

REG10: Regeltechniek - Week 2.7 Bonus

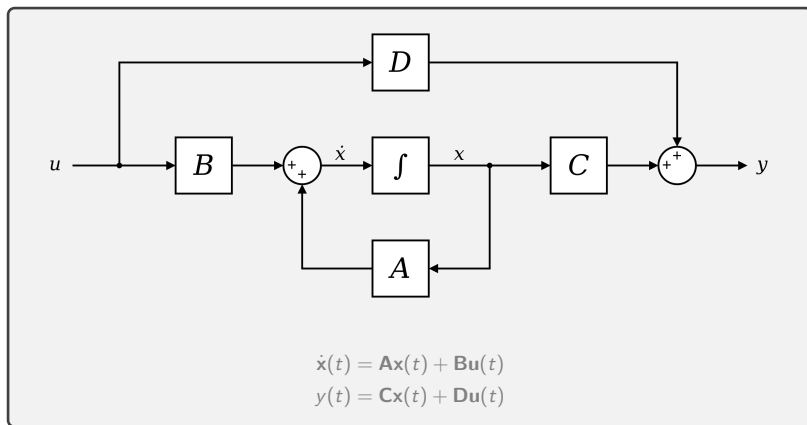
Hogeschool Rotterdam - Opleiding Elektrotechniek

Vandaag

1. Everyone wants the ...
2. Dewin's methode
3. Mogelijke verklaring

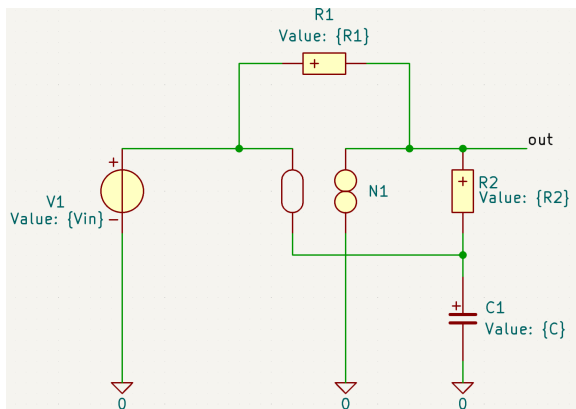
Koppeling blokdiagram en matrix

In de het eerste presentatie van State-Space is onderstaande afbeelding getoond.



Hierbij geeft de D -matrix de "directe" overdracht weer.

Voorbeeld



Door R_1 is er een direct pad van input naar output. In dit voorbeeld is de D -matrix niet gelijk aan 0.

Opgave van vorige week

Zorg dat de polen van

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

op $s = -4$ en $s = -5$ komen te liggen.

$$(s + 4)(s + 5) = s^2 + 9s + 20$$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

Herinner de opgave van vorige keer.

Oplossing van vorige week

$$\begin{aligned}
 \det(sI - A + BK) &= \det \left(\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ -2 & s-8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \det \begin{bmatrix} s-5+k_1 & -4+k_2 \\ -2 & s-8 \end{bmatrix} \\
 &= (s-1+k_1)(s-8) + 2(4+k_2) \\
 &= s^2 + (k_1-9)s + 2k_2 + 16 - 8k_1
 \end{aligned}$$

Polen moeten liggen op:

$$s^2 + 9s + 20$$

Gelijkstellen geeft:

$$k_1 = 18$$

$$k_2 = 82$$

Hierbij vonden we een gain matrix van $K = \begin{bmatrix} 18 & 82 \end{bmatrix}$.

Dewin's methode

De control canonical form is een eenvoudigere manier om de gain matrix K te bepalen. Hiervoor moet de state-space representatie worden omgezet. Deze procedure bestaat uit de volgende stappen:

- 1 Schrijf de state-space vorm terug naar de Laplace overdrachtsfunctie.
- 2 Zet de overdrachtsfunctie weer terug naar state-space, maar nu in de control canonical vorm met het formuleblad.
- 3 Bepaal de gain matrix K .

Vorige opgave

Zorg dat de polen van

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

op $s = -4$ en $s = -5$ komen te liggen.

$$(s + 4)(s + 5) = s^2 + 9s + 20$$

Laten we deze opgave nu uitvoeren met Dewin's methode.

Laplace

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$H(s) = \frac{s - 4}{s^2 - 9s}$$

Nu dit omzetten naar de state-space vorm met de formules op het formuleblad.

Formuleblad

$$H(s) = \frac{s - 4}{s^2 - 9s}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Een overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

heeft als control canonical form de state-space representatie:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \end{bmatrix} x$$

Gain matrix bepalen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$(s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & \cdots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

is precies de control canonical form van de karakteristieke vergelijking

$$s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n)$$

waardoor het gelijkstellen van coëfficiënten eenvoudiger wordt.

Gain matrix

Hieruit zijn de volgende twee formules te bepalen:

$$9 = -9 + k_1$$

$$k_1 = 18$$

$$20 = 0 + k_2$$

$$k_2 = 20$$

Dus de gain matrix is: $K = \begin{bmatrix} 18 & 20 \end{bmatrix}$.

De vorige gain matrix was: $K = \begin{bmatrix} 18 & 82 \end{bmatrix}$.

Controle in Matlab

The screenshot shows the MATLAB Editor with a script named 'Matlab_intro.m' and the Workspace window. The script defines two systems, 'systeem' and 'systeem in controllable form', both with the same state-space matrices (A, B, C, D). The gain matrices K1 and K2 are calculated for each system using the 'place' function. The Workspace window shows the values of these variables, with K1 and K2 highlighted in red.

Matlab_intro.m

```

1 s = tf('s');
2 A = [1,4 ; 2,8]
3 B = [1;0]
4 C = [1,2]
5 D = 0
6
7 sys_ss = ss(A,B,C,D)
8 pole(sys_ss)
9 p=[-4, -5];
10 K1 = place(A,B,p)
11 K_acker_1 = acker(A,B,p)
12
13 [sys_tf_num, sys_tf_denom] = ss2tf(A,B,C,D)
14
15 A = [9,0 ; 1,0]
16 B = [1;0]
17 C = [1,-4]
18 D = 0
19
20 sys_ss = ss(A,B,C,D)
21 pole(sys_ss)
22 p=[-4, -5];
23 K2 = place(A,B,p)
24 K_acker_2 = acker(A,B,p)
25
26 [sys_tf_num, sys_tf_denom] = ss2tf(A,B,C,D)
  
```

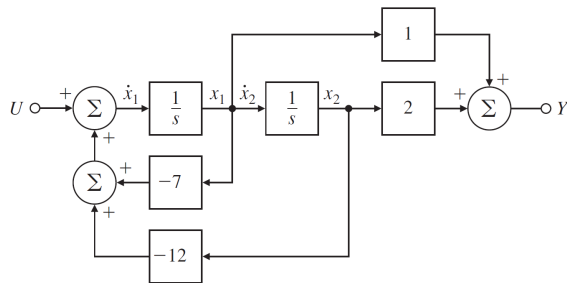
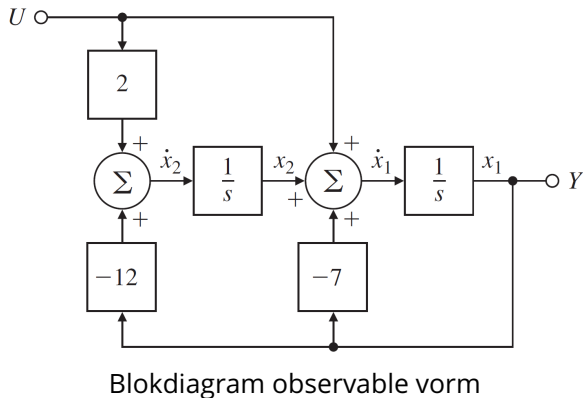
Workspace

Name	Value
A	[9,0;1,0]
ans	[0,9]
B	[1;0]
C	[1,-4]
D	0
K1	[18.0000,82.0000]
K2	[18.0000,20.0000]
K_acker_1	[18,82]
K_acker_2	[18,20]
p	[-4,-5]
s	1x1 tf
sys_ss	1x1 ss
sys_tf_denom	[1,-9,0]
sys_tf_num	[0,1,-4.0000]

Dus systemen met dezelfde overdrachtsfunctie in de state-space representatie kunnen verschillende gain matrices hebben!

Mogelijke verklaring

Een mogelijke verklaring voor dit verschil is aanneembaar te maken met de volgende blokdiagrammen.



*

*Plaatjes afkomstig uit: Feedback control of dynamic systems, Pearson, 2016, Gene F. Franklin

Mogelijk wiskundig bewijs

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \det(sI - A + BK) \\ &= \det \begin{bmatrix} s - 1 + k_1 & -4 + k_2 \\ -2 & s - 8 \end{bmatrix} \\ &= (s - 1 + k_1)(s - 8) + 2(4 + k_2) \\ &= s^2 + (k_1 - 9)s + 2k_2 + 16 - 8k_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \det(sI - A + BK) \\ &= \det \begin{bmatrix} s - 9 + k_1 & k_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} \\ &= (s - 9 + k_1)s + k_2 \\ &= s^2 + (k_1 - 9)s + k_2\end{aligned}$$

Verklaring

State variables [\[edit \]](#)

The internal [state variables](#) are the smallest possible subset of system variables that can represent the entire state of the system at any given time.^[13] The minimum number of state variables required to represent a given system, n , is usually equal to the order of the system's defining differential equation, but not necessarily. If the system is represented in transfer function form, the minimum number of state variables is equal to the order of the transfer function's denominator after it has been reduced to a proper fraction. It is

important to understand that converting a state-space realization to a transfer function form may lose some internal information about the system, and may provide a description of a system which is stable, when the state-space realization is unstable at certain points.

In electric circuits, the number of state variables is often, though not always, the same as the number of energy storage elements in the circuit such as [capacitors](#) and [inductors](#). The state variables defined must be linearly independent, i.e., no state variable can be written as a linear combination of the other state variables, or the system cannot be solved.

State-space bevat dus meer informatie dan de overdrachtsfunctie. ChatGPT is het hiermee eens.

Samengevat

Voor systemen met dezelfde overdracht in het Laplace domein kunnen twee verschillende gain matrices gevonden worden in de state-space representatie. **Bij het tentamen worden beide methodes goed gerekend.**