Гайд по сходимостям числовых рядов

Ниже перечислены основные методы решения задач.

Необходимый признак сходимости

Если последовательность сходится, её общий член должен сходится к 0.

Применение: Если мы видим, что общий член ряда больше единицы в пределе, пишем, что ряд расходится.

Предельный признак сходимости

Если предел отношений исходного ряда u_n с расходимым рядом v_n равен конечному числу, отличному от нуля, то ряд U_n расходится.

Если предел отношений исходного ряда u_n со сходимым рядом v_n равен конечному числу, отличному от нуля, то ряд v_n сходится.

Применение: Эквивалентные ряды сходятся и расходятся одновременно $\Rightarrow$ Можем использовать эквивалентности в пределах.

Вот основные эквивалентности:

$1) \sin x \sim x, x \to 0$

$2) tgx \sim x, x \to 0$

$3) \arcsin x \sim x, x \to 0$

$4) arctgx \sim x, x \to 0$

$5) 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, x \to 0$

$6) e^x - 1 \sim x, x \to 0$

$7) a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, x \to 0$

$8) \ln(1+x) \sim x, x \to 0$

$9) \log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e, x \to 0$

$10) (1+x)^{k-1} \sim kx, k > 0, x \to 0$

$11) \sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}, x \to 0$

Признак Даламбера

Если существует $\lim_{n\to\infty} A_n = r$, то:

- если r < 1, то ряд абсолютно сходится;
- если r > 1, то ряд расходится;
- если r $= 1$, то данный признак не позволяет сделать определённый вывод о сходимости ряда.

Примечание: Хорошо работает с многочленами и показательными функциями (т.е там, где легко посчитать отношение членов последовательности при стремлении к бесконечности).

Признак Лейбница

Пусть для знакочередующегося ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ верно:

- Последовательность $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера $(n > N)$ монотонно убывает: $a_{n+1} < a_{n_i}$
- $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$

Тогда такой ряд сходится.

Примечание: можно попробовать, когда у нас есть знакопеременный ряд.

Интегральный признак Коши

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant 1$, неотрицательна, монотонно убывает и $f(n) = a_n$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int\limits_1^{t} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно[9].

Радикальный признак Коши

Если существует $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, то:

- если $r < 1$, то ряд сходится, причём абсолютно;
- если $r > 1$, то ряд расходится;
- если $r = 1$, то данный признак не позволяет сделать определённый вывод о сходимости ряда[15].

Важные идеи

Дополнительные штуки(+идеи), которые могут помочь

1. Гармонический ряд - это ряд вида $\frac{1}{n}$. Он расходится. С ним мы сравниваем все остальные ряды. Если степень в знаменателе больше 1 $\rightarrow$ Ряд сходится, иначе расходится
2. Если в ряду мы работает с выражениями в разных степенях, имеет смысл перейти к замене вида: $t = e^{\log t}$