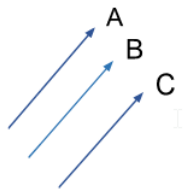
Лекции по Геометрии

Глава 1. Векторная алгебра

§ 1. Линейные операции над векторами.



Рассмотрим множество точек трехмерного пространства. Вектор – это направленный отрезок, соединяющий точки A и B. Если A – начало вектора, а B конец, то вектор обозначается $\vec{AB}$, а его длина (модуль вектора) обозначается $|\vec{AB}|$. Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется нулевым $\vec{0} = \{\vec{AA}\}$. Два вектора считаются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Считается, что это один и тот же свободный вектор $\vec{a}$, приложенный к различным точкам $\vec{AB} = \vec{A'B'} = \vec{a}$. Строго говоря, свободным вектором называется класс равных между собой векторов , который обозначается $\vec{a}$.

На множестве свободных векторов трехмерного пространства определены две операции: сложение и умножение на число.

Определение 1. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, полученный из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующим образом: выбираем произвольную точку O в пространстве и прикладываем к ней вектор $\vec{a}$. Таким образом $\vec{OA} = \vec{a}$, затем к точке A прикладываем вектор $\vec{b}$, то есть $\vec{AB} = \vec{b}$. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{OB}$.

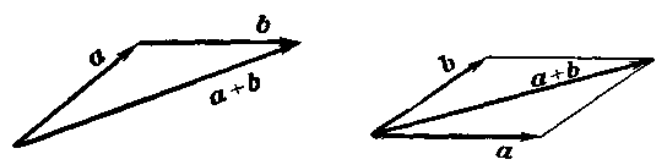


Рис.1

Это определение корректно, так как выбор другой точки O′ приводит к вектору $\vec{O'B'}$ равному $\vec{c}$. (Проверьте это утверждение)

Свойства сложения векторов:

1.) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность

2.) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ - ассоциативность

3.) $\forall\ \vec{a}\quad \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, нулевой вектор – нейтральный элемент сложения.

4.) Если $\vec{a} = \vec{AB}$ то $\vec{BA} = -\vec{a},$ то есть $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$

Задача 1. Доказать корректность определения суммы векторов и свойства коммутативности и ассоциативности сложения векторов.

Определение 2.Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$,который приложенный к той же точке, что и вектор $\vec{a}$, располагается с ним на одной прямой и направлен так же, как и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлен, если $\lambda < 0$. При этом его длина $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda|\left|\vec{a}\right|$. Если $\lambda = 0$,получаем вектор длины 0, это- нулевой вектор $\vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число:

1 . $1 * \vec{a} = \vec{a}$

2. $\left(\lambda_1\lambda_2\right)\vec{a} = \lambda_1\left(\lambda_2\vec{a}\right)$

3. $\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$

4. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

5. $-\left(\lambda\vec{a}\right) = (-\lambda)\vec{a}$

Определение 3. Вектор $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ **с коэффициентами** $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Задача 2. Доказать свойства 2. – 5.Из свойств операций сложения и умножения на число вытекает, что слагаемые можно переносить в другую сторону с противоположным знаком.

Задача 3. Проверить это утверждение.

§ 2. Линейная зависимость векторов

Линейная комбинация $\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k$ называется **нетривиальной**, если среди коэффициентов $\lambda_1, \dots \lambda_k$ есть отличные от нуля.

Тривиальная линейная комбинация выглядит следующим образом $0\cdot\vec{a}_1 + \dots + 0\cdot\vec{a}_k$ и равна $\vec{0}$ для любого набора векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

Определение 4. Система векторов называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная $\vec{0}$. В противном случае векторы называются линейно независимыми.

Выведем основные свойства линейной зависимости векторов.

Теорема 1.Если среди векторов системы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ есть $\vec{0}$, то векторы линейно зависимы.

Доказательство. Пусть в системе $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Для доказательства линейной зависимости векторов , согласно определению, нужно найти нетривиальную линейную комбинацию этих векторов, равную $\vec{0}$. Вот она $1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{a}_2 + \dots + 0\cdot\vec{a}_k = \vec{0}$

Теорема 2. Если подсистема векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависима, то и вся система $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n$ также линейно зависима.

Доказательство. Если подсистема $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависима, то существуют коэффициенты $\lambda_1, \dots \lambda_k$ не все равные нулю и такие, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$. Пусть, для определенности , $\lambda_1 \neq 0$. В этом случае линейная комбинация $\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + \dots + 0\ \vec{a}_n = \vec{0}$.Мы получили нетривиальную линейную комбинацию всех векторов системы равную нулевому вектору, следовательно система линейно зависима.

Теорема 3. (Критерий линейной зависимости). Векторы $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных.

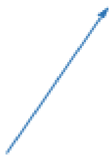
Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы системы линейно зависимы, тогда найдется нетривиальная линейная комбинация равная $\vec{0}$. $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Предположим, что $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 + ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n$.

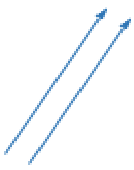
Достаточность. Пусть $\vec{a}_1 = \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, тогда линейная комбинация равная $\vec{0}$ получается следующим образом: $\vec{a}_1 - \lambda_2\vec{a}_2 - ... - \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Комбинация нетривиальна, так как коэффициент при векторе $\vec{a}_1$ равен $1 \neq 0$.

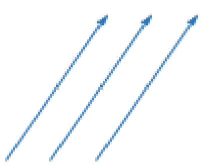
Геометрический смысл линейной зависимости



Пример 1. Рассмотрим систему из одного вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$. Линейная комбинация этого вектора $\lambda\vec{a}$ равна $\vec{0}$ только, если $\lambda=0$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ при любом λ .Таким образом система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда вектор нулевой.



*Пример 2.*Пусть в системе два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Воспользуемся критерием линейной зависимости. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда , когда выполняется хотя бы одно условие $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ или $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.В любом из этих случаев векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

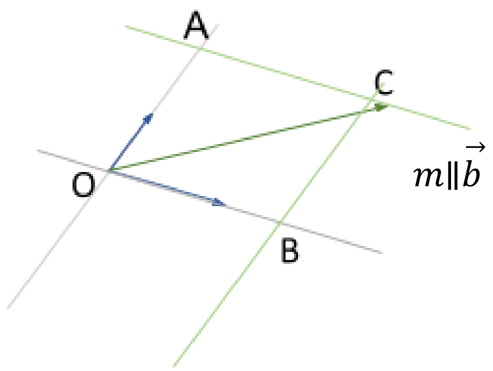


Пример 3. Рассмотрим систему из трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и покажем , что линейная зависимость этих векторов означает их компланарность.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы, то согласно критерию линейной зависимости один из векторов линейно выражается через остальные.

Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Возможны два случая: либо векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и тогда вектор $\vec{c}$ им коллинеарен, либо векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и, приложенные к одной точке O, задают плоскость π. Вектор $\vec{c}$, приложенный к точке O, принадлежит той же плоскости π.

Обратно, если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то снова возможны два случая: либо все три вектора коллинеарны и , следовательно, линейно зависимы, либо среди них есть два неколлинеарных вектора. Пусть это будут векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда приложенные к одной точке O они определяют плоскость π.



Через точку O проводим прямые l и m $(l \| \vec{a})$. Прикладываем к точке O вектор $\vec{c}$. Он лежит в плоскости π (векторы компланарны). Через его конец проводим прямые l' и m' так, что $l \| l'$, $m \| m'$.

$$\vec{OA} \| \vec{a} \Rightarrow \vec{OA} = \alpha\vec{a}$$

$$\vec{OB} \| \vec{b} \Rightarrow \vec{OB} = \beta\vec{b}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Вектор $\vec{c}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следовательно по критерию $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

Теорема 4. Четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для четырех векторов. Если их больше , то можно применить теорему 2.Рассмотрим четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$. Если среди них есть два коллинеарных или три компланарных ,то получаем линейно зависимую подсистему и по теореме 2 линейно зависимую систему из четырех векторов. Пусть любые три вектора не компланарны. Приложим все векторы к одной точке О. Рассмотрим первые три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.Каждая пара векторов определяет плоскость. Обозначим эти плоскости через π $(\vec{a}, \vec{b})$, π $(\vec{a}, \vec{c})$ и π $(\vec{c}, \vec{b})$.Обозначим конец вектора $\vec{d}$, приложенного к точке О через D и проведем через точку D три плоскости

π $_1$ II π $(\vec{a}, \vec{b})$, π $_2$ II π $(\vec{a}, \vec{c})$ и π $_3$ II π $(\vec{c}, \vec{b})$.Каждая из этих плоскостей пересекает прямую третьего вектора в точках C,B и A соответственно. Вектор $\vec{OA}$ коллинеарен $\vec{a}$, вектор $\vec{OB}$ коллинеарен $\vec{b}$, а $\vec{OC}$ коллинеарен $\vec{c}$. Следовательно $\vec{OA}$ =α $\vec{a}$, вектор $\vec{OB}$ =β $\vec{b}$, а $\vec{OC}$ =γ $\vec{c}$.Применяя правило параллелограмма при сложении векторов, получаем $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$.Или $\vec{d}$ = α $\vec{a}$ + β $\vec{b}$ + γ $\vec{c}$. Вектор $\vec{d}$ линейно выражается через остальные, по теореме 3 они линейно зависимы.

§ 3. Базис. Координаты вектора в данном базисе.

Множество векторов трехмерного пространства с операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется трехмерным векторным пространством V^3. Рассмотрим подмножество векторов пространства V^3 , параллельных какой-либо плоскости π. При сложении и умножении на число векторов этого подмножества по-прежнему получается вектор параллельный плоскости π. (В таком случае говорят, что подмножество замкнуто относительно рассматриваемых операций.) Подмножество векторов пространства V^3 , параллельных какой-либо плоскости π называется двумерным векторным пространством V^2. Подмножество векторов, пространства $V^{3,}$ параллельных какой-либо прямой l также замкнуто относительно линейных сложения и умножения на число и называется одномерным векторным пространством V^1.Таким образом имеется одно трехмерное пространство V^3 и бесконечно много двумерных пространств V^2 и одномерных пространств V^1.

Определения 5 - 8.

Базисом пространства V^1 называется любой(ненулевой) линейно независимый вектор этого пространства.

Базисом пространства V^2 называется любая пара линейно независимых(неколлинеарных) векторов.

Базисом пространства V^3 называется любая тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов пространства.

Заметим, что в каждом из вышеупомянутых пространств имеется бесконечно много различных базисов. Систему векторов, образующих базис векторного пространства, обозначим через S.

Теорема 4. (О разложении по базису)

1.) Пусть $S = \{\vec{a}\}$ - базис пространства V^1, тогда для любого вектора $\vec{p}$ из пространства V^1 найдется число α такое, что $\vec{p} = \alpha\vec{a}$ (*).

2.) Пусть $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ - базис пространства V^2, тогда для любого вектора $\vec{p}$ из этого пространства V^2 найдутся числа α, β такие, что $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (**).

3.) Пусть $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - базис пространства V^3, тогда для любого вектора $\vec{p}$, принадлежащего пространству V^3 существуют числа α, β, γ такие, что $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ (***)

Доказательство

1. Если $\vec{a}$ – базис пространства V^1, то $\vec{a} \neq \vec{0}$.Пусть вектор $\vec{p} \in V^1$, тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$ коллинеарны , $\vec{a} \parallel \vec{p}$. и $\vec{p} = \alpha\vec{a}$, так как $\vec{a} \neq \vec{0}$.
2. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – базис пространства V^2, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимые (неколлинеарные) векторы параллельные плоскости π. Вектор $\vec{p}$ принадлежит пространству V^2и параллелен плоскости π, следовательно $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ – компланарны. В *примере 3 - §2* было показано, что в случае линейной независимости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.
3. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис пространства V^3, то доказательство проводится аналогично с использованием *теоремы 4*.

Определение 5. Число (α) в разложении (*), числа (α, β) в разложении (**), числа (α, β, γ) в разложении (***) называются координатами вектора $\vec{p}$ в данном базисе S.

Если в пространстве V зафиксирован базис S, то вектор $\vec{p}$ можно записать в координатной форме. В пространстве V^1 - $\vec{p}_S = (\alpha)$, в пространстве V^2 - $\vec{p}_S = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, в пространстве V^3 - $\vec{p}_S = (\alpha\ \beta\ \gamma)$.

Теорема 5. Координаты вектора в фиксированном базисе S пространства V определены однозначно.

Доказательство. (Для пространства V^3).

Рассмотрим вектор $\vec{p}$ пространства V^3 и предположим, что у него имеется два набора координат в базисе S.

Тогда $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}$.

Вычислим $\vec{p} - \vec{p} = \vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c}$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы, их линейная комбинация равна нулевому вектору только, если комбинация тривиальная:

$\alpha = \alpha'$ $\qquad\qquad$ $\beta = \beta'$ $\qquad\qquad$ $\gamma = \gamma'$

Теорема 6. При сложении векторов их координаты в данном базисе S $= \{\vec{a}, \vec{b}\}$ складываются, при умножении вектора на число – умножаются на это число.

Доказательство.(Для пространства V^2).

Рассмотрим два вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$ из пространства V^2 и их разложение в линейную комбинацию векторов базиса. $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{q} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$.
$\vec{p} + \vec{q} = (\alpha + \gamma)\vec{a} + (\beta + \delta)\vec{b}$. В силу теоремы 2 числа $\alpha + \gamma$ и $\beta + \delta$- координаты суммы $\vec{p} + \vec{q}$ в базисе S.

В координатном виде полученный результат можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)$$

Аналогично рассматривается операция умножения вектора $\vec{p}$ на число λ.

$$\lambda(\alpha\ \beta\ ) = (\lambda\alpha\ \lambda\beta\ )$$

Теперь условие коллинеарности двух векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в трехмерном пространстве V^3, если известны их координаты в некотором базисе S,можно записать в координатном виде.

Если $\vec{p}_S = (\alpha\ \beta\ \gamma\ )$, а $\vec{q}_S = (\xi\ \eta\ \zeta\ )$ (ξ –кси, η –ита, ζ-зита.) и $\vec{q}=\lambda\ \vec{p}$, то согласно предыдущей теореме $\vec{q}_S = (\xi\ \eta\ \zeta\ ) = (\lambda\alpha\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ )$.Из теоремы 2 следует, что $\xi=\lambda\alpha$, $\eta=\lambda\beta$,$\zeta=\lambda\gamma$ из чего вытекает, что соответствующие координаты векторов пропорциональны $\frac{\xi}{\alpha}=\frac{\eta}{\beta}=\frac{\zeta}{\gamma}$.

Различных базисов S, как следует из определения, в пространстве V , бесконечно много .Среди них с вычислительной точки зрения наиболее удобны ортонормированные базисы.

Определение 6. Базис называется **ортонормированным**, если он состоит из попарно ортогональных векторов единичной длины.

Примеры:

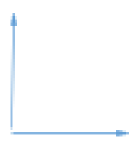


Рис.3.

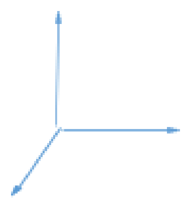


Рис .4.

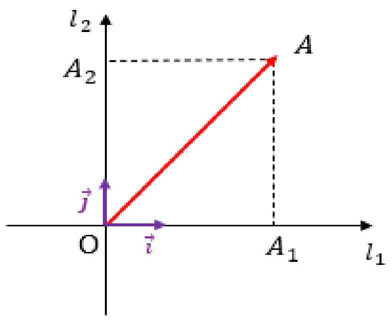
На рисунке 3 изображен ортонормированный базис пространства V^2 , а на рисунке 4 - ортонормированный базис пространства V^3 .

§4. Скалярное произведение векторов

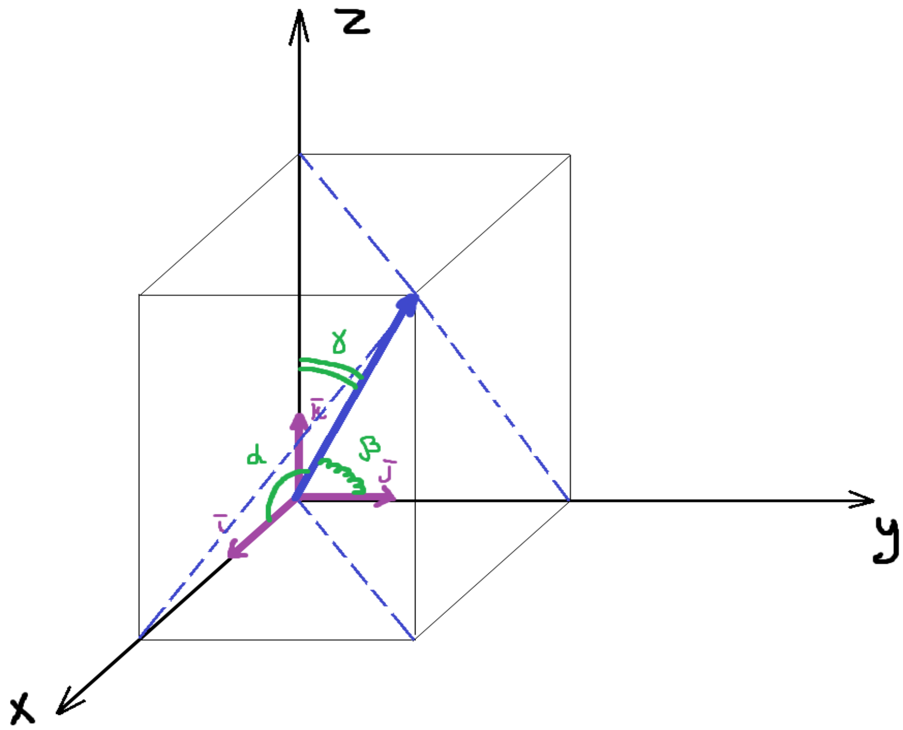
Рассмотрим числовую ось $\vec{l}$. Это прямая, на которой отмечена точка O (начало отсчета), единица масштаба и направление. Числовая ось - геометрическая модель множества действительных чисел. Пусть $\vec{a}$-вектор в пространстве V^3 . Приложим его к точке O. $\vec{OA}=\vec{a}$. Обозначим через φ угол между вектором $\vec{OA}$ и положительным направление оси $\vec{l}$. Прямая m проходит через точку A перпендикулярно оси $\vec{l}$ и пересекает ее в точке A' .Координата точки A' на оси $\vec{l}$ называется проекцией вектора на ось и обозначается $pr_{\vec{l}}\vec{a}$. Вектор $\vec{OA'}$ называется вектор - проекцией и обозначается $\vec{pr}_{\vec{l}}\vec{a}$. Проекция вектора на ось-число: $pr_{\vec{l}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\cos\varphi$.

Если $0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$, то проекция положительна. При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ проекция равна 0, при $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$ проекция отрицательна. Рассмотрим еще один вектор $\vec{b}\neq\vec{0}$. Проекцией $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется проекция $\vec{a}$ на ось $\vec{l}$, идущую в направлении вектора $\vec{b}$.

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\cos\varphi\,,\quad pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\cos\varphi\ >, \text{где}\ \ \varphi \text{ –угол между векторами } \vec{a} \text{ и } \vec{b}$$



Рассмотрим двумерное векторное пространство V^2 (плоскость), зафиксируем в нем ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j}$ и приложим базисные векторы к одной точке O (см. рис. 1).Соответствующие базисные оси обозначим через $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Пусть вектор $\vec{OA}=\vec{a}$. Проекции точки A на базисные оси обозначим A_1 и A_2 соответственно, тогда $\vec{OA}=\vec{OA}_1+\vec{OA}_2$, $\vec{OA}_1=pr_{\vec{i}}\vec{a}\,\vec{i}$, а $\vec{OA}_2=pr_{\vec{j}}\vec{a}\,\vec{j}$. $\vec{OA}=pr_{\vec{i}}\vec{a}\,\vec{i}+pr_{\vec{j}}\vec{a}\,\vec{j}$. Проекции произвольного вектора $\vec{a}$ на базисные оси векторов i и j- это его координаты в ортонормированном базисе.



В векторном пространстве V^3 это утверждение также справедливо и доказывается аналогичным образом.

Рассмотрим векторы базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, приложенные к точке О и вектор $\vec{a} = \vec{OA}$.

l_1, l_2, l_3– базисные оси векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\pi(\vec{i}, \vec{j}) = \pi_1$, $\pi(\vec{i}, \vec{k}) = \pi_2$, $\pi(\vec{j}, \vec{k}) = \pi_3$- плоскости, задаваемые парой базисных векторов и проходящие через точку О. $\pi_1 \perp l_3$, $\pi_2 \perp l_2$, $\pi_3 \perp l_1$.

$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$

ΔOAA_1, ΔOAA_2, ΔOAA_3 – прямоугольные (прямые углы отмечены на рис.   )

α,β и γ- углы между вектором $\vec{a}$ и соответствующими базисными осями.

Координаты точек A_1, A_2, A_3 – проекции вектора $\vec{OA}$ на соответствующие оси, поэтому $\vec{OA}_1 = (|\vec{a}|cos\alpha)\vec{i}$, $\vec{OA}_2 = (|\vec{a}|cos\beta)\vec{j}$, $\vec{OA}_3 = (|\vec{a}|cos\gamma)\vec{k}$.

$\vec{a} = (|\vec{a}|cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{a}|cos\beta)\vec{j} + (|\vec{a}|cos\gamma)\vec{k}$

Из теоремы 6 следуют важные свойства проекций (как при проектировании на ось, так и при проектировании на вектор):

1. Проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов

$$pr_{\vec{c}}^{\vec{a}+\vec{b}} = pr_{\vec{c}}^{\vec{a}} + pr_{\vec{c}}^{\vec{b}}.$$

2. При умножении вектора на число его проекция умножается на то же число $pr_{\vec{b}}^{\lambda\vec{a}} = \lambda\, pr_{\vec{b}}^{\vec{a}}$.

Определение 7.Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число равное произведению их длин на косинус угла между ними.Скалярное произведение нулевого вектора полагается равным нулю.

Обозначим скалярное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos cos\, \varphi$. Используя понятие проекции вектора на вектор, можно записать скалярное произведение векторов в виде $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\, pr_{\vec{a}}^{\vec{b}} = |\vec{b}| \;\; pr_{\vec{b}}^{\vec{a}}$

Строго говоря скалярное произведение – это функция двух векторных переменных, обладающая нижеперечисленными свойствами.

Теорема 7. Свойства скалярного произведения.

1. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$ - Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Это число всегда неотрицательно и равно нулю только , если $\vec{a} = \vec{0}$. Свойство 1 называется положительной определенностью.

2. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ - Свойство симметрии.

3. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$

4. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

Доказательство. Свойства 1 и 2 вытекают непосредственно из определения. Свойства 3 и 4 называются линейностью скалярного произведения по первому переменному и доказываются с использованием свойств проекции. В силу свойства 2 скалярное произведение линейно и по второму переменному.

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}|\ pr_{\vec{b}}^{\lambda\vec{a}} = |\vec{b}|\ \lambda\ pr_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \lambda(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}|\ pr_{\vec{c}}^{\vec{a}+\vec{b}} = |\vec{c}|\ (pr_{\vec{c}}^{\vec{a}} + pr_{\vec{c}}^{\vec{b}}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$$

Через скалярное произведение векторов можно выразить основные метрические характеристики векторов .Длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$, а угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти из условий $\cos cos\,\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ и $0 \le \varphi \le \pi$, если $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ отличны от нуля.

Рассмотрим $\vec{i}$,$\vec{j}$ и $\vec{k}$ - ортонормированный базис векторного пространства V^3 и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.Из теоремы 4 следует, что каждый из этих векторов мажно разложить по базису, то есть представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{i}$,$\vec{j}$ и $\vec{k}$. $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_{2\vec{j}} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_{2\vec{j}} + b_3\vec{k}$. Вычислим скалярное произведение этих векторов, используя свойства доказанные в теореме 7.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1\vec{i} + a_{2\vec{j}} + a_3\vec{k},\ b_1\vec{i} + b_{2\vec{j}} + b_3\vec{k}) = a_1 b_1 (\vec{i}, \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i}, \vec{j}) +$$

$$+ a1\ b3\ (\vec{i}, \vec{k}) + a2\ b1\ (\vec{j}, \vec{i}) + a2\ b2\ (\vec{j}, \vec{j}) + a2\ b3\ (\vec{j}, \vec{k}) + a3\ b1\ (\vec{k}, \vec{i}) +$$

$$+ a_3 b_2 (\vec{k}, \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k}, \vec{k})$$

Так как базис $\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$ ортонормированный , то скалярные квадраты базисных векторов равны 1, а попарные скалярные произведения равны 0. Следовательно,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1)$$

Для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, нужно вычислить сумму произведений одноименных координат. Для вычисления длин векторов и углов между векторами получаем формулы :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (2)$$

$$cos\,\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} == \frac{a1\, b1 + a2\, b2 + a3\, b3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (3)$$

Рассмотрим ненулевой вектор $\vec{a} =$ $a_1 \vec{i}$ $+a_{2\vec{j}}$ $+ a_3 \vec{k}$. Его координаты a_1, a_2, a_3 в ортонормированном базисе- проекции на соответствующие базисные оси. Следовательно,

$$a_1 = pr_{\vec{i}}^{\vec{a}} = \left|\vec{a}\right| \cos cos\,\alpha \ ,$$

$$a_2 = pr_{\vec{j}}^{\vec{a}} = \left|\vec{a}\right| \cos cos\,\beta \ ,$$

$$a_3 = pr_{\vec{k}}^{\vec{a}} = \left|\vec{a}\right| \cos cos\,\gamma \ ,$$

где α, β, γ – углы между вектором $\vec{a}$ и соответствующими базисными осями.Косинусы этих углов $\cos cos\,\alpha$, $cos\,\beta$ и $\cos\,\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}.$ Так как

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (\left|\vec{a}\right| \cos cos\,\alpha)^2 + (\left|\vec{a}\right| \cos cos\,\beta)^2 + (\left|\vec{a}\right| \cos cos\,\gamma)^2 =$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 ((\cos cos\,\alpha)^2 + (\cos cos\,\beta)^2 + (\cos cos\,\gamma)^2),$$

то получаем, что сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора $\vec{a}$ равна 1. Вектор $\vec{e} = \cos cos\,\alpha\ \vec{i} + \cos cos\,\beta\ \vec{j} + \cos cos\,\gamma\ \vec{k}$ называется ортом вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{e}$ имеет единичную длину и сонаправлен вектору $\vec{a}$.

§ 5. **Векторное произведение векторов.**

Замечание об ориентации базисов. Пусть $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ - базис пространства V^2, а $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - базис пространства V^3. Порядок базисных векторов в системе S существенен.

Определение 7. Базис S пространства V^2 называется правым (имеет положительную ориентацию), если после приложения к одной точке кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки и левым (отрицательно ориентированным) в противном случае.

Определение 8. Базис S пространства V^3 называется правым (имеет положительную ориентацию), если после приложения к одной точке кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки с точки зрения наблюдателя находящегося в конце вектора $\vec{c}$, и левым (отрицательно ориентированным) в противном случае.

$S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ – базис в V^2

Рис.7

$S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – базис в V^3

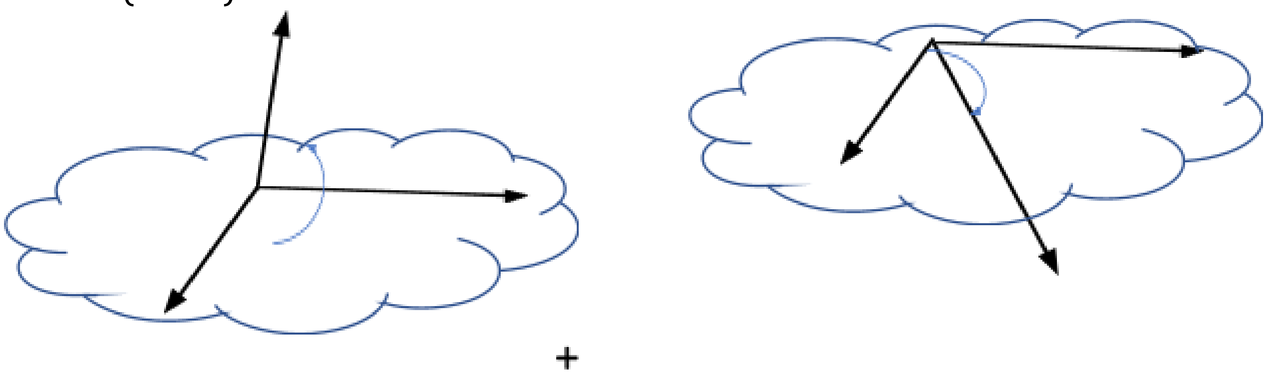


Рис.8

Теорема 8. Свойства ориентации базиса.

1. Если поменять порядок базисных векторов в системе S, то ориентация базиса изменится на противоположную.
2. При умножении одного из векторов базиса на положительное число, ориентация базиса не меняется, при умножении на отрицательное- меняется на противоположную.

Доказательство. См. Рис(7) и Рис(8).

Рассмотрим в пространстве V^3 три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.Из них можно получить шесть различных базисов, меняя порядок этих векторов $S1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $S2 = \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$, $S3 = \{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$, $S4 = \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$, $S\,5 = \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, а $S6 = \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$. Базисы S_2, S_3 и S_4 получаются из базиса S_1 перестановкой (транспозицией) двух базисных векторов, что приводит к изменению ориентации базиса, в то время, как базисы S_5 и S_6 имеют ту же ориентацию, что базис S_1 , так как получаются из него с помощью двух последовательных транспозиций (круговой перестановкой).

Определение 9.Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и обладающий следующими свойствами:

1.$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin sin\ \varphi$, где φ -угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.Векторы $\vec{a}, \vec{b},$ и $\vec{c}$ положительно ориентированная тройка векторов.

Это определение требует некоторого уточнения. Действительно, понятие ориентации тройки векторов применимо только к некомпланарной системе векторов. Однако, если исходные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, то $\left|\vec{c}\right|$, по свойству 1, обращается в 0, так как либо один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ равен $\vec{0}$ (нулевой вектор коллинеарен любому вектору и угол φ не определен в этом случае)), либо $\sin sin\,\varphi = 0$ ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$). Итак $\vec{c} = \vec{0}$. В этом случае векторное произведение уже определяется первым свойством. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $\left|\vec{c}\right| \neq 0$, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задают векторное пространство V^2 , базисом которого они являются. Вектор $\vec{c}$ ортогонален этому подпространству в пространстве V^3 . Векторы $\vec{a}, \vec{b},$ и $\vec{c}$ не компланарны и можно говорить об их ориентации.

Теорема 9. Свойства векторного произведения.

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ - свойство антисимметрии.
2. $\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$
3. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$

Свойства 2 и 3 называются линейностью векторного произведения по первому множителю.

Доказательство. Для доказательства первого свойства нужно проверить равенство двух векторов $\vec{p} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{q} = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$.В противном случае не только Со их длины $\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin sin\ \varphi$, где φ -угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и $\left|\vec{q}\right| = \left|-\left[\vec{b}, \vec{a}\right]\right| = \left|\left[\vec{b}, \vec{a}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin sin\ \varphi$ равны, но они ортогональны одному векторному пространству V^2 (одной плоскости). Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ - положительно ориентированная тройка векторов .Из свойств ориентации базисов следует, что $\vec{b}, \vec{a}, \vec{p}$ – отрицательно ориентированная тройка векторов. Однако, $\vec{b}, \vec{a}$, $\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ - положительно ориентированная тройка векторов, $\vec{b}, \vec{a}, \vec{q}$- отрицательно ориентированная тройка векторов. $\vec{p} = \vec{q}$.

Докажем свойство 2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или $\lambda=0$, то равенство очевидно : $\vec{0} = \vec{0}$.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и $\lambda\neq0$. Проверим равенство векторов $\vec{p} = \left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{q} = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Для этого сначала вычислим их длины. Если φ -угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то тот же угол будет между векторами $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$,при $\lambda > 0$ и угол $\pi - \varphi$, при $\lambda < 0$.В любом случае синус угла сохраняется.

$$\left|\vec{p}\right| = \left|\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\lambda\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin sin\ \varphi = |\lambda|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin sin\ \varphi = \left|\vec{q}\right|$$

Векторы $\vec{a}$, $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат одному векторному пространству (плоскости) V^2, следовательно, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ –равные по модулю коллинеарные векторы. Осталось проверить, что они сонаправлены. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ – положительно ориентированная тройка векторов. Так как ориентация тройки векторов не меняется при умножении на положительное число одного из них и меняется на противоположную при умножении на отрицательное, то $\lambda\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{a}, \vec{b}, \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ - одинаково ориентированные тройки векторов . $\vec{p} = \vec{q}$.
Для доказательства свойства 3 нам потребуется геометрическая конструкция векторного произведения векторов.

Построение векторного произведения $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

Рассмотрим неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и приложим их к точке O. Векторы определяют плоскость $\pi\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, проходящую через точку O. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку O и перпендикулярную вектору $\vec{a}$. Обозначим эту плоскость $\pi^{\perp}_{\vec{a}}$. Плоскости имеют общую точку и пересекаются (согласно Евклидовой геометрии) по прямой l. Превратим эту прямую в числовую ось, выбрав в качестве начала отсчета точку O и произвольные (одно из 2-х возможных направлений)

Пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, тогда угол между вектором $\vec{b}$ и осью l равен или $\frac{\pi}{2} - \varphi$ $(\vec{a}\perp l)$, или $= \frac{\pi}{2} + \varphi$.

Найдем $\vec{b}_1$ – вектор-проекцию вектора $\vec{b}$ на ось l:

$\vec{b}_1 = \vec{pr_l}\vec{b}$; $\left|\vec{b}_1\right| = \left|pr_l\vec{b}\right|$. Вектор $\vec{b}_1 \in \pi^{\perp}_{\vec{a}}$ и одновременно $\vec{b}_1 \in \pi\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Повернем его против часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, находящегося в конце вектора $\vec{a}$, в плоскости $\pi^{\perp}_{\vec{a}}$ на угол $\frac{\pi}{2}$. Полученный вектор обозначим через $\vec{b}_2$.

Проверим, что $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left|\vec{a}\right| \vec{b}_2$.

Нужно проверить, что все три свойства векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняются для вектора $|\vec{a}| \bullet \vec{b}_2$.

Действительно,

$$\left||\vec{a}| \bullet \vec{b}_2\right| = |\vec{a}||\vec{b}_2| = |\vec{a}||\vec{b}_1| = |\vec{a}|\left||\vec{b}| \cos cos\,(\tfrac{\pi}{2} \pm \varphi)\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin sin\,\varphi\,;$$

$$\vec{b}_2 \perp \vec{a},\ \vec{b}_2 \perp \vec{b}_1, \text{следовательно,}$$

$$\vec{b}_2 \perp \text{пл}(\vec{a}, \vec{b}) \text{ и } \vec{b}_2 \perp \vec{b}.$$

При умножении на число $|\vec{a}|$ ортогональность сохраняется. Наконец, проверим, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, |\vec{a}| \bullet \vec{b}_2$ имеет положительную ориентацию. Тройка векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}$ имеет положительную ориентацию по построению вектора $\vec{b}_2$. При «круговой» перестановке векторов их ориентация сохраняется. Следовательно, тройка $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ имеет положительную ориентацию. Так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{b}_1$ находятся по одну сторону от плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}_2$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}_2$ имеет ту же ориентацию, что и тройка $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2$, то есть положительную. Умножение $\vec{b}_2$ на положительное число $|\vec{a}|$ не меняет ориентацию. Эта конструкция позволяет закончить доказательство теоремы 9. Справедливость свойства 3 следует из того, что векторное произведение векторов получается в результате трех последовательных операций над одним из множителей : проектирования на ось ,поворота на 90^0 и умножения на число. На каждом шаге сумма векторов переходит в сумму образов.

Рассмотрим $\vec{i}$,$\vec{j}$ и $\vec{k}$ - ортонормированный базис векторного пространства V^3 и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Каждый из этих векторов можно разложить по базису, то есть представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{i}$,$\vec{j}$ и $\vec{k}$: $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_{2\vec{j}} + a_3 \vec{k}$, $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_{2\vec{j}} + b_3 \vec{k}$ или в координатной форме : $\vec{a} = (a1\ \ a2\ a3\ )$, $\vec{b} = (b1\ \ b2\ b3\ )$. Вычислим векторное произведение этих векторов, используя свойства доказанные в теореме 8.

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left[a1\,\vec{i} \;+\; a2\vec{j} \;+\; a3\,\vec{k},\ b1\,\vec{i} \;+\; b2\vec{j} \;+\; b3\,\vec{k}\right] =$$

$$a_1 b_1 [\vec{i},\vec{i}] + a_1 b_2 \left[\vec{i},\vec{j}\right] + a_1 b_3 [\vec{i},\vec{k}] + a_2 b_1 \left[\vec{j},\vec{i}\right] + a_2 b_2 [\vec{j},\vec{j}] + a_2 b_3 [\vec{j},\vec{k}] + a_3 b_1 \left[\vec{k},\vec{i}\right] + a_3 b_2 \left[\vec{k},\vec{j}\right] + a_3 b_3 [\vec{k},\vec{k}]$$

Найдем попарные векторные произведения базисных векторов.

$$[\vec{i},\vec{i}] = =[\vec{j},\vec{j}] = \left[\vec{k},\vec{k}\right] = \vec{0}. \quad \left[\vec{i},\vec{j}\right] = \vec{k},\ [\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j},\ [\vec{j},\vec{k}] = \vec{i},$$

Остальные векторные произведения получаются с использованием свойства антисимметрии.

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{k}$$

Мы нашли разложение векторного произведения векторов по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и можем записать векторное произведение в координатной форме.

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = (a2\,b3 \;-\; a3\,b2 \;\; a3\,b1 \;-\; a1\,b3 \;\; a1b2 \;-\; a2b1\,) \qquad (4)$$

Заметим, что **модуль векторного произведения** $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ **равен площади S параллелограмма**, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$., что дает возможность решать геометрические задачи с помощью векторной алгебры.

Пример. Даны вершины треугольника A(1; —1; 2), B(5; —6; 2) и C(1; 3; —1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Рассмотрим векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ и вычислим их координаты в ортонормированном базисе $\vec{i}\ ,\vec{j}\ \vec{k}$ (ортонормированность базиса существенна , так как формула (4), которую мы используем получена в этом предположении!). Нам заданы координаты точек A,B и C в декартовой системе координат, то есть в системе координат, образованной базисными осями векторов , $\vec{i}$,$\vec{j}$ и $\vec{k}$ проложенных к точке O. В этом случае координаты векторов , соединяющих две точки находятся по правилу (мы его обоснуем ниже при изучении различных систем координат) : из координат точки конца вектора вычитаются соответствующие координаты точки его начала. $\vec{AB} = (4 \;-\; 5\;0\,)$, $\vec{AC} = (0\;4 \;-\; 3\,)$.

Найдем площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$.Для этого необходимо найти $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ и вычислить его **длину.**

Применим формулы (2) и (4). $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ =(15 12 16),$\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right|$ = $\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2}$ = 25. Итак площадь S=25. Для нахождения высоты параллелограмма , опущенной на сторону AC, осталось найти длину этой стороны. Но это- длина вектора $\vec{b}$. $\left|\vec{b}\right|$ =$\sqrt{0^2 + 4^2 + (-\ 3)^2}$ =5. Поделив S на $\left|\vec{b}\right|$, получим высоту $h\ =\ 5$.

§6. Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ и равное $([\vec{a},\ \vec{b}],\ \vec{c})$.

Смешанное произведение – числовая функция трёх векторных переменных.

Теорема 10. Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение линейно по всем переменным, так как является композицией двух произведений (векторного и скалярного), каждое из которых линейно по своим переменным.

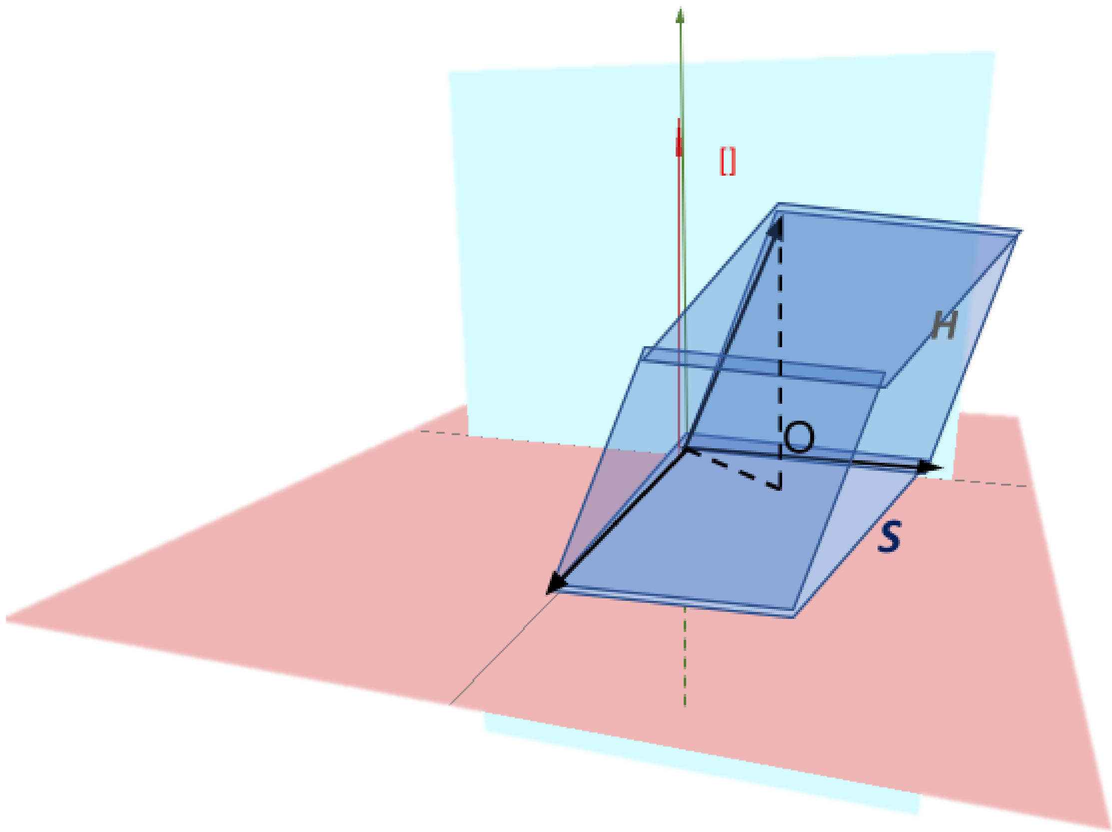
2. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Докажем это утверждение. Пусть векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны, тогда в случае, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $[\vec{a},\ \vec{b}] = \vec{0}$ и $\left(\vec{0},\ \vec{c}\right) = 0$. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то они задают плоскость π $(\vec{a},\ \vec{b})$, в которой находится и вектор $\vec{c}$. Но $[\vec{a},\ \vec{b}]$ – вектор, перпендикулярный плоскости π $(\vec{a},\ \vec{b})$, следовательно, $([\vec{a},\ \vec{b}],\ \vec{c}) = 0$. Обратно, если $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = 0$, то векторы $[\vec{a},\ \vec{b}]$ и $\vec{c}$ ортогональны или один из них нулевой. Если $[\vec{a},\ \vec{b}] = \vec{0}$, то векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ коллинеарны, а $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – компланарны.Если $\vec{c} = \vec{o}$, то векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – компланарны.

Наконец, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ ортогонален плоскости $\pi(\vec{a},\ \vec{b})$ и $\vec{c}$ лежит в этой плоскости, так как $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – компланарны.

Теорема (О геометрическом смысле смешанного произведения).

Если векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ не компланарны, то их смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, со знаком плюс, если тройка векторов имеет положительную ориентацию, и со знаком минус в противном случае.

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед, построенный на трех некомпланарных векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, приложенных к одной точке O, и прямую l, перпендикулярную плоскости $\pi\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ и проходящую через точку O.



Вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$, приложенный к точке O, лежит на этой прямой. Выбираем положительное направление на прямой l, так чтобы оно совпадало с направлением вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ и превращаем прямую в числовую ось.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = pr_{[\vec{a}, \vec{b}]}\vec{c}\,|[\vec{a}, \vec{b}]|$

Модуль векторного произведения

$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin sin\, \varphi$ - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, которую мы обозначили через S. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначим через $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Объем параллелепипеда равен произведению площади основания S на высоту H – длину перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\vec{c}$, на плоскость $\pi(\vec{a}\ \vec{b})$.

Но $H = |pr_{[\vec{a}, \vec{b}]}\vec{c}|$, причем $pr_{[\vec{a}, \vec{b}]}\vec{c} > 0$, если $\vec{c}$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ находятся по одну сторону от плоскости $\pi(\vec{a}, \vec{b})$ и $pr_{[\vec{a}, \vec{b}]}\vec{c} < 0$ - если по разные.

В первом случае тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ориентирована так же, как и векторы $\vec{a}, \vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$. То есть – положительно, во втором случае ориентация противоположна, т. е. отрицательна.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| pr_{[\vec{a}, \vec{b}]}\vec{c} = S(\pm H)$ где знак перед H зависит от ориентации тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей в ортонормированном базисе

Для вычисления смешанного произведения разложим векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по ортонормированному базису:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \text{ и } \vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \text{ и}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \quad (5)$$

Смешанное произведение векторов также используется для решения различных геометрических задач.

Пример. Рассмотрим три вектора в пространстве V^3:

$\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b} = (-1\ \ 2\ \ -3)$, $\vec{c} = (0\ \ 5\ \ 0)$. Можно ли взять эти векторы в качестве базиса пространства V^3? Это можно сделать (и тем самым линейно выразить любой вектор пространства через эти векторы) тогда и только тогда, когда рассматриваемые векторы не компланарны. Согласно свойству 2 смешанного произведения, критерием компланарности является равенство нулю смешанного произведения. Можно использовать формулу (5) для вычисления, но можно заметить, что для вычисления $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ с учетом специфики вектора $\vec{c}$ и формулы (1), достаточно вычислить только вторую координату вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$. Используем формулу (4), $a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0$. Следовательно, смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю и векторы компланарны (для базиса не подходят).

§7. Определители 2-ого и 3-его порядка.

Формулы (4) и (5), которые нужны для вычисления векторного и смешанного произведения, на первый взгляд выглядят довольно сложно. Однако введение нового понятия- определителя матрицы упростит их использование.

Определение .Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка А =$(a\ b\ c\ d\ )$. **Детерминантом** или определителем матрицы А называется число det А =$|A|$ =$|a\ b\ c\ d\ |$ =ad – bc.

Определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях матрицы А.

Пример. $|2\ 0\ 3\ 1\ |$ =2*1- 3*0 =2.

Определение. Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка А= $(a1\ \ a2\ a3\ \ b1\ \ b2\ b3\ \ c1\ \ c2\ c3\ \ )$. **Детерминантом** или определителем матрицы А называется число det A $=|A|=|a1\ \ a2\ a3\ \ b1\ \ b2\ b3\ \ c1\ \ c2\ c3\ \ |$ =a_1 $|b2\ c2\ b3\ c3\ |$ – b_1 $|a2\ c2\ a3\ c3\ |$ +c_1 $|a2\ b2\ a3\ b3\ |$.

Распишем детерминанты второго порядка, входящие в это определение, и получим

$$\det A = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \qquad (7)$$

В этой алгебраической сумме шесть слагаемых, три со знаком плюс и три со знаком минус. Каждое слагаемое – произведение трех элементов матрицы А взятых из разных срок и разных столбцов.(буквы a,b,c- маркеры столбцов, а числа 1,2,3- строк. Заметим, что det A в точности совпадает (формула (5)) со смешанным произведением вектор- столбцов матрицы А . Из теоремы о геометрическом смысле векторного произведения следует, что абсолютная величина детерминанта третьего порядка равна объему параллелепипеда, построенного на вектор- столбцах матрицы, а знак указывает на ориентацию тройки вектор- столбцов.Если det A =0, то вектор- столбцы компланарны , “параллелепипед”- плоский и имеет нулевой объем.

Формулу (4) для вычисления координат вектора $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ можно записать с использованием детерминантов второго порядка .

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = |a2\ b2\ a3\ b3\ |\ \vec{i} - \ |a1\ b1\ a3\ b3\ |\ \vec{j} + |a1\ b1\ a2\ b2\ |\ \vec{k}\ \ = \left|\vec{i}\ \ a1\ b1\ \ \vec{j}\ \ a2\ b2\ \ \vec{k}\ \ a3\ b3\ \ \right| \ (6)$$

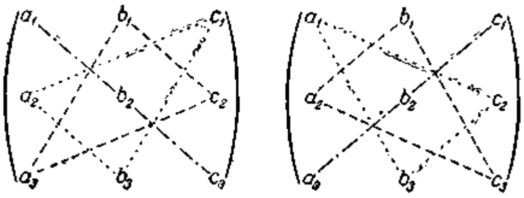
-разложение векторного произведения по **ортонормированному** базису.

Определитель второго порядка тоже имеет геометрический смысл. Пусть А = $(a\ b\ c\ d\ )$.Рассмотрим в пространстве V [3] ортонормированный базис $\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}$ и два вектора $\vec{a}\ = (a\ \ c\ 0\ )$и $\vec{b}$ =$(b\ \ d\ 0\ )$. Эти два вектора лежат в плоскости π (i, j). Найдем их векторное произведение по формуле (6). $\left[\vec{a}\ ,\ \vec{b}\right]$ = = $|a\ b\ c\ d\ |\ \vec{k}$ - вектор коллинеарный $\vec{k}$. Абсолютная величина детерминанта совпадает с модулем векторного произведения, который в свою очередь равен площади параллелограмма ,построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$,а знак- со знаком ориентации вектор –столбцов матрицы А на плоскости π (i, j).

Мы ввели понятие детерминанта квадратной матрицы для матриц второго и третьего порядка,причем детерминант третьего порядка мы определили через детерминанты порядка на единицу меньшего (второго).

Для практических вычислений детерминанта третьего порядка можно воспользоваться удобной схемой. Заметим, что в формуле (7) для вычисления детерминанта матрицы det A = $a_1b_2c_3$ –$a_1b_3c_2$ –$a_2b_1c_3$ +$a_3b_1c_2$ + $a_2b_3c_1$ – $a_3b_2c_1$ три слагаемых имеют знак плюс, а три- минус и представляют собой произведения элементов определителя, взятых из разных строк и разных столбцов так, как показано различными пунктирами на нижеприведенной схеме .

Чтобы получить три слагаемых входящих со знаком плюс, нужно перемножить элементы определителя так, как показано различными пунктирами на схеме слева, а со знаком минус-на схеме справа.



Пример. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ =1*1*(-1) +5*2*3 +0*0*0 –(5*1*0 +0*2*(-1)+0*3*1)=29

b) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.$=2a^3$

Мы ввели понятие детерминанта квадратной матрицы для матриц второго и третьего порядка,причем детерминант третьего порядка мы определили через детерминанты порядка на единицу меньшего (второго).

Подобную конструкцию можно перенести на случай квадратной матрицы любого порядка n.

Определение.(индуктивное) Детерминантом матрицы порядка n называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Если n =1, то детерминант матрицы A=(a) равен числу a.
2. Если известны детерминанты матриц порядка n-1,то детерминант матрицы A=$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ порядка n определяется по формуле

$$\det A=a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} a_1^n \begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

В этой сумме элементы первой строки a_1^i матрицы A умножаются на детерминанты матриц порядка n-1,полученных из матрицы A вычеркиванием первой строки и i-ого столбца, и на число$(-1)^{i+1}$, а затем складываются.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка.

|0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 | =0|0 1 1 1 0 1 1 1 0 |-1|1 1 1 1 0 1 1 1 0 |+1 |1 0 1 1 1 1 1 1 0 |-1|1 0 1 1 1 0 1 1 1 |=0-1-1-1=-3.

Вычисление определителей существенно упрощается, если использовать их свойства. Для определителя любого порядка справедливы следующие свойства, которые мы докажем для определителей третьего порядка.

Свойства определителей

Теорема 1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причём каждую строку заменить столбцом с тем же номером, т. е. определитель матрицы не меняется при транспонировании.

$$|a1\ \ a2\ a3\ \ b1\ \ b2\ b3\ \ c1\ \ c2\ c3\ \ | = \ \ |a1\ \ b1\ c1\ \ a2\ \ b2\ c2\ \ a3\ \ b3\ c3\ \ |$$

Для доказательства этого утверждения достаточно расписать детерминанты по формуле (7) det A = a1b2c3 –a1b3c2 –a2b1c3 +a3b1c2 + a2b3c1 – a3b2c1 . Транспонирование матрицы А осуществляет замену a ↔1 ,b ↔ 2 ,c ↔3.

Из теоремы следует, что строки и столбцы в теории определителей равноправны, то есть утверждения, доказанные для столбцов , остаются справедливыми и для строк детерминанта.

Теорема 2. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя меняет его знак на противоположный. Например,

$$|a1\ \ a2\ a3\ \ b1\ \ b2\ b3\ \ c1\ \ c2\ c3\ \ | = -\ |a1\ \ a2\ a3\ \ \mathrm{c}1\ \ \mathrm{c}2\ \mathrm{c}3\ \ b1\ \ b2\ b3\ \ |$$

Доказательство. Алгебраическое доказательство можно получить также с помощью формулы (7). Можно доказать теорему геометрически. Детерминант третьего порядка- объем параллелепипеда, построенного на вектор- столбцах матрицы со знаком согласованным с ориентацией тройки векторов. При перестановке столбцов объем параллелепипеда не меняется, а ориентация меняется на противоположную.

Теорема 3. Если вектор–столбцы матрицы линейно зависимы, то ее определитель равен 0.

Доказательство. Определитель матрицы – смешанное произведение ее вектор-столбцов,а линейная зависимость трех векторов-их компланарность.

Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.

Следствие 1. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

Следствие 2. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю.

Следствие 3. Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю

Теорема 4. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число к равносильно умножению определителя на это число к. Например,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathrm{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 5. Если какой либо вектор-столбец (вектор- строка) определителя представляет собой сумму двух вектор-столбцов (вектор-строк), то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, в каждом из которых на месте рассматриваемого вектор-столбца стоит одно из слагаемых , остальные вектор-столбцы (вектор-строки) у всех трёх определителей одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1^{'} + a_1^{''} & b_1 & c_1 \\ a_2^{'} + a_2^{''} & b_2 & c_2 \\ a_3^{'} + a_3^{''} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^{'} & b_1 & c_1 \\ a_2^{'} & b_2 & c_2 \\ a_3^{'} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} . + \begin{vmatrix} a_1^{''} & b_1 & c_1 \\ a_2^{''} & b_2 & c_2 \\ a_3^{''} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теоремы 4 и 5 – это свойство линейности смешанного произведения.

Следствие. Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |a1\ \ a2\,a3\ \ b1\ \ b2\,b3\ \ c1\ \ c2\,c3\ \ | \ + \ |kb1\ \ kb2\,kb3\ \ b1\ \ b2\,b3\ \ c1\ \ c2\,c3\ \ |.$$

Последний определитель равен нулю, так как его первый и второй столбцы пропорциональны.

Итак, мы знаем, как меняется определитель квадратной матрицы при элементарных преобразованиях над ее строками или столбцами. Преобразование первого типа (перестановка строк) меняет знак определителя , преобразование второго типа (умножение строки на число отличное от нуля) умножает определитель на это число, отличное от нуля, преобразование третьего типа (прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число) определитель не меняет .Дальнейшие свойства определителей матриц произвольного порядка будут рассмотрены в курсе алгебры.

Пример. Вычислить определители с использованием вышеупомянутых свойств.

а) $$\left|\sin sin\,\alpha^{2}\ \ \sin sin\,\beta^{2}\,\sin sin\,\gamma^{2}\ \ 1\ \ 1\ 1\ \ \cos cos\,\alpha^{2}\ \ \cos cos\,\beta^{2}\ \ \cos cos\,\gamma^{2}\right| =$$
$$\left|\sin sin\,\alpha^{2} + \cos cos\,\alpha^{2}\ \ \sin sin\,\beta^{2} + \cos cos\,\beta^{2}\,\sin sin\,\gamma^{2} + \cos cos\,\gamma^{2}\ \ 1\ \ 1\ 1\ \ \cos cos\,\alpha^{2}\ \ \cos cos\,\beta^{2}\ \ \cos cos\,\gamma^{2}\ \ \right| = 0$$

Мы воспользовались следствием из теоремы 5 и следствием 1 из теоремы 3.

Задачи для подготовки к контрольной работе по векторной алгебре.

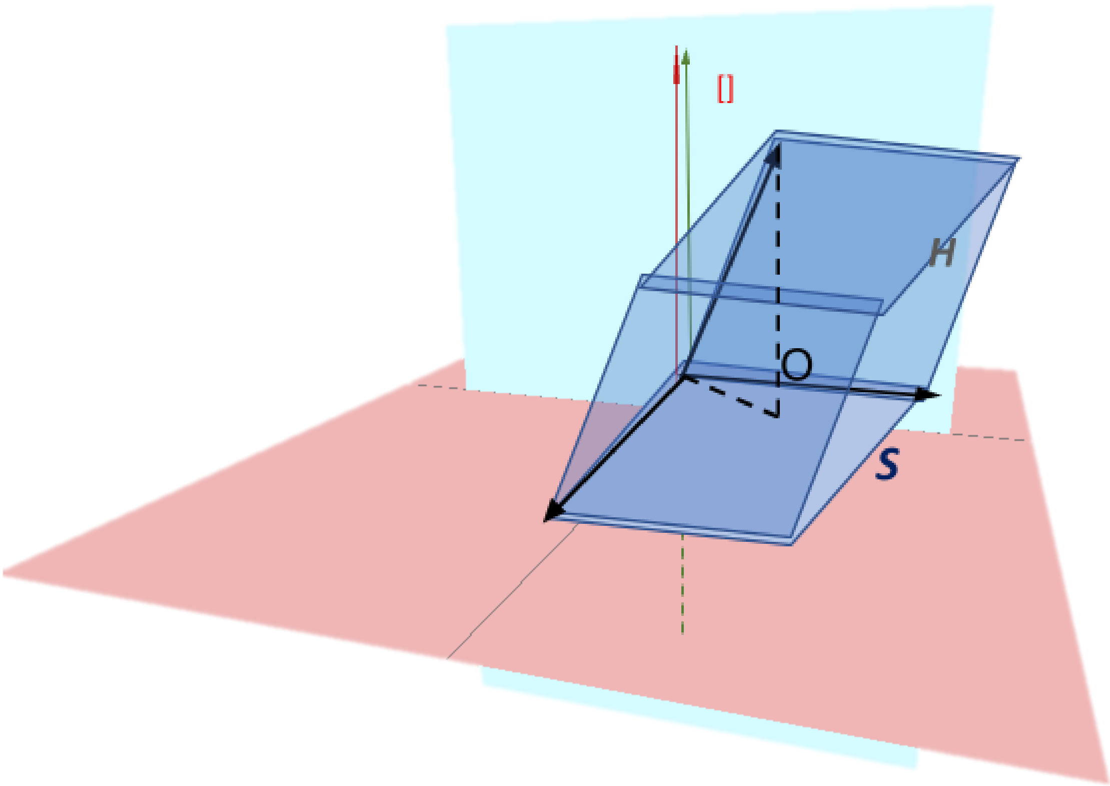
Даны четыре точки A(2;1;-1), B(1;-2;0), C(3;3;-1),D(3;-1;-2).

1. Найти векторы единичной длины, коллинеарные вектору $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
2. Найти единичный вектор, сонаправленный вектору $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
3. Найти угол между векторами $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
4. Найти $pr_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\overrightarrow{CD}$.
5. При каком значении α вектор $\overrightarrow{\mathrm{a}}$ =(α;1;4) перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$?
6. При каком значении α вектор $\overrightarrow{\mathrm{a}}$ =(α;4;0) коллинеарен вектору $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$?
7. Найти площадь треугольника BCD.
8. Найти высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A.
9. Найти объем параллелепипеда построенного на векторах $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{A}D}$.
10. Найти объем тетраэдра ABCD и высоту, опущенную из вершины B.
11. Будут ли векторы $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{A}D}$ компланарны?
12. При каком значении α вектор $\vec{c}= (-\ 1\ \ \alpha\ 2\ )$ компланарен векторам $\vec{a}= \overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}= \overrightarrow{CD}$? Найти разложение полученного вектора $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

*Пример.*Найти объем тетраэдра , построенного на векторах

$$\vec{a} = (1\ \ 2\ 3\ ),\ \ \vec{b}\ \ =(-\ 1\ 2\ \ -\ 3\ )\ ,\ \vec{c} = (1\ \ 5\ 1\ )$$

и его высоту, опущенную на основание,порожденное векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



$V_{тетр.} = \frac{1}{3} S_{осн.}$ H .Высота тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}\ , \vec{c}$, совпадает с высотой H параллелепипеда , построенного на этих векторах.

Площадь основания тетраэдра $S_{осн}$. равна половине площади основания параллелепипеда S. Следовательно $V_{тетр.} = \frac{1}{6}\ V_{пар.}$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}\ , \vec{c}$ равен $V_{пар.}$ = =SH и ,согласно теореме о геометрическом смысле смешанного произведения, равен **абсолютной величине** смешанного произведения

$(\vec{a}\ ,\ \ \vec{b}, \vec{c})$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det\left(a1\ \ a2\ a3\ \ b1\ \ b2\ b3\ \ c1\ \ c2\ c3\ \right) =$$

$$|1\ \ 2\ 3\ \ -1\ \ 2\ \ -3\ \ 1\ \ 5\ 1\ | = |2\ 5\ \ -3\ 1\,| + |2\ 5\ 3\ 1\,| + |2\ 2\ 3\ \ -3\,| = 17 - 13 - 12 = -8$$

$$V_{\text{пар.}} = 8. \qquad V_{\text{тетр.}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Для нахождения высоты,опущенной на основание векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найдем S-площадь параллелограмма , построенного на этих векторах. Для этого вычислим векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ по формуле (6) и найдем его **модуль**.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left|\vec{i}\ \ a1\ b1\ \ \vec{j}\ \ a2\ b2\ \ \vec{k}\ \ a3\ b3\ \right| =$$

$$= \left|\vec{i}\ \ 1\ \ -1\ \ \vec{j}\ \ 2\ 2\ \ \vec{k}\ \ 3\ \ -3\ \right| = -12\vec{i} + 4\vec{k}$$

$$S = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}. \quad H = \frac{V\text{пар}}{S} = \frac{8}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Пример. При каком значении параметра α вектор $\vec{c} = (-\ 1\ \ \alpha\ 2\ )$ компланарен векторам

a) $\vec{a} = (1\ \ 2\ 3\ )$ и $\vec{b} = (-\ 1\ \ 2\ \ -\ 3\ )$

b) $\vec{a} = (1\ \ 2\ 3\ )$ и $\vec{b} = (2\ \ 4\ 6\ )$

c) $\vec{a} = (1\ \ 2\ 3\ )$ и $\vec{b} = (-\ 1\ \ 2\ 0\ )$?

Найти разложение полученного вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Критерий компланарности трех векторов- равенство нулю их смешанного произведения. Смешанное произведение равно определителю матрицы, в столбцах которой стоят координаты этих векторов.

a) $|1\ \ 2\ 3\ \ -1\ \ 2\ \ -3\ \ -1\ \ \alpha\ 2\ |$= (4+3α)+(4-3α)-1(-6-6)=20$\neq 0$.Вектор $\vec{c}$ не принадлежит плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ни при каком значении параметра α Разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не существует.

b) $|1\ \ 2\ 3\ \ 2\ \ 4\ 6\ \ -1\ \ \alpha\ 2\ |$ =(8- 6α)-2(4 - 3α)-1 (12-12) =0. Вектор $\vec{c}$ принадлежит плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при любом значении параметра α Заметим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, $\vec{b}$ =2 $\vec{a}$, а вектор $\vec{c}$ им не коллинеарен. Разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не существует.

$c)|1\ \ 2\ 3\ \ -1\ \ 2\ 0\ \ -1\ \ \alpha\ 2\ |$ =4 +(4-3α)-1(-6) =14-3α =0. Вектор $\vec{c}$ принадлежит плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при значении параметра α =$\frac{14}{3}$. Найдем в этом случае разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{c}$ =x $\vec{a}$ +y $\vec{b}$, где x и y- координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

$\left(-1\ \ \frac{14}{3}\ 2\right)$ =x $(1\ \ 2\ 3)$ +y $(-1\ \ 2\ 0)$ $=(x-y\ \ 2x+2y\ 3x+0y)$. Получаем систему уравнений $\{x-y=-1\ 2x+2y=\frac{14}{3}\ 3x=2$.Из первого и третьего уравнений находим x= $\frac{2}{3}$, y=$\frac{5}{3}$.Подставляем эти значения во второе уравнение, которое обращается в тождество. Итак $\vec{c}$ = $\frac{2}{3}\vec{a}$ +$\frac{5}{3}$ $\vec{b}$.

Глава 2. Аналитическая геометрия прямых и плоскостей.

§1 Системы координат на плоскости и в пространстве.

Система координат на плоскости задается точкой O (началом отсчета) и парой неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (базисом векторов плоскости).

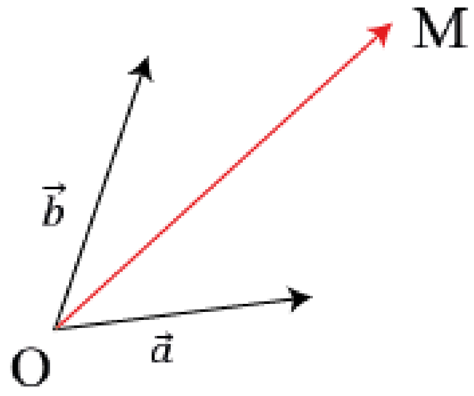


Рис.1

Координатами точки M называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{a},\vec{b}$.

Если базис $\vec{a},\vec{b}$ ортонормированный, то система координат называется декартовой, а базисные оси – осями координат OX и OY.

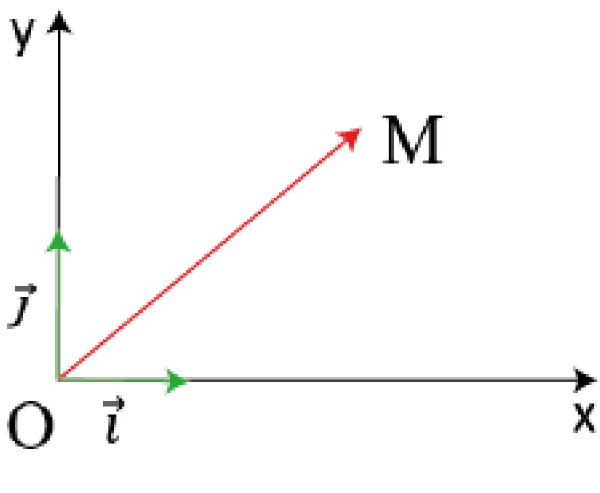


Рис.2

Координаты точки M в этом случае – проекции точки M на координатной оси.

В трехмерном пространстве системы координат определяются аналогично. Система координат задается точкой O и базисом $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ пространства V^3 . Если базис ортонормированный, то система называется декартовой.

Координаты точки М – это координаты вектора $\vec{OM}$ в рассматриваемом базисе.

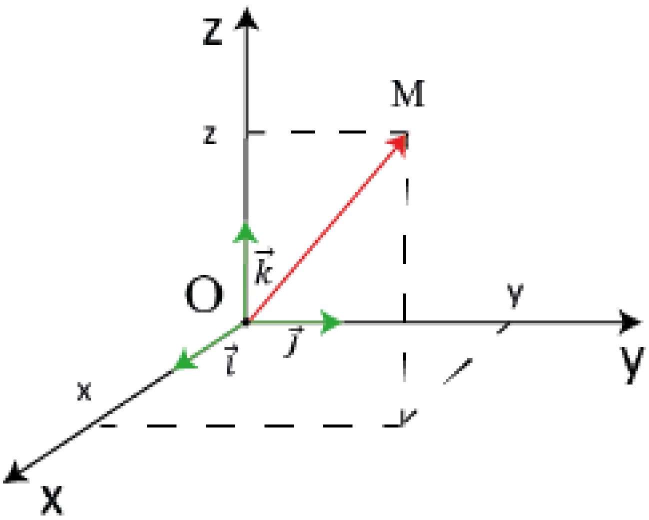


Рис.3.

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ M(x, y, z).$

<u>Теорема 1</u>

Если известны координаты двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в некоторой системе координат О, $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$, то координаты вектора $\vec{AB}$ находятся вычитанием из координат конца вектора соответствующих координат начала.

Доказательство. Из определения координат точек следует, что $\vec{OA} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$ и $\vec{OB} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{a} + (y_2 - y_1)\,\vec{b} + (z_2 - z_1)\,\vec{c}$$

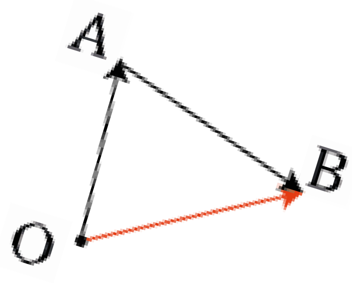
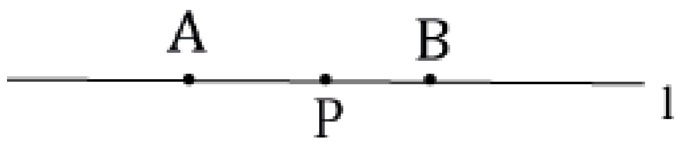


Рис. 4

Рассмотрим две точки $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ в трёхмерном пространстве, заданные своими координатами в некоторой системе координат $0, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Эти две точки задают числовую ось l :



Положение любой точки P на этой прямой можно охарактеризовать одним числом λ следующим образом. Рассмотрим векторы $\vec{AB}$ и $\vec{PB}$. Они коллинеарны и, если P не совпадает с точкой B, то $\vec{AP} = \lambda * \vec{PB}$. В таком случае говорят, что точка P делит отрезок AB в отношении λ.

1) Если $P = A$, то $\lambda = 0$
2) Если P находится внутри отрезка AB и $P \neq B$, то $\lambda > 0$ и при $P \rightarrow B : \lambda \rightarrow +\infty$
3) Если P лежит на прямой l вне отрезка AB, то $\lambda < 0$, так как векторы $\vec{AP}$ и $\vec{PB}$ противоположно направлены

<u>Теорема 2</u> (о делении отрезка в заданном отношении):

Пусть точка P делит отрезок AB в отношении λ, тогда координаты x, y, z точки P находятся по формулам: $x = \frac{x_1 + \lambda * x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda * y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda * z_2}{1+\lambda}$.

<u>Доказательство</u>:

Из теоремы 1 следует, что координаты векторов $\vec{AP}$ и $\vec{PB}$ находятся по формулам $\vec{AP} = \left(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\right)$ и $\vec{PB} = (x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)$. Из соотношения $\vec{AP} = \lambda * \vec{PB}$ следует, что $x - x_1 = \lambda * \left(x_2 - x\right),\ y - y_1 = \lambda * \left(y_2 - y\right),\ z - z_1 = \lambda * \left(z_2 - z\right)$.

Преобразуем:

$$x - x_1 = \lambda * \left(x_2 - x\right) \Rightarrow x * (1 + \lambda) = x_1 + \lambda * x_2$$
$$y - y_1 = \lambda * \left(y_2 - y\right) \Rightarrow y * (1 + \lambda) = y_1 + \lambda * y_2$$
$$z - z_1 = \lambda * \left(z_2 - z\right) \Rightarrow z * (1 + \lambda) = z_1 + \lambda * z_2$$

Так как λ не может быть равным -1, то получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda * x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda * y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda * z_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

Заметим, что середина отрезка делит отрезок в отношении 1. Из формул (1) следует, что координаты середины отрезка – это средние арифметические координат концов:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (2)$$

<u>*Пример*</u>:

Даны три точки $A(1; 0; -1)$, $B(0; 2; 2)$ и $C(-2; 2; 0)$. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC.

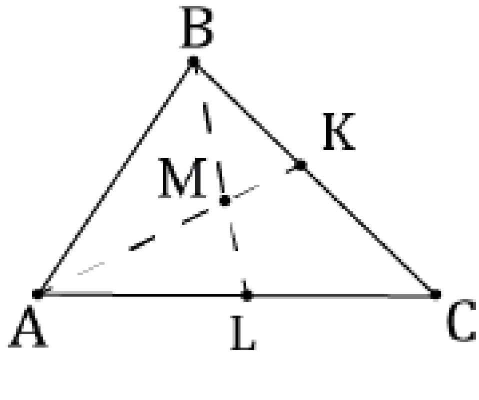


Рис.5

Точки K и L - середины сторон треугольника BC и AC соответственно. Точка M – точка пересечение медиан (всех трех).

Найдем координаты точки K по формулам 2 K(-1;2;1). Для нахождения координат точки M воспользуемся свойством медиан. В точке пересечения медианы делятся в отношении 2:1 $\vec{AM} = 2\,\vec{MK}$ Следовательно точка М делит отрезок АК в отношении 2. Из формул (1) получаем М (-1/3; 4/3; 1/3)

§2. Уравнение линий и поверхностей

Множество точек плоскости, в дальнейшем в основном будем рассматривать M(x, y) декартовы системы координат которые удовлетворяют уравнению F(x, y) = 0 называется линией. Если множество точек плоскости задается геометрически (например, окружность – множество точек, находящихся на фиксированном расстоянии от данной точки), то множество называется геометрическим местом точек.

Если координаты всех точек заданного геометрического места удовлетворяет уравнению F(x, y) = 0 и только они, то F(x, y) = 0 называется уравнением данного геометрического места точек.

Основные задачи аналитической геометрии можно сформулировать следующим образом

1. *Найти уравнение заданного геометрического места точек.*
2. *Исследовать геометрические свойства линии задаваемой уравнение F(x, y) = 0.*

Столь общее определение линии не является продуктивным, так как множество точек, задаваемое уравнением F(x, y) = 0 может не соответствовать нашему интуитивному представлению о линиях. Например, уравнении $x^2 + y^2 = 0$ задает всего одну точку O(0, 0), а уравнении |x| + x = 0 определяет полуплоскость M = {(x,y), $x \le 0$ $y \in R$}. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнения F(x, y) = 0, в которых функция F(x, y) – многочлен. Соответствующая линия называется алгебраической кривой. Степень многочлена F(x, y) называется порядком кривой. Так уравнение 2x – y + 1 = 0 задает прямую, которая таким образом является кривой первого порядка, а уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ – окружность, которая является кривой второго порядка.

Аналогичным образом в пространстве множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, называется поверхностью. Если $F(x, y, z)$ – многочлен, то поверхность называется алгебраической, а степень многочлена – порядком поверхности. Например, $x + y + z = 0$ – уравнение плоскости, которая является поверхностью первого порядка, а

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ – уравнение сферы, которая является поверхностью второго порядка.

Линией в пространстве называется геометрическое место точек пересечения двух поверхностей. Линия в пространстве задаётся системой уравнений поверхностей

$$\{F(x, y, z) = 0\ G(x, y, z) = 0$$

Например, система $\{x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ z = 0;$ задает окружность – линию пересечения сферы и координатной плоскости OXY

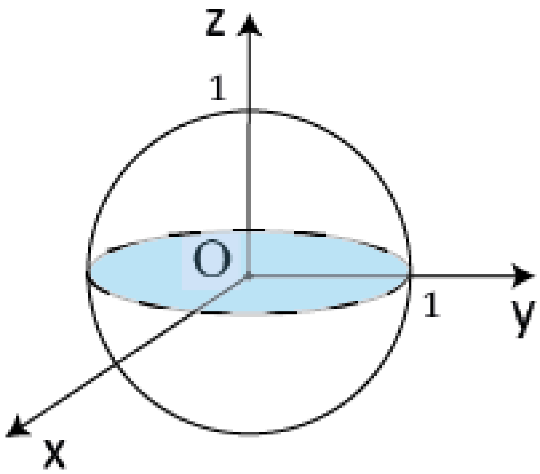


Рис. 6

§3 Прямая линия на плоскости

Рассмотрим фиксированную декартову систему координат на плоскости и геометрическое место точек некоторой прямой l.

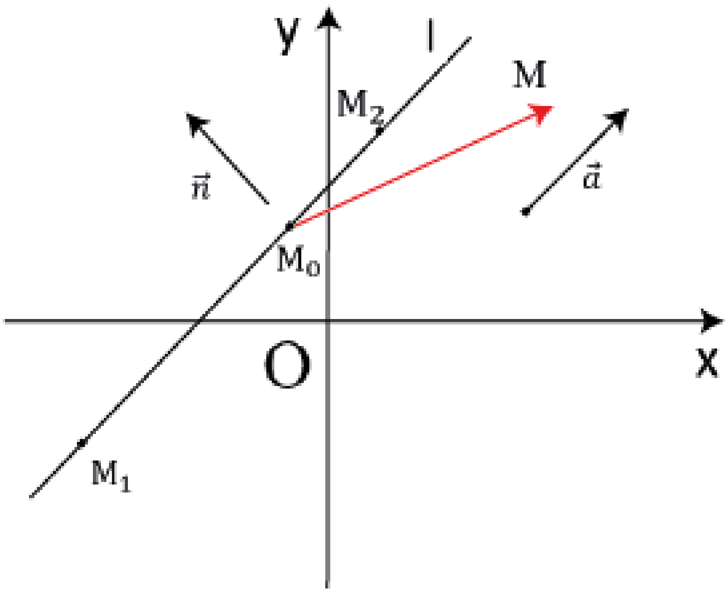


Рис. 7

Положение прямой l на плоскости можно охарактеризовать различными способами:

1) Двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащими на прямой
2) Точкой $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой l, и вектором $\vec{a}$ коллинеарным к l.
3) Точкой $M_0(x_0, y_0)$ и вектором $\vec{n}$, ортогональным прямой l.

Найдем уравнение прямой l в каждом из этих случаев.

Рассмотрим пункт в). Любой вектор $\vec{n} = (A; B)$, ортогональный прямой l, называется **нормалью** к прямой. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости. Она лежит на прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален $\vec{n}$. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$, а критерий ортогональности – равенство нулю скалярного произведения векторов.

$$\left(\vec{n},\ \overrightarrow{M_0M}\right) = A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0$$

$$Ax + By + \left(-Ax_0 - By_0\right) = 0$$

Обозначим $-\ Ax_0 - By_0$ через С.

Уравнение $Ax + By + \mathrm{C} = 0$ – уравнение прямой l.

Это – уравнение первой степени, которое называется **общим уравнением** прямой. Такое название обусловлено тем, что не только любая прямая l, как было показано выше, задается уравнением вида $Ax + By + \mathrm{C} = 0$, но и любое уравнение такого вида описывает прямую на плоскости.

Действительно, если $Ax + By + \mathrm{C} = 0$ – произвольное уравнение первой степени, то в случае $B = 0$ (А≠0, т.к. иначе не будет уравнения) уравнение принимает вид $x =- \frac{C}{A}$ – вертикальная прямая, а в случае $B \neq 0$ уравнение преобразуется в известное уравнение прямой l с угловым коэффициентом $y =- \frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, где $-\frac{C}{B}$ – координаты на оси OY точки пересечения с осью OY, а к $=- \frac{A}{B}$ – угловой коэффициент прямой – тангенс угла наклона прямой к оси OX ($tg\alpha =- \frac{A}{B}$). Заметим, что вектор $\vec{a}$ =(B,-A) будет коллинеарен прямой, а ортогональный ему вектор $\vec{n}$ =(A,B) будет нормалью к прямой l.

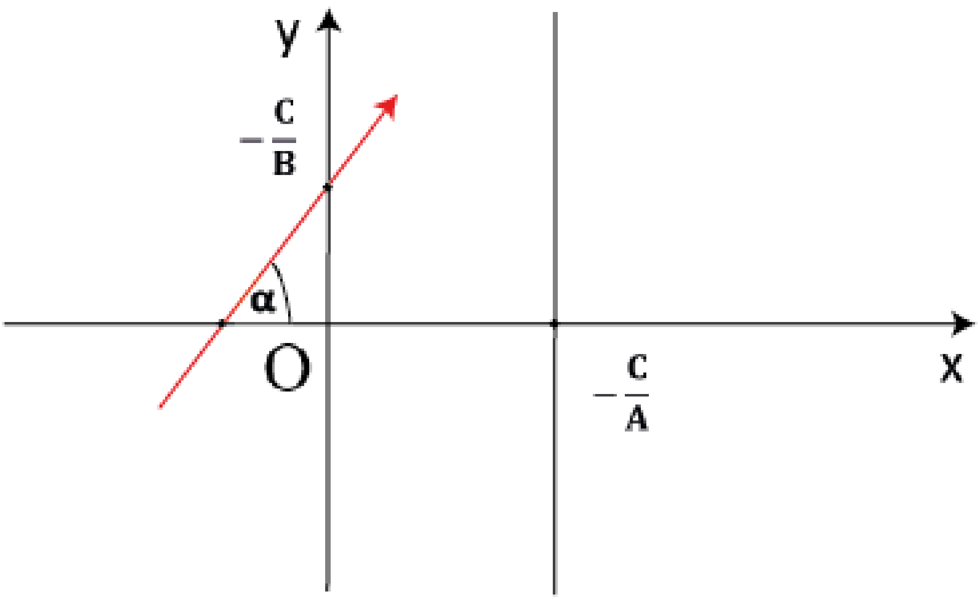


Рис. 8

Заметим, что если в общем уравнении $A = 0$, то прямая параллельна оси OX, а если $\mathrm{C} = 0$, то проходит через начало координат – точку O.

Рассмотрим второй способ задания прямой точкой $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой l, и вектором $\vec{a}$ коллинеарным к l.Любой вектор коллинеарный прямой l называется **направляющим вектором** этой прямой. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка плоскости. Она лежит на прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$, $\vec{a}$=(α,β). Условие коллинеарности – пропорциональность соответствующих координат. Запишем это условие $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$. Это уравнение первой степени-уравнение прямой, называемое **каноническим.**

Пример. Напишем каноническое уравнение оси ОХ. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\vec{i}$=(1,0) и точку О (0,0) находящуюся на прямой. Уравнение принимает вид $\frac{x}{1} = \frac{y}{0}$. Ноль в знаменателе указывает на то , что y=0, отношение $\frac{0}{0}$ не определено и пропорция верна для любого x.

Из канонического уравнения прямой можно получить еще один способ задания прямой. Отношения $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ равны, но принимают различные значения t для разных точек прямой $M(x,y)$. $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ =t .Отсюда получаем $\left\{\frac{x-x_0}{\alpha} = t \ \ \frac{y-y_0}{\beta} = t\right.$ или $\{x = \alpha t + x_0\ y = \beta t + y_0$ Это- **параметрическое** уравнение (уравнения) прямой.

В случае задания прямой l по 2-ум точкам $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, лежащими на этой прямой, можно воспользоваться уже выведенными уравнениями. Например, можно найти направляющий вектор прямой, используя данные точки $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ = ($x_2 - x_1, y_2 - y_1$), а в качестве точки , лежащей на прямой взять, например, $M_1(x_1,y_1)$. В этом случае уравнение прямой принимает вид $\frac{x-x_1}{x2-x1} = \frac{y-y_1}{y2-y1}$. Такая форма задания прямой называется уравнением **по двум точкам**.

Различные способы задания прямой используются при решении различных задач.

Задача 1. Две прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями. Определить их **взаимное расположение**. Для решения этой задачи используем общее уравнение прямых l_1 : $A_1x+B_1y+C_1=0$, l_2 : $A_2x+B_2y+C_2=0$. Геометрически возможны три случая: прямые могут совпасть, прямые могут оказаться параллельными и, наконец, прямые могут пересекаться в некоторой точке. Рассмотрим векторы нормали этих прямых

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1) \text{ и } \vec{n}_1 = (A_2, B_2).$$

Если эти векторы коллинеарны, то прямые либо совпадают, либо параллельны. В противном случае прямые пересекаются. Условие коллинеарности - равенство отношений соответствующих координат:

$\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2}$. Если $\frac{A1}{A2} \neq \frac{B1}{B2}$,то прямые пересекаются и координаты точки пересечения находятся из системы $\{A1x + B1y + C1 = 0\ A2x + B2y + C2 = 0.$ (Проверьте алгебраически, что при условии $\frac{A1}{A2} \neq \frac{B1}{B2}$ система совместна и имеет единственное решение).

$$\{A1x + B1y + C1 = 0;\ A2x + B2y + C2 = 0. \qquad (1)$$

Система (1) описывает множество точек пересечения прямых l_1 и l_2 в любом случае, в частности в случае коллинеарности векторов нормали

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1) \text{ и } \vec{n}_2 = (A_2, B_2).$$

В этом случае координаты векторов пропорциональны

$\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2} = \lambda$. ($\lambda \neq 0$) $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$ и система (1) принимает вид:

$$\{\lambda A2x + \lambda B2y + C1 = 0;\ A2x + B2y + C2 = 0.$$

Решим эту систему методом Гаусса.

$$(\lambda A2\ \lambda B2\ C1;\ A2\ B2\ C2) \to \left(A2\ B2\ \frac{1}{\lambda}C1;\ A2\ B2\ C2\right) \to\to \left(A2\ B2\ \frac{1}{\lambda}C1\ 0\ ;\ 0\ C2 - \frac{1}{\lambda}C1\right).$$

Столбец C - столбец свободных членов, поэтому из критерия совместности (столбец свободных членов не является главным) следует, что если $C2 - \frac{1}{\lambda}C1 \neq 0$, то система несовместна и прямые l_1 и l_2

параллельны. В случае $C2 - \frac{1}{\lambda}C1 = 0$ система совместна , имеет бесконечно много решений и прямые l_1 и l_2 совпадают. Условие $C2 - \frac{1}{\lambda}C1 = 0$ можно записать в виде

$\frac{C1}{C2} = \lambda$. В итоге получаем $\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2} = \frac{C1}{C2} \Leftrightarrow$ прямые l_1 и l_2 **совпадают**,

$\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2} \neq \frac{C1}{C2} \Leftrightarrow$ прямые l_1 и l_2 **параллельны**, $\frac{A1}{A2} \neq \frac{B1}{B2} \Leftrightarrow$ прямые l_1 и l_2

пересекаются.

Задача 2. Даны прямая $l : Ax+By+C = 0$ и точка M_o (x_o,y_o) на плоскости. Требуется найти расстояние $d(M_o,l)$ от точки M_o до прямой l.

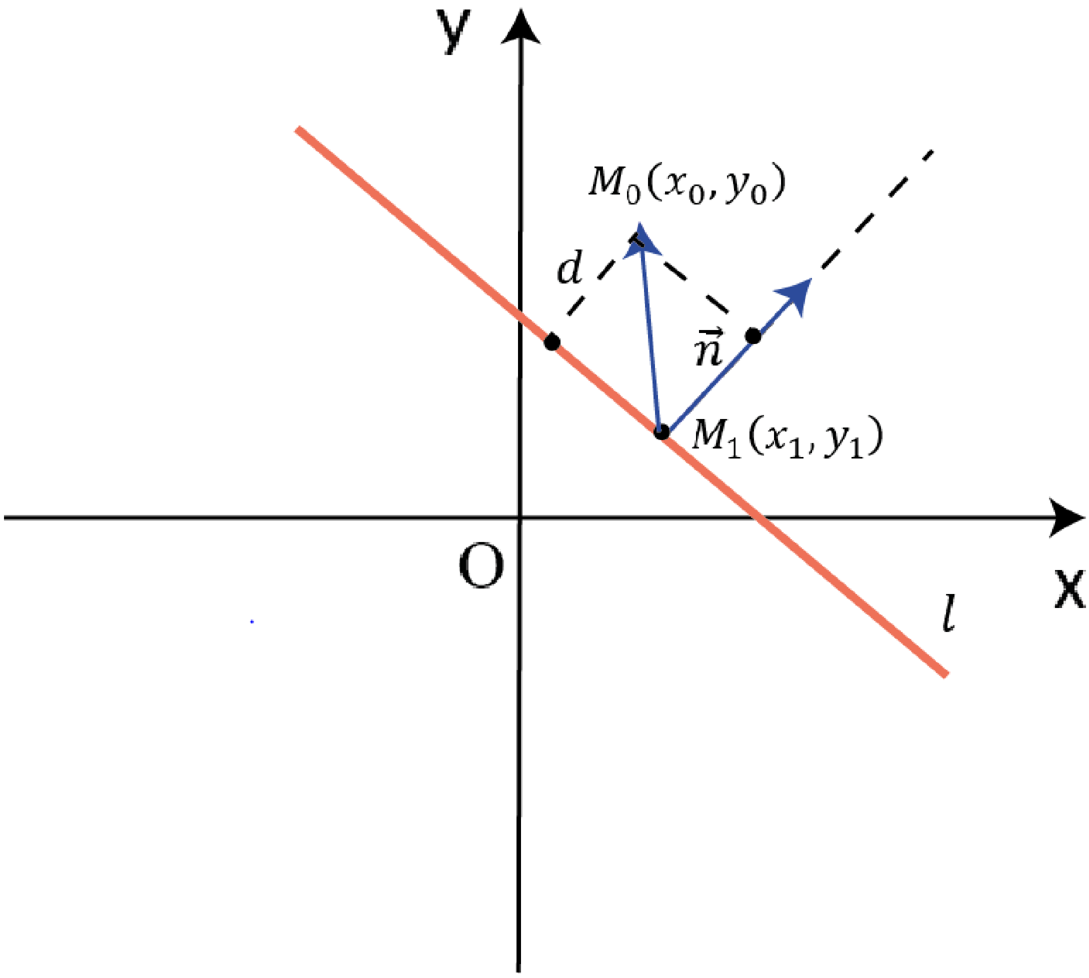


Рис.9

Рассмотрим какую-нибудь точку $M_1(x_1, y_1)$ на прямой l , тогда $Ax_1+By_1+C=0$, $-Ax_1-By_1=C$.

Вектор $\overrightarrow{M1Mo}=(x_o-x_1, y_o-y_1)$. Как видно на рис. 9

$$d(M_o,l)=\left|pr_{\vec{n}}^{\overrightarrow{M1Mo}}\right|=\left|\frac{(\vec{n},\overrightarrow{M1Mo})}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{A(xo-x1)+B(yo-y1)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{Axo-Ax1+Byo-By1}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{Axo+Byo-Ax1-B1y1}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$\mathbf{d(M_o,l)}=\left|\frac{Axo+Byo+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \qquad (2)$$

Пусть M(x,y) точка плоскости, тогда f(M)=Ax+By+C функция от точки M. f(M)=0 в точках прямой l ,по одну сторону от прямой, в одной полуплоскости функция f(M)>0, а по другую сторону, в другой полуплоскости f(M)< 0. Это вытекает из непрерывности функции f(M) и того факта, что непрерывная меняет знак только проходя через ноль.

Формула (2) показывает, что для нахождения расстояния от точки до прямой нужно подставить координаты этой точки в левую часть уравнения прямой (вычислить f(M)), взять абсолютную величину полученного числа и поделить его на длину того вектора нормали, координаты которого являются коэффициентами при x и y в уравнении прямой f(M)=0.

§ 5. Взаимное расположение прямых и плоскостей.Различные задачи аналитической геометрии кривых и поверхностей первого порядка.

Рассмотрим в пространстве прямую l : $\frac{x-x0}{\alpha}=\frac{y-y0}{\beta}=\frac{z-z0}{\gamma}$, заданную каноническими уравнениями и плоскость π : Ax+By+Cz+D=0, заданную общим уравнением . Возможны три случая их взаимного расположения :

1) Прямая l может лежать в плоскости π,
2) Прямая l может быть параллельна плоскости π,
3) Прямая l может пересекать плоскость π в некоторой точке.

Наша задача определить по уравнениям, какой из возможных случаев реализуется. Можно использовать алгебраический подход.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{x-x0}{\alpha}-\frac{y-y0}{\beta}=0 \\ \frac{y-y0}{\beta}-\frac{z-z0}{\gamma}=0 \\ \mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{Cz}+\mathrm{D}=0, \end{cases} \qquad (1)$$

Множество решений этой систем - множество общих точек прямой l и плоскости π. Система (1) - линейная неоднородная система, поэтому ее множество решений может быть либо пустым (система несовместна), либо состоять из одной точке, либо иметь бесконечно много решений. Каждая возможность соответствует одному из трех случаев взаимного расположения прямой l и плоскости π. Так, если система (1) несовместна, то прямая l параллельна плоскости π. Если система (1) имеет единственное решение, то прямая пересекает плоскость. Наконец , наличие бесконечного числа решений системы соответствует ситуации, когда прямая лежит в плоскости.

Однако, геометрический подход позволяет не только быстрее получить ответ на поставленный вопрос, но и попутно получить ряд дополнительных результатов.

Расположение прямой l в пространстве задается точкой $M_o(x_o,y_o,z_o)$ и направляющим вектором $\bar{a}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Рассмотрим вектор нормали к плоскости $\bar{n}=\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{n}$ ортогональны, то либо прямая l лежит в плоскости , либо прямая l параллельна плоскости.Чтобы определить, какая из двух возможностей реализуется, достаточно подставить координаты точки M_oв уравнение плоскости. Итак, если Aα+Bβ+Cγ=0 (скалярное произведение) и $Axo + Byo + Czo + D = 0$,то прямая лежит в плоскости. Если Aα+Bβ+Cγ=0 и $Axo + Byo + Czo + D \neq 0$,то прямая и плоскость параллельны. Если же Aα+Bβ+Cγ≠0 , то прямая пересекат плоскость.

Задача 1. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

Прямая l : $\frac{x-x0}{\alpha}=\frac{y-y0}{\beta}=\frac{z-z0}{\gamma}$, π : Ax+By+Cz+D=0.

Мы предполагаем, что Aα+Bβ+Cγ≠0. Воспользуемся параметрическими уравнениями прямой l : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$.

Эта система описывает траекторию точки, движущейся по прямой l , если интерпретировать параметр t, как время. Найдем момент времени, когда точка M(x,y,z) окажется в плоскости π.

$$A(x_0 + \alpha t) + B(y_0 + \beta t) + C(z_0 + \gamma t) + D = 0$$

Найдем t из этого уравнения (Aα + Bβ + Cγ) t+ $Axo + Byo + Czo + D=0$.Так как коэффициент при t отличен от нуля , уравнение однозначно разрешимо.

$$t_o=\frac{-(Axo+Byo+Czo+D)}{A\alpha + B\beta + C\gamma}$$

Подставим найденное значение пораметра t в систему. Точка $M(x_0 + \alpha t_0, y_0 + \beta t_0, z_0 + \gamma t_0)$-точка пересечения прямой l и плоскости π .

Пример 1. Найти точку, симметричную точке A(2;0;-14) относительно плоскости π : x-3y-6z-40=0.

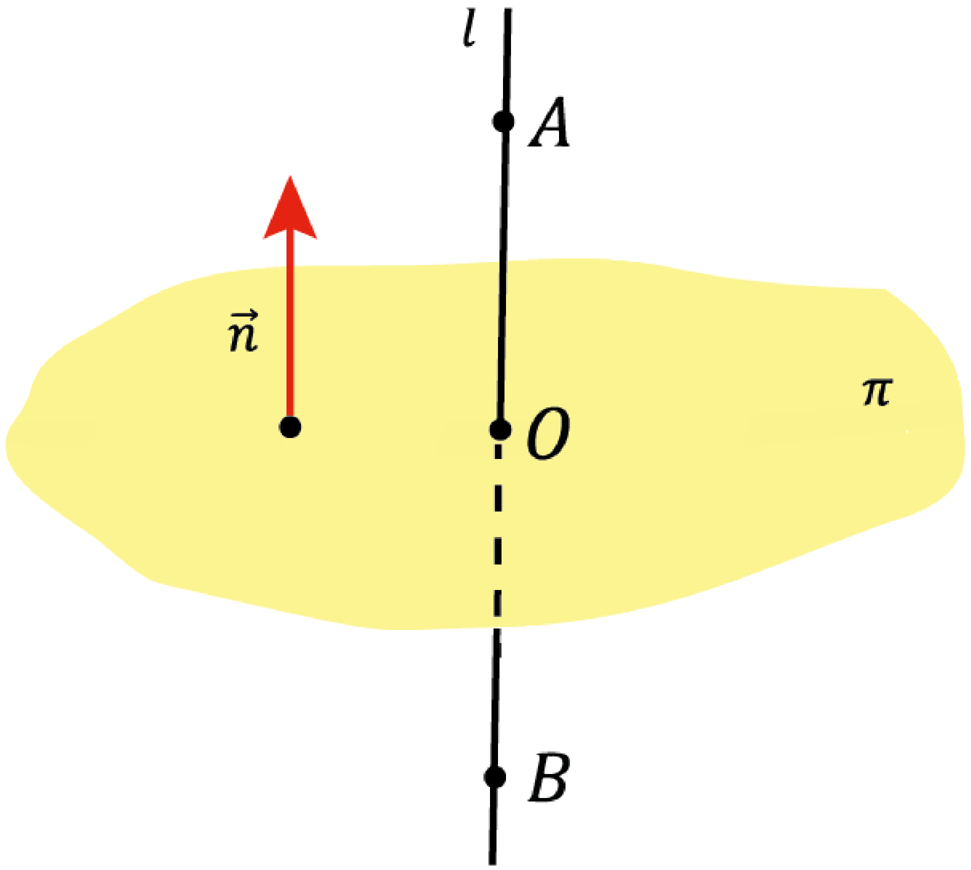


Рис.2

Мы должны найти точку B(x_0;y_o;z_0) такую, что она находится по другую сторону от плоскости π , на таком же расстоянии от плоскости, что и точка A(2;0;-14). При этом прямая l, проходящая через точки A и B, должна быть перпендикулярной проскости π. Напишем канонические уравнения этой прямой, так как нам известна точка, принадлежащая этой прямой - точка A, а ее <u>направляющим вектором</u> будет вектор нормали $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ к плоскости π.

$$\text{l}: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+14}{-6}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям этой прямой l : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -14 - 6t \end{cases}$

и найдем точку O - точку пересечения этой прямой и плоскости.

Для этого подставим координаты точки в уравнение плоскости:

$$(2 + t) - 3(-3t) - 6(-14 - 6t) – 40 = 0 ,\ 46t = -46,\ t = -1.$$

Подставим найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой и найдем точку O(1;3;-8).Эта точка является серединой отрезка AB и , следовательно ее координаты - средние арифметические соответствующих координат концов:

$$1=\frac{2+xo}{2},3=\frac{yo,}{2}, -8=\frac{-14+zo}{2}$$ получаем $x_o=0;y_0=6;z_0=-2$.

Задача 2. Найти угол между прямой и плоскостью.

Постановка задачи подразумевает, что прямая l: $\frac{x-x0}{\alpha}=\frac{y-y0}{\beta}=\frac{z-z0}{\gamma}$ пересекает плоскость π : Ax+By+Cz+D=0. Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и ее проекцией на плоскость, то есть угол между двумя прямыми. Обозначим этот угол через α. $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

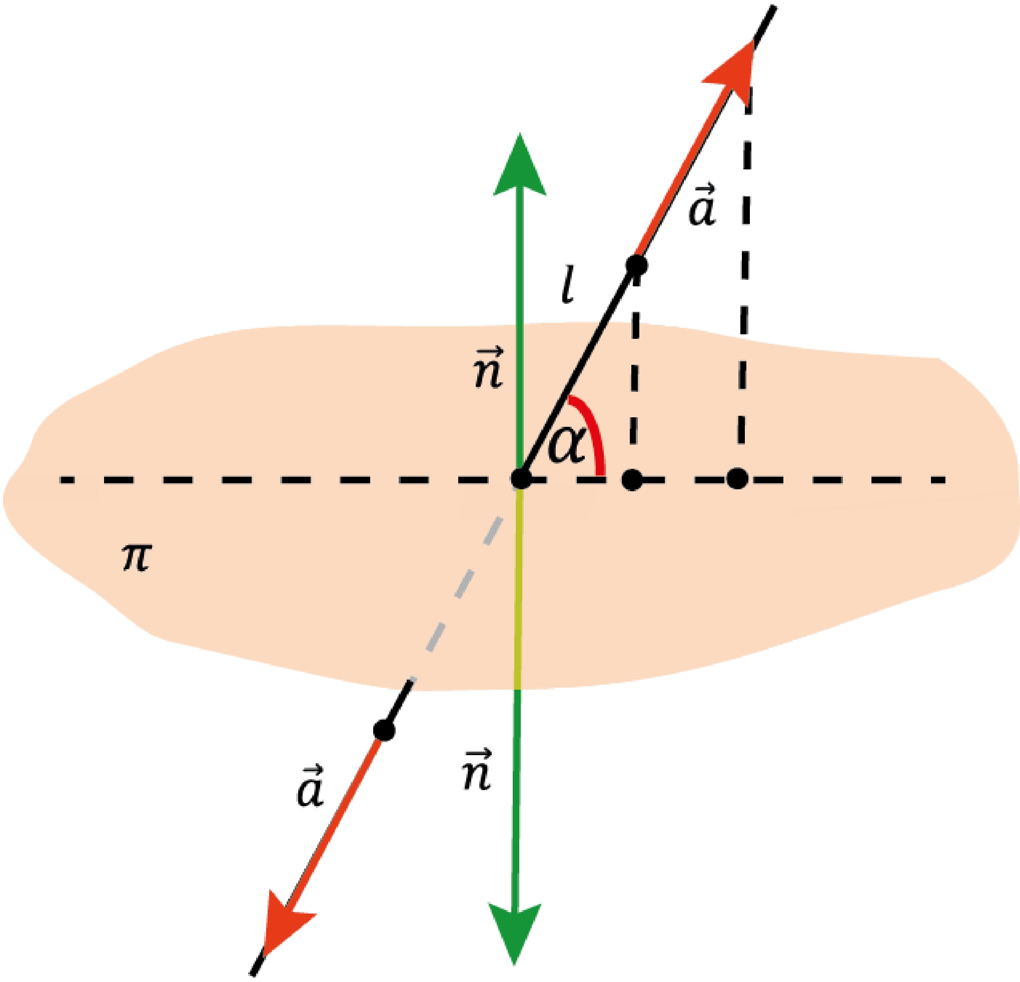


Рис.3

Вектор $\bar{a}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$- направляющий вектор прямой l , $\bar{n}=\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}$- нормальный вектор плоскости π. Обозначим угол между этими векторами через β. На рис.( ) видно, что либо $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, либо $\alpha=\beta-\frac{\pi}{2}$. В любом случае $\sin\alpha=|\cos\beta|$.

Косинус угла между векторами можно выразить через скалярное произведение векторов: $\cos\beta = \frac{(\bar{a},\bar{n})}{|\bar{a}||\bar{n}|}$.

$$\sin\alpha = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \ \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \qquad (2)$$

Пример. Найти угол между прямыми l_1 и l_2 ,где

$$l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z}{-2}, \quad \text{а } l_2: \begin{cases} x - 9y + 2z + 35 = 0 \\ x - 11y + 3z + 41 = 0 \end{cases}$$

Углом между прямыми называется угол α между их направляющими векторами.Этот угол определен неоднозначно, так как направление вектора коллинеарного прямой можно изменить на противоположное. В сумме два различных угла между прямыми составляют π .

Направляющий вектор первой прямой $\overline{a_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$ находим из уравнений l_1, а направляющий вектор второй прямой $\overline{a_2} = [\,\overline{n_1}, \overline{n_2}\,]$ - векторное произведение нормальных векторов к плоскостям.

$$\overline{a_2} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -9 & 2 \\ 1 & -11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\cos\alpha = \frac{(\overline{a1},\overline{a2})}{|\overline{a1}||\overline{a2}|} = \frac{-9}{\sqrt{30}\ \ \sqrt{69}}$. Мы получили отрицательное число, следовательно найденный угол тупой, а острый угол между прямыми

$$\beta = \pi - \alpha = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{30}\ \ \sqrt{69}}\right)$$

Пример 2. Найти проекцию $M_0(x_0,y_0,z_0)$ точки $M(-19;11;12)$ на прямую

$$l : \frac{x}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-3}.$$

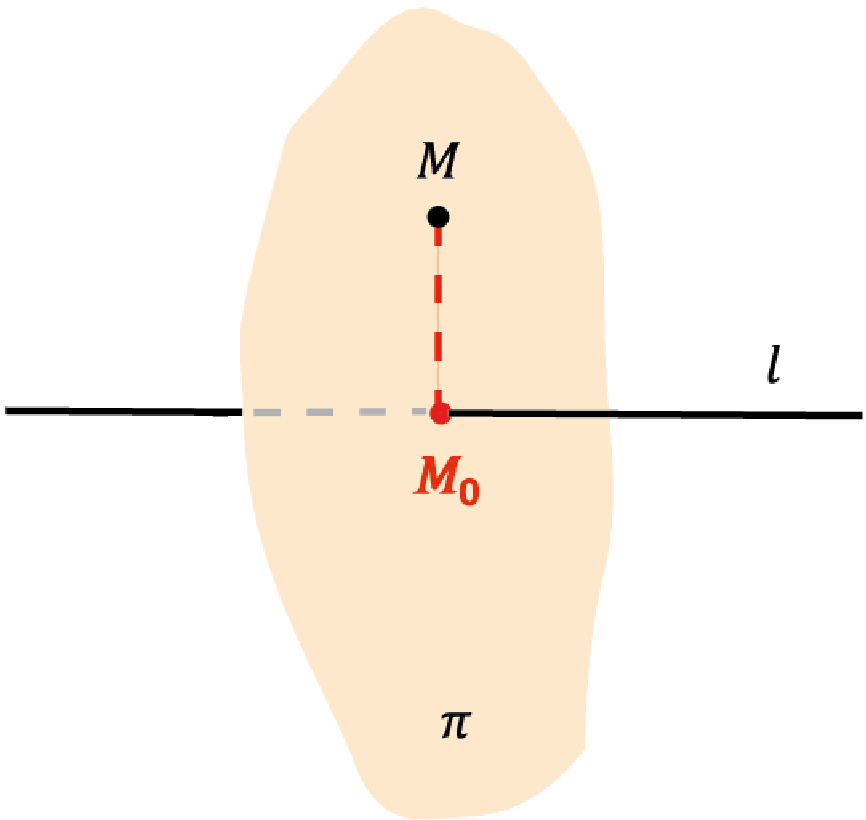


Рис.4

Точка M_0 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l , следовательно точка M_0- точка пересечения прямой l и плоскости π, проходящей через точку M (-19;11;12) перпендикулярно прямой. Напишем уравнение этой плоскости. В качестве нормального вектора плоскости можно взять направляющий вектор прямой l .

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\pi : 5x\text{-}y\text{-}3z\text{-}(-5*19\text{-}11\text{-}3*12)=0$$

$$\pi : 5x\text{-}y\text{-}3z+ 142=0.$$

Найдем точку пересечения прямой l и плоскости π. Используем метод, описанный в задаче 1. Воспользуемся параметрическим уравнением прямой:

$$l: \begin{cases} x = 5t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$ и подставим в уравнение плоскости

$5(5t)$-$(-1 - t) - 3(1 - 3t)$+142=0 35t=-140 t=-4. M_0(-20;3;13).

Пример 3. Найти проекцию прямой l : $\begin{cases} x - 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости. Мы рассмотрим плоскость π : z=0. (проекции на остальные координатные плоскости находятся аналогичным образом).

Найдем канонические уравнения прямой l. В качестве ее направляющего вектора $\bar{a}$ можно взять векторное произведение нормальных векторов к плоскостям, линией пересечения которых является прямая l.

$$\overline{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overline{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\overline{n_1}, \overline{n_2}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найдем точку на прямой, подставив z=0 в систему, задающую прямую l (точку пересечения с плоскостью Оху). Эта точка будет принадлежать и проекции нашей прямой на плоскость z=0.

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Решим систему, используя формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

Следовательно, x=-3, y=-4. Точка M_o(-3;-4;0) принадлежит прямой l и ее проекции на плоскость z=0. Проекция прямой l на плоскость z=0 является линией пересечения плоскости π, проходящей через прямую l перпендикулярно плоскости Оху, и плоскости z=0.

Составим уравнение плоскости π. Она проходит через точку M_o(-3;-4;0), причем векторы $\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\bar{k}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ей коллинеарны. Следовательно нормальным вектором к плоскости π будет

$$[\bar{a}\ ,\bar{k}\ ]=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

π: -5x+y-(15-4)=0

Таким образом общими уравнениями проекции прямой l на плоскость z=0 будут:

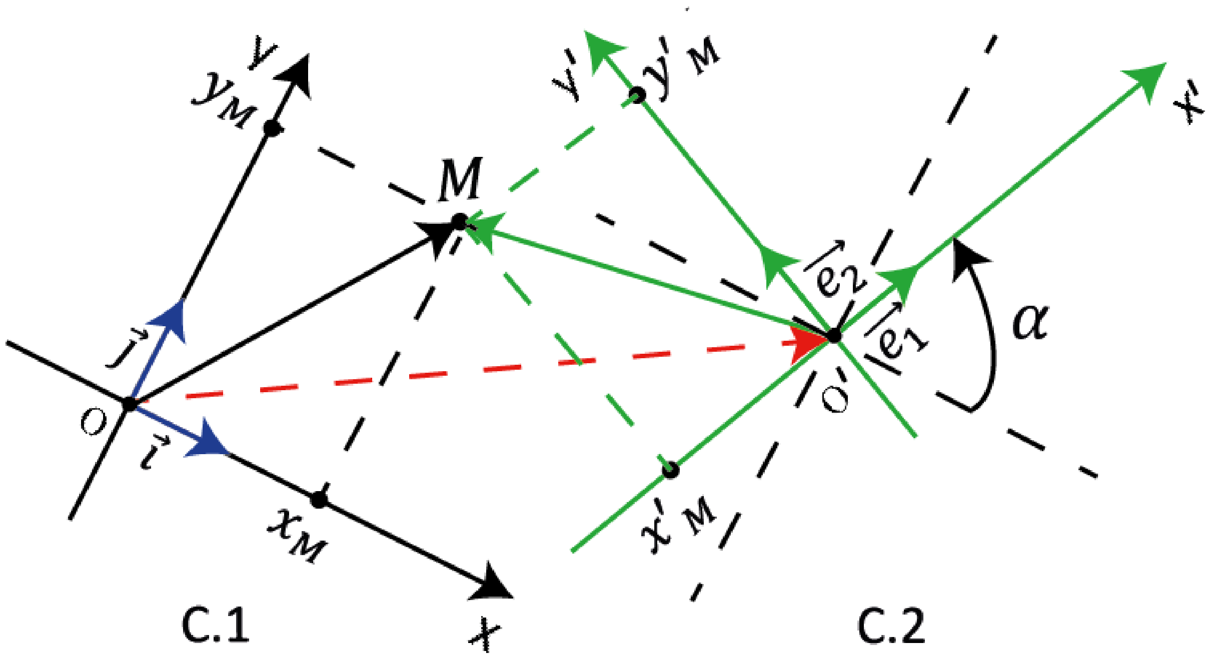
$$\begin{cases} 5\,\mathrm{x} - \mathrm{y} + 11 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Глава 3. Кривые второго порядка.

§1.Преобразование координат на плоскости.

Рассмотрим различные декартовы системы координат на плоскости.

Каждая декартова система координат задается точкой О- началом отсчета и парой ортогональных векторов единичной длины.



Рис(1)

Системы могут отличаться друг от друга как началом отсчета, так и выбором ортонормировенного базиса. Координаты точки плоскости М в рассматриваемой системе координат- это координаты вектора, $\overrightarrow{OM}$ в базисе , задающем данную систему.Координатные оси- это числовые оси, выходящие из начала координат в направлении базисных векторов.Так как мы рассматриваем ортонормированные базисы, то координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ - это его прекции на соответствующие координатные оси. В различных системах координат точка М будет иметь различные координаты. В первой системе координат $\overrightarrow{OM}=x\bar{\imath}+y\bar{\jmath}$ и координаты точки М(x;y) , а во второй системе координат

$\overrightarrow{O'M} = x'\overline{e_1} + y'\overline{e_2}$ и координаты точки $M(x', y')$.Изучим, как связаны координаты точки M в различных системах координат. Рассмотрим два случая.

1. Системы задаются различными точками O и O' и одним и тем же базисом $\bar{\imath},\bar{\jmath}$.

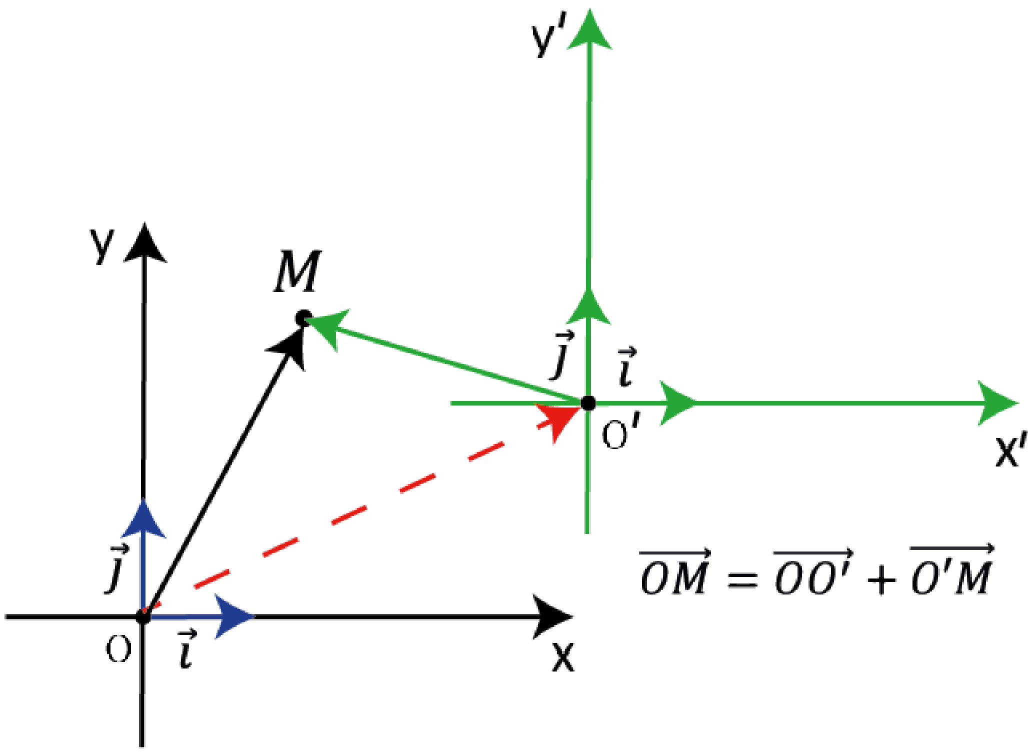


Рис.2

На рис.2 видно, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. При сложении векторов их соответствующие координаты в данном базисе складываются. $\overrightarrow{OM} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$.Найдем координаты вектора $\overrightarrow{OO'}$. Это – координаты точки O' в первой системе координат. Пусть $O'(a, b)$,а $\overrightarrow{O'M} = x'\bar{\imath} + y'\bar{\jmath}$, тогда $x=a+x'$, $y=b+y'$ и $x' = x-a$, $y'=y-b$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Полученные формулы (1) называются формулами преобразования координат при параллельном переносе системы координат на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

2. Две системы имеют одно начало отсчета, но задаются различными ортонормированными базисами: в первой системе- это базис $\bar{\imath},\bar{\jmath}$, а во второй $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

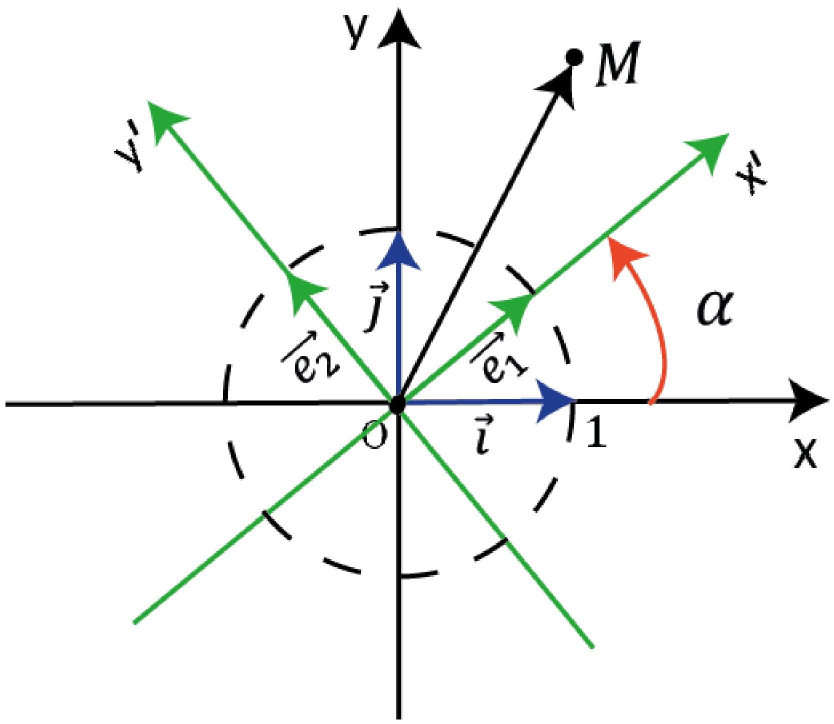


Рис.3.

Запишем разложение векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$. Координаты векторов

$\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$- это их проекции на координатные оси первой системы координат . Так как векторы имеют единичную длину, то их проекции –тригонометрические функции углов α и $\frac{\pi}{2}$+α соответственно. $\bar{e}_1 = (\cos\alpha;\ \sin\alpha) = \cos\alpha\,\bar{\imath} + \sin\alpha\,\bar{\jmath}$,а $\bar{e}_2 = (\cos(\alpha+\frac{\pi}{2});\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}))$ =(-$\sin\alpha$; $\cos\alpha$)= $-\sin\alpha\,\bar{\imath} + \cos\alpha\,\bar{\jmath}$.

Запишем разложение вектора $\overrightarrow{OM}$ по двум различным базисам и воспользуемся полученным разложением векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$.

$\overrightarrow{OM} = x\bar{\imath}+y\bar{\jmath}=x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2=x'(\cos\alpha\,\bar{\imath} + \sin\alpha\,\bar{\jmath})+ y'(-\sin\alpha\,\bar{\imath} + \cos\alpha\,\bar{\jmath})=$

$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\,\bar{\imath} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\bar{\jmath}$. Мы получили два разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$. Но координаты вектора в данном базисе определены однозначны, поэтому $x=(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$, $y=(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)$.Запишем полученные соотношения в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\alpha} & \boldsymbol{-sin\alpha} \\ \boldsymbol{sin\alpha} & \boldsymbol{cos\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(2)}$$

Матрица O=$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ называется матрицей поворота на угол α. det O=1, следовательно матрица обратима $O^{-1}=\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ и является матрицей поворота на угол-α.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\alpha} & \boldsymbol{sin\alpha} \\ \boldsymbol{-sin\alpha} & \boldsymbol{cos\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(3)}$$

Формулы (2) и (3) называются формулами преобразования координат при повороте системы координат на угол α. Переход из системы координат 1 в систему координат 2, изображенных на рис.1 можно осужествить двумя способами: либо сначала сделать поворот системы на угол α , а затем параллельно перенести на вектор $\overrightarrow{OO'}$., либо сначала произвести параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'}$, а затем поворот на угол α. В первом случае мы получим формулы преобразования координат вида:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \qquad (4),$$

где $O'(a';b')$ - координаты точки O' в повернутой системе координат. Во втором случае формулы преобразования координат принимают вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \qquad (5).$$

(Проверьте, что формулы (4) и (5) совпадают.) Из этих формул можно получить выражение старых координат x,y через новые x',y', что используется при нахождении уравнения кривой в новой системе координат, если известно ее уравнение в исходной системе.

Полученные формулы преобразования координат показывают, что уравнение кривой на плоскости меняется при выборе различных систем.

Пример.Рассмотрим две системы координат O, $\bar{\imath},\bar{\jmath}$ и O', $\bar{\imath},\bar{\jmath}$, где $O'(1;1)$.Вторая система получена из первой параллельным переносом на вектор $\bar{\imath}+\bar{\jmath}$.

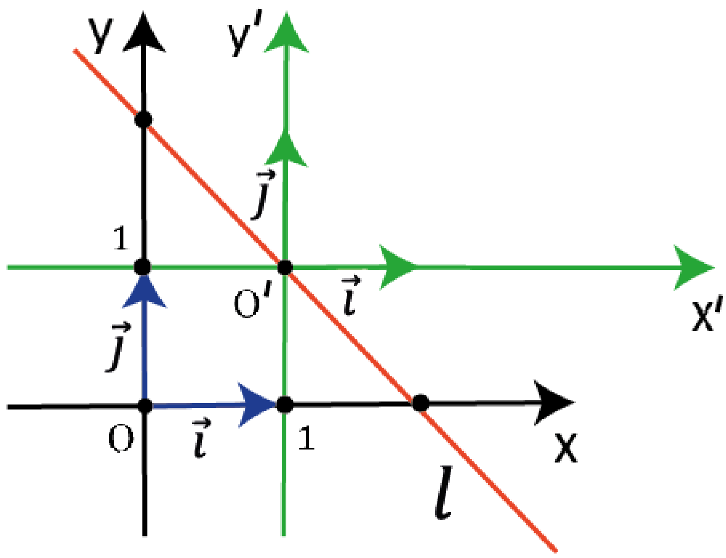


Рис.4

Прямая l задана в первой системе координат уравнением : x+y-2=0. Найдем ее уравнение во второй системе, для этого мы воспользуемся формулой (1) $x=1+x',y=1+y'$.Получаем $x'+y'=0$.Заметим, что мы снова получили уравнение первой степени, так как прямая- кривая первого порядка (и только она).

§2.Кривые второго порядка и проблема их классификации.

Пусть на плоскости задана некоторая декартова система координат.Кривой второго порядка называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению F(x,y)=0, где F(x,y)- многочлен второй степени от двух переменных.$F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ (двойки перед буквенными коэффициентами добавлены для упрощения дальнейших преобразований),$A^2+B^2+C^2\neq0$. В многочлене F(x,y) выделим группы слагаемых: $\mathbf{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$-квадратичная часть многочлена, которая называется квадратичной формой кривой и определяет ее тип, 2Dx+2Ey-линейная часть уравнения и F- константа. При переходе в другую декартову систему координат мы должны подставить в исходное уравнение выражение координат x,y через координаты x',y' из формул преобразования координат (1)-(3).Мы получим новое уравнение кривой вида $\Phi(x',y')=0$. Изучим подробнее, как меняеся уравнение кривой при параллельном переносе. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=A(x'+a)^2+2B(x'+a)(y'+b)+C(y'+b)^2+2D(x'+a)+2E(y'+b)+F=A(x')^2+2Bx'y'+C(y')^2+(2Aa+2Bb+2D)x'+(2Ba+2Cb+2E)y'+(Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F)$.При этом преобразовании квадратичная форма кривой не изменилась. При повороте системы координат на угол α исходное уравнение принимает вид :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=$$

$$A(x'\cos\alpha-y'sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'sin\alpha)(x'sin\alpha+y'cos\alpha)+$$

$$+C(x'sin\alpha+y'cos\alpha)^2+2D(x'\cos\alpha-y'sin\alpha)+2E(x'sin\alpha+y'cos\alpha)+F.$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и получим:

$F(x,y)=A'(x')^2+2B'x'y'+C'(y')^2+2D'(x')+2E'y'+F=\Phi(x',y')$, где:

$A'=A(\cos\alpha)^2+2B\cos\alpha\sin\alpha+C(\sin\alpha)^2$

$2B'=-2A\cos\alpha\sin\alpha+2B((\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2)+2C\cos\alpha\sin\alpha,$

$C'=A(\sin\alpha)^2-2B\cos\alpha\sin\alpha+C(\cos\alpha)^2,$

$D'=2D\cos\alpha+2E\sin\alpha,$

$E'=-2Dsin\alpha+2Ecos\alpha.$

При этих преобразованиях квадратичная форма кривой изменилась.В зависимости от угла α коэффициенты квадратичной формы $A'(x')^2+2B'x'y'+C'(y')2$ меняются. Покажем, что всегда можно найти угол поворота системы координат, для которого коэффициент B'=0. Поворот на такой угол существенно упрощает уравнение кривой.

B'=-Acosαsinα+B((cosα)^2-(sinα)^2)+Ccosαsinα =0. Это тригонометрическое уравнение. Покажем, что оно всегда имеет решение. Разделим обе части уравнения на (cosα)^2 (Мы предполагаем, что (cosα)^2 ≠0, в противном случае коэффициент B не меняется).Введем новую переменную t=tgα . Мы получим уравнение **$Bt^2+(A-C)t-B=0$.** Дискриминант этого уравнения Д=(A-C) ^{2}+4B^2 всегда положителен (мы предполагали, что первоначально B≠ 0).Уравнение имеет два корня tgα=t_1 и tgα=t_2 .По теореме Виета произведение t_1 t_2=-1 и , следовательно имеется четыре подходящих угла поворота с точностью до 2π.

(тангенс имеет период π).

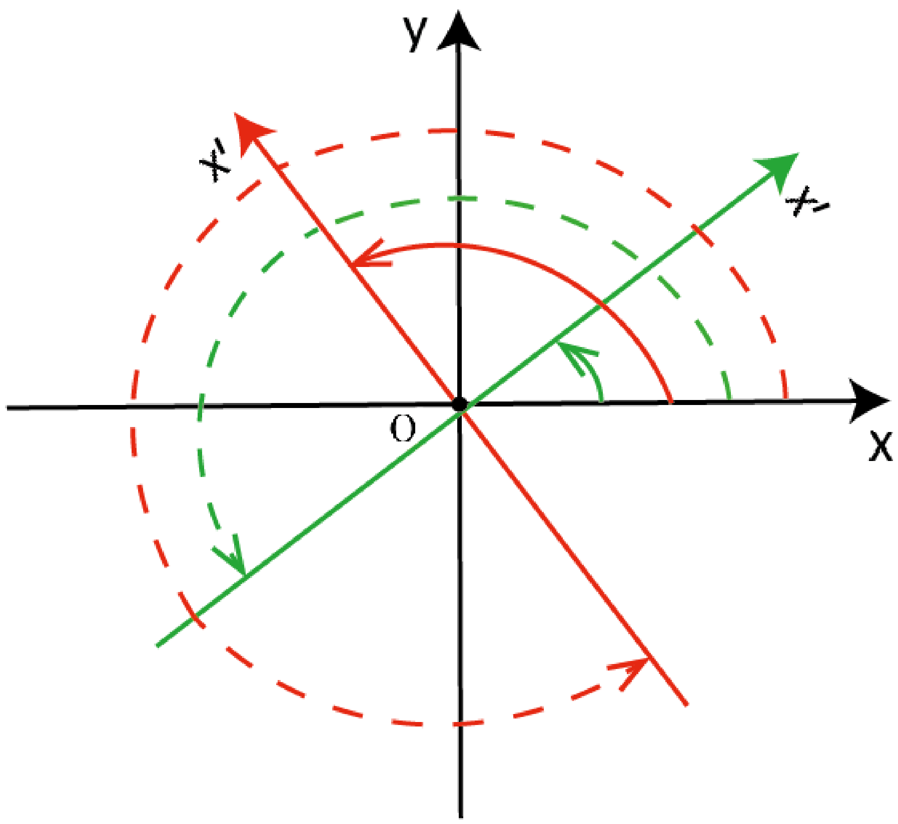


Рис.5

Выбирая один из углов и учитывая знаки сунуса и косинуса в соответствующей четверти , можно определить

$$\sin\alpha = +(-) \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg\alpha^2}} \qquad \cos\alpha = +(-) \frac{1}{\sqrt{1+tg\alpha^2}} \qquad (6)$$

и записать формулы преобразования координат.Квадратичная форма в такой системе координат имеет вид: $\boldsymbol{A}'(x')^2 + \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{y}')\mathbf{2}$. Заметим, что хотя бы один из коэффициентов должен тыть отличен от нуля. Действительно, $\Phi(x',y')$ – многочлен, причем его степень на может повыситься при линейной замене переменных. Не может она и понизиться, так как преобразования координат обратимы.Это наблюдение также показывает, что наше определение кривой второго порядка корректно, то есть не зависит от выбора исходной системы координат.Кривой первого порядка может быть только прямая! Это вытекает из теоремы об общем уравнении прямой. В то время, как кривые второго порядка могут быть весьма разнообразными по своим геометрическим свойствам.Наша ближайшая цель- установить, какие кривые и с какими геометрическими свойствами описываются уравнением второй степени.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, называемую **матрицей квадратичной формы** и ее определитель $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Этот определитель является **инвариантом** кривой, то есть не меняется при переходе к многочлену $\Phi(x',y')$, задающему ту же кривую в другой системе координат и поэтому содержит важную информацию о самой кривой. Вторым важным инвариантом является след матрицы квадратичной формы S=A+C(сумма элементов главной диагонали) и наконец еще одним инвариантом кривой будет определитель Δ, который составлен из всех коэффициентов многочлена:

$$F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0: \ \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Инвариантность следа матрицы квадратичной формы и двух определителей δ и Δ проверяется непосредственной подстановкой формул преобразования координат (1)-(3) в уравнение кривой и вычислением. Перейдем в систему координат, в которой коэффициент $B'=0$ и вычислим определитель

$$\delta=\begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{vmatrix} = A'C'$$

Если это число положительно (коэффициенты A' и C' имеют одинаковые знаки), то кривая называется кривой эллиптического типа. Если $A'C'$- отрицательное число (знаки коэффициентов различны), то кривая называется кривой гиперболического типа. Наконец,если $\delta=0$ (квадратичная форма в рассматриваемой системе координат имеет только один отличный от нуля коэффициент), то кривая называется кривой параболического типа.Так как определитель δ – инвариант кривой второго порядка, то определить тип кривой можно по ее уравнению в любой системе координат.

В следующих параграфах мы подробно изучим геометрические свойства известных кривых второго порядка, а затем докажем теорему о классификации, то есть опишем все кривые второго порядка различных типов.

§3.Эллипс .

Определение. Эллипсом называется кривая**,** которая в **некоторой** системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, причем $a>b>0$.

Заметим, что в другой системе координат уравнение эллипса может отличаться от приведенного выше. Система координат, в которой уравнение эллипса имеет вышеуказанный вид, называется для эллипса **канонической** . Если a=b ,то уравнение задает окружность радиуса a с центром в начале координат. Из уравнения эллипса следует, что $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$ и следовательно, $\frac{x^2}{a^2}\leq 1$, $|x|\leq a$. Аналогичным образом получаем оценку $|y|\leq b$.

Эллипс располагается внутри прямоугольника, ограниченного прямыми x=a,x=-a,y=b,y=-b и называемого основным прямоугольником эллипса. На границе этого прямоугольника располагаются четыре точки, координаты которых удовлетворяют уравнению эллипса и которые называются его вершинами. Это точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;\ b)$. Точка O(0;0) является центром симметрии Эллипса, так как из того, что точка M(x;y) принадлежит кривой, следует, что точка $M'(-x;-y)$ также принадлежит кривой. Крjме того, координатные оси являются осями симметрии кривой, так как точки M(-x;y) и M(x;-y) принадлежат кривой одновременно с точкой M(x;y).Из этого наблюдени следует, что достаточно построить часть кривой, расположенной в первом квадранте : $x\geq 0, y\geq 0$, где она совпадает с графиком функции $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и может быть построена с применением методов математического анализа. Остальные части кривой получаются симметрией относительно координатных осей.

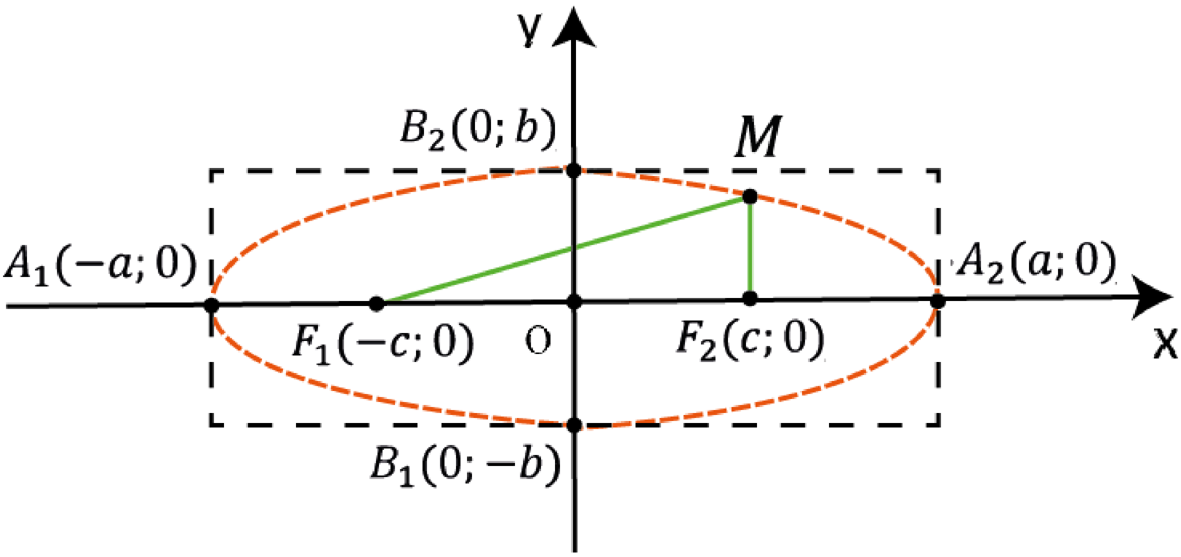


Рис.6

Параметр a называется большой полуосью эллипса, а параметр b- малой полуосью. 2a и 2b- длины отрезков , отсекаемых эллипсом на координатных осях.

Эллипс обладает важными геометрическими свойствами. Из определения следует, что число a^2-b^2 положительное и , следовательно, из него можно извлечь корень $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса и обозначается ε, а прямые $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ и $x=\frac{a}{\varepsilon}$, называются **директрисами** эллипса .Эксцентриситет ε – положительное число, меньшее единицы $0<\varepsilon<1$. Если $\varepsilon\to 0$, то фокусы эллипса сближаются и в пределе переходят в точку O - центр окружности радиуса a. Если $\varepsilon\to 1$, то $b\to 0$ и эллипс в пределе превращается в отрезок .

Рассмотрим две точки на оси OX: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Они называются **фокусами эллипса,** а отрезки MF_1 и MF_2 - **фокальными радиусами.**

Теорема 1.Сумма расстояний от любой точки эллипса M(x;y) до фокусов есть величина постоянная , равная 2a.

Доказательство. Вычислим расстояния от точки эллипса M до фокусов.

d $(M, F_1)=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, d $(M, F_2)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Координаты точки, находящейся на эллипсе связаны уравнением кривой, в частности $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$.

Подставим это выражение для y^2 под корни и сложим их. Мы получим

$$d(M, F_1)+ d(M, F_2)= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} +$$

$$\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$+\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2}$. Под каждым радикалом стоит полный квадрат, поэтому можно извлечь корень.

$$d(M, F_1)+ d(M, F_2)=\left|\frac{cx}{a} + a\right| + \left|\frac{cx}{a} - a\right| = \frac{cx}{a} + a + a - \frac{cx}{a} = 2a$$

Справедлива и обратная теорема, являющаяся по существу геометрическим определением эллипса.

Теорема 2. Геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами, является эллипсом.

Доказательство. Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через 2c, а постоянную величину суммы расстояний через 2a, причем $a>c$.Рассмотрим на плоскости декартову систему координат, в которой начало отсчета совпадает с серединой отрезка $F_1 F_2$, координатная ось OX идет в направлении вектора $\overrightarrow{F1\,F2}$. Этими условиями система однозначно определяется, так как задающий ее ортонормированный базис должен иметь положительную ориентацию. В этой системе координаты фокусов $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Вычислим сумму расстояний точки плоскости M(x;y) до фокусов и приравняем ее к 2a.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Это-уравнение рассматриваемого геометрического места точек. Преобразуем его, чтобы получить каноническое уравнение эллипса. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.Возведем обе части уравнения в квадрат (при этом преобразовании могут появиться лишние точки!) и получим $x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2- 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2-2xc+c^2+y^2$, откуда следует, что $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2-4xc$, $a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2xca^2+x^2c^2$

(мы снова возвели обе части уравнения в квадрат и снова могли получить лишние точки) , $a^2x^2+a^2y^2-x^2c^2=a^4 - a^2c^2$, $(a^2-c^2)x^2+ a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Так как по условию $a>c$, то a^2-c^2- число положительное, и его можно обозначить через b^2.Поделим обе части уравнения на $a^2(a^2-c^2)$ и получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Это – уравнение эллипса, причем из теоремы 1 следует, что все его точки удовлетворяют требуемым условиям рассматриваемого геометрического места точек. Следовательно в процессе преобразований мы лишних точек не получили!

Теорема 3. Если r – расстояние произвольной точки эллипса M(x;y) до некоторого фокуса, а *d*—расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса $\frac{r}{d}=\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $r_1 = d(M, F_1) = \left|\frac{cx}{a}+a\right| = \frac{cx}{a}+a = \varepsilon x + a$ -расстояние точки M(x;y) эллипса до фокуса F_1, $r_2 = d(M, F_2) = \left|\frac{cx}{a}-a\right| = a - \frac{cx}{a} = a - \varepsilon x$ – расстояние этой точки до фокуса F_2. (это- длины фокальных радиусов).Эти формулы получены в ходе доказательства теоремы 1.l_1: $x=-\frac{a}{\varepsilon}$- уравнение директрисы односторонней с фокусом F_1 ,l_2: $x=\frac{a}{\varepsilon}$, - уравнение директрисы односторонней с фокусом F_2 .$d_1=d(M,l_1)=x+\frac{a}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon x+a}{\varepsilon}$ и $d_2=d(M,l_2)=\frac{a}{\varepsilon}-x=\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}$ -расстояние точки M до соответствующих директрис. Следовательно, отношения r_1 к d_1 и r_2 к d_2 равны ε.

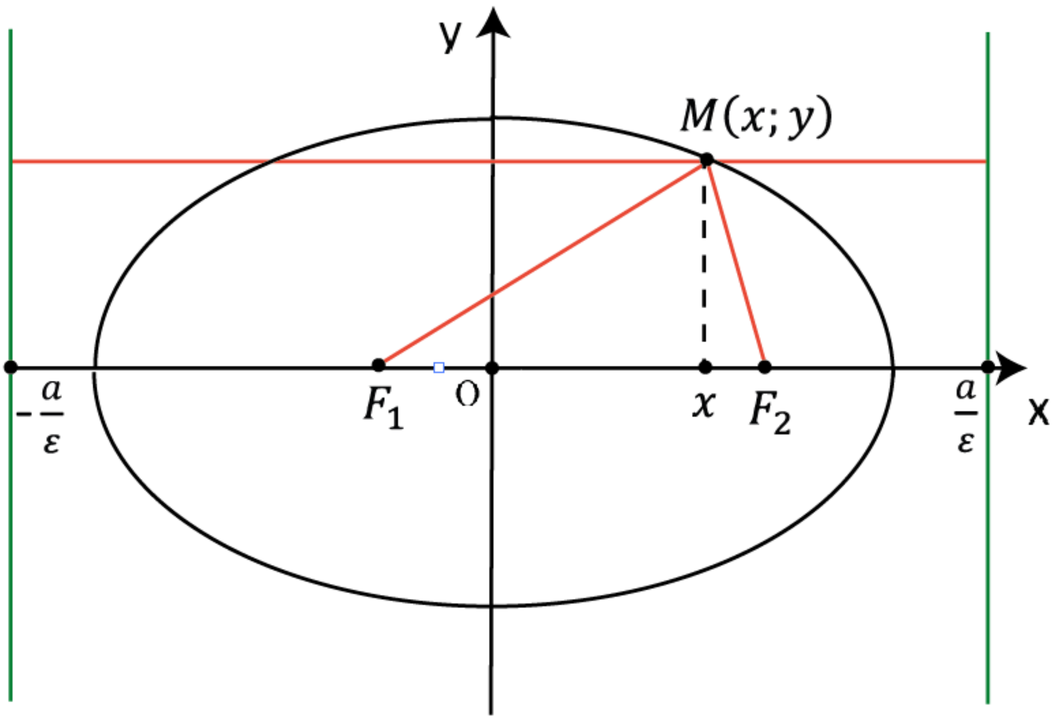


Рис.7

Пример. Дана точка M_1 (2; $-\frac{5}{3}$) на эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1. Проверим, что координаты точки M_1 действительно удовлетворяют уравнению эллипса $\frac{4}{9}+\frac{25}{9*5}=1$.

Большая полуось эллипса a=3, а малая полуось $b=\sqrt{5}$. Найдем фокальный параметр c и координаты фокусов. $c=\sqrt{9-5}=2$, $F_1(-2;0)$, F_2 (2;0). Воспользуемся уравнением прямой на плоскости, проходящей через две данные точки $\frac{x-x_1}{x2-x1}=\frac{y-y_1}{y2-y1}$.

$$l_1: \quad \frac{x-2}{-4}=\frac{y+\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}, \qquad l_2: \quad \frac{x-2}{0}=\frac{y+\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}.$$

Общее уравнение l_1: $5x+12y+10=0$, а l_2: $x-2=0$.

§ 4. Гипербола.

Определение. Гиперболой называется кривая**,** которая в **некоторой** системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$=1. В других декартовых системах координат уравнение гиперболы может отличаться от указанного выше. Система координат, в которой уравнение гиперболы имеет вышеуказанный вид, называется **канонической** для гиперболы. Из уравнения $\frac{x^2}{a^2}$ - $\frac{y^2}{b^2}$=1 следует, что $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}$ -1 и $\frac{x^2}{a^2}$ -1≥0 , $x^2 \geq a^2$, $|x| \geq a$.

Так как переменные x и y входят в уравнение во второй степени и замена их знака не меняет уравнения, то гипербола – кривая симметричная относительно координатных осей и точки O(0;0).Разрешим уравнение в первой четверти координатной плоскости x≥0, y≥0. $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ и построим график этой функции. Ее область определения D(y)=$\{x; x \geq a\}$. Функция монотонно возрастает и стремится к бесконечности при $x\to +\infty$. Преобразуем уравнение к виду: $y=\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x2}}$ и заметим, что при $x\to +\infty$ $y\sim\frac{bx}{a}$ (предел отношения равен 1). Кроме того $\lim\limits_{x\to+\infty.}(\frac{bx}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x2}}-\frac{bx}{a})=0$ и следовательно $y=\frac{bx}{a}$- асимптота графика функции. Отобразим полученный график относительно координатных осей и получим нашу кривую.

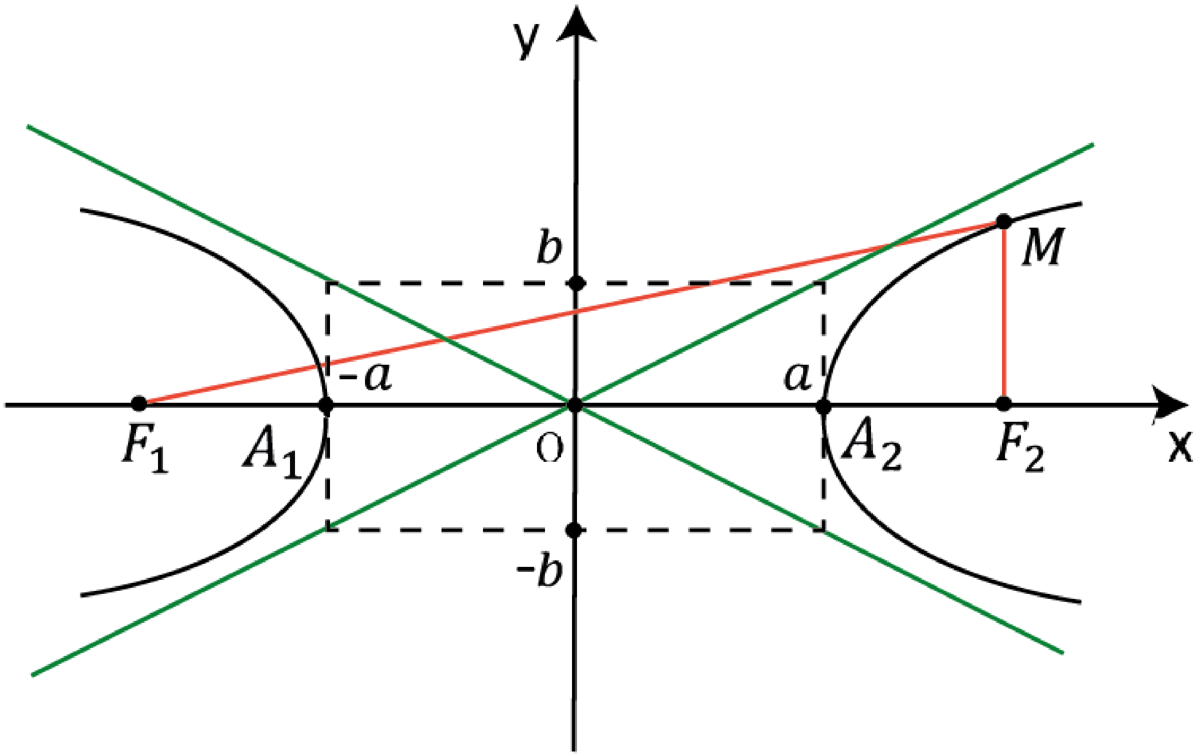


Рис.8

Кривая состоит из двух не связных частей, называемых ветвями гиперболы. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — её центром симметрии (центром гиперболы). Гипербола пересекает ось OX в двух точках, которые называются вершинами гиперболы. Это точки $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$. Гипербола располагается вне прямоугольника, ограниченного прямыми x=a,x=-a,y=b,y=-b и называемого основным прямоугольником гиперболы. Прямые на которых лежат диагонали оновного прямоугольника-это асимптоты гиперболы, заданные уравнениями $y=\frac{bx}{a}$ и $y=-\frac{bx}{a}$.

Обозначим через $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Отношение $\frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** гиперболы и обозначается ε, а прямые $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ и $x=\frac{a}{\varepsilon}$, называются **директрисами** гиперболы .Эксцентриситет ε – положительное число, большее единицы . Если $\varepsilon\to 1$, то $b\to 0$ и гипербола в пределе превращается в два луча на оси OX. Параметры a и b называются полуосями гиперболы, а гипербола с равными полуосями *(a = b)* называется равносторонней.

Рассмотрим две точки на оси OX: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Они называются **фокусами гиперболы**, а число c – фокальным параметром.

Пример1. Рассмотрим график функции $y=\frac{1}{x}$.Мы эту кривую называли гиперболой. Убедимся, что для этой кривой существует другая каноническая система координат, в которой ее уравнение будет иметь вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.В исходной системе координат уравнение гиперболы xy-1=0. Квадратичная форма кривой $Ax^2+2Bxy+Cy^2=xy$. Следовательно A=0, $B=\frac{1}{2}$, C=0. Найдем α-угол поворота системы координат, при котором квадратичная форма упрощается и принимает вид: $A'(x')^2+C'(y')^2$.Как показано в § 2, tgα можно найти из решения уравнения $Bt^2+(A-C)t-B=0$, которое в рассматриваемом случае принимает вид: $t^2-1=0$ и имеет два корня t=1 и t=-1 .Возьмем tgα=1 и угол α в первой четверти : $\alpha=\frac{\pi}{4}$.Формулы преобразования координат при повороте системы принимают вид: $x=(x'\cos\alpha-y'sin\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$,

$y=(x'sin\alpha+y'cos\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$. Подставив эти соотношения в исходное уравнение получим $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$.Мы получили равностороннюю гиперболу, у которой $a=b=\sqrt{2}$, фокальный параметр равен c=2, эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$. Вершины $A_1(-\sqrt{2};0)$, $A_2(\sqrt{2};0)$ и фокусы $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$ находятся на прямой y=x (ось OX′ в новой, повернутой системе координат).Координаты вершин и фокусов указаны в канонической – повернутой системе координат. Найдем их координаты в исходной системе OXY, для чего снова воспользуемся формулами : $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y==\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$. $A_1(-1;-1)$, $A_2(1;1)$ и фокусы $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

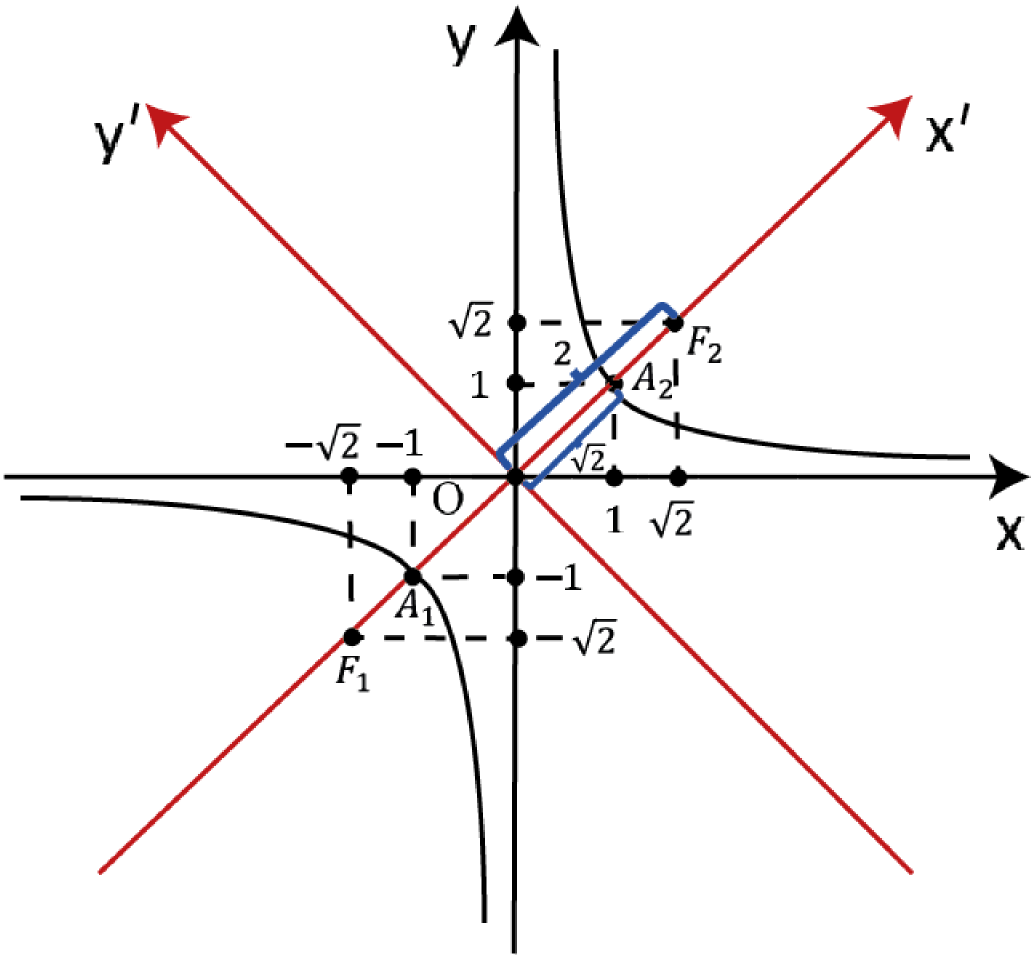


Рис.9

Следующие важные свойства гиперболы , так же как и в случае эллипса , мы сформулируем в виде теорем, доказательства которых почти дословно совпадают с доказательствами соответствующих теорем для эллипса.

Теорема 1.Разность расстояний от любой точки гиперболы M(x;y) до фокусов есть величина постоянная по модулю и равная 2a.

Доказательство. Вычислим расстояния от точки гиперболы M до фокусов.d (M, F_1)= $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, d (M, F_2)= $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Координаты точки, находящейся на гиперболе связаны уравнением кривой, в частности $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$.

Подставим это выражение для y^2 под корни и вычтем их. Мы получим

$$d(M,F_1)-d(M,F_2)=\sqrt{x^2+2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}-\sqrt{x^2-2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}=\sqrt{x^2+2xc+c^2-b^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}-\sqrt{x^2-2xc+c^2-b^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2xc+a^2}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}.$$

Под каждым радикалом стоит полный квадрат, поэтому можно извлечь корень.

$$d(M,F_1)-d(M,F_2)=\left|\frac{cx}{a}+a\right|-\left|\frac{cx}{a}-a\right|$$

Мы получили похожую формулу, что и в случае эллипса. Однако, раскрытие модулей требует более тонких рассуждений. Гипербола, как мы знаем, состоит из двух ветвей, одна из которых состоит из точек гиперболы $M(x;y)$, у которых $x\geq a$, а другая – из точек, у которых $x\leq -a$.Для первой ветви ближайшим фокусом будет F_2, для второй – F_1. Рассмотрим первую ветвь гиперболы : $x\geq a$, и учтем, что $\varepsilon>1$.

$$d(M,F_1)-d(M,F_2)=\left|\frac{cx}{a}+a\right|-\left|\frac{cx}{a}-a\right|=\frac{cx}{a}+a+a-\frac{cx}{a}=2a$$

Если точка $M(x;y)$ принадлежит второй ветви гиперболы, то $x\leq -a$ и

$$d(M,F_1)-d(M,F_2)=\left|\frac{cx}{a}+a\right|-\left|\frac{cx}{a}-a\right|=-\frac{cx}{a}-a-\left(a-\frac{cx}{a}\right)=-2a.$$

Заметим, что в обоих случаях мы получили положительное число, так как вычисляли разность $d(M,F_1)-d(M,F_2)$.

Если вычислять разность $d(M,F_2)-d(M,F_1)$, то получим $-2a$.

Справедлива и обратная теорема, являющаяся **геометрическим определением гиперболы.**

Теорема 2. Геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина, постоянная по модулю, которая меньше расстояния между фокусами, является гиперболой.

Доказательство. Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через $2c$, а модуль постоянной величины разности расстояний через $2a$, причем $a<c$.Рассмотрим на плоскости декартову систему координат, в которой начало отсчета совпадает с серединой отрезка F_1F_2, координатная ось OX идет в

направлении вектора $\overrightarrow{F1\,F2}$. Этими условиями система однозначно определяется, так как задающий ее ортонормированный базис должен иметь положительную ориентацию. В этой системе координаты фокусов F_1 (-c;0) , F_2(c;0). Вычислим разность расстояний точки плоскости M(x;y) до фокусов и приравняем ее к 2a.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ -$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$== ± 2a . Это-уравнение рассматриваемого геометрического места точек. Преобразуем его, чтобы получить каноническое уравнение гиперболы. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$== ±2a +$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.Возведем обе части уравнения в квадрат (при этом преобразовании могут появиться лишние точки!) и получим $x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+ x^2-2xc+c^2+y^2$, откуда следует, что $= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4xc-4a^2$, $a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2xca^2+x^2c^2$

(мы снова возвели обе части уравнения в квадрат и снова могли получить лишние точки) , $a^2x^2+a^2y^2-x^2c^2=a^4-a^2c^2$, $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Так как по условию a<c, то a^2-c^2- число отрицательное, и его можно обозначить через

$-b^2$.Поделим обе части уравнения на $a^2(a^2-c^2)$ и получим уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Это – уравнение гиперболы, причем из теоремы 1 следует, что все его точки удовлетворяют требуемым условиям рассматриваемого геометрического места точек. Следовательно в процессе преобразований мы лишних точек не получили!

Теорема 3. Если r – расстояние произвольной точки гиперболы M(x;y) до некоторого фокуса, а *d*—расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы $\frac{r}{d}=\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $r_1=$ d (M, F_1)= $\left|\frac{cx}{a}+a\right|=|\varepsilon x+a|$ -расстояние точки M(x;y) гиперболы до фокуса F_1, $r_2=$ d (M, F_2)= $\left|\frac{cx}{a}-a\right|=|\varepsilon x-a|$ – расстояние этой точки до фокуса F_2.Эти формулы получены в ходе доказательства теоремы 1.l_1: $x=-\frac{a}{\varepsilon}$- уравнение директрисы односторонней с фокусом F_1 ,l_2: $x=\frac{a}{\varepsilon}$, - уравнение директрисы односторонней с фокусом F_2 . Нам придется рассмотреть отдельно две ветви гиперболы. Если мы рассмотрим правую ветвь гиперболы, находящуюся в полуплоскости x≥a, то $d_1=d(M,l_1)=x+\frac{a}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon x+a}{\varepsilon}$ и $d_2=d(M,l_2)=x-\frac{a}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon x-a}{\varepsilon}$ -расстояние точки M до соответствующих директрис

.Преобразуем в рассматриваемом случае r_1 и r_2. Так как под знаком модуля стоят положительные числа ($\varepsilon > 1$), то $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$, и, следовательно, отношения r_1 к d_1 и r_2 к d_2 равны ε. Если же точка M принадлежит левой ветви гиперболы и $x \le a$, то $d_1 = d(M,l_1) = -x - \frac{a}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}$, и $d_2 = d(M,l_2) = -x + \frac{a}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}$, $r_1 = -(\varepsilon x + a)$, $r_2 = -(\varepsilon x - a)$,так как под знаком модуля в этом случае стоят отрицательные числа. Отношения r_1 к d_1 и r_2 к d_2 и в этом случае равны ε.

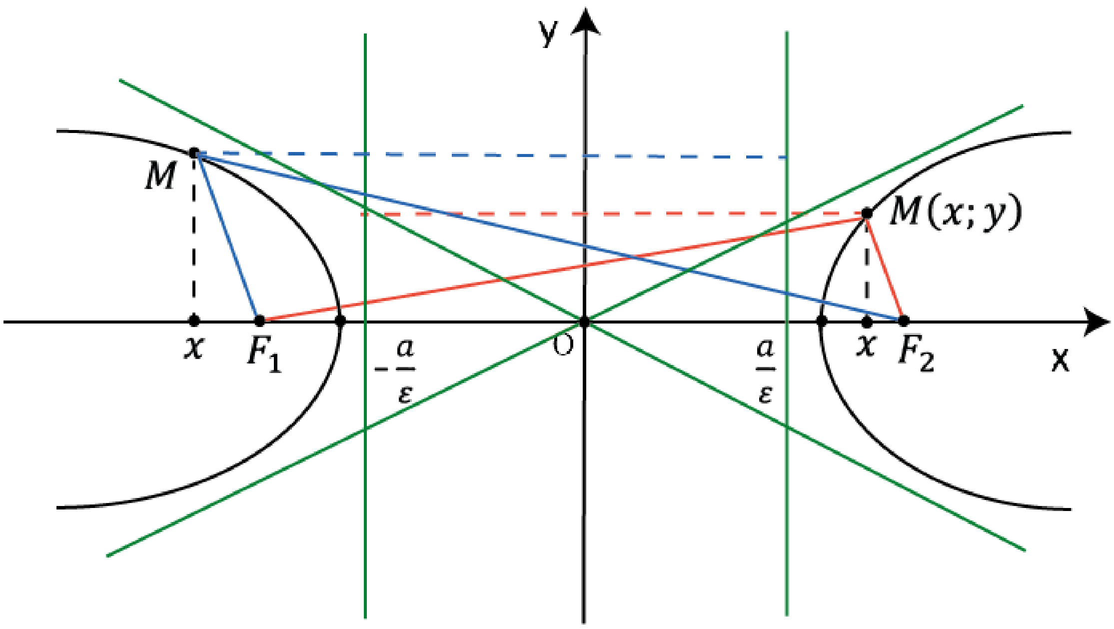


Рис. 10

Пример 2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно

$12\frac{4}{5}$. Из расположения фокусов на оси OX ,симметрично относительно точки O(0;0) следует, что система координат будет канонической для гиперболы и ее уравнение будет иметь вид : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.Таким образом, нам нужно найти два числа a и b, про которые нам из уравнения асимптот в канонической стстеме координат $y = \pm\frac{b}{a}x$ известно , что $b = \frac{3}{4}a$. Так же нам известно расстояние между директрисами гиперболы $\frac{2a}{\varepsilon} = \frac{2a^2}{c}$. $2a^2 = \frac{64}{5}c$, $2a^2 = \frac{64}{5}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{64}{5}\sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2}$,

$2a^2=\frac{64}{5}\frac{5}{4}$ a, a^2-8a=0, a=8, b=6 уравнение гиперболы : $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

§5. Парабола.

Определение. Параболой называется кривая**,** которая в **некоторой** системе координат задается уравнением $y^2=2px$, причем $p>0$.

Система координат, в которой уравнение параболы имеет указанный выше вид называется **канонической.**Из уравнения видно, что все точки параболы находятся в полуплоскости $x\geq 0$, точка O(0;0) принадлежит параболе и называется ее вершиной. Если точка M(x;y) принадлежит кривой, то точка M(x;-y) также принадлежит кривой и , следовательно ось OX- ось симметрии параболы.Кривая состоит из графиков двух функций $y=\sqrt{2px}$ и $y=-\sqrt{2px}$.Точка F($\frac{p}{2}$; 0) на оси OX называется фокусом параболы, а вертикальная прямая $x=-\frac{p}{2}$ - директрисой параболы, число p называется фокальным параметром.

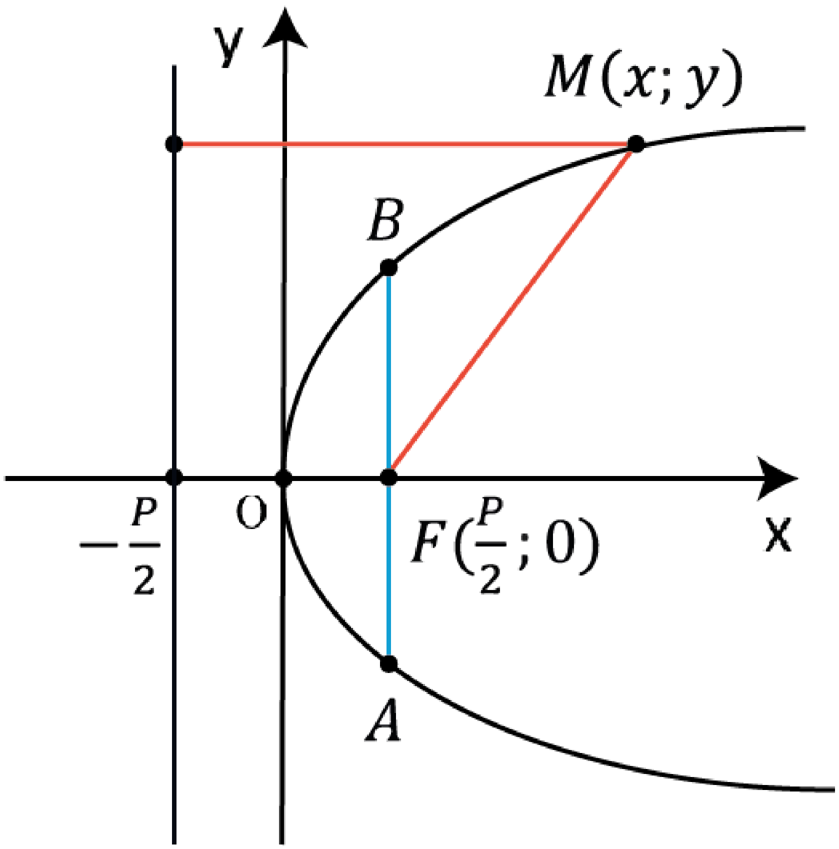


Рис.11

Пример 1. Рассмотрим параболу-график квадратичной функции $y=x^2$ о декартовой системе координат ОХУ. Эта система не является канонической для кривой. Согласно определению параболы , в канонической системе координат ось абсцис- ось симметрии.Перейдем в новую систему координат $OX'Y'$, полученную из исходной поворотом на угол $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Формулы преобразования координат при повороте системы принимают вид: $x=(x'\cos\alpha - y'sin\alpha) = -y'$, $y=(x'sin\alpha + y'cos\alpha) = x'$. Подставив эти соотношения в исходное уравнение , получаем $x' = (y')^2$. Это каноническое уравнение параболы, причем 2p=1. Фокус F находится на оси ОУ в исходной системе координат в точке $F(0;\frac{1}{4})$, а уравнение директрисы, прямой перпендикулярной оси симметрии параболы и отстоящей от начала координат на расстояние $\frac{p}{2}$ по другую сторону от фокуса $y=-\frac{1}{4}$.

Изучим геометрические свойства параболы.

Теорема 1. Каждая точка параболы равно удалена от фокуса и от директрисы.

Доказательство. Пусть точка М(x;y) находится на кривой, тогда $y^2=2px$. Расстояние:

$$d(M,F)=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+(\frac{p}{2})^2+2px}=)=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

$=x+\frac{p}{2}$, так как $x\geq 0$. На таком же расстоянии находится точка М от директрисы.

Теорема 2.Геометрическое место точек равно удаленных от фиксированной точки F, называемой фокусом и прямой l, называемой директрисой ,является параболой.

Доказательство. Рассмотрим декартову систему координат, начало отсчета в которой точка О(0;0) совпадает с серединой перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую l.Обозначим длину этого перпендикуляра через p. Положительное направление оси ОХ выбирем в направлении вектора $\overrightarrow{OF}$. Ось ОУ –однозначно определена. В построенной системе координаты фокуса

$F(\frac{p}{2};0)$, а уравнение директрисы l: $x=-\frac{p}{2}$ Пусть точка М(x;y) равно удалена от фокуса и директрисы, тогда $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. Возведем обе части уравнения в квадрат $(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2$ и получим каноническое уравнение параболы $y^2=2px$.Построенная система координат- каноническая для кривой.

Отрезок прямой перпендикулярной оси симметрии параболы, заключенный между точками кривой и проходящий через фокус параболы называется фокальной хордой. Найдем его длину . Определим координаты точек A и B -концов хорды. A($\frac{p}{2}$;-p), B($\frac{p}{2}$;p), длина отрезка AB равна 2p.

Пример 2. Установить, что уравнение $x = 2y^2 - 12y + 14$, определяет параболу, и найти координаты её вершины A и величину параметра p. Система координат, в которой дано уравнение кривой не является каноническим для параболы, следовательно необходимо перейти в новую систему координат. Преобразуем уравнение кривой, выделив полный квадрат по переменному y. $\frac{1}{2}x=y^2-6y+7$, $\frac{1}{2}x=y^2-6y+9-2$, $\frac{1}{2}(x+4)=(y-3)^2$. Рассмотрим точку $\acute{O}(-4;3)$ и перенесем начало отсчета новой системы координат в эту точку, сохранив направление осей. Формулы преобразования координат при параллельном переносе системы в точку $O'(a,b)$: $x=a+x'$,$y=b+y'$ и $x' = x-a$, $y'=y-b$. В нашем случае для получения канонического уравнения нужно подставить выражение для x и y в уравнения и получим $(y')^2=2*\frac{1}{4}x'$.Следовательно, $p=\frac{1}{4}$. Координаты фокуса в каноническая системе координат F ($\frac{1}{8}$;0), а вершина совпадает с началом отсчета - точкой $\acute{O}(-4;3)$.

§6. Классификация кривых второго порядка.

Рассмотрим уравнение кривой ,заданной в некоторой системе координат уравнением $F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$. В §2 мы доказали, что можно найти для каждой кривой угол, на который нужно нужно повернуть систему координат, чтобы коэффициент $B'=0$.Будем считать, для упрощения обозначений,что исходное уравнение имеет такой вид : $F(x,y)=Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

1 случай. Кривая эллиптического типа.

Это означает, что AC>0. Пусть A> 0 и C > 0, в противном случае поменяем знаки обеих частей уравнения. Выделим полные квадраты по переменным x и y, **выноса за скобки кэффициенты A и C** .

$$A(x^2+2\frac{D}{A}+(\frac{D}{A})^2-(\frac{D}{A})^2)+C(y^2+2\frac{E}{C}+(\frac{E}{C})^2-(\frac{E}{C})^2)+F=0$$

$$A(x+\frac{D}{A})^2+C(y+\frac{E}{C})^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F.$$

Справа в уравнении находится константа, которую мы обозначим через $\tilde{F}$.Перенесем начало новой системы координат в точку $O'(-\frac{D}{A},-\frac{E}{C})$, не меняя ортонормированного базиса, то есть направления осей.Тогда, согласно формулам преобразования координат $x' = x-a$, $y'=y-b$, получаем уравнение кривой в новой системе координат: $A(x')^2+C(y')^2=\tilde{F}$.Возможны три случая: $\tilde{F}>0$, $\tilde{F}<0$ и , наконец, $\tilde{F}=0$.В первом случае, поделив обе части уравнения на $\tilde{F}$, получим $\frac{A}{\tilde{F}}(x')^2+\frac{C}{\tilde{F}}(y')^2=1$. Коэффициенты при квадратах переменных положительны, поэтому их можно обозначить $\frac{A}{\tilde{F}}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{C}{\tilde{F}}=\frac{1}{b^2}$. Мы получили уравнение $\frac{(x')2}{a^2}+\frac{(y')2}{b^2}=1$- каноническое уравнение эллипса. Если $\tilde{F}<0$, то поделив обе части уравнения на $|\tilde{F}|$ и обозначив $\frac{A}{|\tilde{F}|}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{C}{|\tilde{F}|}=\frac{1}{b^2}$, получим уравнение уравнение $\frac{(x')2}{a^2}+\frac{(y')2}{b^2}=-1$, которое называется каноническим уравнением мнимого эллипса и описывает пустое множество.Если же $\tilde{F}=0$, то $A(x')^2+C(y')^2=0$. Обозначим $A=\frac{1}{a^2}$, $C=\frac{1}{b^2}$ и получим уравнение уравнение $\frac{(x')2}{a^2}+\frac{(y')2}{b^2}=0$, которому удовлетворяет только одна точка O(0;0). Это- каноническое уравнение пары мнимых пересекающихся прямых.

2 случай. Кривая гиперболического типа.

Классификация кривых в этом случае получается с помощью преобразований аналогичных рассмотренных в первом случае . Если кривая гиперболического типа, то в уравнении $F(x,y)=Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ произведение AC<0. Пусть A> 0 и C < 0, в противном случае поменяем знаки обеих частей уравнения.

Выделим полные квадраты по переменным x и y, **вынося за скобки кэффициенты A и C** .

$$A(x^2+2\frac{D}{A}+(\frac{D}{A})^2-(\frac{D}{A})^2)+C(y^2+2\frac{E}{C}+(\frac{E}{C})^2-(\frac{E}{C})^2)+F=0$$

$$A(x+\frac{D}{A})^2+C(y+\frac{E}{C})^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F.$$

Справа в уравнении находится константа, которую мы обозначим через $\tilde{F}$.Перенесем начало новой системы координат в точку $O'(-\frac{D}{A},-\frac{E}{C})$, не меняя ортонормированного базиса, то есть направления осей.Тогда, согласно формулам преобразования координат $x' = x+\frac{D}{A}$, $y' = y+\frac{E}{C}$. получаем уравнение кривой в новой системе координат: $A(x')^2+C(y')^2=\tilde{F}$.Возможны три случая: $\tilde{F}>0$, $\tilde{F}<0$ и , наконец, $\tilde{F}=0$.В первом случае, поделив обе части уравнения на $\tilde{F}$, получим $\frac{A}{\tilde{F}}(x')^2+\frac{C}{\tilde{F}}(y')^2=1$. Коэффициент $\frac{A}{\tilde{F}}$ положителен, а коэффициент $\frac{C}{\tilde{F}}$ отрицателен ($C<0$), поэтому их можно обозначить $\frac{A}{\tilde{F}}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{C}{\tilde{F}}=-\frac{1}{b^2}$. Мы получили уравнение $\frac{(x')2}{a^2}-\frac{(y')2}{b^2}=1$- каноническое уравнение гиперболы. Если $\tilde{F}<0$, то поделив обе части уравнения на $\tilde{F}$, получим отрицательный коэффициент коэффициент $\frac{A}{\tilde{F}}$ при $(x')^2$ положительный коэффициент $\frac{C}{\tilde{F}}$ при $(y')^2$. Обозначив $\frac{A}{\tilde{F}}=-\frac{1}{a^2}$, $\frac{C}{\tilde{F}}=\frac{1}{b^2}$, получим уравнение уравнение $-\frac{(x')2}{a^2}+\frac{(y')2}{b^2}=1$. Это- уравнение гиперболы, вершины которой находятся на оси OY. В этом легко убедиться, повернув рассматриваемую систему координат на 90°. Если же $\tilde{F}=0$, то $A(x')^2+C(y')^2=0$. Обозначим $A=\frac{1}{a^2}$, $C=-\frac{1}{b^2}$ и получим уравнение уравнение $\frac{(x')2}{a^2}-\frac{(y')2}{b^2}=0$. Это каноническое уравнение пары пересекающихся прямых.

3 случай. Кривая параболического типа.

Для кривой параболического типа AC=0.Будем считать, что A=0, в противном случае повернем стстему координат на 90°. При этом преобразовании $x=-y'$, $y=x'$. Уравнение кривой: $Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$. Если D=0, то есть переменная x не входит в уравнение кривой , то x может быть любым числом, при условии, что $Cy^2+2Ey+F=0$. Квадратное уравнение относительно y может иметь два различных корня $y=y_1$ и $y=y_2$, один кратный корень $y=y_o$. Наконец, квадратное уравнение может не иметь вещественных корней.Приведем уравнение $Cy^2+2Ey+F=0$ к каноническоми виду. Так как $C\neq 0$ получаем

$$y^2+\frac{2E}{C}y+\frac{F}{C}+(\frac{E}{C})^2-(\frac{E}{C})^2=(y+\frac{E}{C})^2+\tilde{F}=0, \text{ где } \tilde{F}=\frac{F}{C}-(\frac{E}{C})^2.$$

Перенесем начало отсчета системы координат в точку $O'(\tilde{0};-\frac{E}{C};)$, не меняя направление осей. В новой системе координат $x' = x$, $y' = y+\frac{E}{C}$, уравнение кривой $(y')^2=-\tilde{F}$. Обозначим $|-\tilde{F}|$через a^2.Если $-\tilde{F}>0$, то получаем каноническое уравнение пары параллельных прямых $(y')^2=a^2$. Если $-\tilde{F}=0$, то получаем $(y')^2=0$- кканоническое уравнение пары слившихся параллельных прямых ($a\to 0$). Наконец, если $-\tilde{F}<0$, то получаем каноническое уавнение $(y')^2= -a^2$ - уравнение пары мнимых параллельных прямых.

Пусть теперь $D\neq 0$, тогда проделаем с уравнением следующие преобразования: $Cy^2+2Dx+2Ey+F= C(y^2+\frac{2E}{C}y+(\frac{E}{C})^2-(\frac{E}{C})^2)+2Dx+F=$

$C(y+\frac{E}{C})^2+2Dx+F-\frac{E^2}{C}=0$. Получаем $C(y+\frac{E}{C})^2= -2Dx-F+\frac{E^2}{C}$

$(y+\frac{E}{C})^2=-2\frac{D}{C}(x-\tilde{F})$, где $\tilde{F}=\frac{F}{2DC}-\frac{E^2}{2DC^2}$. Перенесем начало отсчета системы координат в точку $O'(\tilde{F};-\frac{E}{C};)$, не меняя направление осей. В новой системе координат $x' = x-\tilde{F}$, $y' = y+\frac{E}{C}$, уравнение кривой $(y')^2=-2\frac{D}{C}x'$. Обозначим $-\frac{D}{C}$ через p, если это число положительное и получим каноническое уравнение параболы $(y')^2=2px'$.Если $-\frac{D}{C}$ отрицательное число,то нужно повернуть систему координат на угол π для перехода в каноническую систему координат параболы.

Теорема. (О приведении кривой второго порядка к каноническому виду).

Для любого уравнения $F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ существует система координат,называемая канонической, в которой уравнение имеет один из следующих видов:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллипс
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - мнимый эллипс
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара мнимых пересекающих прямых
4. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гипербола
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара действительных пересекающихся прямых

6. $y^2=2px$ парабола

7. $y^2=a^2$ пара параллельных действительных прямых

8. $y^2=-a^2$ пара паралельных мнимых прямых

9 . $y^2=0$ пара совпадающих действительных прямых.

Замечание об инвариантах.

В §2 мы ввели три функции от коэффициентов многочлена второй степени F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+ 2Dx+2Ey+F, которые не зависели от выбора декартовой системы координат, то есть являлись инвариантами кривой, задаваемой уравнением F(x,y)=0. Это S=A+C -след матрицы квадратичной формы кривой, $\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ (дельта малая) -определитель этой матрицы и $\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ (дельта большая) определитель , составленный из всех коэффициентов уравнения. Определитель δ позволяет определить один из трез типов кривых, в то время, как прределитель Δ позволяет почти во всех случая определить вид кривой.Рассмотрим кривую эллиптического типа. Это может быть эллипс, мнимый эллипс или пара мнимых пересекающихся прямых. Для всех этих кривых $\delta > 0$.Вычислим Δ , причем вычислять можно в любой системе координат, в том числе и в канонической (это же инвариант!)

Для эллипса $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} < 0$,для мнимого эллипса $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$, для пары мнимых пересекающихся прямых $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

Для кривых гиперболического типа $\delta < 0$.Кривая может быть гиперболой или парой действительных пересекающихся прямых В первом случае $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} > 0$, во втором - $\Delta=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$. Наконец, для кривых параболического типа δ=0 и если кривая парабола, то $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}=-p^2 < 0$

Во всех остальных случаях Δ=0.

Пример решения домашнего задания по кривым второго порядка.

$F(x,y)=25x^2-20xy+4y^2+84x-80y+68=0$ – уравнение кривой в исходной декартовой системе координат OXY. Определим ее тип с помощью инварианта $\delta=\begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}=0$, следовательно рассматриваемая кривая относится к параболическому типу.

Приведем уравнение к каноническому виду. Найдем из уравнения $Bt^2+(A-C)t-B=0$ ($t=tg\alpha$)угол, на который нужно поворернуть систему координат, чтобы упростить квадратичную форму кривой. $-10t^2+21t+10=0$ $t_1=\frac{5}{2}$ и $t_2=\frac{-2}{5}$- корни уравнения. Выбираем первый корень $tg\alpha=\frac{5}{2}$ и угол α в первой четверти. Определяем по формулам $\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg\alpha^2}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg\alpha^2}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$. Записываем формулы преобразования координат при повороте системы на угол α:

$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=x'\frac{2}{\sqrt{29}}-y'\frac{5}{\sqrt{29}}$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=x'\frac{5}{\sqrt{29}}+y'\frac{2}{\sqrt{29}}$ и подставляем в исходное уравнение $25x^2-20xy+4y^2+84x-80y+68=$

$$25\left(x'\frac{2}{\sqrt{29}}-y'\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2-20\left(x'\frac{2}{\sqrt{29}}-y'\frac{5}{\sqrt{29}}\right)\left(x'\frac{5}{\sqrt{29}}+y'\frac{2}{\sqrt{29}}\right)+$$

$$4\left(x'\frac{5}{\sqrt{29}}+y'\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2+84\left(x'\frac{2}{\sqrt{29}}-y'\frac{5}{\sqrt{29}}\right)-80\left(x'\frac{5}{\sqrt{29}}+y'\frac{2}{\sqrt{29}}\right)+68=$$

$$25\left(\frac{4}{29}(x')^2-\frac{20}{29}x'y'+\frac{25}{29}(y')^2\right)-20\left(\frac{10}{29}(x')^2-\frac{21}{29}x'y'-\frac{10}{29}(y')^2\right)+$$

$$4\left(\frac{25}{29}(x')^2+\frac{20}{29}x'y'+\frac{4}{29}(y')^2\right)+84\left(x'\frac{2}{\sqrt{29}}-y'\frac{5}{\sqrt{29}}\right)-80\left(x'\frac{5}{\sqrt{29}}+y'\frac{2}{\sqrt{29}}\right)+68$$
$$=(x')^2\left(\frac{100}{29}-\frac{200}{29}+\frac{100}{29}\right)+x'y'\left(-\frac{500}{29}+\frac{420}{29}+\frac{80}{29}\right)+(y')^2\left(\frac{625}{29}+\frac{200}{29}+\frac{16}{29}\right)+$$

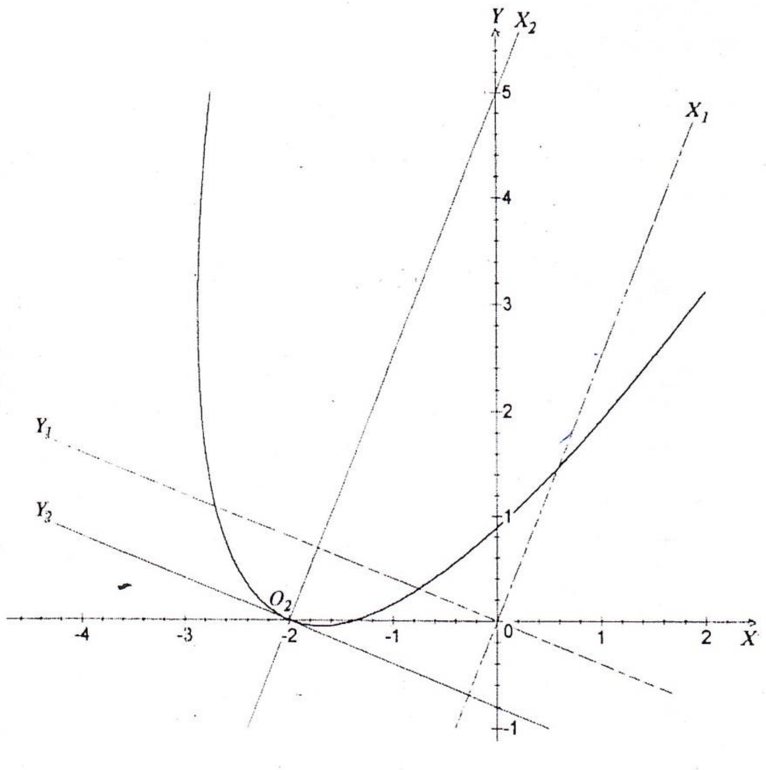
$$x'\left(\frac{168}{\sqrt{29}}-\frac{400}{\sqrt{29}}\right)+y'\left(-\frac{420}{\sqrt{29}}-\frac{160}{\sqrt{29}}\right)+68=29(y')^2-8\sqrt{29}x'-20\sqrt{29}y'+68=0.$$

Мы получили уравнение исходной кривой в системе координат ОХ′У′,полученной из исходной поворотрм на угол α.

Выделяем полный квадрат по переменному y' и переносим оставшиеся слагаемые в правую часть уравнения: $29\left(y'-\frac{10}{\sqrt{29}}\right)^2=8\sqrt{29}x'+32,$

$\left(y'-\frac{10}{\sqrt{29}}\right)^2=\frac{8}{\sqrt{29}}\left(x'+\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$. Перенесем начало отсчета в точку $O'\left(-\frac{4}{\sqrt{29}};\frac{10}{\sqrt{29}}\right)$. Координаты указаны в повернутой системе координат! При этом мы переходим в новую систему координат О′Х′′У′′, полученную паралельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO'}$.В этой системе координат уравнение кривой принимает вид: $(y'')^2=\frac{8}{\sqrt{29}}x''$. Это – каноническое уравнение параболы, у которой ось симметрии- ось О′Х′′, а вершина находится в точке О′.Найдем координаты этой точки в исходной системе координат ОХУ. Для этого снова воспользуемся формулами преобразования координат: $x = x' \frac{2}{\sqrt{29}} - y' \frac{5}{\sqrt{29}}$, $y=x' \frac{5}{\sqrt{29}}+ y' \frac{2}{\sqrt{29}}$. Подставив координаты точки O'в эти формулы, получим x=-2, y=0. Для уточнения чертежа полезно найти точки пересечения кривой с координатными осями в исходной системе координат. Для этого подставим в исходное уравнение $F(x,y)=25x^2-20xy+4y^2+84x-80y+68=0$ сначала x=0, а затем y=0.Мы получим два квадратных уравнения : $4y^2-80y+68=0$ и $25x^2+84x+68=0$, каждое из которых имеет два корня $y_1=10-\sqrt{83}$, $y_2=10+\sqrt{83}$ и $x_1=-2$,$x_2=-\frac{34}{25}$.

(На слкд. странице пример чертежа)



Y
X_2
X_1
Y_1
Y_2
O_2
5
4
3
2
1
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
X