

REG10: Regeltechniek - Week 2.7

Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vandaag

1. Herhaling
2. Ackermann's formule
3. Samenvattende opgave
4. Computerberekeningen
5. Overzicht Regeltechniek

Opgave

Zorg dat de polen van

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

op $s = -4$ en $s = -5$ komen te liggen.

$$(s + 4)(s + 5) = s^2 + 9s + 20$$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BK) &= \det \left(\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ 0 & s-8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s-5+k_1 & -4+k_2 \\ 0 & s-8 \end{bmatrix} \\ &= (s-1+k_1)(s-8) \\ &= s^2 + (k_1-9)s + 8 - 8k_1\end{aligned}$$

Polen moeten liggen op:

$$s^2 + 9s + 20$$

Hier zijn twee verschillende waarden voor k_1 nodig...

Oplossing

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BK) &= \det \left(\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ 0 & s-8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s-5+k_1 & -4+k_2 \\ 0 & s-8 \end{bmatrix} \\ &= (s-1+k_1)(s-8) \\ &= s^2 + (k_1-9)s + 8 - 8k_1\end{aligned}$$

Polen moeten liggen op:

$$s^2 + 9s + 20$$

Hier zijn twee verschillende waarden voor k_1 nodig...

Wat zegt de controllability matrix?

Controllabilty

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Bepaal de controllability matrix

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Antwoord

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De determinant van de controllability matrix is dus gelijk aan 0. Dit systeem is dus niet regelbaar!

Ackermann's formule

Een andere truc voor het bepalen van de gain matrix K is het gebruik van de Ackermann's formule:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

Ackermann's formule

Een andere truc voor het bepalen van de gain matrix K is het gebruik van de Ackermann's formule:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

waarin $\mathcal{C}$ staat voor de controllability matrix (zie week 2.5) en

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_n I$$

waar α_i de coëfficiënten van het gewenste karakteristieke polynoom zijn.

Voorbeeld

Bepaal voor

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

een state feedback matrix K , zodat de polen op $s = -7$ en $s = -9$ komen te liggen. Ditmaal met de Ackermann's formule.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Oplossing

Eerst de controllability matrix opstellen:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De controllability matrix is niet singulier $\det(\mathcal{C}) \neq 0$, dus we kunnen verder gaan.
Polen moeten liggen op $s = -7$ en $s = -9$ dus,

$$(s + 7)(s + 9) = s^2 + 16s + 63$$

Dat betekent:

$$\alpha_c(A) = A^2 + 16A + 63I$$

Oftwel

$$\alpha_c(A) = \begin{bmatrix} 9 & 36 \\ 18 & 68 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + 63 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 & 100 \\ 50 & 259 \end{bmatrix}$$

Vervolg

Alleen nog $\mathcal{C}$ inverteren:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

En nu de Ackermann's formule invullen:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 88 & 100 \\ 50 & 259 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25 & \frac{259}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bepaal voor

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

een state feedback matrix K zodat de polen op $s = -10$ en $s = -2$ komen te liggen.
Ditmaal met de Ackermann's formule.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Oplossing

Controllabilty matrix opstellen:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Controllabilty matrix is singulier $\det \mathcal{C} = 0$, dus de state feedback matrix K kan niet worden opgesteld.

Totale opgave

We zullen nu alles wat we met state-space hebben behandeld herhalen.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Bepaal:

- De overdracht $H(s)$
- De controllability matrix
- De observability matrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Oplossing

$$H(s) = \frac{3s - 2}{s^2 - 7s + 7} \approx \frac{3s - 2}{(s - 5,8)(s - 1,2)}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Totale opgave

Onderstaand systeem is dus niet stabiel.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Maak het systeem stabiel door de polen op posities $s = -3 \wedge s = -4$ te leggen. Doe dit met:

- De directe state-feedback formule
- De Ackermann's formule

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Oplossing

De polen moeten dus naar $(s + 3)(s + 4) = s^2 + 7s + 12$. Met direct state-feedback formule:

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$s^2 + s(k_1 + k_2 - 7) + (7 + k_2 - 4k_1) = 0$$

$$k_1 = \frac{9}{5}$$

$$k_2 = \frac{61}{5}$$

Oplossing (vervolg)

Met Ackermann's formule:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(A)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{61}{5} \end{bmatrix}$$

Controle

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Controleer of de polen nu inderdaad op $s = -3$ $s = -4$ liggen.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{61}{5} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BK) &= \det \left(\begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ -3 & s-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{61}{5} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} s-2+\frac{9}{5} & -1+\frac{61}{5} \\ -3+\frac{9}{5} & s-5+\frac{61}{5} \end{bmatrix} \\ &= \left(s - \frac{1}{5}\right) \left(s + \frac{36}{5}\right) + \frac{56}{5} \cdot \frac{6}{5} \\ &= s^2 + 7s + 12 \\ &= (s+3)(s+4)\end{aligned}$$

Polen liggen dus inderdaad op $s = -3$ en $s = -4$!

Matlab

De state-space representatie is voornamelijk *numeriek*. De transformatietechnieken vooral *analytisch*. Een computer kan beter/snelere rekenen dan afleiden.

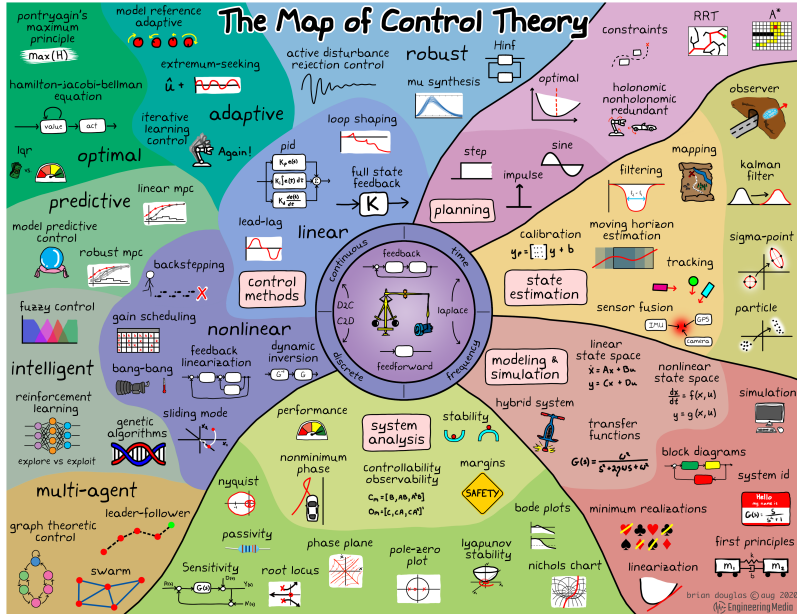
Voor het rekenen aan matrices (lineaire algebra) is een speciaal computer programma geschreven:

De state-space representatie is voornamelijk *numeriek*. De transformatietechnieken vooral *analytisch*. Een computer kan beter/snelere rekenen dan afleiden.

Voor het rekenen aan matrices (lineaire algebra) is een speciaal computer programma geschreven:

MATrix LABoratory MATLAB

Overzicht





Volgende week

- Oefentoets