Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

30 мая 2023 г.

1 Экстремум функций нескольких переменных

Задача 1.

Исследовать на экстремум функцию $f = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Решение. Локальным экстремумом функции является точка локального максимума или локального минимума.

Точка (x_0, y_0, z_0) - называется локальным максимумом (минимума), если в окрестности этой точки значение функции $f(x, y, z)$ меньше (больше), чем значение функции в данной точке $f(x_0, y_0, z_0)$.

Если функция является дважды дифференцируемой, то справедливо разложение по формуле Тейлора

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = df(x_0, y_0, z_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0, z_0)}{2!} + o(\rho^2).$$

Вспомнив, что необходимым условием наличия экстремума является равенство нулю частных производных первого порядка, разложение по формуле Тейлора в окрестности точки экстремума примет вид

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\Delta z)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\Delta z \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z\right) + o(\rho^2).$$

Приведём данную квадратичную форму к каноническому виду.

$$f''_{xx}\left((\Delta x)^2 + 2\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta x \Delta y + 2\frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta x \Delta z\right) + f''_{yy}(\Delta y)^2 + f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left((\Delta x)^2 + 2\Delta x\left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right) + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)^2\right) + f''_{yy}(\Delta y)^2 + f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 - f''_{xx}\left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)^2 + f''_{yy}(\Delta y)^2 +$$
$$+ f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 - f''_{xx}\left(\left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\right)^2(\Delta y)^2 + 2\frac{f''_{xy}f''_{xz}}{(f''_{xx})^2}\Delta y \Delta z + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\right)^2(\Delta z)^2\right) + f''_{yy}(\Delta y)^2 + f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + (\Delta y)^2\left(f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}\right) +$$

$$+2\Delta z\Delta y\left(f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}\right) + (\Delta z)^2\left(f''_{zz} - \frac{(f''_{xz})^2}{f''_{xx}}\right) =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \left(f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}\right)\left((\Delta y)^2 + 2\Delta z\Delta y\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}} +\right.$$

$$+(\Delta z)^2\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)^2$$

$$\left.-(\Delta z)^2\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)^2\right) + (\Delta z)^2\left(f''_{zz} - \frac{(f''_{xz})^2}{f''_{xx}}\right) =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \frac{1}{f''_{xx}}\left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\left(\Delta y + \Delta z\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)\right)^2 +$$

$$+(\Delta z)^2\left(f''_{zz} - \frac{(f''_{xz})^2}{f''_{xx}} - \frac{\left(f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}\right)^2}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right) =$$

$$= M_1\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \frac{M_2}{M_1}\left(\Delta y + \Delta z\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\left(\left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\left(f''_{zz}f''_{xx} - (f''_{xz})^2\right) - \left(f''_{yz}f''_{xx} - f''_{xy}f''_{xz}\right)^2\right)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\alpha^2 + \frac{M_2}{M_1}\beta^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\Big(\left(f''_{yy}f''_{zz}(f''_{xx})^2 - f''_{zz}f''_{xx}(f''_{xy})^2 - f''_{yy}f''_{xx}(f''_{xz})^2 + (f''_{xz})^2(f''_{xy})^2\right) -$$

$$-\left(f''_{yz}f''_{xx}\right)^2 + 2f''_{yz}f''_{xx}f''_{xy}f''_{xz} - \left(f''_{xy}f''_{xz}\right)^2\Big)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \frac{M_2}{M_1}\left(\Delta y + \Delta z\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\left(\left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\left(f''_{zz}f''_{xx} - (f''_{xz})^2\right) - \left(f''_{yz}f''_{xx} - f''_{xy}f''_{xz}\right)^2\right)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\alpha^2 + \frac{M_2}{M_1}\beta^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\left(M_1\left[f''_{xx}(f''_{yy}f''_{zz} - (f''_{yz})^2) - f''_{xy}(f''_{xy}f''_{zz} - f''_{xz}f''_{zy}) + f''_{xz}(f''_{xy}f''_{zy} - f''_{yy}f''_{zx})\right]\right)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\alpha^2 + \frac{M_2}{M_1}\beta^2 + \frac{M_3}{M_2}(\Delta z)^2,$$

где M_1, M_2, M_3 главные миноры матрицы частных производных

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}.$$

Несложно увидеть(по построению) что неотрицательность квадратичной формы влечёт за собой неотрицательность главных миноров. Наборот это также работает. Пусть к примеру $M_1 < 0$, тогда, положив $\beta = 0, \Delta z = 0$ мы получим противоречие. За возможность выбрать так переменные можно аргументировать тем, что $\beta = 0, \Delta z = 0$ даёт лишь два линейных уравнения на три исходные переменные $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, поэтому будет существовать бесконечное число решение данной системы, параметризуемые переменной Δx. Критерии неположительности квадратичной формы $d^2 f$ можно получить из критерия неотрицательности квадратичной формы $-d^2 f$.

Точка $(x_0, y_0 z_0)$ будет точкой минимума (квадратичная форма второго дифференциала неотрицательна), если частные производные в данной точке удовлетворяют условиям:

$$M_1 = f''_{xx} > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{yy} f''_{xx} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = f''_{xx}(f''_{yy} f''_{zz} - (f''_{yz})^2) - f''_{xy}(f''_{xy} f''_{zz} - f''_{xz} f''_{zy}) + f''_{xz}(f''_{xy} f''_{zy} - f''_{yy} f''_{zx}) > 0.$$

Точка $(x_0, y_0 z_0)$ будет точкой максимума (квадратичная форма второго дифференциала неположительна), если частные производные в данной точке удовлетворяют условиям:

$$M_1 = f''_{xx} < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{yy} f''_{xx} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = f''_{xx}(f''_{yy} f''_{zz} - (f''_{yz})^2) - f''_{xy}(f''_{xy} f''_{zz} - f''_{xz} f''_{zy}) + f''_{xz}(f''_{xy} f''_{zy} - f''_{yy} f''_{zx}) < 0.$$

Воспользуемся этим для исследования предложенной функции.

Найдем все точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль.

$$\begin{cases} 6x^2yz - 2x = 0 \\ 2x^3z - 2y = 0 \\ 2x^3y - 2z = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2yz = x \\ x^3z = y \\ x^3y = z \end{cases},$$

что, при $x \neq 0$ эквивалентно

$$\begin{cases} xyz = \frac{1}{3} \\ z^2 = y^2 \\ \left[\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ x^3 = -1 \end{array} \right. \end{cases}.$$

Откуда получается пять решений $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $A_3 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $A_4 = \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $A_5 = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Получаем

$$f''_{xx} = 12xyz - 2, \ f''_{yy} = -2, \ f''_{zz} = -2,$$

$$f''_{xy} = 6x^2z, \ f''_{xz} = 6x^2y, \ f''_{yz} = 2x^3$$

Для A_1 получим

$$f''_{xx} = 12xyz - 2\big|_{A_1} = -2, \ f''_{yy} = -2, \ f''_{zz} = -2,$$

$$f''_{xy} = 6x^2z\big|_{A_1} = 0, \ f''_{xz} = 6x^2y\big|_{A_1} = 0, \ f''_{yz} = 2x^3\big|_{A_1} = 0,$$

$$M_1 = -2 < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

и $d^2 f = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2$ – отрицательно определённая квадратичная форма, следовательно локальный максимум.

Для A_2 устанавливаем

$$f''_{xx} = 12xyz - 2\big|_{A_2} = 2,\ f''_{yy} = -2,\ f''_{zz} = -2,$$

$$f''_{xy} = 6x^2 z\big|_{A_2} = 2\sqrt{3},\ f''_{xz} = 6x^2 y\big|_{A_2} = 2\sqrt{3},\ f''_{yz} = 2x^3\big|_{A_2} = 2,$$

$$M_1 = 2 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 48 > 0.$$

Получается, что второй дифференциал в данной точке принимает значения разных знаков, следовательно точка не является точкой экстремума. Данная точка является седловой.

Аналогично проверяется, что оставшиеся точки также являются седловыми и точка $(0,0,0)$ единственная точка экстремума – точка максимума, $f(0,0,0) = 0$. □

Задача 2.

исследовать на экстремум функцию $f = (x-y)^2 + (y^3-1)^4 - 1$.

Решение. Выпишем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y) + 12(y^3-1)^3 y^2 = 0 \end{cases},$$

откуда получим два решения $(0,0)$ $(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 24y(y^3-1)^3 + 108y^4(y^3-1)^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

Для точки $(1,1)$ получаем

$$M_1 = 2 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Для точки $(0,0)$ получаем

$$M_1 = 2 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Поскольку определитель обратился в нуль, необходимо более подробное исследование поведения функции в окрестностях точек $(0,0)$, $(1,1)$.

$$f(1,1) = -1,$$

$$f(0,0) = 0,$$

Стоит также отметить, что в окрестности точки $(1,1)$ $f(x,y) > -1$, поскольку прибавляются положительные числа, следовательно $(1,1)$ – точка минимума. в окрестности же точки $(0,0)$ $f(x,0) > 0$, а для $0 < y < 1$ $f(y,y) < 0$, следовательно данная точка седловая.

□

Задача 3.

Исследовать на экстремум функцию:

1. $f = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|$.
2. $f = xy + yz + xz$.
3. $f = \ln xy - z(x-y) - x^2 - y^2 + 2xy - y$.
4. $f = x^3 + y^3 + 3xy$.
5. $f = xy^2(12 - x - y)$.

Задача 4.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ на множестве $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$.

Решение. Для исследования на экстремум функции на множестве необходимо:

1. Найти все точки экстремума и выбрать те, которые лежат внутри множества.
2. Исследовать поведение функции на границе множества, если граница входит в множество.

Для поиска точек экстремума выпишем систему

$$\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8} = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4} = 0 \end{cases} = \begin{cases} y\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{y}{8}\right) = 0 \\ x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6} - \frac{y}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

Соответственно получаем решения $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,0)$. $\left(1, \frac{4}{3}\right)$. Все они принадлежат рассматриваемому множеству. Стоит также обратить внимание, что кроме последней все точки лежат на границе рассматриваемого множества, поэтому их проверку можно отложить до проверки значений функции на границе.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y}{3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{4}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$$

В точке $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ $M_1 = -\frac{4}{9} < 0$, $M_2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} > 0$ – точка локального максимума, $f\left(1, \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

Рассмотрим поведение функции на границах. В данном случае граница множество – три прямые. При $y = 0$ получим $f(x, 0) = 0$, $x \in [0, 3]$. Аналогично при $x = 0$ $f(0, y) = 0$. И наконец при $y = 4 - \frac{4}{3}x$ получим $f\left(x, 4 - \frac{4}{3}x\right) = \frac{x}{2}\left(4 - \frac{4}{3}x\right) - \frac{x^2}{6}\left(4 - \frac{4}{3}x\right) - \frac{x}{8}\left(4 - \frac{4}{3}x\right)^2 = 0$.

Из этого заключаем, что в точке $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ достигается максимальное значение $\frac{2}{9}$ на множестве, а минимальное значение 0 достигается на границе множества. □

Задача 5.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции f на множестве:

1. $f = 2x^2 - xy + y^2$, $|x| + |y| \leq 1$
2. $f = x + |x - y|$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$
3. $f = x^2 + y^2 - 4x$, $-2 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 3$.
4. $f = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$, $x + y \leq 2\pi$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. $f = (x-6)^2 + (y+8)^2$, $x^2 + y^2 \leq 25$.
6. $f = 3 + 2xy$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.
