

REG10: Regeltechniek - Week 2.6

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vorige week

- Begin state-space
- Observability
- Controllability
- State-space naar Laplace

Vandaag

1. Herhaling

2. Canonical Forms

3. State feedback
Regelaar bepalen

Opgave 1

Zet de volgende state-space representatie om naar het Laplace domein.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Opgave 1

Zet de volgende state-space representatie om naar het Laplace domein.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Antwoord:

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Opgave 2

Zet de volgende state-space representatie om naar het Laplace domein.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Opgave 2

Zet de volgende state-space representatie om naar het Laplace domein.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Antwoord:

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Opgave 3

Zet de volgende state-space representatie om naar het Laplace domein.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Opgave 3

Zet de volgende state-space representatie om naar het Laplace domein.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Antwoord:

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Vergelijking

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u & \dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u & \dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u & y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u & y &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Bovenstaande matrices geven allemaal dezelfde overdracht:

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Oneindig veel vormen

In theorie kun je onderstaande overdracht in oneindig veel state-space realisaties beschrijven.

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Er zijn een paar **canonical*** die nuttig zijn:

- Control canonical form
- Observer canonical form
- Modal canonical form

Let op! De overdracht in het s-domein kan maar op één manier worden beschreven.

*Engels voor 'standaard'.

Control canonical form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Kun je een algemene manier verzinnen, waarmee je iedere overdracht kunt omzetten naar de control canonical form?

Control canonical form

Een overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

heeft als control canonical form de state-space representatie:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \end{bmatrix} x$$

Opgave

Zet de volgende overdracht om in de control canonical form:

$$H(s) = \frac{5s^6 + 3s^3 + 4s^2 + 3}{s^7 + 8s^4 + 2s + 4}$$

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \end{bmatrix} x$$

Opgave

Zet de volgende overdracht om in de control canonical form:

$$H(s) = \frac{5s^6 + 3s^3 + 4s^2 + 3}{s^7 + 8s^4 + 2s + 4}$$

Antwoord:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Observer canonical form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

Kun je een algemene manier verzinnen, waarmee je iedere overdracht kunt omzetten naar de observer canonical form?

Observer canonical form

Een overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

heeft in observer canonical form de state-space representatie:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x$$

Opgave

Zet de volgende overdracht om in de observer canonical form:

$$H(s) = \frac{5s^6 + 3s^3 + 4s^2 + 3}{s^7 + 8s^4 + 2s + 4}$$

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Opgave

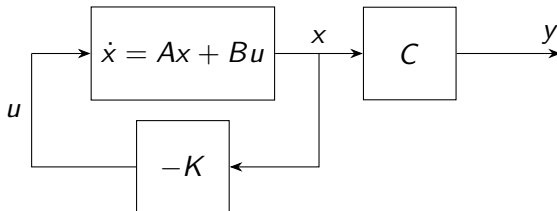
Zet de volgende overdracht om in de observer canonical form:

$$H(s) = \frac{5s^6 + 3s^3 + 4s^2 + 3}{s^7 + 8s^4 + 2s + 4}$$

Antwoord:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Blokdiagram zonder observer



Een regelaar in de state-space representatie wordt in de feedback lus geplaatst. Dit wordt een *state feedback* regelaar genoemd. Een groot voordeel van de state-space representatie is dat de polen naar gewenste poolposities kunnen worden verschoven.

State feedback

Een state feedback regelaar voor het systeem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

wordt verkregen door een geschikte matrix K te vinden en de input

$$u(t) = -Kx(t)$$

te gebruiken. Hierdoor verandert het systeem in

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

Doel: verplaats de polen van het systeem naar gewenste poollocaties.

Polen in een state-space representatie

Vorige week is uitgelegd hoe de polen/nulpunten kunnen worden bepaald uit de state-space representatie:

Het is ook mogelijk om alleen de polen/nulpunten te bepalen:

$$H(s) = \frac{\det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix} \right)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0} = 0$$

Alleen de polen bepalen is handig voor het onderwerp van volgende week.

Het bepalen van $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ is een typisch *eigenwaarden* probleem[†].

[†]Zie evt. het wiskundeboek deel 2 voor meer info.

Voorbeeld

Bepaal de polen van

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Voorbeeld

Bepaal de polen van

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Antwoord:

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix} &= 0 \\ (s+5)(s+4) - 2 &= 0 \\ s^2 + 9s + 18 &= 0 \\ (s+3)(s+6) &= 0\end{aligned}$$

De polen (en dus de eigenwaarden) zijn $s = -3$ en $s = -6$.

Bepalen van feedback gains

Voor het systeem met state feedback

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

geldt dat de polen gelijk zijn aan de oplossingen van

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

Voor een nog te bepalen matrix K is deze determinant alsnog uit te schrijven!

Voorbeeld

Voor het eerder gebruikte voorbeeld

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

zullen we een state feedback matrix K bepalen, zodat de polen op $s = -7$ en $s = -9$ komen te liggen.

$$(s + 7)(s + 9) = 0$$

$$s^2 + 16s + 63 = 0$$

Opgave

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Voor dit voorbeeld is K een 1×2 matrix

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Schrijf de volgende uitdrukking uit.

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$s^2 + 16s + 63 = 0$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BK) &= \det \left(\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s+5+k_1 & 1+k_2 \\ 2+2k_1 & s+4+2k_2 \end{bmatrix} \\ &= (s+5+k_1)(s+4+2k_2) - (1+k_2)(2+2k_1) \\ &= s^2 + (9+k_1+2k_2)s + 2k_1 + 8k_2 + 18\end{aligned}$$

Nu moeten we deze vergelijking gelijkstellen aan:

$$s^2 + 16s + 63 = 0$$

Oplossing (vervolg)

De vergelijkingen

$$9 + k_1 + 2k_2 = 16$$

$$2k_1 + 8k_2 + 18 = 63$$

zijn ook te schrijven als

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 7 \\ 2k_1 + 8k_2 = 45 \end{cases}$$

waaruit volgt dat

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{31}{4} \end{bmatrix}$$

Control canonical form

Bepalen van K met control canonical form gaat soepel:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \end{bmatrix} x$$

waarin $u = -Kx$ met

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

Control canonical form (vervolg)

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & \cdots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

is precies de control canonical form van de karakteristieke vergelijking

$$s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n)$$

waardoor het gelijkstellen van coëfficiënten eenvoudiger wordt.

Voorbeeld

Zorg dat de polen van

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

op $s = -10$ en $s = -8$ komen te liggen.

$$(s + 10)(s + 8) = s^2 + 18s + 80$$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

Oplossing

Gewenste karakteristiek polynoom is

$$(s + 10)(s + 8) = s^2 + 18s + 80$$

en

$$\det(sI - A + BK) = s^2 + (7 + k_1)s + 12 + k_2$$

waaruit direct volgt dat

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 68 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Zorg dat de polen van

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

op $s = -4$ en $s = -5$ komen te liggen.

$$(s + 4)(s + 5) = s^2 + 9s + 20$$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BK) &= \det \left(\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ -2 & s-8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} s-5+k_1 & -4+k_2 \\ -2 & s-8 \end{bmatrix} \right) \\ &= (s-1+k_1)(s-8) + 2(-4+k_2) \\ &= s^2 + (k_1-9)s + 2k_2 - 8k_1\end{aligned}$$

Polen verschuiven naar gewenste locatie:

$$s^2 + 9s + 20 = s^2 + (k_1 - 9)s + 2k_2 - 8k_1.$$

Geeft:

$$k_1 = 18 \quad k_2 = 82.$$

Samenvatting

Canonical forms.

- Controllability
- Observability

Regelaar maken in state-space.

- 1 Gewenste $as^2 + bs + c = 0$ bepalen.
- 2 Controllability non-singular? $\det(\mathcal{C}) \neq 0$.
- 3 Berekenen $\det(sI - A + BK) = 0$
- 4 Opstellen $K = [k_1 \ k_2 \ \dots]$

Staat het systeem al in de controllability canonical form? Regelaar K is dan heel eenvoudig te bepalen.

Het recept staat ook in het huiswerk om je op weg te helpen 😊.

Volgende week

- Ackermann's formule
- En even oefenen 😊.