# Содержание

# 1. Сходимость интегралов

## 1.1. Теория

### 1.1.1. Предельная теорема сравнения

Пусть $f(x) > 0, g(x) > 0 (x \geq a), f, g \in R[\alpha, \varepsilon]$ $\forall \varepsilon > \alpha$ и $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$

Тогда если $f(x)$ сходится, то и $g(x)$ сходится. Соответственно если один расходится, то и другой тоже.

### 1.1.2. Несобственные интегралы 1-го рода

Интегралы вида:

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty}, \int\limits_{-\infty}^{\alpha}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty}$$

**Базовые методы решения** $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$**:**

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow$ интеграл расходится
2. Сравнение с другими интегралами:

$0 \leq f(x) \leq g(x)$

Если $f(x)$ расходится, то и $g(x)$ расходится

Если $g(x)$ сходится, то и $f(x)$ сходится

**Эталонные интегралы:**

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} : \begin{cases} p > 1 \Leftrightarrow \text{сходится} \\ p \leq 1 \Leftrightarrow \text{расходится} \end{cases}$
   P.s. Нижний предел может отличаться от единицы, однако единица красивее всего
   $$\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \to +\infty} (\ln|x|) \Big|_{\alpha}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +\infty} (\ln(\varepsilon) - \ln(\alpha)) = +\infty - \ln(\alpha) = +\infty - \mathrm{const} = +\infty$$
2. $\int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} : \begin{cases} p > 1 \Leftrightarrow \text{расходится} \\ p \leq 1 \Leftrightarrow \text{сходится} \end{cases}$
3. $\int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} : \begin{cases} p > 1 \Leftrightarrow \text{расходится} \\ p \leq 1 \Leftrightarrow \text{сходится} \end{cases}$

### 1.1.3. Несобственные интегралы 2-го рода

Интегралы, терпящие разрыв второго рода, к примеру, в точке $\beta$: $\int\limits_{\alpha}^{\beta}$

**Базовые методы решения:**

1. $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) \neq 0 \Rightarrow$ интеграл расходится
2. $0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow$ такие же условия, как и в первом роде

## 1.2. Примеры

### 1.2.1. Задача 1

Дано:

$$\int_{1}^{+\infty} \sqrt{1 - x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)}$$

Применим Тейлора для $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$:

$$\int_{1}^{+\infty} \sqrt{1 - x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)} = \int_{1}^{+\infty} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)} = \int_{1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln(x)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \ln(x) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{matrix} \right| = \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Степень знаменателя $p = 1$, каждый интеграл в сумме расходится и расходятся не как $-\infty$ и $+\infty$, а оба $+\infty$, то значит интеграл $\int_{1}^{+\infty} \sqrt{1 - x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)}$ **<u>расходится.</u>**

### 1.2.2. Задача 2

$$\int_{5}^{+\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)}$$

Применим Тейлора для $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$:

$$\int_{5}^{+\infty} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)} = \int_{5}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{5}^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)} = \left| \begin{matrix} t = \ln(x) \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{matrix} \right| = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{\ln(5)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Степень знаменателя $p = \ln(5) > \ln(e) = 1$, значит интеграл $\int_{5}^{+\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^2(x)}$ **<u>сходится.</u>**

### 1.2.3. Задача 3

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \, \mathrm{d}x$$

Сделаем замену, чтобы легализовать дальнейшие действия:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x - 2\pi \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(t)}} \, \mathrm{d}t = -\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(t)}} \, \mathrm{d}t$$

Применим Тейлора для $\cos(t)$ при $t \to 0$:

$$-\int_{0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)}} \, \mathrm{d}t = -\sqrt{2} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$$

Степень знаменателя $p = 1$, значит интеграл $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$ **<u>расходится.</u>**

### 1.2.4. Задача 4

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{e^x - e}\,\mathrm{d}x$$

0) Узрим его красоту:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{e^x - e}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{e(e^{x-1}-1)}\,\mathrm{d}x$$

1) Сделаем замену:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{e(e^{x-1}-1)}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_{-1}^0 \frac{\sqrt[3]{t}}{e(e^t-1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} \cdot \int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{t}}{e^t-1}\,\mathrm{d}x$$

2) Применим Тейлора для $e^t$ при $t \to 0$:

$$-\frac{1}{e} \cdot \int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{t}}{(1+t)-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} \cdot \int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{t}}{t}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} \cdot \int\limits_0^1 \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$$

Степень знаменателя $p = \frac{2}{3} < 1$, значит интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{e^x-e}\,\mathrm{d}x$ **<u>сходится</u>**.

### 1.2.5. Задача 5

$$\int\limits_1^5 \frac{1}{x^5 + \sqrt{x} - 2}\,\mathrm{d}x$$

1) Сделаем хитрое:

$$\int\limits_1^5 \frac{1}{(x^5-1) + (\sqrt{x}-1)}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int\limits_0^4 \frac{1}{\left((t+1)^5 - 1\right) + \left((t+1)^{\frac{1}{2}} - 1\right)}\,\mathrm{d}t$$

2) Применим Тейлора для $(t+1)^\alpha$ при $t \to 0$:

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{((1+5t)-1) + \left((1+\frac{1}{2}t)-1\right)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 \frac{1}{((1+5t)-1) + \left((1+\frac{1}{2}t)-1\right)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 \frac{1}{\frac{11}{2}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{11}\int\limits_0^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Степень знаменателя $p = 1$, значит интеграл $\int\limits_1^5 \frac{1}{x^5+\sqrt{x}-2}\,\mathrm{d}x$ **<u>расходится.</u>**

### 1.2.6. Задача 6

$$\int_1^\infty \cos^2\left(\frac{\pi x+1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x$$

1) Сделаем замену:

$$\int_1^\infty \cos^2\left(\frac{\pi x+1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi x+1}{2x+3}, t=\frac{1-\frac{3\pi}{2}}{2x+3}, x=\frac{1-\frac{3}{2}\pi}{2t}-\frac{3}{2} \\ \mathrm{d}x=\frac{\frac{3\pi}{2}-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \frac{\frac{3\pi}{2}-1}{2}\int_{\frac{1-\frac{3}{2}\pi}{5}}^{0} \cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\frac{3\pi}{2}-1}{2}\int_{\frac{1-\frac{3}{2}\pi}{5}}^{0} \sin^2(t)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{2-3\pi}{10}}^{0} \sin^2(t)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2) Применим Тейлора для $\sin(t)$ при $t \to 0$:

$$\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{2-3\pi}{10}}^{0} t^2\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{2-3\pi}{10}}^{0} 1\,\mathrm{d}t$$

Интеграл очевидно сходится, значит $\int_1^\infty \cos^2\left(\frac{\pi x+1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x$ **<u>сходится.</u>**

# 2. Дифференциалы

## 2.1. Главные формулы

### 2.1.1. Дифференциал функции от двух переменных

$$z = f(x, y)$$
$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \mathrm{d}v$$

### 2.1.2. Выражение дифференциала функции от двух переменных в $u$ и $v$:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \mathrm{d}v$$

Далее подставляем все:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}) \cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}) \cdot \mathrm{d}v$$

А значит:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

## 2.2. Конкретные типы задач

**2.2.1.** Найти $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, где $z = f(x, y),\ y = \varphi(x)$

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (f(x, y))'_x \Rightarrow$ Просто берем частную производную по $x$
2. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$

   $$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \Rightarrow \text{выражаем} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \text{где}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$$

**Внимание:** вместо $y$ необязательно подставлять $\varphi(x)$, однако $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ заменять обязательно!

**2.2.2.** Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, где $z = f(x, y),\ x = u^2 v, y = v^3 u$

$$\boxed{\begin{aligned} & z = f(x, y) \\ & \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \\ & \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ & \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

**Возможно, хорошей практикой будет выразить это на контрольной (Раздел 2.1.2)**

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2uv + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v^3 \Leftrightarrow \text{Это и есть ответ}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 3v^2 u$$

**2.2.3.** Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, если $y^3 - 3xy + 2y - x^2 = 0$

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$F(x, y) = y^3 - 3xy + 2y - x^2 = 0 = \mathrm{const} \Rightarrow \forall x, y : \mathrm{d}F = 0$$

$$F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \text{выражаем}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-3y - 2x}{3y^2 - 3x + 2} \Leftarrow \text{Ответ}$$

- $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$:

$\forall x, y : \mathrm{d}F = \mathrm{d}^2F = 0$

$\mathrm{d}^2F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \mathrm{d}y^2 = 0 \Rightarrow$ выражаем $\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} \Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} = \frac{-2 + 2 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{-3y-2x}{3y^2-3x+2}\right)}{-6y} = \frac{3y^2 - 3x + 2 + 9y - 6y}{9y^3 - 9xy + 6y} =$$

$= \dfrac{3y^2 + 3y - 3x + 2}{9y^3 - 9xy + 6y} \Leftarrow$ Ответ

## 2.3. Задача на ряд Тейлора

### 2.3.1. Типовое условие

Для функции $f = x \ln(1 + x + y)$ выписать формулу Тейлора в точке $(x_0, y_0) = (0, 0)$ до $o(\rho^3)$

### 2.3.2. Решение

$f(x, y) = x \ln(1 + x + y)$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(0, 0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^i f}{i!} + o(\rho^3)$$

$\mathrm{d}x = x - x_0, \mathrm{d}y = y - y_0$

**Первый уровень:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(1 + x + y) + \frac{x}{1 + x + y} \Rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1 + x + y} \Rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow 0$$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = \left(\ln(1 + x + y) + \frac{x}{1 + x + y}\right) * (x - 0) + \left(\frac{x}{1 + x + y}\right) * (y - 0) =$$

$= (0 + 0) \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 0$

**Второй уровень:**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\ln(1 + x + y) + \frac{x}{1 + x + y}\right)'_x = \frac{1}{1 + x + y} + \frac{1}{1 + x + y} - \frac{x}{(1 + x + y)^2} = \frac{2 + x + 2y}{(1 + x + y)^2} =$$

$= \dfrac{2}{1^2} = 2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{x}{1 + x + y}\right)'_y = -\frac{x}{(1 + x + y)^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(\frac{x}{1 + x + y}\right)'_x = \frac{1}{1 + x + y} - \frac{x}{(1 + x + y)^2} = \frac{1 + y}{1 + x + y} = 1$$

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \mathrm{d}^2 x + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mathrm{d}^2 y =$$

$$= \frac{2 + x + 2y}{(1 + x + y)^2} \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{1 + y}{1 + x + y} \cdot xy + \frac{1 + y}{1 + x + y} \cdot y^2 = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy$$

**Третий уровень:**

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \left(\frac{2+x+2y}{(1+x+y)^2}\right)'_x = \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{2+x+2y}{2(1+x+y)^3} = 1-1=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \left(\frac{2+x+2y}{(1+x+y)^2}\right)'_y = \frac{2}{(1+x+y)^2} - \frac{2+x+2y}{2(1+x+y)^3} = 2-1=1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \left(-\frac{x}{(1+x+y)^2}\right)'_x = -\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{x}{2(1+x+y)^3} = -1-0=-1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \left(-\frac{x}{(1+x+y)^2}\right)'_y = -\frac{x}{3(1+x+y)^3} = 0$$

$$\mathrm{d}^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\cdot \mathrm{d}^3 x + 3\cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\,\mathrm{d}^2 x\,\mathrm{d}y + 3\cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\,\mathrm{d}^2 y\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\cdot \mathrm{d}^3 y =$$

$$= \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{2+x+2y}{2(1+x+y)^3}\right)\cdot \mathrm{d}^3 x + 3\cdot \left(\frac{2}{(1+x+y)^2} - \frac{2+x+2y}{2(1+x+y)^3}\right)\mathrm{d}^2 x\,\mathrm{d}y +$$

$$+3\cdot\left(-\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{x}{2(1+x+y)^3}\right)\mathrm{d}^2 y\,\mathrm{d}x + \left(-\frac{x}{3(1+x+y)^3}\right)\cdot \mathrm{d}^3 y =$$

$$= 3\cdot 1\cdot x^2 y + 3\cdot(-1)\cdot y^2 x$$

**Финал**:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^i f}{i!} + o(\rho^3) = \frac{\mathrm{d}f}{1} + \frac{\mathrm{d}^2 f}{2} + \frac{\mathrm{d}^3 f}{6} + o(\rho^3) = \frac{0}{1} + \frac{2\cdot x^2 + 2xy}{2} + \frac{3\cdot 1\cdot x^2 y + 3\cdot(-1)\cdot y^2 x}{6} + o(\rho^3) =$$

$$= x^2 + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{xy^2}{2} + o(\rho^3)$$

# 3. Исследование на экстремумы

## 3.1. Задача 1

$F(x, y) = -(x^3 + 4y^3)e^{-x-y}$ - исследовать на точки экстремума

1) Решим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^3 - 3x^2 + 4y^3)e^{-x-y} = 0 \\ (x^3 + 4y^3 - 12y^2)e^{-x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4y^3 = 0 \\ x^3 + 4y^3 - 12y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4y^3 = 0 \\ 12y^2 - 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4y^3 = 0 \\ x = \pm 2y \end{cases}$$

<u>1.1</u> подставим $y = \frac{x}{2}$:

$$x^3 - 3x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + \frac{x^3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

отсюда 2 стационарные точки: (0, 0), (2, 1) - в будущем их проверим на экстремум

<u>1.2</u> подставим $y = -\frac{x}{2}$:

$$x^3 - 3x^2 + 4\left(-\frac{x}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - \frac{x^3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

отсюда новая стационарная точка: (6, −3).

2) Проверим наши точки, составив матрицу Гёссе и посмотрев на её главные угловые миноры:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (3x^2 - 6x - x^3 + 3x^2 - 4y^3)e^{-x-y} = (-x^3 + 6x^2 - 6x - 4y^3)e^{-x-y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -(x^3 - 3x^2 + 4y^3 - 12y^2)e^{-x-y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -(x^3 - 3x^2 + 4y^3 - 12y^2)e^{-x-y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = e^{-x-y} * (-x^3 - 4y^3 + 24y^2 - 24y)$$

<u>2.1</u> точка (0, 0)

подставим в формулы:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$M_1 = 0, M_2 = 0$

Поскольку оба минора 0, то критерий Сильвестра не применим, посмотрим на второй дифференциал:

$$\mathrm{d}^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Поскольку в силу коэффициентов он тождественный 0, то он не вносит знака в квадратичную форму, для определения экстремума нужен больший дифференциал (больше ничего писать не надо)

$F(x, y) = -(x^3 + 4y^3)e^{-x-y}$

$\mathrm{d}F = -((3x^2 + 12y^2)e^{-x-y} - e^{-x-y}(x^3 + 4y^3)) = e^{-x-y}(x^3 + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2)$

$\mathrm{d}^2F = e^{-x-y}(3x^2 + 12y^2 - 6x - 24y - x^3 - 4y^3 + 3x^2 + 12y^2) =$

$= e^{-x-y}(-x^3 - 4y^3 + 6x^2 + 24y^2 - 6x - 24y)$

$\mathrm{d}^3F = e^{-x-y}(3x^2 - 12y^2 + 12x + 48y - 6 - 24 + x^3 + 4y^3 - 6x^2 - 24y^2 + 6x + 24y) =$

$= e^{-x-y}(x^3 + 4y^3 - 3x^2 - 36y^2 + 18x + 72y - 30)$

2.2 точка (2, 1)

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(2, 1) = 0, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(2, 1) = -12e^{-3}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(2, 1) = -12e^{-3}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(2, 1) = -12e^{-3}$

$M_1 = 0, M_2 = 144e^{-6}$

Перевернем матрицу относительно побочной диагонали, тогда $M_1 < 0, M_2 < 0$ - значит это не экстремум

2.3 точка (6, −3)

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(6, -3) = 72e^{-3}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(6, -3) = 72e^{-3}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(6, -3) = 36 \cdot 3e^{-3}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(6, -3) = 5 \cdot 36e^{-3}$

$M_1 > 0, M_2 > 0$

Оба минора положительны - точка минимума. Если бы было $M_1 < 0, M_2 > 0$ , то была бы точка максимума.

# 4. Приложение

## 4.1. Таблица эквивалентностей

При $\alpha \to 0$ :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &\sim \alpha \\
\arcsin(\alpha) &\sim \alpha \\
\mathrm{tg}(\alpha) &\sim \alpha \\
\arctan(\alpha) &\sim \alpha \\
1 - \cos(\alpha) &\sim \frac{\alpha^2}{2} \\
\ln(1+\alpha) &\sim \alpha \\
\log_b(\alpha) &\sim \frac{\alpha}{\ln(b)} \\
b^\alpha - 1 &\sim \alpha \ln(b) \\
e^\alpha - 1 &\sim \alpha \\
(1+\alpha)^m - 1 &\sim m\alpha
\end{aligned}$$

## 4.2. Таблица интегралов

1. $\int 0 \, \mathrm{d}x = C$

2. $\int \mathrm{d}x = x + C$

3. $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

6. $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

7. $\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$

8. $\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + C$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x) + C$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + C$

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$