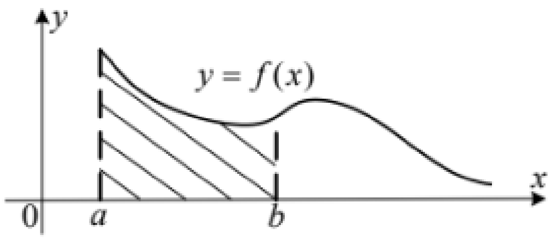
Билет 1. Дать определение несобственного интеграла 1-го рода и его сходимости. Рассмотреть примеры $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$, $\int_a^{\infty} e^{-x}dx$, $\int_a^{\infty} sin(x)dx$.

---

Пусть $f(x)$ определена на полупрямой $x \geq a$, и пусть на произвольном конечном отрезке $[a,b]$ существует $\int_a^b f(x)dx$.




Определение. Несобственным интегралом 1-го рода называется предел

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{определени}{=} \lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

Если в правой части равенства существует конечный предел, то несобственный интеграл сходящийся. Если такой предел не существует – несобственный интеграл расходящийся.

Пример 1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi} e^{-x}dx = \lim_{\xi\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^{\xi} = \lim_{\xi\to+\infty}(-e^{-\xi}+1) = 1.$

Пример 2. $I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

а) $p > 1$

$I = \lim_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^p} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{-p+1}\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^{\xi} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{-p+1}\left(\frac{1}{\xi^{p-1}}-1\right) = \frac{1}{p-1}$ (т.к. $\frac{1}{\xi^{p-1}} \to 0$ при $p > 1$) – несобственный интеграл сходится и равен $\frac{1}{p-1}$.

б) $p=1$

$$I=\lim_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x}=\lim_{\xi\to+\infty}\left(\ln\xi-\underbrace{\ln 1}_{=0}\right)=+\infty$$ – несобственный интеграл расходится.

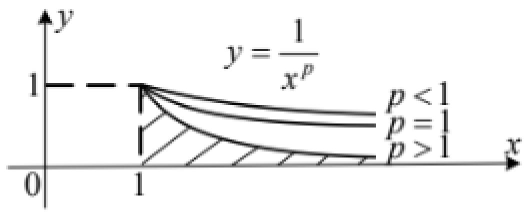
в) $p<1$

$$I=\lim_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^p}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^{\xi}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{-p+1}\left(\underbrace{\xi^{1-p}}_{\substack{\to+\infty\\ т.к.\ p<1}}-1\right)=+\infty$$ –

несобственный интеграл расходится.

Итак, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ при $p>1$ сходится и равен $\frac{1}{p-1}$, при $p\le 1$ расходится.

При $p>1$ функция $y=\frac{1}{x^p}$ настолько быстро убывает, что заштрихованная бесконечная полоса имеет конечную площадь.

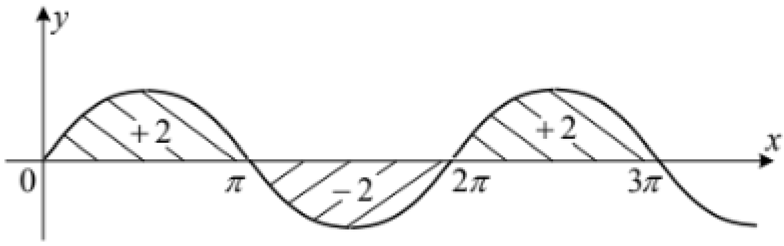



Пример 3. $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx=$

$=\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\sin x\,dx=$

$=\lim_{\xi\to+\infty}(-\cos\xi+\cos 0)$

– предел не существует, т.е. интеграл расходится.




$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2;\ \int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0;\ \int_0^{3\pi}\sin x\,dx=2;\ \int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0;\ \ldots$$

Билет 2. Для несобственного интеграла 1-го рода от неотрицательной функции:

1. Объяснить его геометрический смысл;
2. Вывести условие, необходимое и достаточное для сходимости. Объяснить смысл записи $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$.

---

Запись $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$ означает, что интеграл сходящийся.

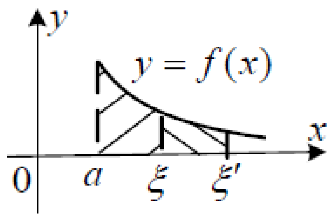
Геометрический смысл

Несобственный интеграл первого рода выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Критерий сходимости

Теорема. Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \geq a$, $f \in R[a,b]$ $(\forall b > a)$. Пусть $F(\xi)$ – интеграл с переменным верхним пределом $\xi$: $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx$. В этом случае $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда функция $F(\xi)$ ограничена на луче $[a,+\infty]$.

$$\left\{ \int_a^{+\infty} f(x)dx - сходится \right\} \Leftrightarrow \{ F(\xi) - ограничена \}.$$




○ Пусть $\xi' > \xi$, тогда

$$F(\xi') = \int_a^{\xi'} f(x)dx$$

$$= \int_a^{\xi} f(x)dx + \underbrace{\int_{\xi}^{\xi'} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}dx}_{\geq 0}$$

$\geq F(\xi) \Rightarrow F(\xi)$ - неубывающая функция.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\xi \to +\infty} F(\xi) = C \Rightarrow 0 \leq F(\xi) \leq C$ – $F(\xi)$ ограничена как неотрицательная неубывающая функция, имеющая конечный предел на бесконечности.

($\Leftarrow$)Пусть $F(\xi)$ ограничена, докажем, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Поскольку $F(\xi)$ не убывает и ограничена, то $\exists \lim\limits_{\xi \to +\infty} F(\xi) \Leftrightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. ●

Билет 3. Проверить свойство линейности несобственного интеграла 1-го рода. Показать, что интегралы $\int_a^\infty f(x)dx$ и $\int_{a`}^\infty f(x)dx$ (где $a < a`$, f (x) интегрируема по Риману на отрезке [a,b] для любых $b > a` > a$) сходятся или расходятся одновременно.

---

<u>Теорема</u> 1 (для произвольных функций). Пусть $f(x)$ определена при $x \geq a$, $f \in R[a,b]$ $\forall b > a$, $a' > a$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

○ Рассмотрим $I_1 = \int_a^\xi f(x)dx = \underbrace{\int_a^{a'} f(x)dx}_{const} + \underbrace{\int_{a'}^\xi f(x)dx}_{I_2}$.

$I_1$ отличается от $I_2$ на постоянную $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\xi\to+\infty} I_1 \\ \lim\limits_{\xi\to+\infty} I_2 \end{array}\right\}$ существуют одновременно.

(Конечное слагаемое можно отбросить, не меняя свойств сходимости). ●

<u>Теорема</u> 2 (свойство линейности несобственных интегралов). Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, . Тогда $\forall \alpha, \beta \in R$ интеграл $\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ сходится, причем,

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

○ $\forall \xi$ $\int_a^\xi [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^\xi f(x)dx + \beta \int_a^\xi g(x)dx$. Перейдем пределу при $\xi \to +\infty$. Правая часть имеет предел (по условию теоремы) $\Rightarrow$ левая часть имеет предел, равный сумме пределов. ●

Билет 4. Доказать теоремы сравнения для несобственных интегралов 1-го рода от неотрицательных функций. Привести примеры. Вывести следствие с использованием интеграла $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

---

Рассмотрим несобственные интегралы (1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и (2) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 1 (первый признак сравнения). Пусть $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ ($x \geq a$), $f, g \in R[a,b]$ $\forall b > a$ и $f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$. Если (2) сходится, то (1) сходится.

○ Пусть (2) сходится $\Leftrightarrow$ $G(\xi) = \int_a^{\xi} g(x)dx \leq C$ ($\forall \xi$).

Тогда $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx \leq \int_a^{\xi} g(x)dx = G(\xi) \leq C$ ($\forall \xi$).

Таким образом, $0 \leq F(\xi) \leq C \Rightarrow$ (1) сходится. ●

Следствие. При выполнении условий теоремы, если (1) расходится, то (2) тоже расходится (доказательство от противного).

Теорема 2 (второй или предельный признак сравнения). Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ($x \geq a$), $f, g \in R[a,\xi]$ $\forall \xi > a$ и $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$.

Тогда (1) сходится $\Leftrightarrow$ (2) сходится.

○ ($\Leftarrow$) Пусть (2) сходится, тогда $\int_a^{+\infty} Cg(x)dx$ сходится ($\forall C > 0$).

По условию теоремы $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \Rightarrow \exists x_0, C_0$: $0 < \frac{f(x)}{g(x)} \leq C_0$ при $x > x_0 > a$.

Сравним интегралы $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ и $\underbrace{\int_{x_0}^{+\infty} C_0 g(x)dx}_{\text{сходится}}$.

$f(x) \le C_0 g(x) \Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ сходится (то, что вместо $a$ стоит $x_0$ – не существенно (см. теорему 1 п.141)).

($\Rightarrow$)Пусть (1) сходится. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell} = \ell_1 \ne 0 \Rightarrow$ по только что доказанному (см. ($\Leftarrow$)) сходится и (2). ●

<u>Примечание</u>. Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ ($x \ge a$) и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$ несобственные интегралы (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x+\ln x}$.

Сравним заданный несобственный интеграл с эталонным интегралом $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$, который расходится, т.к. $p = 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+\ln x)} : \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1\cdot x}{(x+\ln x)\cdot 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{\ln x}{x}} = 1, \text{ т.к. } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Следовательно, несобственный интеграл $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x+\ln x}$ расходится.

Пример. $J = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{2x^2+\sin x}$.

Сравним его с интегралом $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$, который сходится, т.к. $p = 2 > 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2+\sin x} = \frac{1}{2} = \ell \ne 0.$$

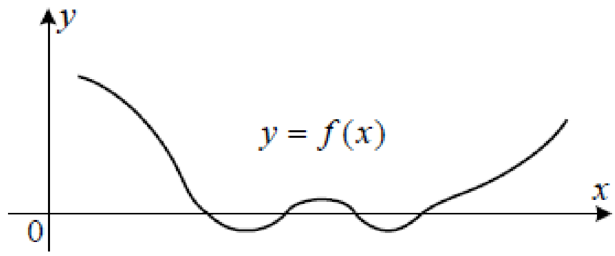
Следовательно, $J = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + \sin x}$ – сходится.

Билет 5. Доказать, что если $\int_a^\infty |f(x)|dx$, то $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится. Дать определения абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла 1-го рода.

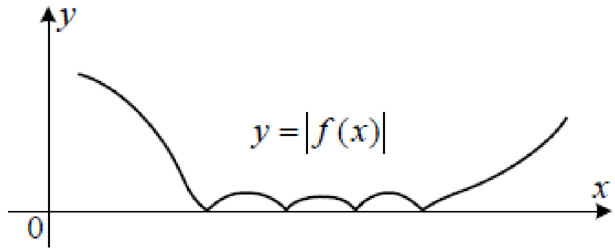
---

Пусть $f(x)$, $x \geq a$, $f \in R[a,\xi]$ $\forall \xi > a$. Рассмотрим несобственный интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Определение</u>. Интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл $I_1 = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

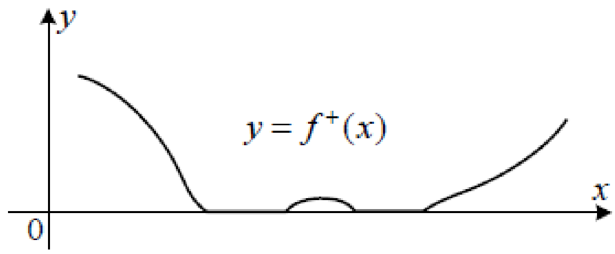



<u>Теорема</u>. Если $I_1$ сходится, то $I$ тоже сходится.




○ Пусть $f^+(x) = \dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$

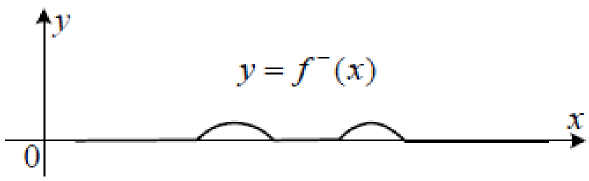
$$= \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$




и

$$f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x) = |f(x)|, & f(x) < 0 \end{cases}.$$




Тогда

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, $\quad f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Тогда

$| f(x) | = f^{+}(x) + f^{-}(x)$, $f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$.

Обозначим $I^{+} = \int_a^{+\infty} f^{+}(x)dx$. Имеем $0 \le f^{+}(x) \le | f(x) |$, $I_1 = \int_a^{+\infty} | f(x) | dx$ – сходится (дано) $\Rightarrow I^{+}$ – сходится (по теореме сравнения 1).

Пусть $I^{-} = \int_a^{+\infty} f^{-}(x)dx$. $0 \le f^{-}(x) \le | f(x) | \Rightarrow I^{-}$ – сходится (по теореме сравнения 1).

Рассмотрим $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$:

$I = \int_a^{+\infty} [f^{+}(x) - f^{-}(x)]dx = I^{+} - I^{-}$ – сходится. ●

Итак, мы доказали: абсолютно сходящийся интеграл сходится.

<u>Определение</u>. Если $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $I_1 = \int_a^{+\infty} | f(x) | dx$ расходится, то несобственный интеграл $I$ называется условно сходящимся.

Билет 6. Вывести признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$.

---

<u>Теорема</u> (признак Дирихле). Пусть:

1. функция $f(x)$ задана при $x \ge a$, $f(x) \in C^1[a,+\infty)$, $f'(x) \le 0$, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;
2. функция $g(x)$ задана при $x \ge a$, $g(x) \in C[a,+\infty)$, функция $G(\xi) = \int_a^\xi g(x)dx$ ограничена.

Тогда несобственный интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

○ Т.к. $f'(x) \le 0$, то $f(x)$ не возрастает. Из условия теоремы: $|G(\xi)| \le C$ $(\forall \xi)$.

Возьмем $I$ по частям: $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \begin{vmatrix} u = f(x), & du = f'(x)dx \\ dv = g(x)dx, & v(x) = G(x) \end{vmatrix} =$

$$= \underbrace{f(x)G(x)\Big|_a^{+\infty}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} G(x)f'(x)dx}_{\mathrm{II}}.$$

$$\mathrm{I} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\overbrace{f(x)}^{\substack{0\\\uparrow}}\ \overbrace{G(x)}^{\text{ограничена}}}_{\substack{\downarrow\\0}} - \underbrace{f(a)G(a)}_{0} = 0.$$

$\mathrm{II} = \int_a^{+\infty} G(x)f'(x)dx$ – проверим, что этот интеграл сходится абсолютно.

$$\int_a^{+\infty} |G(x)f'(x)|\,dx = -\int_a^{+\infty} \underbrace{|G(x)|}_{\le C} f'(x)dx \le -C\int_a^{+\infty} f'(x)dx = -C\cdot f(x)\Big|_a^{+\infty} = C\cdot f(a)\ –$$

сходится $\Rightarrow$ II – сходится абсолютно.

Тогда $I = \mathrm{I} - \mathrm{II}$ – сходится. ●

<u>Теорема</u>. Пусть:

1. функция $f(x) \in C[a,+\infty)$, $f'(x)$ сохраняет знак ( $f(x)$ – монотонна), $f(x)$ ограничена;
2. функция $g(x) \in C[a,+\infty)$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится.

Тогда $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

○ Т.к. $f'(x)$ сохраняет знак, то $f(x)$ – монотонна, $f(x)$ ограничена (из условий теоремы) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Представим несобственный интеграл $I$ в виде $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$

$$= \underbrace{\int\limits_a^{+\infty} (f(x)-A)g(x)dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{A\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx}_{\mathrm{II}}.$$

II – сходится по условию теоремы.

$\mathrm{I} = \int\limits_a^{+\infty} \underbrace{(f(x)-A)}_{f_1(x)} g(x)dx$:

а) пусть $f'(x) \geq 0$, тогда $-f_1'(x) = -f'(x) \leq 0$, $G(\xi) = \int\limits_a^{\xi} g(x)dx$ – ограничена

(по условию 2) $\Rightarrow \mathrm{I} = -\int\limits_a^{+\infty} (-f_1(x))g(x)dx$ – сходится по признаку Дирихле.

б) $f'(x) \leq 0$, $f_1'(x) = f'(x) \leq 0$, $G(\xi) = \int\limits_a^{\xi} g(x)dx$ – ограничена $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{I} = \int^{+\infty} f_1(x)g(x)dx$ – сходится. ●

Билет 7. Исследовать интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ на абсолютную и условную сходимость при различных значениях $a$.

---

*Решение.* 1) Если $\alpha > 1$, то $\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится и, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится абсолютно;

2) если $0 < \alpha \le 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ — расходится.

Это показывается так же, как и в предыдущем примере:

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx$ сходится по признаку Дирихле. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ расходится. Вместе с этим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится по признаку Дирихле и, следовательно, является неабсолютно сходящимся;

3) если $\alpha = 0$, то имеем $\int\limits_1^{+\infty} \sin x dx = -\cos x\Big|_1^{+\infty}$ — не существует, и $\int\limits_1^{+\infty} \sin x dx$ — расходится;

4) если $\alpha < 0$, то $\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx =$ [ по теореме о среднем для определенного интеграла, $\pi n \le \xi_n \le \pi(n+1)$] $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin x dx =$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^\alpha} \Big[ -\cos x \Big]_{\pi n}^{\pi(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - (-1)^{n+1}}{\xi_n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\xi_n^\alpha}$.

Но $\frac{1}{\xi_n^\alpha} = \xi_n^{-\alpha} \ge (\pi n)^{-\alpha} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд расходится, значит, расходится и интеграл.

Подытоживая исследование, приходим к следующему ответу:
если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно;
если $0 < \alpha \le 1$, то интеграл сходится неабсолютно;
если $\alpha \le 0$, то интеграл расходится.

Билет 8. Дать определение несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Сформулировать основные теоремы, привести примеры. Дать определение интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Привести пример.

---

Пусть на произвольном конечном отрезке $[a,b]$ существует $\int_{a}^{b} f(x)dx$.

<u>Определение</u>. Пусть $f(x)$ определена на полупрямой $x \le b$, $f(x) \in R(\eta,b)$ $\forall \eta < b$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{\text{определение}}{=} \lim_{\eta \to -\infty} \int_{\eta}^{b} f(x)dx .$$

Если в правой части равенства существует конечный предел, то интеграл сходится. Если такой предел не существует – интеграл расходится.

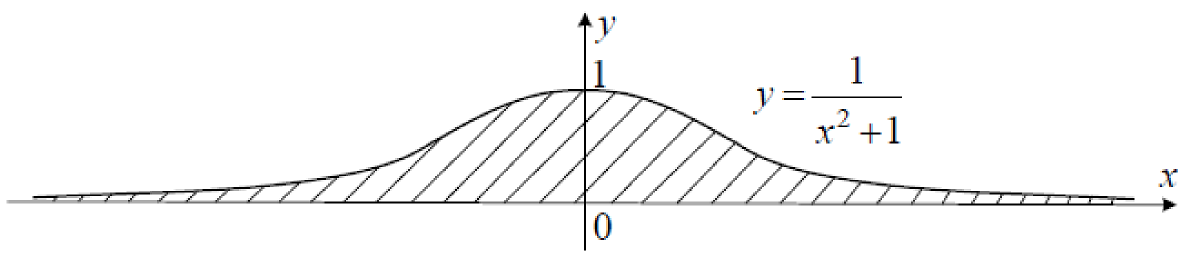
Для интегралов такого вида справедливы аналоги всех теорем, доказанных для интегралов $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Определение</u>. Пусть $f(x)$, $x \in R$, $f(x) \in R[a,b]$ $\forall a,b$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{определение}}{=} \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx .$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если что оба интеграла справа сходятся.

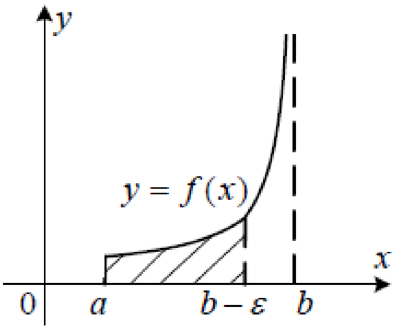
Пример. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.



Билет 9. Дать определение несобственного интеграла 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$. Рассмотреть примеры $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$.

---

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in [a,b)$, $f(x) \in R[a,b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$ и $f(x)$ не ограничена в $O^-(b)$.

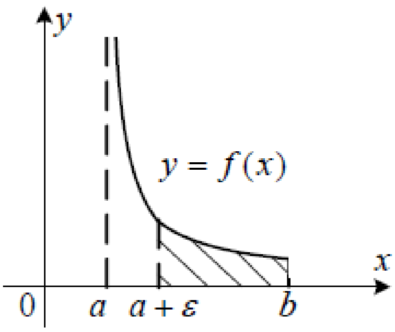



Определение. Несобственным интегралом второго рода называется

$$I = \int_a^b f(x)dx \overset{\text{определение}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если в правой части существует конечный предел, то несобственный интеграл сходящийся. Если такой предел не существует – расходящийся.

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода для случая функции $f(x)$, заданной при $x \in (a,b]$, $f(x) \in R[a+\varepsilon,b]$ $\forall \varepsilon > 0$ и неограниченной в $O^+(a)$.




Определение. Несобственным интегралом второго рода называется

$$I = \int_a^b f(x)dx \overset{\text{определение}}{=} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Если в правой части существует конечный предел, то несобственный интеграл сходящийся. Если такой предел не существует – расходящийся.

Пример. $I=\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \quad p>0$.

Подынтегральная функция не ограничена в $O^+(a)$: $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{1}{(x-a)^p}=+\infty$.

1) $0<p<1$:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{-p+1}(x-a)^{-p+1}\Big|_{a+\varepsilon}^b=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-p}((b-a)^{-p+1}-\underbrace{\varepsilon^{-p+1}}_{\downarrow\, 0})=$$

$$=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$ – сходится.

2) $p=1$:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b=\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln|b-a|-\underbrace{\ln\varepsilon}_{\downarrow\, -\infty})\Bigg|_{a+\varepsilon}^b=+\infty$$ – расходится.

3) $p>1$:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^b=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{1-p}((b-a)^{1-p}-\underbrace{\varepsilon^{1-p}}_{\downarrow\, +\infty})=+\infty$$

– расходится.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ исследуется аналогично.

Таблица сходимости/расходимости эталонных несобственных интегралов второго рода в зависимости от значения параметра $p$.

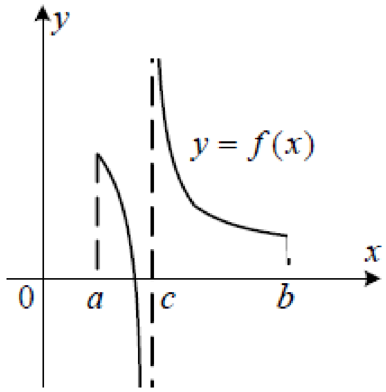
| | |
|---|---|
| | $p<1$ – сходится |
| $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ | $p \ge 1$ – расходится |
| $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ | $p<1$ – сходится<br>$p \ge 1$ – расходится |
| $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ | $p<1$ – сходится<br>$p \ge 1$ – расходится |

Билет 10. Дать определение несобственного интеграла 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ в случаях, когда f (x) является неограниченной функцией в проколотой окрестности точки C, где a < C < b. Привести пример.

---

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$ всюду, кроме точки $c \in [a,b)$, и не ограничена в $O(c)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \overset{определение}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$




Интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части равенства. Интеграл расходится, если расходится хотя бы один из интегралов в правой части.

Аналогично определяется несобственный интеграл, если $f(x)$ имеет на $[a,b]$ несколько точек разрыва второго рода.

Пример $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}}_{\substack{расходится \\ т.к.\ \ p=1}} \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ – расходится.

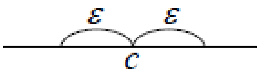
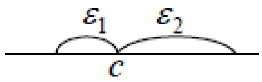
Примечание. Существует так называемый интеграл в смысле главного значения

$(V.p.)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$ для $f(x)$, определенной на всем отрезке $[a,b]$, кроме точки $c$.

Отличие от обычного определения:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx -$$

в обычном определении $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 \to 0$ независимо, а в определении $(V.p.)$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

| Главное значение интеграла | Обычное значение интеграла |
|---|---|
|  |  |

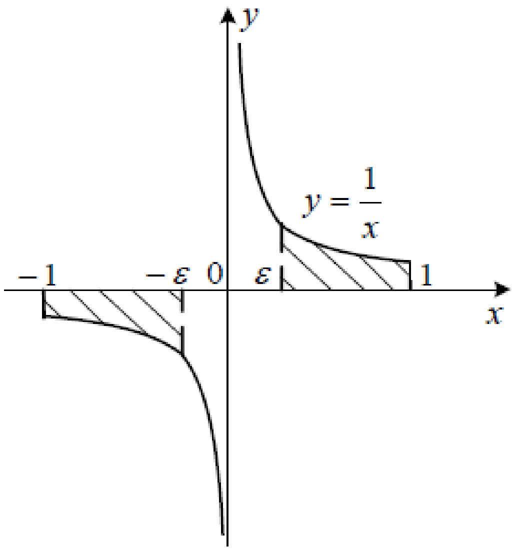
Пример. $(V.p.)\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$.

$$(V.p.)\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}]=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|\varepsilon|-\ln|\varepsilon|]=0.$$

Т.е. в смысле главного значения $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ $=0$.

В обычном смысле площадь, соответствующая каждому из интегралов $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}$, $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ равна $\infty$.

В $(V.p.)$ соответствующие площади равны и суммируются с противоположными знаками $\Rightarrow 0$.



Билет 11. Сформулировать теоремы о сравнении несобственных интегралов 2-го рода от неотрицательных функций. Вывести следствие с использованием интегралов вида $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ .

---

Теорема сравнения. Пусть $f, g \in R[a, b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$, $f$ и $g$ не ограничены в $O^-(b)$: Обозначим

$$(1) \int_a^b f(x)dx \qquad (2) \int_a^b g(x)dx .$$

Тогда:

| | | |
|---|---|---|
| А | $0 \le f(x) \le g(x) \;\; \forall x \in [a, b)$ | (2) сходится $\Rightarrow$ (1) сходится |
| | | (1) расходится $\Rightarrow$ (2) расходится |
| Б | $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $\exists \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ne 0$ | (1) сходится $\Leftrightarrow$ (2) сходится |
| | | (1) расходится $\Leftrightarrow$ (2) расходится |

Следствие. Во многих случаях при исследовании сходимости несобственного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ его можно сравнить с эталонным интегралом.

Предположим например, что $f \in R[a+\varepsilon, b]$ ($\forall \varepsilon > 0$) и

Билет 12. Дать определения и привести примеры абсолютно и условно сходящихся несобственных интегралов 2-го рода.

---

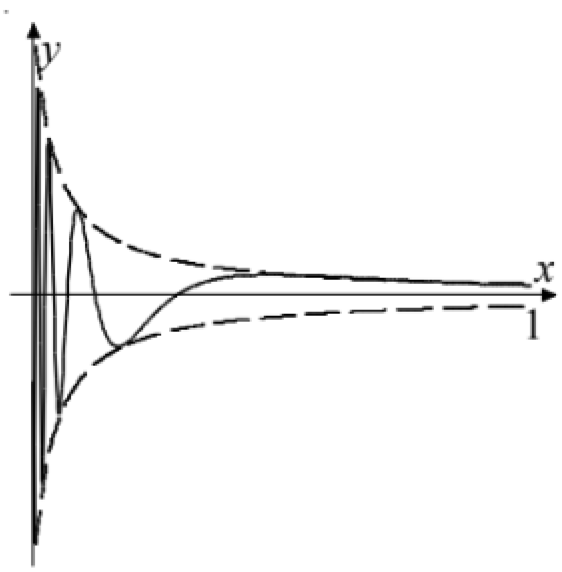
Теорема (об абсолютной сходимости). Пусть $f \in R[a, b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$ и функция $f$ не ограничена в $O^-(b)$. Тогда

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ – сходится.}$$

В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

Пример (условно сходящийся интеграл 2-го рода) $I = \int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$.

$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ – функция неограниченная в окрестности точки $x = 0$ (интеграл несобственный). При этом она не является б.б. (обращается в ноль в точках $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$).




По определению $I = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$. Имеем

$$I_\varepsilon=\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{x}\quad x=\frac{1}{t}\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \varepsilon & 1/\varepsilon \\ 1 & 1 \end{array}\end{array}\right|=\int_{1/\varepsilon}^{1} t\sin t\frac{dt}{-t^2}=\int_1^{\overbrace{1/\varepsilon}^{\substack{+\infty\\ \uparrow}}}\frac{\sin t}{t}dt \Rightarrow I=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_\varepsilon=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$ – сходится (см. пример п. 143).

Проверим, что интеграл $I$ не является абсолютно сходящимся.

$$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|dx=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$$ – расходится (см. пример п. 143).

Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ сходится условно.

Билет 13. Дать определение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}}$ и исследовать его на сходимость.

---

Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}}$, $a \neq b$ $(a<b)$. Пределы интегрирования -∞ и +∞ ⇒ интеграл 1-го рода. Подынтегральная функция имеет разрывы в точках $x=a$ и $x=b$ – интеграл 2-го рода.

Пусть $-\infty < c_1 < a < c_2 < b < c_3 < +\infty$, разобьем исходный интеграл на


сумму интегралов: $I = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{c_1}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{c_1}^{a}}_{I_2} + \underbrace{\int\limits_{a}^{c_2}}_{I_3} + \underbrace{\int\limits_{c_2}^{b}}_{I_4} + \underbrace{\int\limits_{b}^{c_3}}_{I_5} + \underbrace{\int\limits_{c_3}^{+\infty}}_{I_6}$.

Исследуем на сходимость отдельно каждый интеграл.

1) $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{c_1} \frac{dx}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}}$.

$\frac{1}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}} \sim \frac{1}{|x|^{\alpha}|x|^{\beta}}$ при $x \to -\infty$, сравним $I_1$ с интегралом $\int\limits_{-\infty}^{c_1} \frac{dx}{|x|^{\alpha+\beta}}$.

Условие сходимости $p = \alpha + \beta > 1$.

2) $I_2 = \int\limits_{c_1}^{a} \frac{dx}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}}$.

$\frac{1}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}} \sim \frac{1}{|x-a|^{\alpha} \cdot \underbrace{|a-b|^{\beta}}_{const}}$, сравним $I_2$ с интегралом $\int\limits_{c_1}^{a} \frac{dx}{|x-a|^{\alpha}}$.

Условие сходимости $p = \alpha < 1$.

Аналогично получаем условия сходимости для остальных интегралов, т.е.

3) $I_3$ сходится при $p = \alpha < 1$.

4) $I_4$ сходится при $p = \beta < 1$.

5) $I_5$ сходится при $p = \beta < 1$.

6) $I_6$ сходится при $p = \alpha + \beta > 1$.

Таким образом, несобственный интеграл $I$ сходится ⇔ $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta > 1$.