

Математический анализ, 4 модуль 2022/23 уч. год  
Группы СКБ 221- СКБ 223  
ВОПРОСНИК “Несобственные интегралы”

1. Дать определение несобственного интеграла 1-го рода  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ , его сходимости. Рассмотреть примеры  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ,  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ ,  $\int_0^{\infty} \sin x dx$ .

2. Для несобственного интеграла 1-го рода от неотрицательной функции 1) объяснить его геометрический смысл; 2) вывести условие, необходимое и достаточное для сходимости. Объяснить смысл записи  $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$ .

3. Проверить свойство линейности несобственного интеграла 1-го рода. Показать, что интегралы  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  и  $\int_{a'}^{\infty} f(x)dx$  (где  $a < a'$ ,  $f(x)$  интегрируема по Риману на каждом отрезке  $[a, b]$ ) сходятся или расходятся одновременно.

4. Доказать теоремы сравнения для несобственных интегралов 1-го рода от неотрицательных функций. Привести примеры. Вывести следствие с использованием интеграла  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ .

5. Доказать, что если  $\int_a^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ , то  $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$  сходится. Дать определения абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла 1-го рода.

6. Вывести признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов  $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ .

7. Исследовать интеграл  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  на абсолютную и условную сходимость при различных значениях  $p$ .

8. Дать определение несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ . Сформулировать основные теоремы, привести примеры. Дать определение интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ . Привести пример.

9. Дать определение несобственного интеграла 2-го рода  $\int_a^b f(x)dx$ . Рассмотреть примеры  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ .

10. Дать определение несобственного интеграла 2-го рода  $\int_a^b f(x)dx$  в случаях,

когда  $f(x)$  является неограниченной функцией в  $\dot{O}(c)$ , где  $a < c < b$ . Привести пример.

11. Сформулировать теоремы о сравнении несобственных интегралов 2-го рода от неотрицательных функций. Вывести следствие с использованием интегралов

вида  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ .

12. Дать определения и привести примеры абсолютно и условно сходящихся несобственных интегралов 2-го рода.

13. Дать определение интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x-a|^\alpha |x-b|^\beta}$  и исследовать его на

сходимость.