Solution

by tsx

gem

- 数轴上有 n 座城市，给定它们的位置 x_i 和宝石种类 p_i。保证 p_i 构成一个排列。
- 你需要找到一条路径，使得能够收集到每个宝石，且总路径长度不超过 m 。
- 在此基础上，求出将宝石按照收集的顺序排序后，由宝石的种类编号构成的序列字典序最小是多少。
- $1 \le n \le 5000$，$1 \le m \le 10^{14}$，$1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le 10^9$

gem 题解

- 要求字典序最小，不难想到对每一次能取的宝石贪心。
- 具体来说，假设取的前 $k-1$ 个宝石均已确定，那么现在从小到大枚举第 k 个取的宝石，判断是否可以取这个宝石，能取则取。
- 判断考虑首先从上一个位置走到这个宝石的位置，接着由于只需判定是否合法，那么最短的走法肯定只有以下两种：
  - 先走到最小的未经过的城市，再走到最大的未经过的城市，顺便访问沿途的城市。
  - 先走到最大的未经过的城市，再走到最小的未经过的城市，顺便访问沿途的城市。
- 时间复杂度 $O(n^2)$。
- 本题存在 $O(n\log n)$ 的解法，大家可以思考一下。

dino

- 有 n 个格子，当小恐龙在第 x 个格子时，玩家可以什么都不做到达第 $x+1$ 个格子，或者进行跳跃到达第 $x+k$ 个格子。
- m 次操作，每次操作首先将第 x_i 个格子放入障碍，之后小恐龙无法经过这个格子（但可以从上面跳过），之后询问从格子 1 到达第 t_i 个格子所需的最少跳跃次数，无解输出`-1`。
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$，$\frac{n}{100} \le k \le n-1$，$1 \le m \le n-1$

dino 题解

- 首先加障碍并不好维护，我们考虑变为删障碍。
- 那么相当于是一张DAG，每次加入一个点和一些边，然后询问 1 号点到某个点的最短路。
- 注意到这题有一个很特殊的数据范围是 $k \geq \frac{n}{100}$，所以 1 号点到每个点的最短路若存在必定不会超过 100。
- 加点时考虑使用类似spfa的手法，每次将一个更新过的点尝试更新其它点，若更新成功则加入队列。
- 那么每个点被更新的次数也不会超过 1 号点到它的最短路长度（每次至少减一），于是直接暴力更新复杂度就是正确的。
- 时间复杂度 $O\left(\frac{n^2}{k}\right)$。

sequence

- 给定一个长为 n 的正整数序列 a。
- 对于每个 $2 \le k \le n$，你需要求出值域区间 $[l, r]$，使得满足 $a_i \in [l, r]$ 的 i 至少连续出现了 k 次，也即存在 $1 \le L \le R \le n,\ R - L + 1 \ge k$，满足 $\forall i \in [L, R],\ a_i \in [l, r]$。
- 在满足条件的同时，要求区间 $[l, r]$ 的长度 $r - l$ 最小，记这个最小值为 c_k。 对于每个 $2 \le k \le n$，输出 c_k 的值。
- 若你的答案与标准答案的相对误差不超过 5%，即视为正确。
- $1 \le n \le 10^5$，$1 \le a_i \le 10^6$

sequence 题解

- 首先直接考虑值域区间 $[l,r]$ 看起来没什么前途，我们转而考虑序列 a 上的区间 $[L,R]$。
- 直接枚举每个区间，算出极差并更新答案，时间复杂度 $O(n^3)$ 或 $O(n^2)$。
- 若数据随机，考虑固定右端点时，每个左端点对应的最大值和最小值都只会期望变化 $O(\log n)$ 次，那么将每个可能的区间更新答案即可，时间复杂度 $O(n\log n)$。
- 精度误差看起来非常有用，但具体如何利用呢？
- 我们枚举一个 c，考虑计算满足 $c_k \geq c$ 的 k 的取值范围。
- 首先 c_k 有单调性，那么取值范围肯定是一个后缀，只需找出合法与不合法的分界线即可。

sequence 题解

- 在序列上，对于每个右端点 R，都找到一个最靠右的左端点 L 满足 $[L,R]$ 的极差≥ c，那么就可以用它去更新答案。这可以通过双指针做到 $O(n)$。
- 由于精度误差的存在，只要取 $c = 1.06^i$，最终答案的精度误差就肯定符合要求。
- 时间复杂度 $O(n\log_{1+\varepsilon} V)$，其中 V 为值域，ε 为精度误差。

count

- 有一个 n 行 m 列的棋盘，最开始棋盘上放有 k 个多米诺骨牌。
- 一个多米诺骨牌是一个 1×2 的矩形，在棋盘上可以横着摆放也可以竖着摆放。
- 小 T 认为一个在棋盘上摆放多米诺骨牌的局面是好的，需要满足以下条件：
  - 多米诺骨牌之间不能重叠；
  - 2. 每行每列不能有某两个格子被不同的多米诺骨牌覆盖，也就是说，每行每列要么没有格子被覆盖，要么恰好有一个格子覆盖，要么有两个连续的格子被同一块多米诺骨牌覆盖。
- 保证开始时摆放多米诺骨牌的局面是好的，小 T 想知道，有多少种放入额外若干块骨牌（可以为 0 块）的方案使得局面依然是好的。
- 答案对 998244353 取模。
- $1 \leq n, m \leq 4000$，$0 \leq k \leq 2500$

count 题解

- 首先这是一个二维问题，感觉无从下手。
- 考虑将其转化为一维问题，注意到行和列某种意义上是独立的，所以我们可以取出行的某些长度为 1,2 的区间，再取出列的长度为 1,2 的区间，最后将它们合并，得到一组解。
- 独立的来源在于判断是否合法的时候实际上可以行和列分开来判断。
- 长度为 1 的区间是很好拿出来的，只需要dp出长度为 2 的区间。
- 现在相当于一个长为 n 的序列，每个元素是障碍或空地，对每个 i，询问恰好选出 i 个长度为 2 的区间且没有碰到障碍的方案数。
- 设 $f_{i,j}$ 表示只考虑前 i 个位置，目前选出 j 个区间的方案数，容易转移。
- 最后直接枚举有多少个横着的骨牌，多少个竖着的骨牌，将行和列的答案拼起来即可。