ВОПРОСНИК 1 «Формула Тейлора» + «Интегралы»
Математический анализ, группы СКБ 221 - СКБ 223

1. Вывести формулу Тейлора для многочлена .

2. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Получить оценку погрешности, возникающей при замене функции ее многочленом Тейлора.

3. Доказать, что если

$$f \in C^{\infty}(O(x_0)) \text{ и } \exists M : |f^{(n)}(x)| \le M(\forall x \in (O(x_0); \forall n),$$

то остаточный член в формуле Тейлора $R_n(x) \to 0 \ (n \to \infty)$.

4. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

5. Вывести формулу Тейлора для функции sin x, cos x, e^x, ln $(1 + x)$, $(1+x)^{\alpha}$; оценить в каждом случае остаточный член.

6. Дать определение неопределенного интеграла. Доказать теорему об общем виде первообразной и свойство линейности неопределенного интеграла.

7. Доказать теорему о замене переменной под знаком неопределенного интеграла. Объяснить на примере метод подведения под знак дифференциала.

8. Доказать теорему о методе интегрирования по частям. Взять интегралы $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx,\ \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$.

9. Рассказать об интегрировании простейших дробей I, II, III и IV типов.

10. Рассказать, как берутся интегралы $\int R(e^{\alpha x})dx,\ \alpha \ne 0$ и $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/n}\right)dx$.

11. Рассказать об интегрировании тригонометрических функций. Привести примеры.

12. Дать определение определенного интеграла и объяснить его геометрический смысл.

13. Доказать необходимое условие интегрируемости. Привести пример того, что доказанное необходимое условие не является достаточным.

14. Дать определение колебания функции на отрезке и сформулировать критерий интегрируемости.

15. Доказать, что если функция непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

16. Доказать, что если функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

17. Доказать, что если функция монотонна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$. Построить интегрируемую функцию с бесконечным числом точек разрыва.

18. Доказать свойство линейности определенного интеграла.

19. Доказать свойство аддитивности определенного интеграла. Сформулировать обобщенное свойство аддитивности.

20. Доказать теорему об интегралах от функций, отличающихся только в конечном числе точек.

21. Доказать теорему об интегрировании неравенств. Вывести 2 следствия из нее.

22. Доказать теорему об интеграле от модуля функции.

23. Доказать теорему об интеграле с переменным верхним пределом и сформулировать следствие из нее.

24. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

25. Доказать теорему о среднем.

26. Доказать теорему о замене переменной в определенном интеграле.

27. Вывести формулы для вычисления площади с помощью определенного интеграла.
28. Вывести формулы для вычисления длины дуги кривой а) $y = f(x)$, $x \in [a, b]$; б) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le \varphi \le \beta$; в) $r = r(\varphi)$, $-\pi < \alpha \le \varphi \le \beta < \pi$

29. Вывести формулы для вычисления объема тела вращения.
30. Вывести формулу трапеций. Записать оценку погрешности.