Математический анализ 4 модуль 2022/23 уч. год
Группы СКБ221- СКБ 223
Вопросник “Функции нескольких переменных”

1. Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ дать определения внутренней, внешней, граничной точки, границы ∂M. Привести примеры. Дать определения открытого и замкнутого множества. Привести примеры открытых и замкнутых множеств, а также пример множества, не являющегося ни замкнутым, ни открытым.

2. Дать определение изолированной и предельной точек множества. Дать определение замыкания $\overline{M}$ множества *M*. Дать определение компакта. Привести пример.

3. Дать определение непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$. Дать определения связного множества, области. Привести примеры.

4. Сформулировать 1-ю и 2-ю теоремы Вейерштрасса о функции, непрерывной на компакте. Привести пример. Показать на примерах существенность условий в этих теоремах.

5. Дать определение частных производных функции нескольких переменных. Привести примеры. Выяснить геометрический смысл частных производных в случае двух переменных.

6. Дать определение частных производных высших порядков. Сформулировать теорему Шварца. Вывести следствия. Показать на примере, что существование смешанных производных в некоторой точке еще не гарантирует их совпадения.

7. Дать определение дифференцируемости функции n переменных в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ (для $n = 2$, для $\forall n$).

8. Доказать, что функция, дифференцируемая в некоторой точке x^0, непрерывна в этой точке (для $n = 2$).

9. Доказать, что функция, дифференцируемая в точке x^0, обладает частными производными в этой точке. Записать условие дифференцируемости при помощи частных производных (для $n = 2$, для $\forall n$). Объяснить эквивалентность двух способов записи остаточного члена в условии дифференцируемости.

10. Сформулировать достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

11. Показать на примерах, что 1) из непрерывности функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке не следует существование частных производных в этой точке (и тем более не следует дифференцируемость); 2) из существования частных производных функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке не следует непрерывность функции в этой точке (и тем более не следует дифференцируемость).

12. Дать определение дифференциала функции нескольких переменных (для $n = 2$, для $\forall n$). Сформулировать свойства дифференциала функции.

13. Дать определение касательной плоскости к поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной явным уравнением $z = f(x, y)$. Дать определение и записать уравнение нормали. Привести пример. Выяснить геометрический смысл дифференциала и условия дифференцируемости функции.

14. Доказать теорему о дифференцируемости сложной функции. Записать формулы для производных сложной функции.

15. Доказать инвариантность 1-го дифференциала относительно замены независимых переменных.

16. Дать определение дифференциала порядка m от функции $z = f(x, y)$.

Сформулировать его обобщение на случай функции $u = f(x_1, ..., x_n)$.

17. Показать, что дифференциалы порядка выше 1-го не обладают в общем случае свойством инвариантности относительно замены переменных. Показать, что инвариантность имеет место в случае линейной замены.

18. Вывести формулу Тейлора для функции $z = f(x, y)$ с остаточным членом в форме Лагранжа. Получить оценку для остаточного члена.

19. Вывести формулу Тейлора для функции $z = f(x, y)$ с остаточным членом в форме Пеано.

20. Дать определение точки экстремума и точки стационарности функции n переменных. Доказать, что точка экстремума дифференцируемой функции является ее точкой стационарности. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

21. Вывести условия, достаточные для того, чтобы функция 2-х переменных 1) имела строгий экстремум; 2) не имела экстремума в данной точке. Привести примеры. Показать, на примере, что эти условия не являются необходимыми. Сформулировать аналогичные условия для функции n переменных.

22. Изложить постановку задачи о неявной функции. Рассмотреть примеры. Сформулировать первую теорему Юнга.

23. Определить гладкую кривую. Вывести уравнения касательной и нормали к гладкой кривой.

24. Определить гладкую поверхность. Вывести уравнение касательной плоскости к гладкой поверхности.

Записать уравнение нормали к гладкой поверхности.

25. Дать определение условного экстремума. Доказать необходимые условия условного экстремума.

26. Доказать достаточные условия условного экстремума.