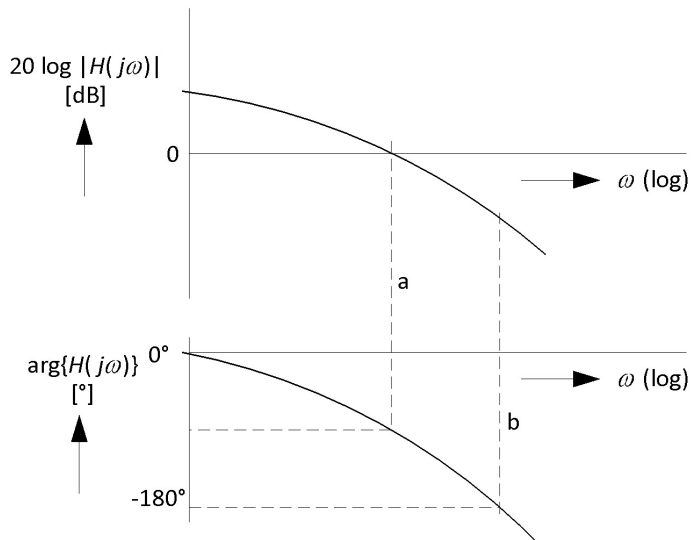
Herhaling: Stabiliteit in het frequentiedomein

Er geldt dus bij $\angle H_1(j\omega) = -180^\circ$:

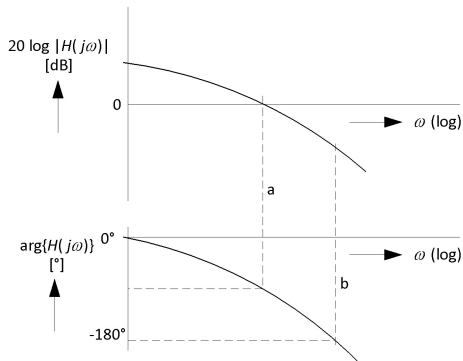
- $|H_1(j\omega)| < 1$: het geregelde is stabiel.
- $|H_1(j\omega)| = 1$: het geregelde systeem zit op de grens van stabiliteit.
- $|H_1(j\omega)| > 1$: het geregelde systeem is instabiel!

We kunnen $|H_1(j\omega)|$ en $\angle H_1(j\omega)$ weergeven in het bodediagram.

Herhaling: Bode-diagram



Herhaling: Bode-diagram

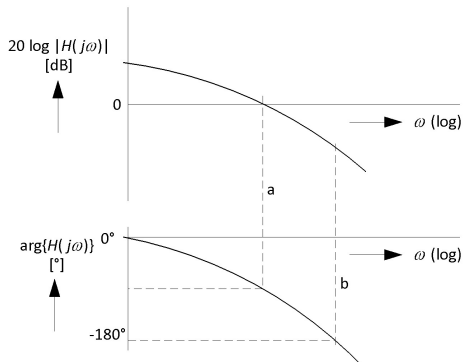


Bij lijn b valt af te lezen:

- Bij $\angle H_1(j\omega) = -180^\circ$
- is $|H_1(j\omega)| < 1 (= 0 \text{ dB})$

Het teruggekoppelde systeem is dus stabiel!

Herhaling: Bode-diagram



Dit valt ook al af te leiden bij lijn a:

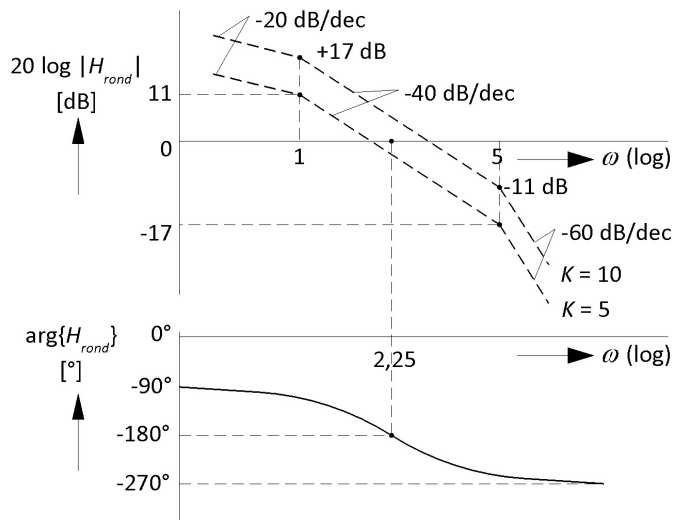
- Bij $|H_1(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB}$
- is $\angle H_1(j\omega)$ nog niet bij -180°

P regeling



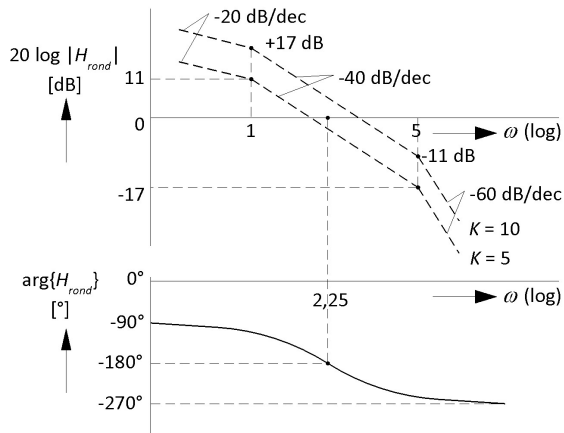
We gaan nu de invloed van de waarde van K bekijken op de stabiliteit van H_{cl}

Voorbeeld 5.9



Wat volgt voor de stabiliteit van het P geregelde systeem bij $K = 5$ en $K = 10$?

Voorbeeld 5.9



We kijken bij $\angle H_1(j\omega) = -180^\circ$:

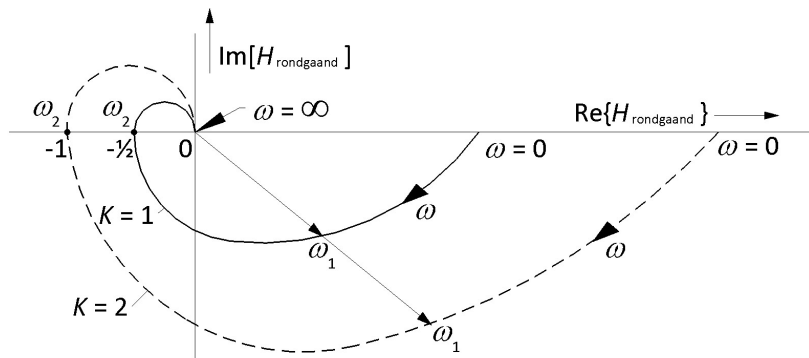
- Bij $K = 5$ zien we dat $|H_1(j\omega)| < 0$ dB: H_{cl} is stabiel.
- Bij $K = 10$ zien we dat $|H_1(j\omega)| > 0$ dB: H_{cl} is instabiel.

Polaire figuur

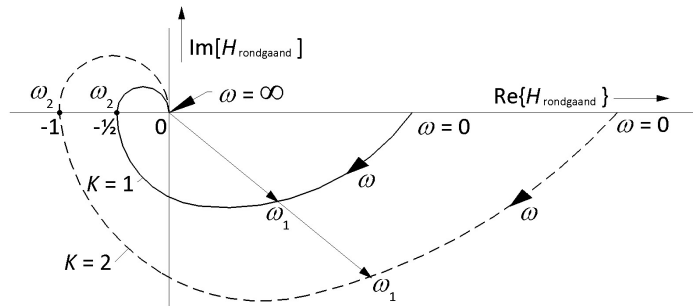
We kunnen stabiliteit van het geregelde systeem ook onderzoeken in het polaire figuur:

- Het polaire figuur geeft de modulus $|H_1(j\omega)|$ en de hoek $\angle H_1(j\omega)$ van $H(j\omega)$ weer.
- $\angle H_1(j\omega) = -180^\circ$ en $|H_1(j\omega)| = 1$ komt overeen met punt -1 !

Polaire figuur

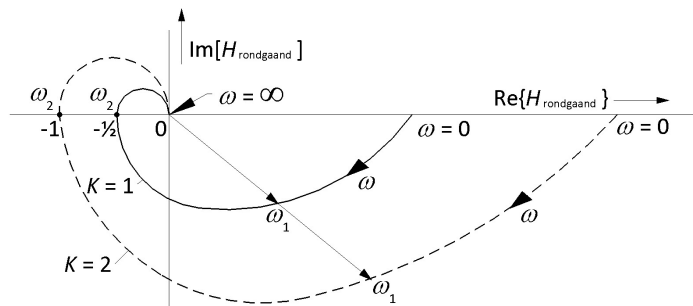


Polaire figuur



- Voor $K = 1$ is het geregelde systeem stabiel ($|H| < 1$ bij -180°).

Polaire figuur



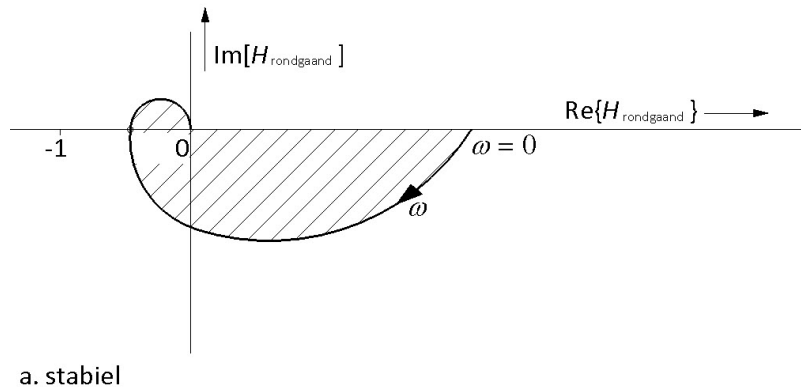
- Voor $K = 2$ is het polaire 'groter' geworden.
- Nu is $|H| = 1$ bij -180° : het geregelde systeem zit op de grens van stabiliteit.
- Als $K \geq 2$ is het systeem instabiel!

Polaire figuur

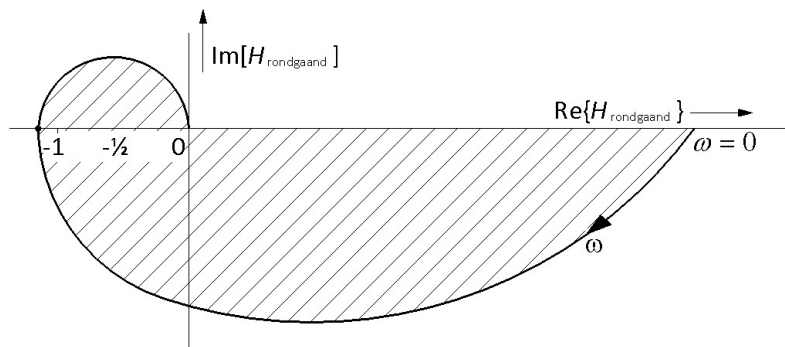
Definitie

Wanneer men, over de polaire figuur van H_{lus} lopend van $\omega = 0$ tot $\omega = \infty$, het gebied rechts van deze polaire figuur arceert, en het punt -1 daarbij in het gearceerde gebied ligt, dan is het gesloten systeem instabiel. Zoniet, dan is het gesloten systeem stabiel.

Polaire figuur



Polaire figuur



b. instabiel

Opgave 1

Gegeven onderstaand systeem:

$$H_1(s) = \frac{10}{(s+2)^3}$$

Dit systeem wordt proportioneel geregeld

- Bereken in het ω domein voor welke K het geregelde systeem instabiel wordt.
- Controleer het antwoord in Matlab
- Controleer het antwoord ook in het s-domein!

Antwoord

We zetten $H_{lus}(s)$ om naar het ω domein

$$H_{lus}(j\omega) = \frac{10K}{(j\omega + 2)^3}$$

Het geregelde systeem is net instabiel (op de grens van instabiliteit) als:

- $|H_{lus}(j\omega)| = 1$
- bij $\angle H_{lus}(j\omega) = -180^\circ$

We berekenen de K die hierbij hoort.

Antwoord

Eerst bepalen we de modulus $|H_{lus}(j\omega)|$:

$$|H_{lus}(j\omega)| = \frac{10K}{(\sqrt{\omega^2 + 2^2})^3}$$

Antwoord

En de hoek $\angle H_{lus}(j\omega)$:

$$\angle H_{lus}(j\omega) = 0 - 3 \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Antwoord

We bepalen nu bij welke ω geldt $\angle H_{lus}(j\omega) = -180^\circ$

$$-3 \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) = -180^\circ$$

$$\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) = 60^\circ$$

$$\frac{\omega}{2} = 1,73$$

$$\omega = 3,46$$

Antwoord

De gevonden waarde van ω vullen we nu in in $|H_{lus}(j\omega)| = 1$

$$\frac{10K}{(\sqrt{\omega^2 + 4})^3} = 1$$
$$\frac{10K}{(\sqrt{(3,46)^2 + 4})^3} = 1$$
$$10K = (\sqrt{(3,46)^2 + 2^2})^3$$

Antwoord

vervolg:

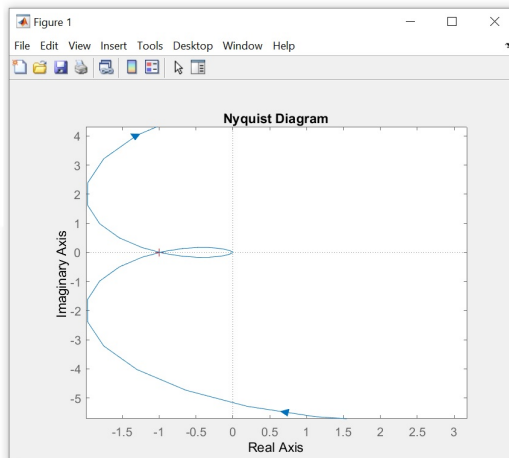
$$K = \frac{(\sqrt{(3,46)^2 + 4})^3}{10}$$

$$K \approx 6,4$$

Voor $K \approx 6,4$ gaat het polaire figuur door punt -1 en is het geregelde systeem (net) instabiel.

Controle in Matlab

```
>> sys=zpk([],[-2 -2 -2],63.8)
sys =
    63.8
    -----
    (s+2)^3
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> nyquist(sys)
>>
```



Opgave 1 vervolg

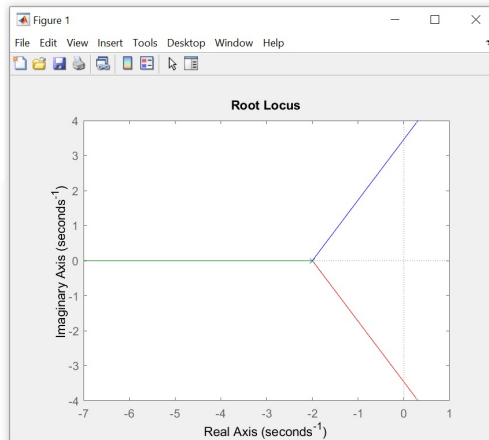
We controleren nu het antwoord in het s-domein:

$$H_1(s) = \frac{10}{(s+2)^3}$$

- We schetsen eerst de poolbaan

Controle in Matlab

```
>> sys=zpk([],[-2 -2 -2],10)
sys =
    10
    -----
    (s+2)^3
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> rlocus(sys)
```



- Uit de poolbaan volgt dat er twee polen op de Im-as liggen ($s = \pm j\omega$).

Algemeen

De **overeenkomstige** grenzen van stabiliteit / instabiliteit zijn:

In het **s-domein**:

- Polen op de Im-as (pn-beeld of poolbaan)

In het **$j\omega$ -domein**:

- Het punt -1 (polaire figuur)
- 0 dB bij -180° (bodediagram)

In alle drie de gevallen is immers **$s = j\omega$** !

Opgave 1 vervolg

De poolbaanvergelijking van het geregelde systeem is:

$$(s + 2)^3 + 10K = 0$$

- We vullen $s = j\omega$ in de poolbaanvergelijking in.
- Als het goed is zouden we dan opnieuw $K = 6,4$ moeten vinden!

Opgave 1 vervolg

We gebruiken echter liever de waarde van de derde (reële) pool!

Er geldt:

$$\sum \text{polen} = -2 - 2 - 2 = -6$$

dus:

$$s = p_3 = -6$$

Opgave 1 vervolg

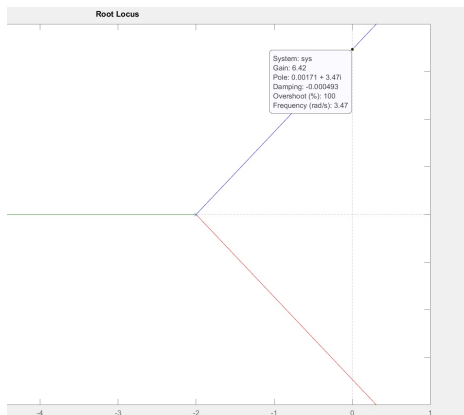
Invullen geeft:

$$(-6 + 2)^3 + 10K = 0$$

dus:

$$K = 6,4$$

Controle in Matlab



Voor de polen op de Im-as geldt inderdaad:

- $K \approx 6,4$
- en: $\omega \approx 3,46$ (zie de eerder berekende frequentie!)

Opgave 2

Gegeven onderstaand systeem:

$$H_1(s) = \frac{2}{(3s + 1)^4}$$

Dit systeem wordt proportioneel geregeld

- Bereken in het ω domein voor welke K het geregelde systeem instabiel wordt.
- Controleer het antwoord in Matlab
- Controleer het antwoord ook in het s-domein.

Antwoord

We zetten $H_{lus}(s)$ om naar het ω domein

$$H_{lus}(j\omega) = \frac{2K}{(3j\omega + 1)^4}$$

Het geregelde systeem is net instabiel (op de grens van instabiliteit) als:

- $|H_{lus}(j\omega)| = 1$
- bij $\angle H_{lus}(j\omega) = -180^\circ$

We gaan opnieuw de K berekenen die hierbij hoort.

Antwoord

Eerst bepalen we $|H_{lus}(j\omega)|$:

$$|H_{lus}(j\omega)| = \frac{2K}{(\sqrt{9\omega^2 + 1})^4}$$

Antwoord

En $\angle H_{lus}(j\omega)$:

$$\angle H_{lus}(j\omega) = 0 - 4 \arctan\left(\frac{3\omega}{1}\right)$$

Antwoord

We bepalen nu eerst bij welke ω geldt $\angle H_{lus}(j\omega) = -180^\circ$

$$-4 \arctan(3\omega) = -180^\circ$$

$$\arctan(3\omega) = 45^\circ$$

$$3\omega = 1$$

$$\omega = 0,333$$

Antwoord

De gevonden waarde van ω vullen we nu in: $|H_{lus}(j\omega)| = 1$

$$\frac{2K}{(\sqrt{9\omega^2 + 1})^4} = 1$$

$$\frac{2K}{(\sqrt{9(0,333)^2 + 1})^4} = 1$$

$$2K = \left(\sqrt{9(0,333)^2 + 1} \right)^4$$

Antwoord

vervolg:

$$K = \frac{(\sqrt{9(0,333)^2 + 1})^4}{2}$$

$$K = 2$$

Voor $K = 2$ gaat het polaire figuur door punt -1 en is het geregelde systeem (net) instabiel.

Controle in Matlab

We voeren in Matlab het onderstaande systeem in:

$$H = \frac{2K}{(3(s + 0,333))^4}$$

$$H = \frac{2K/3^4}{(s + 0,333)^4}$$

$$H = \frac{4/81}{(s + 0,333)^4}$$

Controle in Matlab

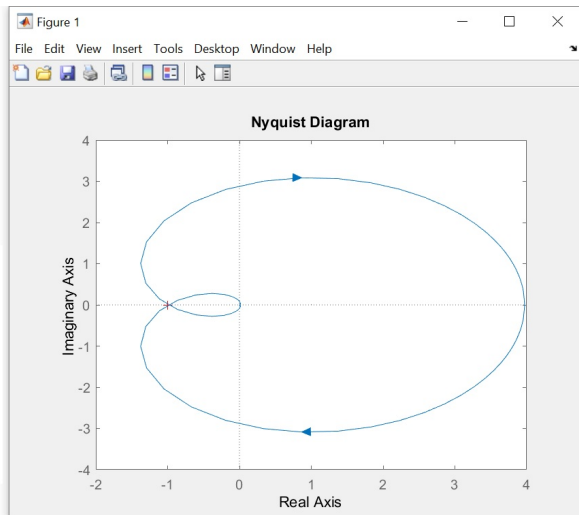
```
>> sys=zpk([],[-0.3333 -0.3333 -0.3333 -0.3333],0.049)

sys =

    0.049
-----
(s+0.3333)^4

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> nyquist(sys)
>>
```



Opgave 2 vervolg

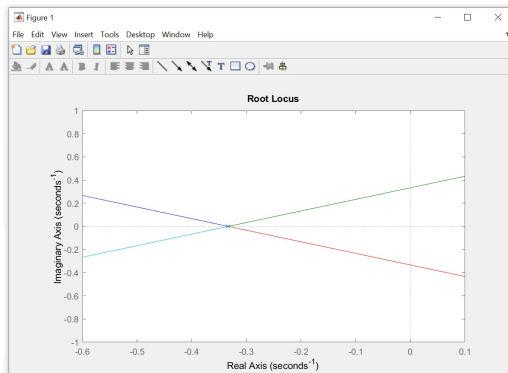
We controleren nu het antwoord in het s-domein:

$$H_1(s) = \frac{2}{(3s + 1)^4}$$

- We schetsen eerst de poolbaan

Controle in Matlab

```
>> sys=zpk([],[-0.3333 -0.3333 -0.3333 -0.3333],0.0246)
sys =
    0.0246
    -----
    (s+0.3333)^4
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> rlocus(sys)
```



- Uit de poolbaan volgt dat er twee polen op de Im-as liggen ($s = \pm j\omega$).

Opgave 2 vervolg

De poolbaanvergelijking van het geregelde systeem is:

$$(3s + 1)^4 + 2K = 0$$

- We vullen $s = j\omega$ in de poolbaanvergelijking in.
- Als het goed is zouden we dan opnieuw $K = 2$ moeten vinden!

Opgave 2 vervolg

Net als bij opgave 1 vullen we liever een reële pool in!
Werkt dat hier ook ...?

Er geldt:

$$\sum \text{polen} = -1/3 - 1/3 - 1/3 - 1/3 = -1,33$$

dus:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -1,33$$

$$0 + 0 + p_3 + p_4 = -1,33$$

Opgave 2 vervolg

Maar: p_3 en p_4 zijn complex!

$$p_3 = \frac{-1,3}{2} + j\omega$$
$$p_4 = \frac{-1,3}{2} - j\omega$$

Het is hier dus:

- sneller om $p_1 = s = j\omega$ in te vullen!
- misschien nog sneller om K in het $j\omega$ domein te berekenen!

Opgave 2 vervolg

Invullen van $s = j\omega$ geeft:

$$(3(j\omega) + 1)^4 + 2K = 0$$

Uitrekenen geeft:

$$\begin{aligned}(3(j\omega) + 1)^2 \cdot (3(j\omega) + 1)^2 + 2K &= 0 \\ (-9\omega^2 + 6j\omega + 1)(-9\omega^2 + 6j\omega + 1) + 2K &= 0 \\ 81\omega^4 - 54j\omega^3 - 9\omega^2 - 54j\omega^3 - 36\omega^2 + 6j\omega - 9\omega^2 + 6j\omega + 1 + 2K &= 0\end{aligned}$$

Opgave 2 vervolg

$$81\omega^4 - 108j\omega^3 - 54\omega^2 + 12j\omega + 1 + 2K = 0$$

Im-deel:

$$-108j\omega^3 + 12j\omega = 0j$$

$$\omega(-108\omega^2 + 12) = 0$$

$$\omega = 0,333$$

$\omega = 0$ voldoet niet!

Opgave 2 vervolg

$\omega = 0,333$ invullen in het Re-deel:

$$81\omega^4 - 54\omega^2 + 1 + 2K = 0$$

$$81(0,333)^4 - 54(0,333)^2 + 1 + 2K = 0$$

$$K = 2$$

Controle in Matlab

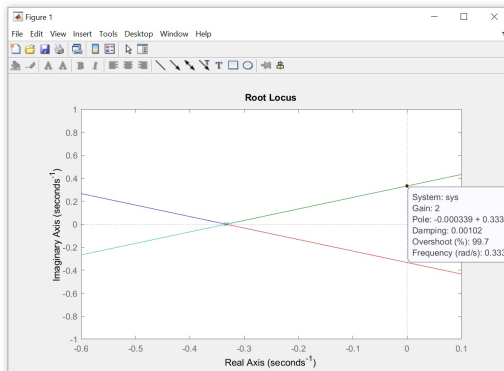
```
>> sys=zpk([],[-0.3333 -0.3333 -0.3333 -0.3333],0.0246)

sys =

    0.0246
-----
(s+0.3333)^4

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> rlocus(sys)
```



Voor de polen op de Im-as geldt inderdaad:

- $K = 2$
- en $\omega = 0,33$ (zie ook het $j\omega$ domein!)

Fase- en versterkingsmarge (7.4.1)

In het polaire figuur:

- In het punt -1 wordt het geregelde systeem instabiel.
- Ook in de buurt van het punt -1 is het systeem onrustig (veel doorschot)!
- Bij het ontwerp kan je dan ook aangeven hoever je uit de buurt van punt -1 wil blijven.

Fase- en versterkingsmarge (7.4.1)

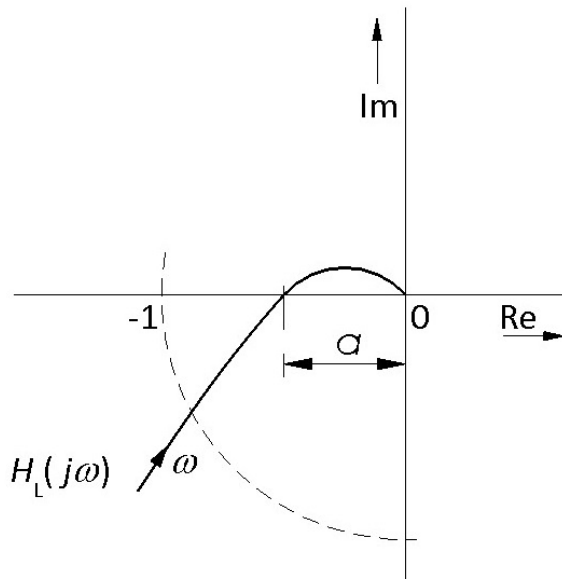
Deze marges die we kunnen instellen zijn:

- De **versterkingsmarge** $VM = \frac{1}{\alpha}^*$
- De **fasemarge** $FM = \delta^\dagger$

*gain margin

†phase margin

Versterkingsmarge



Versterkingsmarge

Definitie (Versterkingmarge)

De versterkingsmarge VM is de factor waarmee de versterking K nog zou mogen toenemen (bij -180°) alvorens instabiliteit optreedt

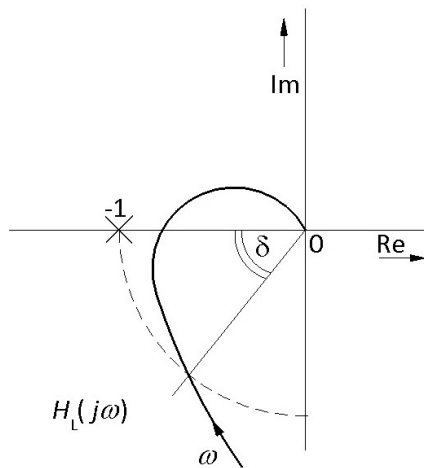
- $VM = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{H_{lus}}$

Versterkingsmarge

Voorbeeld:

- Een versterkingsmarge $VM = 4$ betekent dat $|H_{lus}| = 0,25$ bij -180° .
- Als K 4 keer groter wordt zitten we in punt -1 !

Fasemarge



Fasemarge

Definitie (Fasemarge)

De fasemarge FM is de hoek waarover het systeem nog mag draaien voordat instabiliteit optreedt

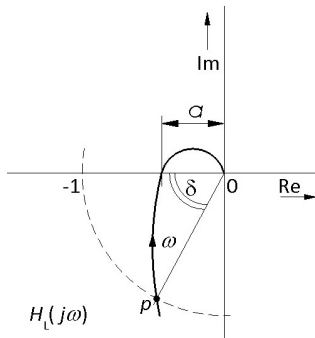
- We kijken naar de hoek bij $|H_{lus}| = 1$
- $\delta = 180^\circ - \angle H_{lus}$

Fasemarge

Voorbeeld:

- Een fasemarge $FM = 50^\circ$ betekent dat $|H_{lus}| = 1$ bij een hoek $\angle H_{lus} = -130^\circ$.
- Immers: $180^\circ - |-130^\circ| = 50^\circ$
- We kunnen het systeem nog over 50° draaien voor we in punt -1 komen!

Fase- en versterkingsmarge



Standaardwaarden voor VM en FM zijn:

- $VM \geq 2$
- $FM \geq 45^\circ$

Volgende week...

- PI en PD regelaars