Равномерная непрерывность интегралов

Даниил Спиридонов

Февраль 2024

Содержание

1 Основные теоремы и определения

1.1 Теорема об интегрировании интеграла под знаком интеграла, зависящего от параметра

Пусть $f(x, y)$ неперрывна на некотором компакте. Тогда (выполняя интегрирование на этом компакте) будет верным следущее выражение:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dy\,dx$$

1.2 Определение несобственного интеграла 1-ого рода, зависящего от параметра

Рассмотрим множество $D = \{(x, y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b,\ y \in E \subset R\}$. Пусть:

1. $f(x, y)$ определена на множестве D
2. $f(x, y)$ интегрируема на множестве $[a; A]\,\forall A > a \forall y \in E$
3. $\exists \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$

Тогда на множестве E определена функция $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$. Такую функцию называют несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра.

1.3 Определение равномерно сходящегося несобственного интеграла 1-ого рода, зависящего от параметра

Пусть задан несобственный интеграл 1-ого рода, зависящий от параметра y:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

Интеграл $I(y)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если $\forall \epsilon > 0\, \exists M = M(\epsilon)$ (т.е. M не зависит от параметра y), такое что

$$\forall A > M,\ |\int_a^A f(x,y)\,dx - I(y)| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx| < \epsilon,\ \forall y \in E$$

1.4 Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости

Для того, чтобы $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходился необходимо и достаточно, чтобы

1. $\exists d(A) = \sup(\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx)$, где $d(A)$ - некоторое множество, на котором $I(y)$ равномерно сходится.

2. $\lim_{A\to+\infty} d(A) = 0$.

1.5 Достаточный признак Виерштрасса

Рассмотрим интеграл $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$. Пусть:

1. $f(x,y) \leq g(x)\,\forall x \geq a_1$ (где $a_1 \geq a$), $\forall y \in E$

2. Интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.

Тогда $I(y)$ сходиься равнгмерно на множестве E.

1.6 Определение несобственных интегралов 2-ого рода, зависящих от параметра

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

Будем рассматривать $f(x,y)$ с точкой несобственности a (в точке b аналогично).

Пусть выполнены условия:

1. $f(x,y)$ определена в $D = \{(x,y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b,\, y \in E \subset R\}$

2. $f(x,y)$ определена в полуокрестности точки .

3. $f(x,y)$ интегрируема по x на $[\alpha; b]\forall\alpha > a$.

4. $\lim_{\alpha\to a+0} \int_\alpha^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx$

Тогда на множестве E определена функция $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, называемая несобственным интегралом второго рода, зависящим от параметра

Tip. Если определен несобственный интеграл второго рода (то есть выполнены критерии 1-4), к нему можно применять те же самые теоремы, что и к интегралу 1-ого рода (см. выше)

1.7 Интегралы особого вида

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Интеграл Дирихле

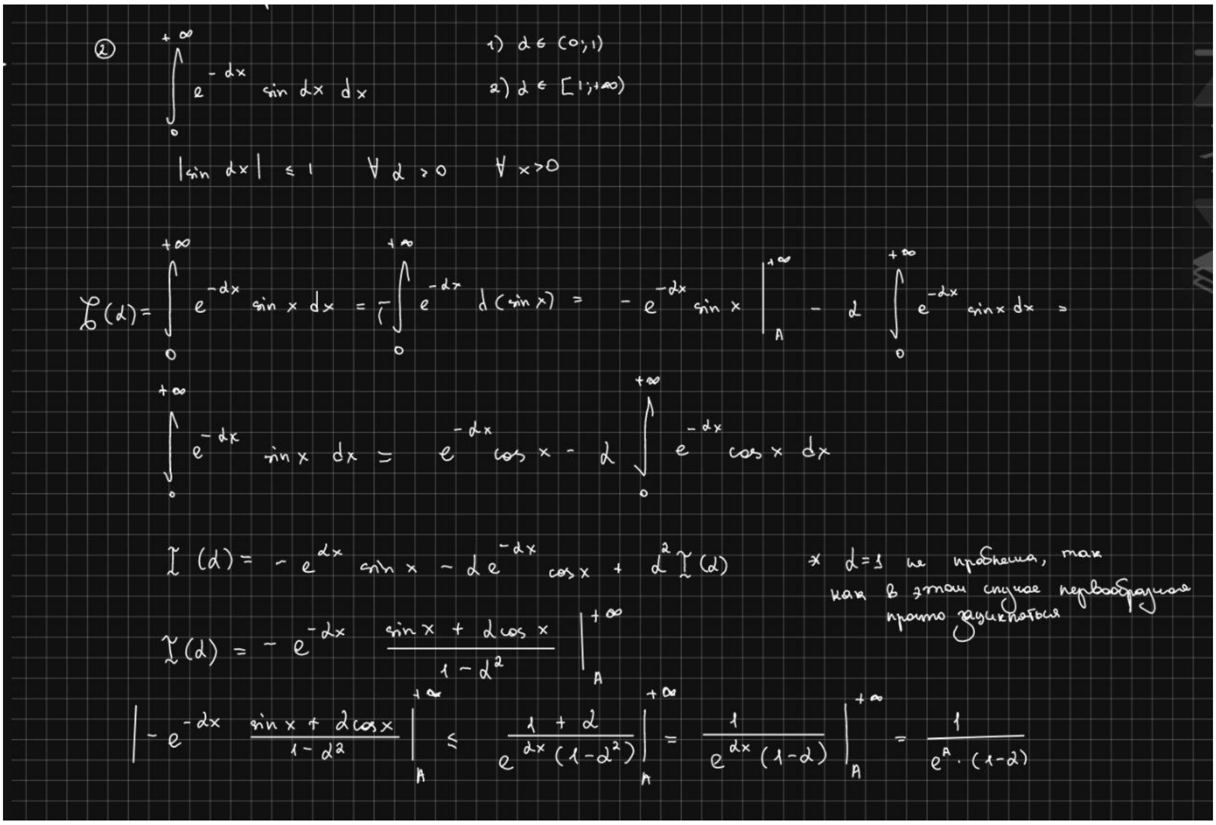
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot sign(a)$$

2 Решения задач

Примечание: У меня не не было времени нормально перебить, поэтому решения задач будут со скриншотов,

2.1 Решение интегралов второго рода через равномерную непрерывность

№1



② $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin \alpha x\,dx$ 1) $\alpha \in (0;1)$ 2) $\alpha \in [1;+\infty)$

$|\sin \alpha x| \le 1 \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall x > 0$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,d(\sin x) = -e^{-\alpha x}\sin x\Big|_A^{+\infty} - \alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx = e^{-\alpha x}\cos x - \alpha\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx$$

$$I(\alpha) = -e^{\alpha x}\sin x - \alpha e^{-\alpha x}\cos x + \alpha^2 I(\alpha)$$

* $\alpha = 1$ не проблема, так как в этом случае первообразная просто зацикнуться

$$I(\alpha) = -e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x + \alpha\cos x}{1-\alpha^2}\Bigg|_A^{+\infty}$$

$$\left| -e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x + \alpha\cos x}{1-\alpha^2}\right|_A^{+\infty} \le \frac{1+\alpha}{e^{\alpha x}(1-\alpha^2)}\Bigg|_A^{+\infty} = \frac{1}{e^{\alpha x}(1-\alpha)}\Bigg|_A^{+\infty} = \frac{1}{e^{A}\cdot(1-\alpha)}$$

№2

② $$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \alpha x \, dx \qquad 1)\ \alpha \in (0;1) \qquad 2)\ \alpha \in [1;+\infty)$$

$$|\sin \alpha x| \leq 1 \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall x > 0$$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, d(\sin x) = -e^{-\alpha x} \sin x \Big|_A^{+\infty} - \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx = e^{-\alpha x} \cos x - \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x \, dx$$

$$I(\alpha) = -e^{\alpha x} \sin x - \alpha e^{-\alpha x} \cos x + \alpha^2 I(\alpha)$$

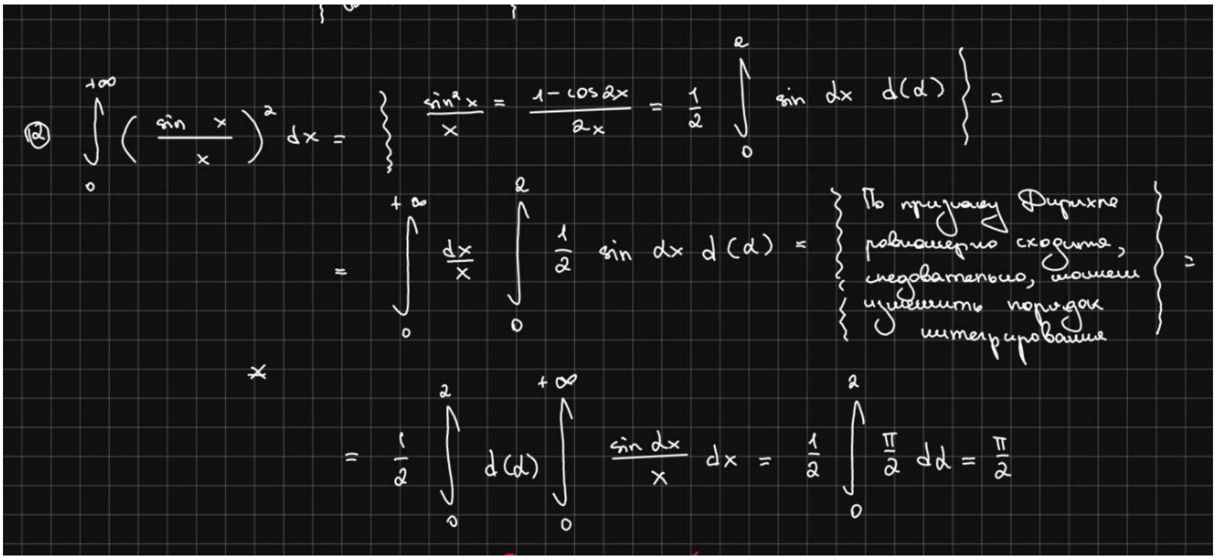
* $\alpha = 1$ не проблема, так как в этом случае первообразная просто зацикнется

$$I(\alpha) = -e^{-\alpha x} \frac{\sin x + \alpha \cos x}{1 - \alpha^2} \Big|_A^{+\infty}$$

$$\left| -e^{-\alpha x} \frac{\sin x + \alpha \cos x}{1 - \alpha^2} \right|_A^{+\infty} \leq \frac{1 + \alpha}{e^{\alpha x}(1 - \alpha^2)} \Big|_A^{+\infty} = \frac{1}{e^{\alpha x}(1 - \alpha)} \Big|_A^{+\infty} = \frac{1}{e^A \cdot (1 - \alpha)}$$

2.2 Решение интегралов второго рода через особые интегралы

№1



№2

Понижение 3-ей степени

$$⑤\ \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx = \left\{ \frac{(\sin\alpha x)^3}{x^3} = \frac{3\sin\alpha x - \sin(3\alpha x)}{4x^3} \right\};$$

$$\left(\frac{3\sin\alpha x - \sin(3\alpha x)}{4x^3}\right)'' = \left(\frac{3\cancel{x}\cos\alpha x - 3\cancel{x}\cos(3\alpha x)}{4x^{\cancel{3}\,2}}\right)' = \frac{3}{4}\cdot\frac{3\cancel{x}\sin(3\alpha x) - \cancel{x}\sin\alpha x}{x^{\cancel{2}}} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{3\sin(3\alpha x) - \sin\alpha x}{x}\,dx = 3\int_0^{+\infty}\frac{\sin(3\alpha x)}{3\alpha x}\,d(3\alpha x) - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\,d(\alpha x) = 3\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

* Тут мы меняем пределы и переменные интегрирования

Получим:

$$\frac{d}{d^2\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 = \iint \frac{3\pi}{4}\,d\alpha\,d\alpha = \int\left(\frac{3\pi\alpha}{4} + C_1\right)d\alpha = \frac{3\pi\alpha^2}{8} + C_1\alpha + C_2$$

$$I(\alpha) = \frac{3}{8}\pi\alpha^2 + C_1\alpha + C_2$$

При $\alpha \to 0$ $I(\alpha) \to 0$, следовательно $C_2 = 0$

При $\alpha \to 0$ $\int I(\alpha)\,d\alpha \to 0$, следовательно $C_1 = 0$

Получим: $I(\alpha) = \frac{3\pi\alpha^2}{8}$

№3

(1) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{x(1-x)}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} = \left\{\begin{array}{l} t = x-\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{array}\right\} = e^{\frac{1}{4}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}e^{1/4}}{2}$$

$$* \quad -x^2+x = -\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4} = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} du = xe^{-x^2}, \quad u = -\frac{e^{-x^2}}{2} \\ v = x, \quad dv = dx \end{array}\right\} = \underbrace{-\frac{e^{-x^2}}{2}\cdot x\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Второй способ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ v = e^{-x^2} & dv = -2x\,e^{-x^2} \end{array}\right\} = \underbrace{x\,e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$