

REG10: Regeltechniek 10 - Week 2.4

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vorige weken

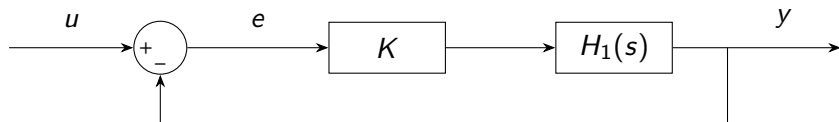
- Ontwerpcriteria in t -domein
- Ontwerpcriteria in s -domein
- Ontwerpcriteria in $j\omega$ -domein
- P-regelaar

Vandaag

1. PI-regelaar

2. PD-regelaar

De proportionele regelaar



De proportionele regelaar is al bekend ...

Wat is het voordeel en het nadeel van het regelen van een eerste-orde systeem?

Antwoord:

Herinner week 2.1

Voordeel:

$$\tau_{cl} = \frac{\tau}{K + 1}$$

Nadeel:

$$K_{cl} = \frac{K}{K + 1}$$

Er ontstaat dus *altijd* een fout in de uitgang bij een proportionele regeling!

Oplossing

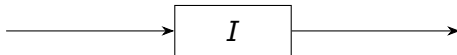
De statische fout aan de uitgang kunnen we oplossen door K te verhogen, maar in sommige gevallen kan dat ook tot een hoger doorschot leiden. We zoeken dan ook naar een andere oplossing.

Oplossing

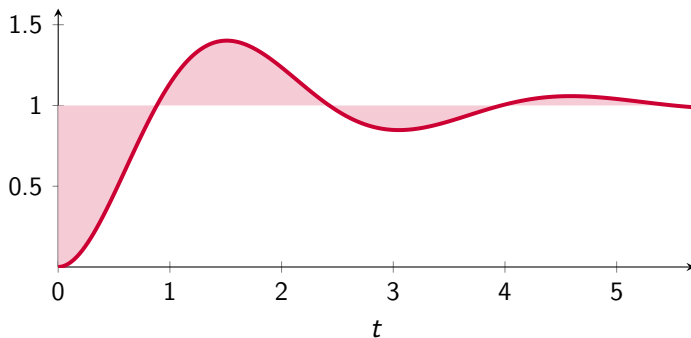
De statische fout aan de uitgang kunnen we oplossen door K te verhogen, maar in sommige gevallen kan dat ook tot een hoger doorschot leiden. We zoeken dan ook naar een andere oplossing.

Antwoord:

Een integrerende regelaar:

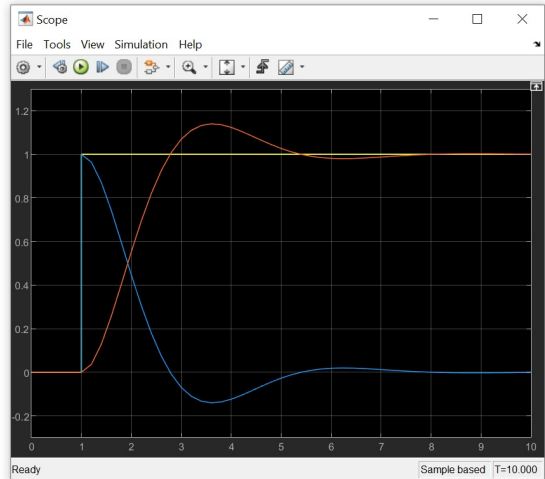
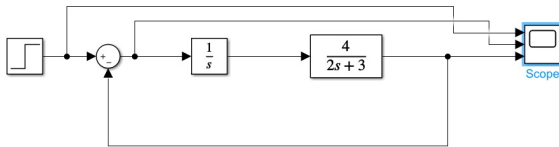


Werking van integrator

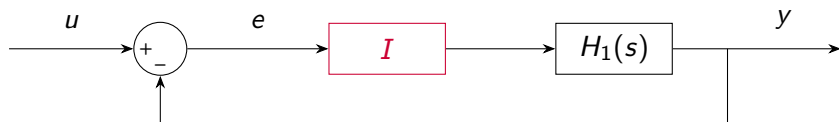


De integrerende term $\int_0^t e(\tau) d\tau$ blijft input geven zo lang er een fout is, zodat de fout wordt weggewerkt.

Werking van integrator

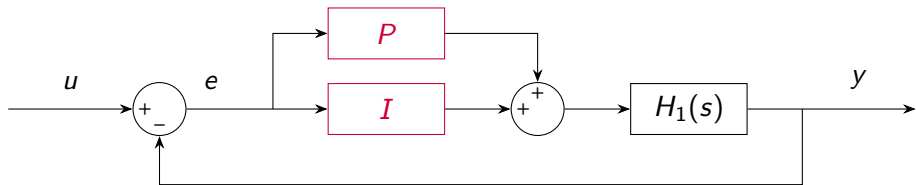


De integrerende regelaar



De integrerende regelaar zorgt ervoor dat de statische fout aan de uitgang wordt weggewerkt. Het maakt het systeem helaas niet echt sneller. Hiervoor is een proportionele (P)-regelaar nodig.

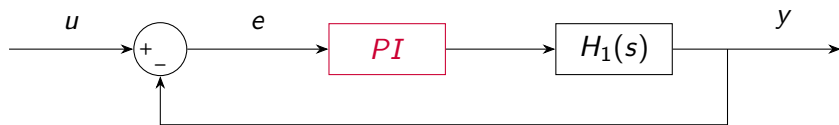
PI-regelaar



Wanneer we zowel een P als een I regelaar gebruiken, spreken we van een “tamme” integrator. Als we alleen een I regelaar gebruiken, spreken we van een “zuivere” integrator.

De proportionele versterking wordt voortaan met een P aangeduid i.p.v. een K .

PI-regelaar



In veel vakliteratuur wordt de regelaar “samengevat” in één blok.

Wiskundige representatie

De I -regelaar kan worden opgevat als:

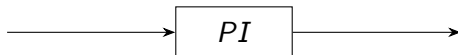
$$I(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

De P -regelaar wordt gezien als:

$$P(t) = K_p e(t)$$

De “mate” van regeling kan worden bepaald door K_i en K_p in te stellen.

PI-regelaar



In een PI -regelaar worden deze twee termen bij elkaar opgeteld.

$$PI_{\text{out}}(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p e(t)$$

Opdracht

Zet deze overdracht om naar het s -domein:

$$PI_{\text{out}}(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p e(t)$$

Opdracht

Zet deze overdracht om naar het s -domein:

$$PI_{\text{out}}(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p e(t)$$

Antwoord:

$$\begin{aligned} PI_{\text{out}}(s) &= \frac{e(s)K_i}{s} + e(s)K_p \\ &= e(s) \left(\frac{K_i}{s} + K_p \right) \\ &= e(s) \left(\frac{K_i + sK_p}{s} \right) \end{aligned}$$

Een (“tamme”) integrator bevat *altijd* een pool in de oorsprong!

Andere notatie

Er bestaat een andere notatie voor:

$$\frac{K_i}{s} + K_p$$

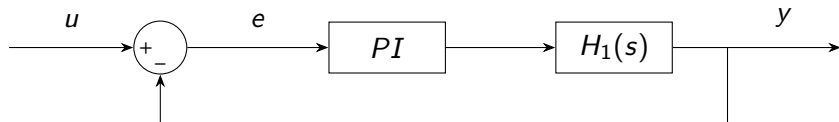
Deze is:

$$K_r \left(\frac{1}{\tau_i s} + 1 \right) \Rightarrow K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

Hierbij is K_p vervangen door K_r en K_i door $\frac{K_r}{\tau_i}$. Hierin wordt τ_i de tijdsconstante van de integrator genoemd.

We kunnen de plaats van het nulpunt dus zelf kiezen!

Opgave

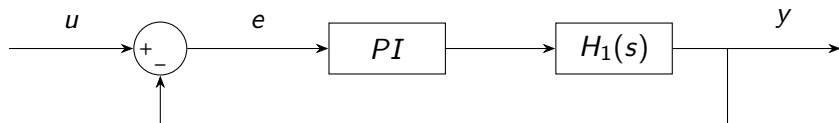


Gegeven bovenstaande regeling met:

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Bepaal H_{cl} .

Opgave



Antwoord:

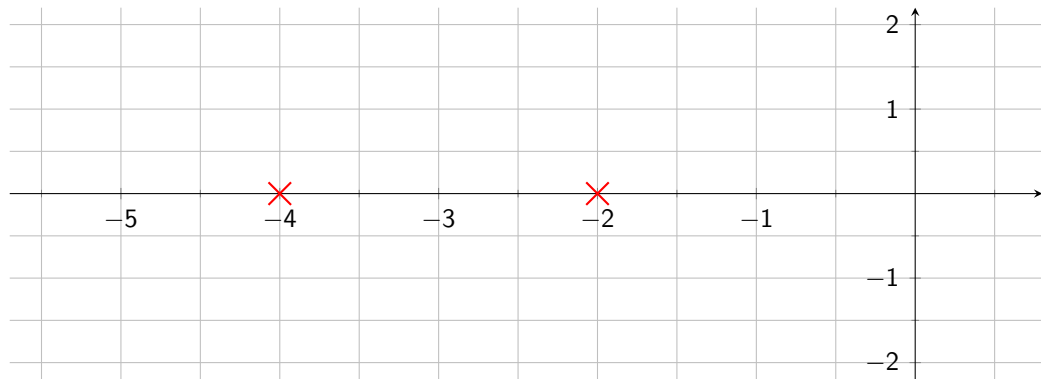
$$H_{cl} = \frac{K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}}{(s + 2)(s + 4) + \left(K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}\right)}$$

Gevolg PI-regelaar

De *PI*-regelaar heeft als gevolg dat de noemer kan worden veranderd. Hiermee kunnen we de polen dus aanpassen!

$$H_{cl} = \frac{K_r (\tau_i s + 1)}{\tau_i s \left((s + 2)(s + 4) + \left(K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s} \right) \right)}$$

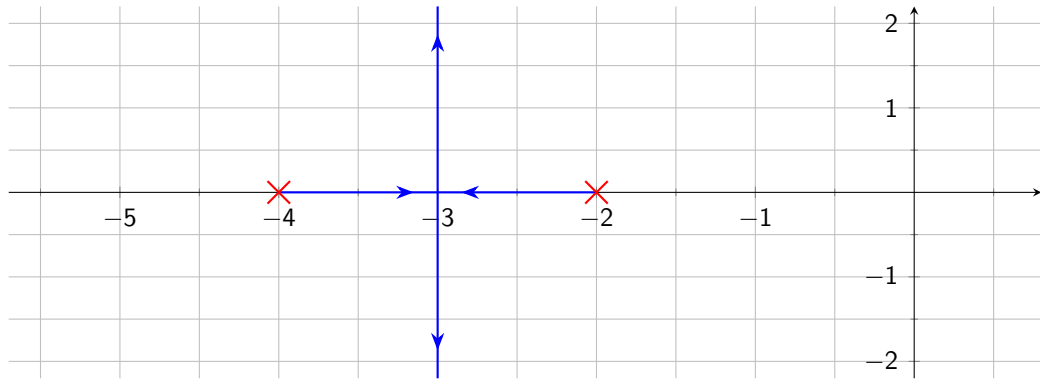
Opgave



Teken de poolbaan van $H_1(s)$ met een **proportionele** regelaar.

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Opgave



Invloed PI-regelaar

We voegen nu de invloed toe van een *PI*-regelaar. De overdracht hiervan is:

$$K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

Neem voor $\tau_i = 1$.

Bepaal de *open-loop* overdracht.

Invloed PI-regelaar

We voegen nu de invloed toe van een *PI*-regelaar. De overdracht hiervan is:

$$K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

Neem voor $\tau_i = 1$.

De open-loop overdracht wordt:

$$\begin{aligned} H(s) &= PI(s) \cdot H_1(s) \\ &= K_r \frac{s+1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)(s+4)} \end{aligned}$$

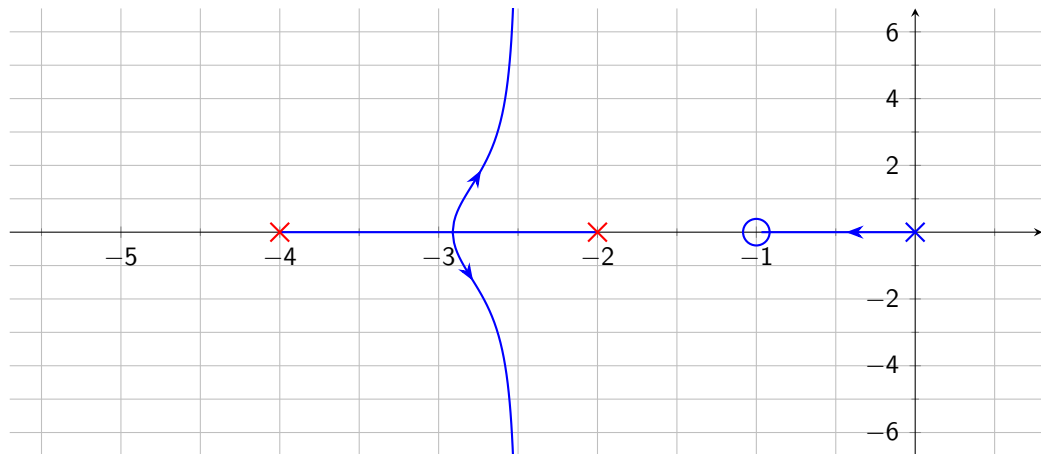
Opgave

Teken de poolbaan van $H(s)$ met een **PI** regelaar.

$$H(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)}$$

Uitbreekpunt $\approx -2,91$

Antwoord



Conclusie

Wat is de invloed van een I -regelaar?

Conclusie

Wat is de invloed van een I -regelaar?

- Werkt fout weg.
- Maakt het systeem trager.

Wiskundig bewijs

Op wiskundige wijze kan de weggewerkte fout worden aangetoond. Herinner week 1.1:

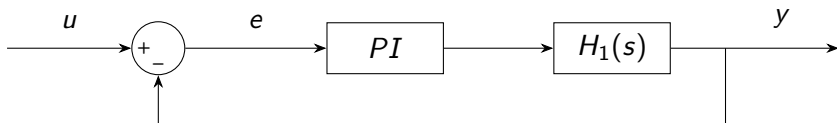
Stelling (Final Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Opgave

Bepaal de $H_{cl}(s)$.

$$H(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)}$$



Opgave

Bepaal de $H_{cl}(s)$.

$$H(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+4)}$$

Antwoord:

$$H_{cl}(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+4) + (s+1)}$$

Opgave

Pas nu de eindewaardestelling toe voor een stapresponsie.

Stelling (Final Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

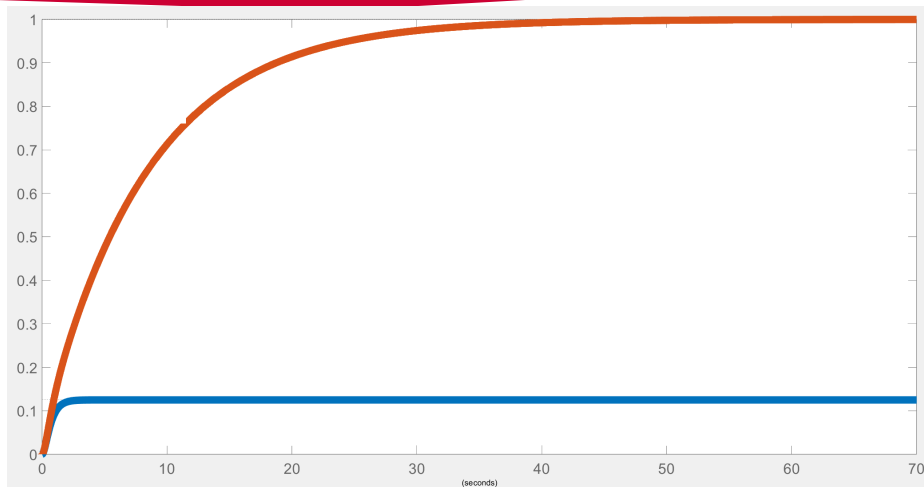
$$H_{cl}(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4) + (s + 1)}$$

Antwoord

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= H(s)X(s) \\
 &= \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+4) + (s+1)} \cdot \frac{1}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+4) + (s+1)} \cdot \frac{1}{s} \\
 &= \frac{(0+1)}{0(0+2)(0+4) + (0+1)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

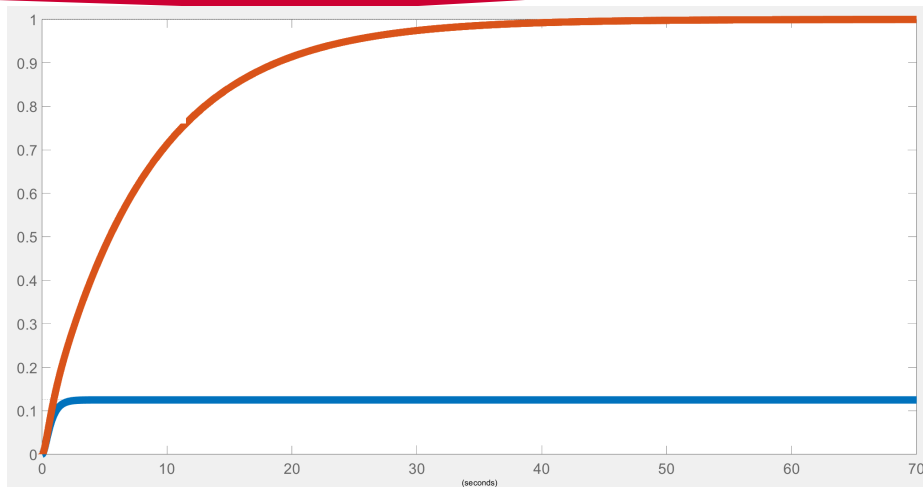
Dit betekent dat de stapresponsie wordt gevolgd, indien $t \rightarrow \infty$.

Plot vergelijking



Wat kunnen we concluderen?

Plot vergelijking



Wat kunnen we concluderen?

- Fout is weggewerkt!
- Systeem is trager.

Andere instelling

Wat nu als we een andere instelling voor τ_i kiezen...

$$K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

Bijvoorbeeld $\tau_i = \frac{1}{3}$.

Wat wordt nu de overdracht van de *PI*-regelaar?

Andere instelling

Wat nu als we een andere instelling voor τ_i kiezen...

$$K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

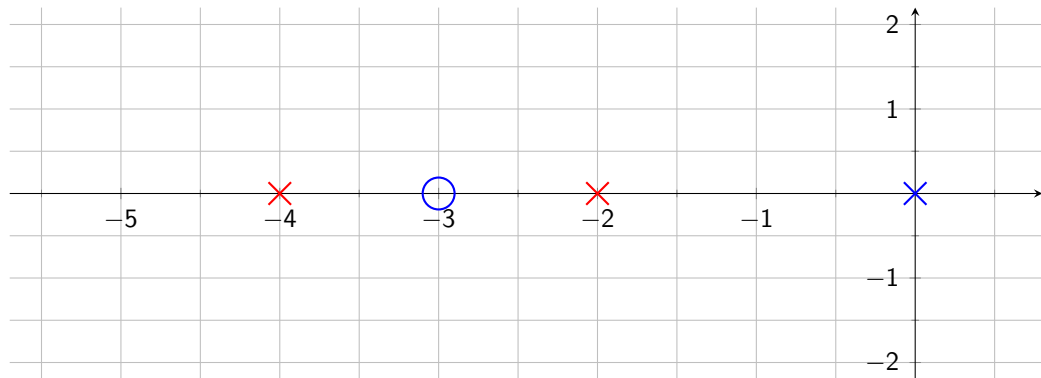
Bijvoorbeeld $\tau_i = \frac{1}{3}$.

Wat wordt nu de overdracht van de *PI*-regelaar? Antwoord:

$$K_r \frac{s + 3}{s}$$

Poolbaan

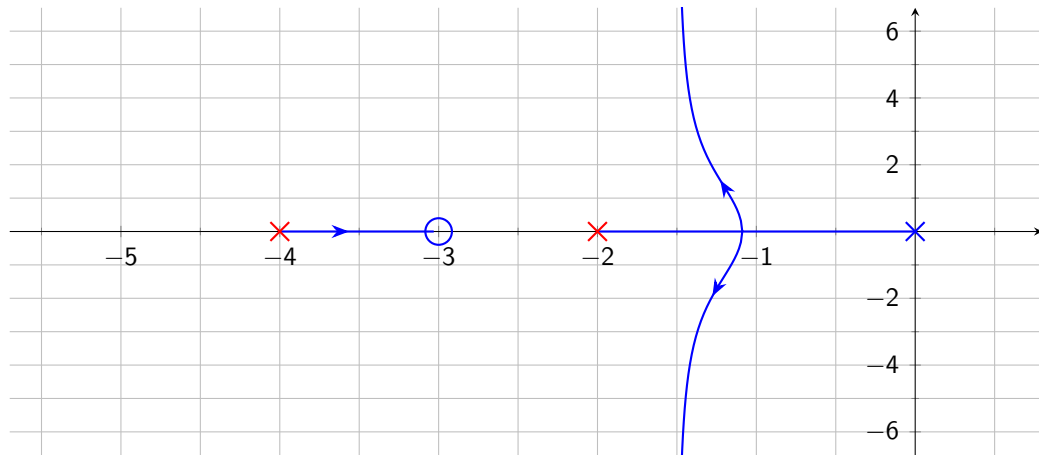
Gevolg voor de polen-nulpunten beeld:



Teken de poolbaan ...

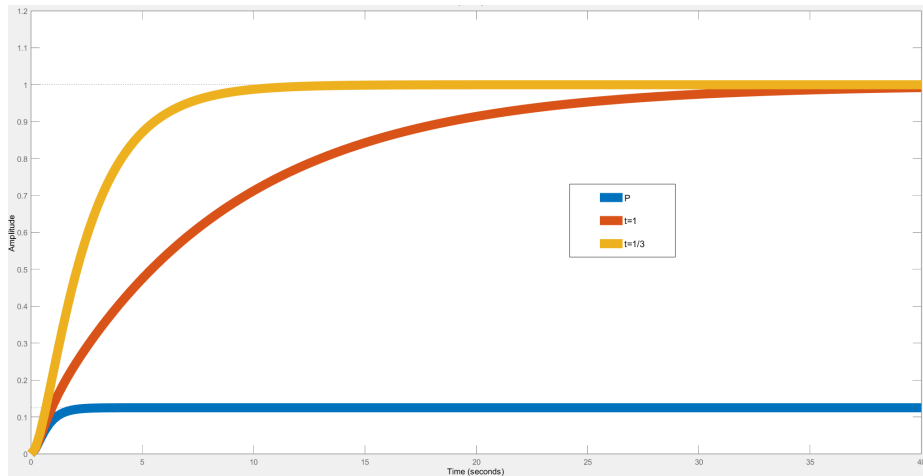
Uitbreekpunt $\approx -1,09$

Antwoord



Wat is het gevolg voor de stapresponsie?

Stapresponsie vergelijking



Wat kunnen we concluderen?

Conclusie

Geciteerd uit het boek (pg 179)

Definitie (Keuze τ_i)

Een goede keuze voor de waarde van τ_i in een PI-regelaar is dus een waarde die gelijk is aan of iets groter is dan de grootste tijdsconstante van het systeem. Het nulpunt van deze PI-actie ligt dan iets **links**^a van de dominante systeempool.

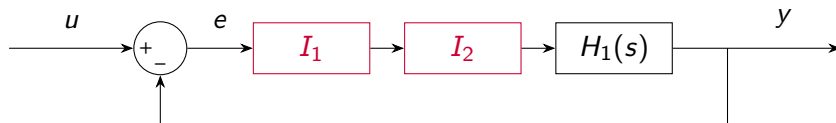
^aDit staat verkeerd in het boek

Let op!

Gebruik van meerdere integratoren dan nodig heeft gevolgen voor de responsie. We zullen dit demonstreren met een voorbeeld.



Twee integratoren

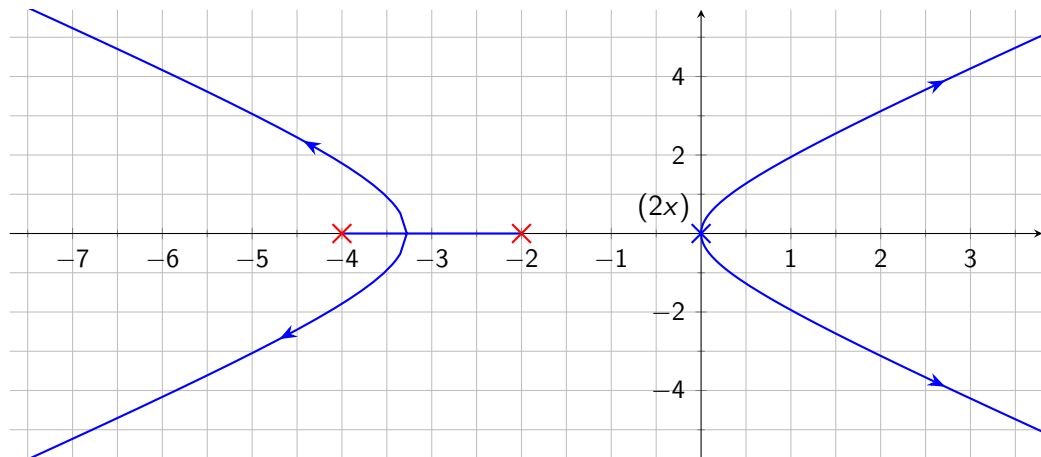


$$\begin{aligned}
 H(s) &= I^2(s) \cdot H_1(s) \\
 &= K_r \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+2)(s+4)}
 \end{aligned}$$

Teken de poolbaan ...

Uitbreekpunten $\approx -3,28 \wedge 0$

Antwoord



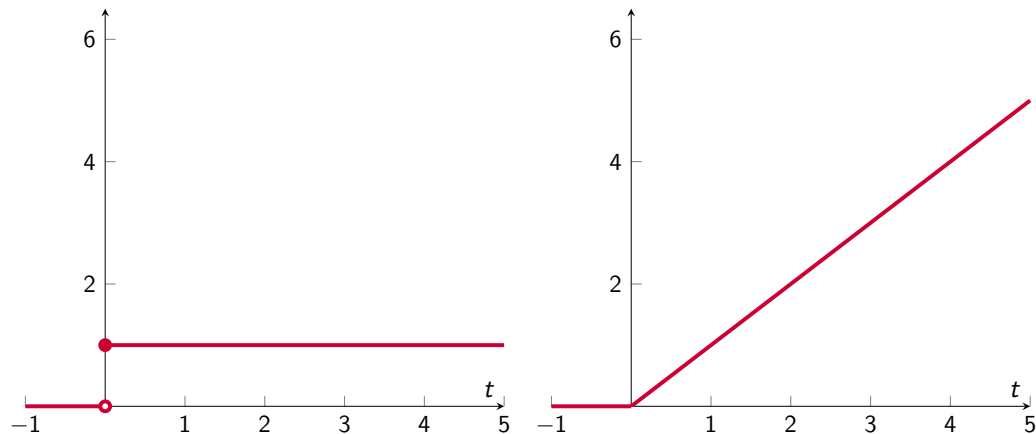
Wat is het gevolg voor het systeem?

Conclusie

Conclusie: Gebruik van meerdere integratoren kan zorgen dat het systeem instabiel wordt.

Soms *moeten* er meer integratoren worden gebruikt. Kun je een situatie bedenken wanneer dat zo is?

Antwoord

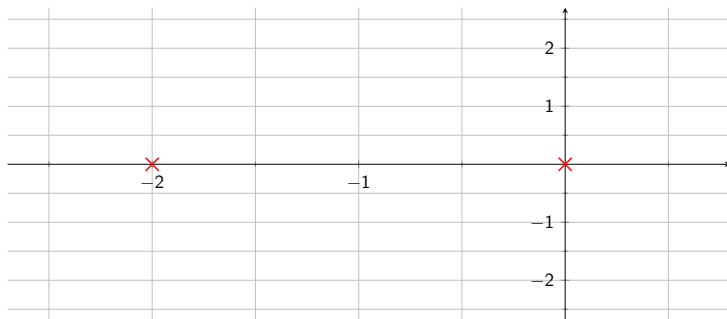


Bij het volgen van helling* op de ingang i.p.v. een stap.

*Engels: ramp

Opgave

Gegeven het volgende systeem:

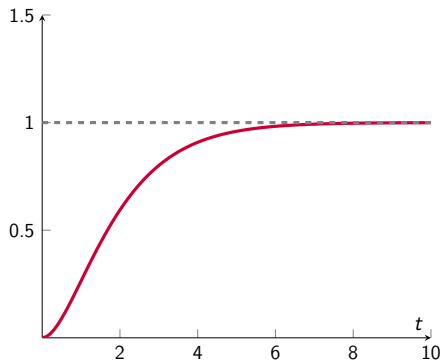


Welke τ_i is nodig om een fout van 0 te krijgen?

$$K_r \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

Antwoord

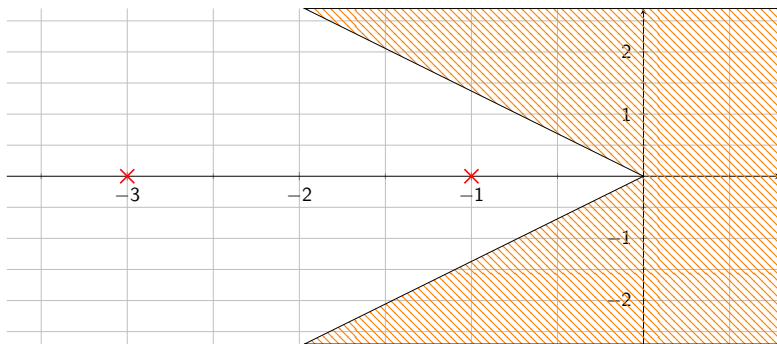
Het systeem heeft al een pool in de oorsprong. Een integrator is dus niet nodig.



Stapresponsie

Opgave

Gegeven het volgende systeem:



We willen:

- Doorschot van maximaal 10 % (gearceerd gebied).
- Steady-state error van 0.

Welke τ_i voldoet?

Aanpak

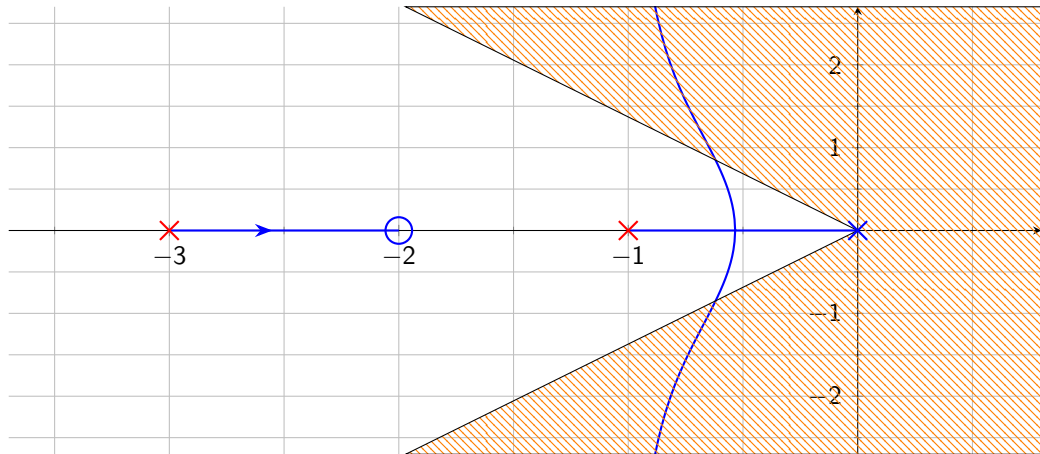
Herinner:

Definitie (Keuze τ_i)

Een goede keuze voor de waarde van τ_i in een PI-regelaar is dus een waarde die gelijk is aan of iets groter is dan de grootste tijdsconstante van het systeem. Het nulpunt van deze PI-actie ligt dan iets **links** van de dominante systeempool.

Dus we proberen een keuze $\tau_i = -2$.

Antwoord



Voor kleine K voldoet het systeem aan de eisen!

Stand tot nu toe

Type	P-regelaar	PI-regelaar
Snelheid	...	...
Fout	...	...

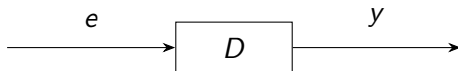
Stand tot nu toe

Type	P-regelaar	PI-regelaar
Snelheid	Versnelt	Vertraagt
Fout	blijft bestaan	gelijk aan 0

Nieuw type regelaar

We introduceren nu een andere soort regelaar.

Een differentiërende regelaar[†]:

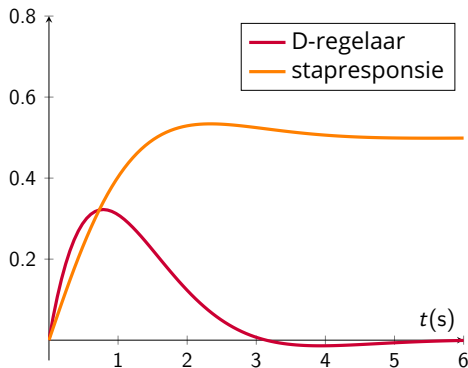


$$y(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}$$

[†]Ook wel differentiator genoemd

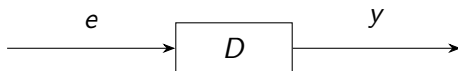
Werking van de differentiator

De differentiator reageert op een *verandering* van de error aan de ingang.



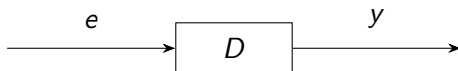
Hoe groter de verandering van de error, hoe groter de sturing van de regelaar.

Voordelen gebruik



Een D-regelaar kan:

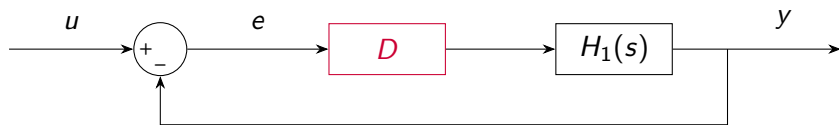
Voordelen gebruik



Een D-regelaar kan:

- Doorschot verminderen
- Settling tijd verkorten

De differentiërende regelaar



De differentiërende regelaar kan doorschot verminderen.

De PD regelaar



Gebruikelijke opstelling is de PD -regelaar.

Wiskundige representatie

De D -regelaar kan worden opgevat als:

$$D(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}$$

De P -regelaar wordt gezien als:

$$P(t) = K_p e(t)$$

De “mate” van regeling kan worden bepaald door K_D en K_p in te stellen. De P wordt toegevoegd om de “heftigheid” van de D te verzwakken.

Opgave

Bepaal de uitgang van de PD -regelaar.

$$PD(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} + K_P e(t)$$

Opgave

Bepaal de uitgang van de PD -regelaar.

$$PD(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} + K_p e(t)$$

$$\begin{aligned} PD(s) &= K_D s e(s) + K_p e(s) \\ &= e(s) (K_D s + K_p) \end{aligned}$$

Dit is een “zuivere” PD -regelaar. Er ontstaat dus een nulpunt!

Onzuivere PD-regelaar

Er bestaat ook een andere versie van de *PD*-regelaar. De “onzuivere” *PD*-regelaar:

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

Hierin is α de tamheidsfactor, τ_d de tijdsconstante en K_r de “mate” van regeling.

Lead/lag compensator

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

Wanneer $\frac{1}{\alpha} < 1$ spreken we van een “onzuivere” *PD*-regelaar of in het Engels een lead compensator.

Lead/lag compensator

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

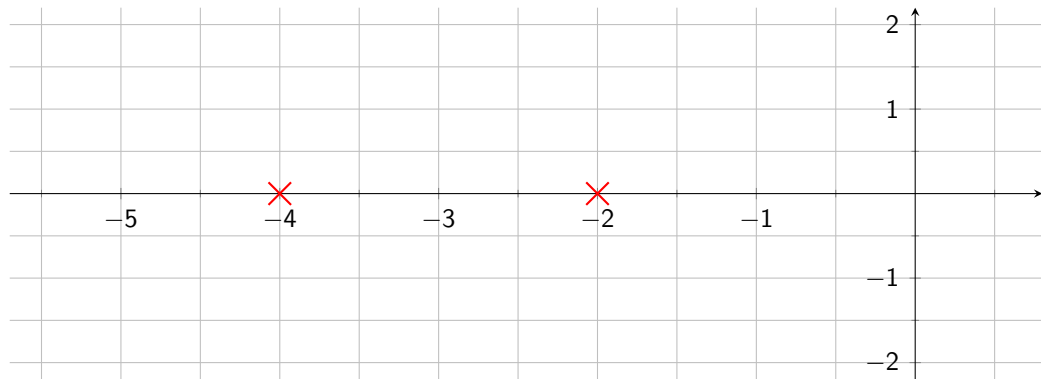
Wanneer $\frac{1}{\alpha} > 1$ spreken we van een “onzuivere” *PI*-regelaar of in het Engels een lag compensator.

Tamheidsfactor

Wanneer de tamheidsfactor gelijk is aan ∞ verkrijgen we de zuivere *PD*-regelaar.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1} \Rightarrow K_r (\tau_d s + 1)$$

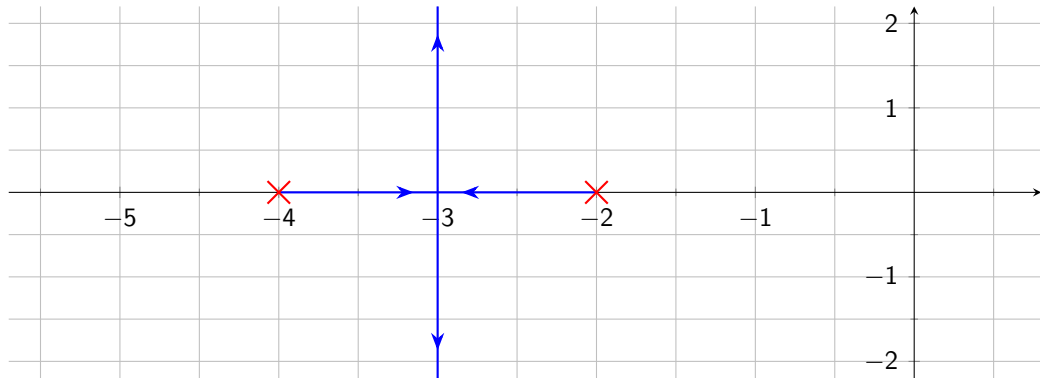
Opgave



Teken de poolbaan van $H_1(s)$ met een **proportionele** regelaar.

$$H_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

Opgave



Invloed PD-regelaar

We voegen nu de invloed toe van een “onzuivere” *PD*-regelaar. De overdracht hiervan is:

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

Neem voor $\tau_d = \frac{1}{3} \wedge \alpha = \frac{5}{3}$.

Bepaal de *open-loop* overdracht.

Invloed PD-regelaar

We voegen nu de invloed toe van een “onzuivere” *PD*-regelaar. De overdracht hiervan is:

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

Neem voor $\tau_d = \frac{1}{3} \wedge \alpha = \frac{5}{3}$.

De open-loop overdracht wordt:

$$\begin{aligned} H(s) &= PD(s) \cdot H_1(s) \\ &= K_r \frac{\frac{s}{3} + 1}{\frac{s}{3 \cdot 15} + 1} \cdot \frac{1}{(s+2)(s+4)} \\ &= 15K_r \frac{s+3}{(s+2)(s+4)(s+5)} \end{aligned}$$

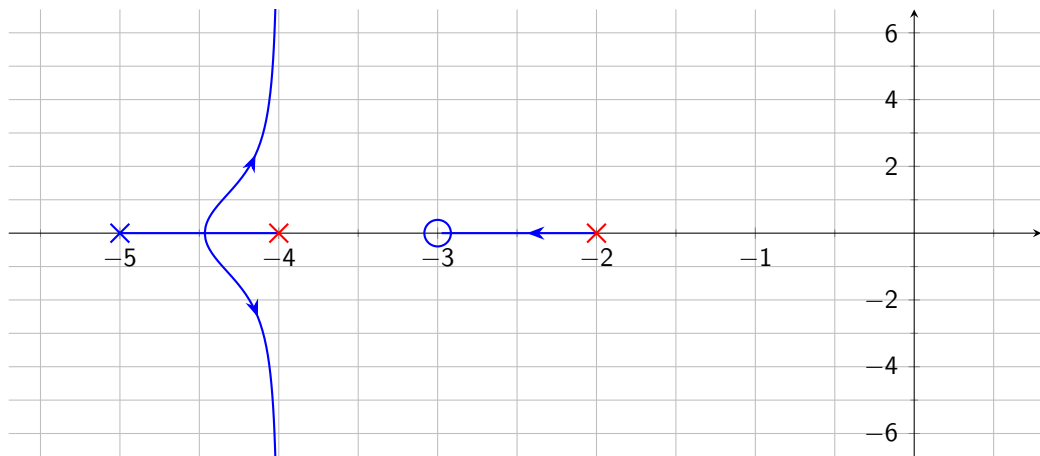
Polen-nulpunt beeld

Teken de root-locus van dit systeem:

$$H(s) = 15K_r \frac{s + 3}{(s + 2)(s + 4)(s + 5)}$$

Uitbreekpunt $\approx -4,47$

Polen-nulpunt beeld



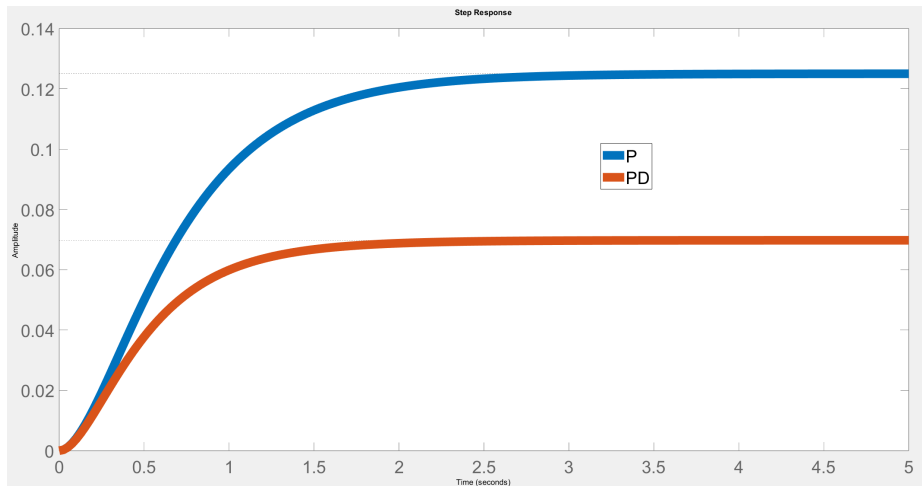
Wat kunnen we concluderen?

Conclusie

Een *PD*-regelaar:

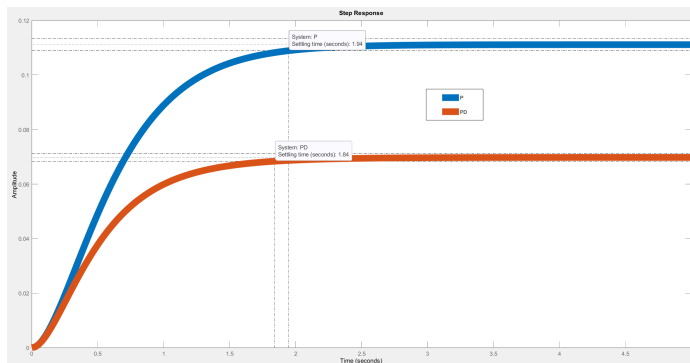
- kan het systeem sneller maken.
- kan doorschot verminderen.
- blijft een fout behouden.

Stapresponsie



Wat valt op?

Settling time



Settling time is afgenomen.
Er blijft een steady-state error ontstaan...

Andere instelling

Neem voor $\tau_d = \frac{1}{5} \wedge \alpha = \frac{6}{5}$

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

Wat wordt de overdracht de regelaar?

Andere instelling

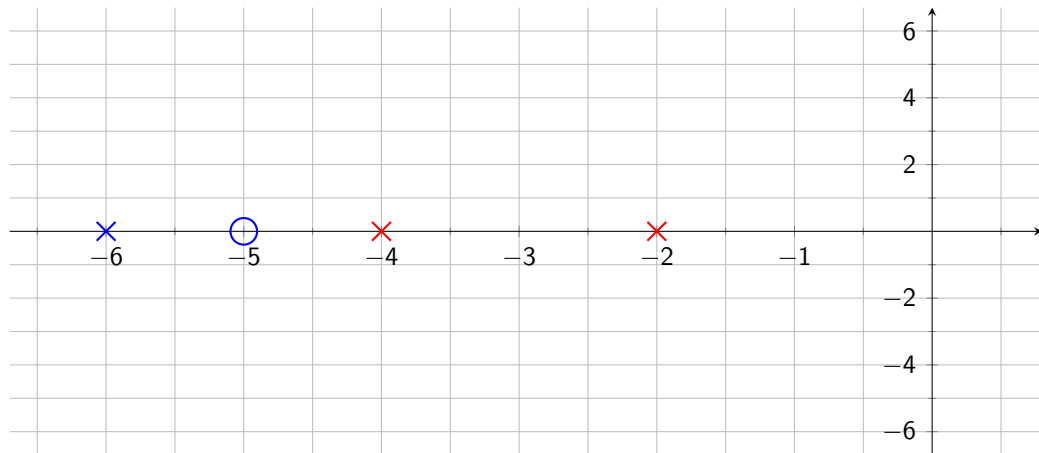
Neem voor $\tau_d = \frac{1}{5} \wedge \alpha = \frac{6}{5}$

$$PD(s) = K_r \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d s}{\alpha} + 1}$$

Wat wordt de overdracht de regelaar?

$$PD(s) = \frac{6}{5} K_r \frac{s + 5}{s + 6}$$

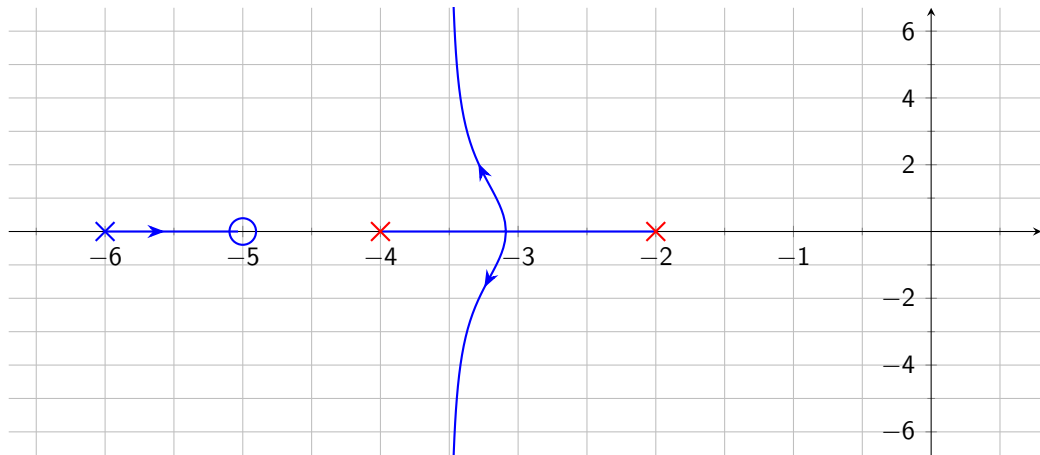
Polen-nulpunt beeld



Teken de poolbaan...

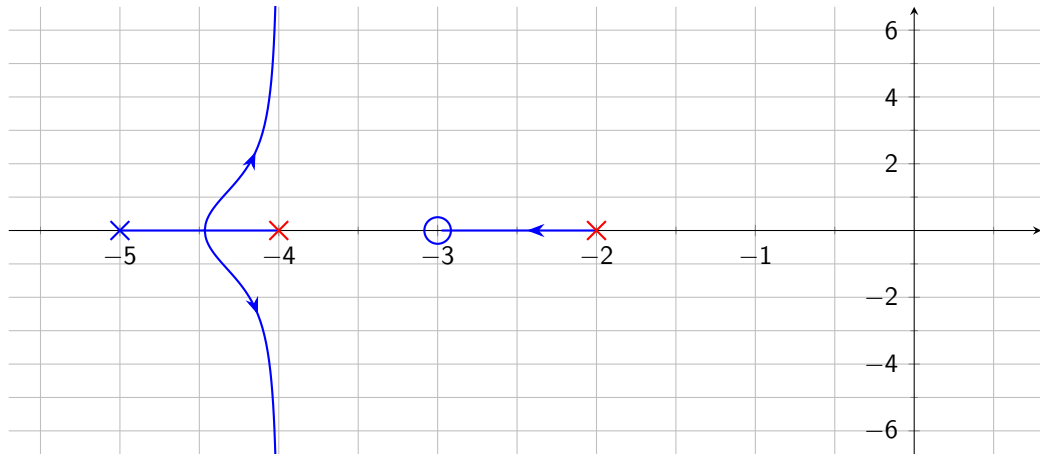
Uitbreekpunt: $\approx -3,09$

Poolbaan



Laten we deze poolbaan vergelijken met de eerdere instelling.

Eerdere instelling



Wat valt op?

Conclusie

Geciteerd uit het boek (pg 182)

Definitie (Keuze τ_d)

Voor de keuze van τ_d kan dus de vuistregel worden gehanteerd dat bij systemen met twee of meer reële polen de differentiatietijd τ_d iets kleiner wordt gekozen dan de op één na grootste tijdsconstante van het systeem. Het nulpunt van deze D-actie ligt dan iets links van de op één na meest dominante systeempool.

Complexiteit

De Lead- en Lag regelaars zijn complex.

Bij de opgaven gebruiken we een zuivere PD regelaar en hoef je alleen een nulpunt te kiezen.

Volgende week

- State-Space