

REG10: Regeltechniek - Week 2.5

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vorige week

- PI-/PD-regelaar

Vandaag

1. Tijdlijn
2. State-space representatie
3. Controllabilty en Observability
4. Connectie state-space en laplace

Tijdljn

1809	●	Laplace transformatie.
1822	●	Fourier transformatie.
1927	●	Eerste toepassing feedback.
1930	●	Bode plot.
1932	●	Nyquist plot.
1948	●	Root locus.
1960	●	State-space.

Bedenker State Space



Rudolf E. Kálmán (1930-2016)

Nadeel Laplacetransformatie

Uit de definitie van de Laplace-transformatie kunnen bepaalde eigenschappen worden herleid. Een voorbeeld hiervan is lineariteit:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \alpha f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta \mathcal{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

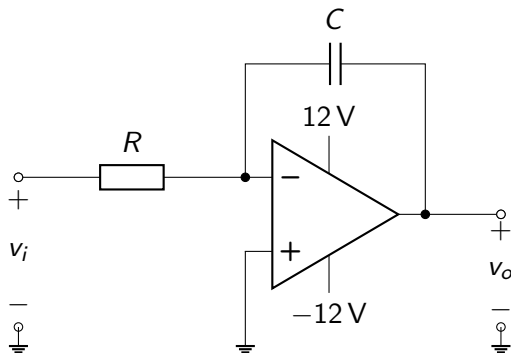
De Laplace transformatie is dus een *lineaire* transformatie. Niet-lineaire systemen kunnen *niet* met het s -domein worden geanalyseerd.

Voorbeeld niet-lineair systeem

Wat is een voorbeeld van een niet-lineair systeem?

Voorbeeld niet-lineair systeem

Wat is een voorbeeld van een niet-lineair systeem?



Voordelen State-space

State-space heeft een aantal voordelen ten opzichte van het s -domein.

- Kan niet-lineaire systemen modelleren.
- Kan tijd-variante systemen beschrijven.
- Kan eenvoudig in een computer worden ingevoerd.
- Vanuit state-space kunnen we terug naar het s -domein.
- Multiple Input Multiple Output (MIMO) systemen kunnen worden geanalyseerd.

Voordelen State-space

State-space heeft een aantal voordelen ten opzichte van het s -domein.

- Kan niet-lineaire systemen modelleren.
- Kan tijd-variante systemen beschrijven.
- Kan eenvoudig in een computer worden ingevoerd.
- Vanuit state-space kunnen we terug naar het s -domein.
- Multiple Input Multiple Output (MIMO) systemen kunnen worden geanalyseerd.

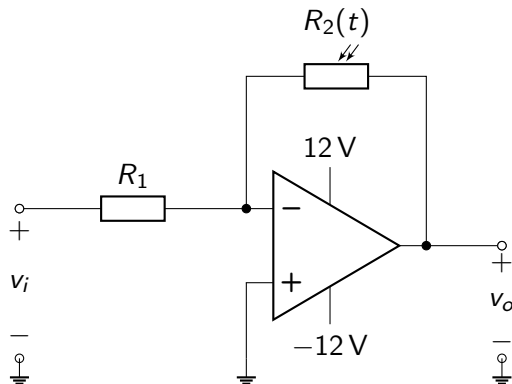
In tegenstelling tot de transformatie technieken blijft state-space in het t -domein!

Tijd-variant systeem

Wat is een voorbeeld van een tijd-variant systeem?

Tijd-variant systeem

Wat is een voorbeeld van een tijd-variant systeem?



ABCD-matrix

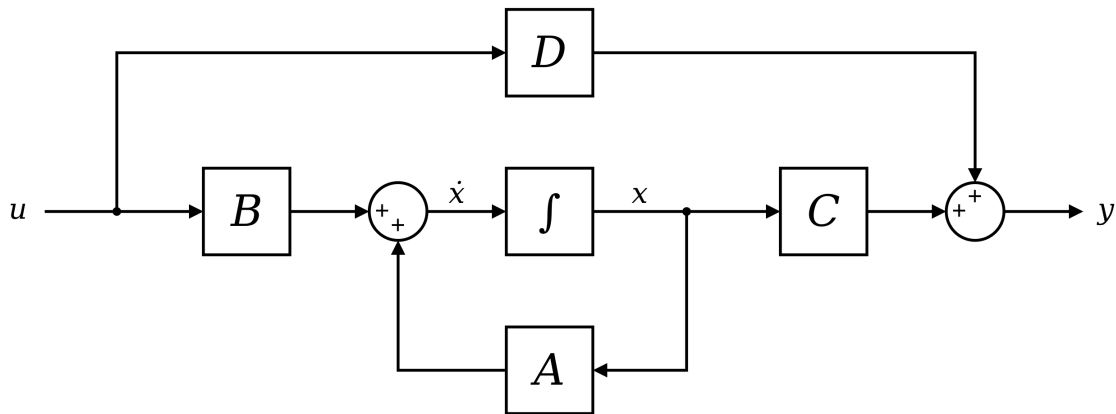
State-space deelt een n^{de} orde differentiaalvergelijking op in n eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Deze eerste-orde differentiaalvergelijkingen worden in een matrix gegoten.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Hierin is $\mathbf{u}(t)$ de ingang en $y(t)$ de uitgang.

Koppeling blokdiagram en matrix

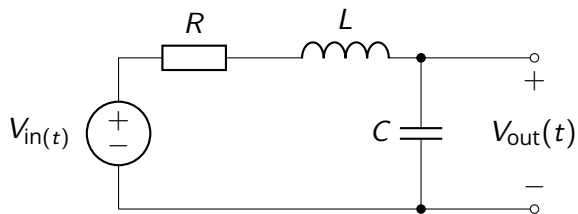


$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Voorbeeld

We zullen onderstaande schakeling omzetten naar een state-space representatie.



$$LCV_{out}''(t) + RCV_{out}'(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t)$$

Uitwerking

$$LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y = U(t)$$

$$\ddot{y} = -\frac{R}{L}\dot{y} - \frac{1}{LC}y + \frac{1}{LC}u$$

De states zijn:

$$\dot{y} = x_1$$

$$y = x_2$$

Substitutie:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{LC}u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Uitwerking (vervolg)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{LC}u \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

Omzetten naar de standaard matrixvorm:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Opgave

Zet de volgende differentiaalvergelijking om in state-space representatie.

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = u$$

Opgave

Zet de volgende differentiaalvergelijking om in state-space representatie.

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = u$$

Antwoord:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Opgave

Zet de volgende differentiaalvergelijking om in state-space representatie.

$$2\ddot{y} + 8\dot{y} + 3y = 5u$$

Opgave

Zet de volgende differentiaalvergelijking om in state-space representatie.

$$2\ddot{y} + 8\dot{y} + 3y = 5u$$

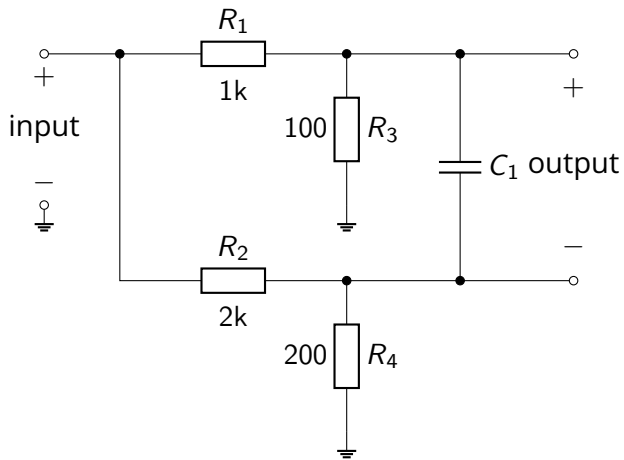
Antwoord:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

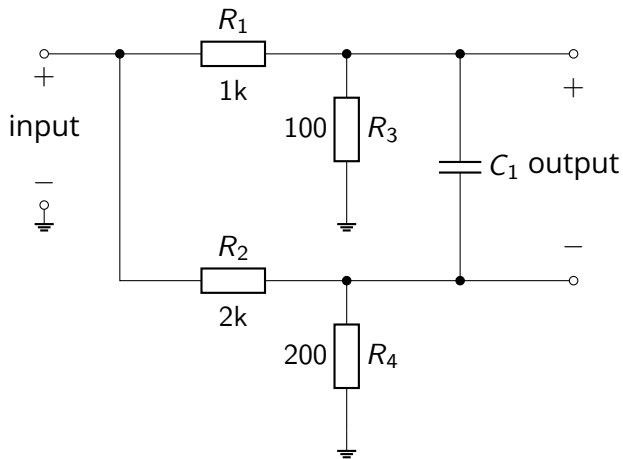
Controllability en Observability

De state space representatie kan ons vertellen of we überhaupt een grootheid kunnen regelen of meten. Om dit te illustreren bekijken we de volgende twee schakelingen.

Controllability

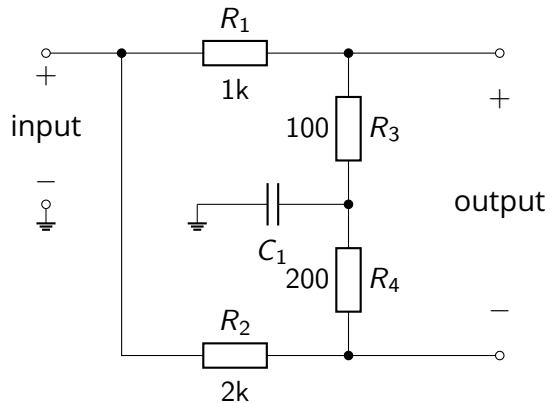


Controllability

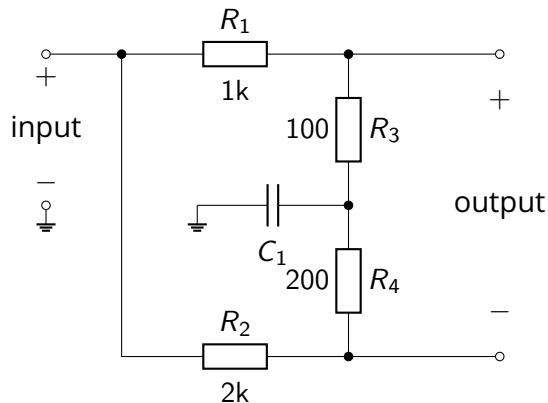


We kunnen op deze manier nooit de spanning over C_1 *veranderen*. De spanning over C_1 is dus “non-controllable”.

Observability



Observability



We kunnen op deze manier nooit de spanning over C_1 meten. De spanning over C_1 is dus "non-observable".

Matrix vorm

Of een systeem observable of controllable is kan worden bepaald met de state-space representatie:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Hiervoor moeten twee matrices worden opgesteld als volgt:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Wanneer de matrix *singulier* is, is het systeem *non-observable* en/of *non-controllable*.

Opgave

Bepaal of het systeem controllable is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Controllability matrix:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Opgave

Bepaal of het systeem controllable is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Controllability matrix voor dit systeem is:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinant bepalen geeft:

$$\det(\mathcal{C}) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

Systeem is non-controllable!

Opgave

Bepaal of het systeem observable is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Observability matrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Opgave

Bepaal of het systeem observable is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Observability matrix voor dit systeem is:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinant bepalen geeft:

$$\det(\mathcal{O}) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

Systeem is observable!

Opgave

Gegeven is onderstaand systeem:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ k & 9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Voor welke waarden van k is het systeem:

- observable?
- controllable?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Antwoord:

Opstellen stellen controllability matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Determinant bepalen en aan nul gelijkstellen geeft:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & k \end{bmatrix} \right) = k = 0$$

Dus, wanneer $k = 0$ is het systeem non-controllable.

Antwoord vervolg

Opstellen observability matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinant bepalen en aan nul gelijkstellen geeft:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 \neq 0$$

Systeem is dus observable voor alle waarden van k .

State-space naar Laplace

We kunnen van de state-space representatie terug naar het s-domein. Het s-domein heeft voordelen t.o.v. state-space representatie (bijv. Poolbanen).

Om terug te gaan naar het s-domein bekijken we de state-space representatie nader:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)\}$$

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{Ax}(s) + \mathbf{Bu}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{Bu}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Bu}(s)$$

Vervolgens substitueren in de andere vergelijking geeft:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)\}$$

$$y(s) = \mathbf{Cx}(s) + \mathbf{Du}(s)$$

$$y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Bu}(s) + \mathbf{Du}(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Opgave

Bepaal de overdrachtsfunctie van het systeem met de volgende state-space representatie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Bonusvraag: Is dit systeem stabiel?

Opgave

Bepaal de overdrachtsfunctie van het systeem met de volgende state-space representatie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Antwoord:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-2)(s-3)}$$

Antwoord bonusvraag: Nee

Polen en nulpunten

Het is ook mogelijk om alleen de polen/nulpunten te bepalen:

$$H(s) = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix} \right)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = 0$$

Alleen de polen bepalen is handig voor het onderwerp van volgende week.

Opgave

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal de polen en nulpunten met onderstaande formule:

$$H(s) = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix} \right)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = 0$$

Antwoord polen

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(s-2)(s-3) = 0$$

$$s_1 = 2$$

$$s_2 = 3$$

Antwoord polen

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(s-2)(s-3) = 0$$

$$s_1 = 2$$

$$s_2 = 3$$

Er zijn dus twee polen.

Antwoord nulpunten

$$\det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$1(-1 \cdot -1 - (s-3) \cdot 0) = 0$$

$$1 \neq 0$$

Er zijn dus geen nulpunten.

Volgende week

- Canonical forms