# Документ для подготовки к тесту по материалу первого курса за 2024 г.

Куркотов Александр Сергеевич, СКБ-222

askurkotov@edu.hse.ru

TG: @one_true_cat

# Содержание

# 1. Свойства числовых последовательностей

## 1.1. Определение

**Определение 1.1.1**: Пусть задано множество $X = \mathbb{N}$ или $X = \mathbb{Z}_0$, функция $f(n), n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{Z}_0)$. Такая функция называется последовательностью $f(n) = a_n$, обозначается

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Если $a_n$ — число, то последовательность называется *числовой*

## 1.2. Свойства

**Определение 1.2.1**: Последовательность $\{a_n\}$ называется:

1. возрастающей, если $a_n < a_{n+1} \quad \forall n$
2. неубывающей, если $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$
3. убывающей, если $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$
4. невозрастающей, если $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$

В приведенных случаях последовательность называется монотонной

**Теорема 1.2.1**: Последовательность, имеющая конечный предел, ограничена

**Теорема 1.2.2**: Последовательность к $a$ тогда и только тогда, когда все её подпоследовательности сходятся к $a$

# 2. Классификация точек разрыва

**Определение 2.1**: Точка называется точкой разрыва, если функция в ней не непрерывна

## 2.1. Точки разрыва первого рода

**Определение 2.1.1**: Точка нызвается точкой разрыва 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы слева и справа от точки

**Определение 2.1.2**: Точка $a$ называется точкой *устранимого разрыва,* если $f(a-0) = f(a+0)$

**Определение 2.1.3**: Точка $a$ называется *точкой скачка*, если $f(a-0) \neq f(a+0)$. Величина $f(a+0) - f(a-0)$ называется величиной скачка

### 2.2. Точки разрыва второго рода

**Определение 2.2.1**: Точка называется точкой разрыва 2-го рода, если предел слева или справа от неё бесконечны или не существуют

**Определение 2.2.2**: Если предел слева или справа (или оба) бесконечны, то точка называется *точкой бесконечного разрыва*

## 3. Бесконечно малые и большие функции

**Определение 3.1**: Функция $f$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если её предел при стремлении к $x_0$ равен нулю

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

**Теорема 3.1**: Сумма, разность и произведение бесконечно малых функций — бесконечно малая функция

**Определение 3.2**: Функция $f$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если предел её модуля бесконечен при стремлении к $x_0$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

## 4. Формула тейлора

**Теорема 4.1**: Формула тейлора для функции, дифференцируемой $n$ раз имеет вид

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

На всякий случай лучше повторить, как остаточные члены выражаются (если попросят оценить)

**Теорема 4.2**: Любую функцию можно представить с *остаточным членом в форме Лагранжа* как

$$R_n(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon)(x - x_0)^{n+1}$$

**Теорема 4.3**: Любую функцию можно представить с *остаточным членом в форме Пеано* как

$$R_n(x_0) = o(|x - x_0|^n)$$

Ну и родной Маклорен

**Теорема 4.4**: Можно представить любую функцию по формуле Маклорена как формулу тейлора с центром в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + R_n(x)$$

# 5. Неопределенный интеграл

## 5.1. Таблица интегралов

| Интеграл | Значение |
|---|---|
| $\int 0 \ \mathrm{d}x$ | $C$ |
| $\int \mathrm{d}x$ | $x + C$ |
| $\int x^n \ \mathrm{d}x$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\int \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x$ | $\ln\|x\| + C$ |
| $\int a^x \ \mathrm{d}x$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\int e^{ax} \ \mathrm{d}x$ | $\frac{e^{ax}}{a} + C$ |
| $\int \sin x \ \mathrm{d}x$ | $\cos x + C$ |
| $\int \cos x \ \mathrm{d}x$ | $-\sin x + C$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} \ \mathrm{d}x$ | $\cot x + C$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} \ \mathrm{d}x$ | $\tan x + C$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ \mathrm{d}x$ | $\arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ |
| Высокий логарифм: $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \ \mathrm{d}x$ | $\frac{1}{2a} \ln\| \ \frac{a+x}{a-x} \ \| + C$ |
| Длинный логарифм: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \ \mathrm{d}x$ | $\ln\| \ x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \ \| + C$ |

## 5.2. Интегрирование заменой переменной

Самый простой способ — замена переменной с внесением под дифференциал

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

*Пример*: Чаще всего эту технику удобно применять при наличии вложенных функций

$$\int \sin \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \frac{x}{2} \\ x = 2t \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \sin 2t \cdot 2\mathrm{d}t = -2\cos t + C = -2\cos \frac{x}{2}$$

## 5.3. Интегрирование по частям

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x) \cdot v'(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\mathrm{d}x$$

Другая форма записи

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u$$

*Пример*: Как правило применяется при произведении функций, которые легко интегрировать по отдельности, но не вместе

$$x^{\alpha}\ln x\mathrm{d}x = \int x^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x = x^{\alpha-1} - \int \frac{1}{x}\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x = x^{\alpha-1} - \alpha\int x^{\alpha-2}\mathrm{d}x = x^{\alpha-1} - \alpha\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}$$

Рекомендуется использовать в интегралах следующего вида ($P(x)$ — многочлен):

1. $\int P(x)\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$
2. $\int P(x)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$
3. $\int P(x)\ln x\mathrm{d}x$
4. $\int P(x)e^{x}\mathrm{d}x$

## 5.4. Интегрирование рациональных функций

Функции вида $R(x) = P_1\frac{x}{P_2}(x)$

1. Если дробь неправильная — сокращаем
2. Разбиваем знаменатели на множители разной кратности вида
   - $(Ax+B)^k$
   - $\left(Ax^2+Bx+C\right)^k$
3. Разбиваем дробь как сумму простых дробей с знаменателями в виде корней разной кратности

$$(Ax+B)^k \to \sum_{i=1}^{k}\frac{C_i}{(Ax+B)^i}$$

$$\left(Ax^2+Bx+C\right)^k \to \sum_{i=1}^{k}\frac{C_i}{\left(Ax^2+Bx+C\right)^i}$$

4. Находим коэффициенты
5. Вычисляем интегралы от простых дробей

- Случай №1:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

- Случай №2:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n} = -\frac{1}{A}\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

- Случай №3:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

  Берем производную знаменателя, выносим её из числителя как множитель и получаем сумму дробей с числителями производная и константа. Та, что с производной уходит в логарифм (внос дифференциала Раздел 5.2), а та, что с константой — в арктангенс

- Случай №4:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \mathrm{d}x$$

Аналогично случаю №3 выносим производную из подстепенного многочлена, раскладываем на сумму дробей с производной и константой. Та, что с производной уходит в логарифм (аналогично случаю №3), а та, что с производной будет раскручиваться рекурсивно. Нужно вынести полный квадрат из знаменателя, сделать замену вида $t = x + \frac{p}{2}$, и можно будет задать интеграл $I_n$ через $I_{n-1}$

## 5.5. Интегралы, сводящиеся к рациональным

Некоторые интегралы можно решать как в прошлом пункте, произведя замену

### 5.5.1. Экспонента

$$\int R(e^{\alpha x}) \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = e^{\alpha x} \\ x = \frac{1}{\alpha} \ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha t} \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int R(t) \cdot \frac{1}{\alpha t} \mathrm{d}t$$

### 5.5.2. Корень рациональной функции

$R(x, y)$ Обозначение для рациональной функции, содержащей члены $x$, $y$, $xy$

Найдем интеграл вида

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$$

Заменяем

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$$

Тогда

$$x = \frac{-\delta t^n + \beta}{\gamma t^n - \alpha} = R_1(t) \text{ - рациональная функция}$$

Поскольку умеем интегрировать рациональные функции, получим

$$\mathrm{d}x = R_2(t) \mathrm{d}t$$

Значит изначальный интеграл принимает вид

$$\int R(R_1(t), t) \cdot R_2(t) \mathrm{d}t$$

Дальше интегрируем как рациональную функцию

## 6. Множенство определения функции нескольких переменных

> **Error**
>
> Без понятия, что тут. В лекциях ничего такого вроде нет особо. Удачи.

# 7. Производная функции, неявно заданной уравнением $F(x, y) = 0$

> ⚠️ **Warning**
>
> В оригинальном документе от Кузьминой написано $f(x, y, z) = 0$ вместо $F(x, y) = 0$, но «это мы не проходили», все записи у нас про второй случай, так что надеемся, что она ошиблась

Как правило задача ставится таким образом: есть некая функция $y = f(x)$ неявно заданная через $F(x, y) = 0$

*Пример*: Такое было на семинарах

$$F(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2xy - 3xy^2 = 0$$

1. Найдите первую производную $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
2. Найдите вторую производную $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

Общая схема решения следующая:

1. Поскольку функция константно равна нулю, $\mathrm{d}F = 0$. Записываем выражение для дифференциала неявно заданной функции

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

Отсюда можно выразить, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Получим формулу №1

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

2. Аналогично делаем для дифференциала второго порядка, выражение:

$$\mathrm{d}^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 = 0$$

Можно выразить $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. Получим формулу №2

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}}$$

Заметим, что в уравнении фигурирует посчитанная ранее первая производная

**Задача 1**: Если кому нужно попрактиковаться

$$F(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2xy - 3xy^2 = 0$$

1. Найдите первую производную $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
2. Найдите вторую производную $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

# 8. Экстремум функции нескольких переменных

## 8.1. Локальный экстремум

Дана некая функция от нескольких переменных (я буду рассматривать $f(x, y, z)$), надо найти её локальные экстремумы

Для этого задания ради краткости будем записывать частные производные через штрих: $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$

1. Для начала нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$$

   Получим набор точек, которые могут быть экстремумами. Теперь необходимо исключить точки, в которых функция не дифференцируема и «точки седла»

2. Дальше составляем матрицу следующего вида

$$\begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{pmatrix}$$

   Выделяем её миноры (определители меньших матриц) начиная из левого верхнего угла, выбирая подматрицу 1 на 1, 2 на 2 и т.п., в нашем случае обозначим их $M_1$, $M_2$, $M_3$.

3. Чтобы посчитать значение минора в точке — надо подставить $x$, $y$, $z$ точки в производные, входящие в минор. После подсчета — посмотрим на их знаки

| Минимум | Максимум |
|---|---|
| • $M_1 > 0$ | • $M_1 < 0$ |
| • $M_2 > 0$ | • $M_2 > 0$ |
| • $M_3 > 0$ | • $M_3 < 0$ |

   Т.е. если все миноры больше нуля — точка минимум. Если знаки миноров чередуются, начиная с отрицательного — точка максимум. В противном случае точка не является экстремумом

**Задача 2**: Если кто хочет потренироваться, найти локальные экстремумы функции

$$f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$$

## 8.2. Условный экстремум

Дана функция $f(x, y)$ и *уравнение связи* $g(x, y) = 0$. Задача — найти условные экстремумы функции на кривой, задаваемой *уравнением связи.*

1. Для начала составляем функцию, называемую *функцией Лагранжа*

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

   Точками условного экстремума могут быть только точки стационарности этой функции, так что ищем все точки, для которых верны уравнения

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0 \\ \Phi'_y = 0 \\ \Phi'_\lambda = 0 \end{cases}$$

2. После этого надо определить знак $\mathrm{d}^2\Phi$. Это делается через диференциалы $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$, как правило нужно выразить один через другой, а потом $\mathrm{d}^2\Phi$ через него же.

| Минимум | Максимум |
|---|---|
| $\mathrm{d}^2\Phi > 0$ | $\mathrm{d}^2\Phi < 0$ |

   Т.е. если диференциал отрицательный — точка условный максимум, если положительный — условный минимум, в противном случае ни то, ни другое

**Задача 3**: Если кому надо потренироваться, найти условные экстремумы для функции $f(x, y)$ при уравнении связи $g(x, y)$

$$\begin{cases} f(x, y) = 2x + 3y \\ 2x^2 + 2y^2 - 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

## 8.3. Наибольшее/наименьшее значение на области

Дана функция $f(x, y)$ и некоторая область $D$, как правило заданная неравенством. Нужно найти наибольшее/наименьшее значение функции на этой области

Экстремум может находиться либо внутри области, в точке стационарности, либо на границе этой области в условном экстремуме. Решать такие задачи следует так:

1. Находим все точки стационарности внутри области, решая систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

   Во всех точках, удовлетворяющих системе, находим значения функций

2. Находим все точки стационарности на границе, решая систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

   Где $g(x, y) = 0$ — уравнение границы области $D$

3. Выбираем наименьшее/наибольшее значение функции среди всех найденных точек

**Задача 4**: Если кому надо потренироваться, найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$ на области $D = \{|x| + |y| \leq 1\}$