Задача 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярных координатах
$$r = a\sin 3\varphi$$

Решение. Данная фигура представляет собой трилистник.

1. Для вычисления площади фигуры (криволинейного сектора), заданной в полярной системе координат, воспользуемся формулой
$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi$$
В данном случае получаем
$$S = \frac{3}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (a\sin 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi =$$
$$= \frac{3a^2\pi}{4\cdot 3} - \frac{3a^2}{4}\,\frac{\sin 6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^2\pi}{4}$$
2. Используем параметрическое задание координат. Так
$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$
В случае, когда изменение параметра задаёт положительное направление обхода фигуры (а её граница является непрерывной кривой), верны следующие формулы
$$S = -\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(\varphi)x'(\varphi)\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} x(\varphi)y'(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(x(\varphi)y'(\varphi) - y(\varphi)x'(\varphi)\right)\,d\varphi$$
В различных ситуациях использование различных формул может облегчить вычисления.

В данном случае, при $r = a\sin 3\varphi$, имеем

$$x'(\varphi) = a3\cos 3\varphi\cos\varphi - a\sin 3\varphi\sin\varphi$$

$$y'(\varphi) = a3\cos 3\varphi\sin\varphi + a\sin 3\varphi\cos\varphi$$

Рассматривая один из лепестков ,получим

$$S = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} a\sin 3\varphi\sin\varphi\left[a3\cos 3\varphi\cos\varphi - a\sin 3\varphi\sin\varphi\right]\,d\varphi =$$

$$= -a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left[3\cos 3\varphi\cos\varphi\sin 3\varphi\sin\varphi - (\sin 3\varphi\sin\varphi)^2\right]\,d\varphi =$$

$$-a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{3}{4}\sin 6\varphi\sin 2\varphi - \frac{(1-\cos 6\varphi)(1-\cos 2\varphi)}{4}\right]\,d\varphi =$$

$$= -a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{3}{8}(\cos 4\varphi - \cos 8\varphi) - \frac{1}{4}(1 - \cos 2\varphi - \cos 6\varphi + \cos 2\varphi\cos 6\varphi)\right]\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^2}{12} - \frac{3a^2}{8}\,\frac{\sin 4\varphi}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{3a^2}{8}\,\frac{\sin 8\varphi}{8}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{a^2}{4}\,\frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{a^2}{4}\,\frac{\sin 6\varphi}{6}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} +$$

$$+\frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 8\varphi + \cos 4\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^2}{12} + \frac{3a^2}{8}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{4} + \frac{3a^2}{8}\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{8} - \frac{a^2}{4}\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2} + \frac{a^2}{8}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{8} - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{4}\right) =$$

Поскольку $\sin x = \sin(\pi - x)$

$$= \frac{\pi a^2}{12} + a^2\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{32} + \frac{3}{64} - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} - \frac{1}{32}\right) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{12} + a^2\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi a^2}{12}$$

□

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

12 апреля 2023 г.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Задача 1.

Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

1. $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$.
2. $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}\,dx$
3. $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{x^3-3x^2+4}\,dx$
4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$

Решение. 1. Оценим подынтегральную функцию на промежутке $[0,8]$ $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, поэтому исходный интеграл можно оценить:

$$\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}} \le \int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

А как известно последний интеграл сходится, поскольку $\alpha < 1$. Следовательно сходится и исходный интеграл. Стоит отметить, что подынтегральную функцию можно оценить и иначе $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{x^2}$, но в этом случае интеграл $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2}$ – расходится и это не позволяет сделать вывод о сходимости исходного интеграла.

2. На отрезке $[0,2]$ оценим подынтегральную функцию $\sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}} = \sqrt{\frac{16+x^4}{(4-x^2)(4+x^2)}} = \sqrt{\frac{16+x^4}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}} \le \sqrt{\frac{32}{(2-x)8}} = 2\sqrt{\frac{1}{2-x}}$. Поскольку

$$16+x^4 \le 16+16, x \in [0,2]$$

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+4)} \le \frac{1}{(0+2)(0+4)}, x \in [0,2]$$

Соответственно

$$\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}\,dx \le 2\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \left\{\begin{smallmatrix} t=2-x \\ dt=-dx \end{smallmatrix}\right\} = -2\int\limits_2^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Показатель степени под интегралом меньше 1, следовательно этот интеграл является сходящимся, а значит и исходный интеграл сходится.

3. Несложно видеть, что 2 является корнем знаменателя. Поэтому справедливо представление $x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)(x^2 - x - 2) = (x-2)^2(x+1)$. Соответственно интеграл можем переписать в виде
$$\int\limits_1^2 \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + 4}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{x-2}{(x-2)^2(x+1)}\,dx \overset{\text{почему?}}{=} \int\limits_1^2 \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,dx$$
Верна оценка $\frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq \frac{1}{(x-2)3}$ для $x \in [1,2]$, следовательно
$$\int\limits_1^2 \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + 4}\,dx \geq \int\limits_1^2 \frac{1}{(x-2)3}\,dx = \left.\frac{\ln|x-2|}{3}\right|_1^2 = +\infty$$
Поэтому и исходный интеграл расходится.

4. Найдём функцию, эквивалентную подынтегральной. По формуле Тейлора $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ при $x \to 0$, соответственно $\frac{1}{x - \sin x} \sim \frac{3!}{x^3}$, при $x \to 0$. Тогда исходный интеграл и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Последний же интеграл расходится, поскольку показатель степени у x больше единицы, а значит и исходный интеграл расходится.

□

Задача 2.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^5+2}}$

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

Решение. 1. Несложно видеть, что при $x \to +\infty$, $\frac{x}{\sqrt[3]{x^5+2}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$. Тогда по предельному признаку сходимости исходный интеграл расходится, в силу того, что показатель степени у эквивалентной функции меньше единицы.

2. Представим исходный интеграл в виде суммы $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx}_{I_2}$. Интеграл I_2 сходится, поскольку справедлива оценка $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leq \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$, последний интеграл является сходящимся $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +\infty} \left(e^{-1} - e^{-\varepsilon}\right) = e^{-1}$. Поскольку функция e^{-x} нерперывна на отрезке $[0,1]$, значит $\exists m : \forall x \in [0,1]$, $e^{-x} \geq m$. В силу монотонности функции на этом промежутке можно также заключить, что минимальное из значений она примет на одном из концов отрезка, а исходя из характера монотонности (убывания функции) устанавливаем $m = e^{-1}$ Значит справедлива оценка $\frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{e^{-1}}{x}$, $x \in [0,1]$, соответственно и интеграл $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \geq \frac{1}{e} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Как изветсно, последний интеграл расходится, а значит и интеграл I_1 является расходящимся. Окочательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ является расходящимся.

Замечание 1. *Обратим внимание, что* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ *является сходящимся, а функция* $\frac{1}{x}$ *убывает на промежутке* $(0,+\infty)$. *Можно ли в данном случае применить признак сходимости Дирихле?*

$\square$

Задача 3.

Исследовать на сходимость интеграл:

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

Решение. 1. Рассмотрим два способа сделать вывод о сходимости данного интеграла

- Ранее было установлено равенство $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$. Заметим, что $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \leq \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$. Последний интеграл сходится (показатель стпени x больше единицы), значит сходится и интеграл с косинусом, а следовательно, в силу равенства, сходится и исходный интеграл с синусом.
- Применим признак сходимости Дирихле (Абеля-Дирихле). Функция $\frac{1}{x}$ является ограниченной и монотонно убывающей на промежутке $[\frac{\pi}{2},+\infty)$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin x\,dx$. Несложно проверить, вычисляя несобственный интеграл по определению, что данный интеграл расходится, но тем не менее верна оценка $\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \sin x\,dx\right| \leq 2$, $\forall \varepsilon > \frac{\pi}{2}$. Для получения этой оценки достаточно выписать

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \sin x\,dx\right| = \left|-\cos\varepsilon + \cos\frac{\pi}{2}\right| \leq |\cos\varepsilon| + \left|\cos\frac{\pi}{2}\right| \leq 2.$$

Значит наш исходный интеграл от произведения двух функций $\frac{1}{x}$ и $\sin x$ одна из которых монотонна и стремится к нулю с ростом x и интеграл от второй функции с переменным верхним пределом ограничен, следовательно применим признак сходимости Дирихле и интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Замечание 2. *Является ли этот интеграл абсолютно сходящимся?*

$\square$

Задача 4.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{x^4+x+1}\,dx$
2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+2x^2}}$

3. При каких α интеграл $\int\limits_0^2 \frac{x}{|1-x|^\alpha}\,dx$ сходится

4. При каких α интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$ сходится

5. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$

6. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

8. $\int\limits_1^{+\infty} \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\,dx$

9. $\int\limits_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\,dx$

10. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sin x}\,dx$

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

16 мая 2023 г.

1 Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Задача 1.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ в окрестности точки $(-2, 1)$

Решение. По формуле Тейлора для функции нескольких переменных имеем

$$f(x, y) - f(-2, 1) = df(-2, 1) + \frac{d^2 f(-2, 1)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(-2, 1)}{n!} + o(\rho^n).$$

Найдём значение частных производных.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y - 6|_{(-2,1)} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y - 2|_{(-2,1)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$$

Несложно заметить, что производные старших порядков будут равны нулю.
Получив значения производных выпишем формулу Тейлора

$$f(x, y) - 1 = \frac{1}{2} \left(-2(x + 2)^2 + 6(y - 1)^2 + 4(x + 2)(y - 1) \right).$$

Если раскрыть скобки, то получится исходное выражение.

□

Задача 2.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y)$ в окрестности указанной точки

1. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, $(1, 2)$
2. $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y$, $(2, -1)$

Задача 3.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ в окрестности точки $(1, 1, -2)$.

Решение. Вычислим значения частных производных в указанной точке.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 2y + 2z|_{(1,1,-2)} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2.$$

Производные старших порядков равны нулю. В соответствии с этим получаем

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}\big(2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 + 2(z+2)^2 + 6(x-1)(y-1) + 6(x-1)(z+2) + 6(y-1)(z+2)\big)$$

□

Задача 4.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x,y,z)$ в окрестности указанной точки

1. $f(x,y,z) = xyz$, $(1,2,3)$.
2. $f(x,y,z) = x^3y^3 + z^3 - 2xyz$, $(1,0,1)$.

Задача 5.

Выписать до второго порядка включиетльно формулу Тейлора для функции $f(x,y) = 1/(x-y)$ в окрестности точки $(2,1)$.

Решение. Обратим внимание, что данная функция не определена на прямой $y = x$. Найдём значения частных производных.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(x-y)^2}\bigg|_{(2,1)} = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(x-y)^2}\bigg|_{(2,1)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(x-y)^3}\bigg|_{(2,1)} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(x-y)^3}\bigg|_{(2,1)} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2}{(x-y)^3}\bigg|_{(2,1)} = -2.$$

Получаем, что

$$f(x,y) - 1 = -(x-2) + (y-1) + \frac{1}{2!}\big(2(x-2)^2 + 2(y-1)^2 - 4(x-2)(y-1)\big) + o(\rho^2)$$

□

Задача 6.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} 2y$ в окрестности точки $M = (0,0)$ до $o(\rho^5)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Способ 1. По формуле Тейлора для функции нескольких переменных имеем

$$f(x,y) - f(0,0) = df(0,0) + \frac{d^2 f(0,0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(0,0)}{n!} + o(\rho^n).$$

Выпишем значения частных производных функции f в точке $(0,0)$:

$$f(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \operatorname{sh} 2y|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot 2 \operatorname{ch} 2y|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \cdot \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x \cdot 4 \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos x \cdot 2 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\cos x \cdot \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \sin x \cdot 8 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \cos x \cdot 4 \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = -\sin x \cdot 2 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ ,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \sin x \cdot \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \sin x \cdot 16 \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \boxed{\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = -\cos x \cdot 2 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = -2},$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 f}{\partial y^3 \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = \cos x \cdot 8 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 8},\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = -\sin x \cdot 4 \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} = \cos x \cdot \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^5 f}{\partial y^5} = \sin x \cdot 32 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4} = \frac{\partial^5 f}{\partial y^4 \partial x} = \cos x \cdot 16 \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y} = \frac{\partial^5 f}{\partial y \partial x^4} = \sin x \cdot 2 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0,\ \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 f}{\partial y^3 \partial x^2} = -\sin x \cdot 8 \operatorname{ch} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{\partial^5 f}{\partial y^2 \partial x^3} = -\cos x \cdot 4 \operatorname{sh} 2y\Big|_{\substack{x=0,\\ y=0}} = 0$$

В данном перечислении отсутствуют производные вида $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y}$ и аналогичные, но в силу непрерывности производных одного порядка дифференцирования (перестановкой x и y в "знаменателе"производной) приводятся к одной из приведённых производных.

Таким образом получаем:

$$f(x,y) = \frac{1}{2!} C_2^1 2xy + \frac{1}{4!} C_4^3 (-2) x^3 y + \frac{1}{4!} C_4^1 8xy^3 + o(\rho^5) = 2xy - \frac{1}{3} x^3 y + \frac{4}{3} xy^3 + o(\rho^5)$$

Способ 2. Воспользуемся известными разложениями по формуле Тейлора для функций $\sin x$ и $\operatorname{sh} 2y$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\operatorname{sh} 2y = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} = 1 + 2y + \frac{4y^2}{2!} + \frac{8y^3}{3!} + \frac{16y^4}{4!} - 1 + 2y - \frac{4y^2}{2!} + \frac{8y^3}{3!} - \frac{16y^4}{4!}\right] + o(y^4) =$$

$$= 2y + \frac{8y^3}{3!} + o(y^4).$$

Учитывая эти разложения, получаем

$$f(x,y) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(2y + \frac{8y^3}{3!} + o(y^4)\right) = 2xy - \frac{2}{3!}x^3 y + \frac{8}{3!3!} y^3 x^3 + \frac{2}{5!} y x^5 + \frac{8}{3!} x y^3 + \frac{8}{3!5!} x^5 y^3 + o(x^5 y^4).$$

Для того, чтобы верно выделить $o(\rho^n)$ (в данном случае $n = 5$) полезно иметь ввиду взаимное поведение $x^k y^t$ и ρ^n, а для этого установим два простых соотношения:

1. $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, при $(x,y) \to 0$ или иными словами $xy = o(\rho)$.

2. При $(x,y) \to (0,0)$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{y}{x} \to c, x \geq 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{y}{x} \to c, x < 0 \\ 0, \frac{y}{x} \to \infty \end{cases}$$

и

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{x}{y} \to c, y \geq 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{x}{y} \to c, y < 0 \\ 0, \frac{x}{y} \to \infty \end{cases}$$

Покажем справедливость данных соотношений.

1. Верна следующая оценка

$$0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

   И при $(x,y) \to (0,0)$, $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$, откуда и следует справедливость соотношения 1.

2. При $x = 0$ $(y = 0)$ утверждения очевидны. Рассмотрим соотношение для x:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{\mathrm{sing}(x)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}},$$

   откуда и следует соотношение 2. Аналогично для y.

То есть либо эти отношения стремятся к некоторой константе A либо к бесконечно малой функции α.

Воспользуемся установленными соотношениями, для оценки слагаемого $x^k y^t$. По соотношению 2 имеем

$$x^k = \begin{cases} A_1\rho^k \\ \alpha_1\rho^k \end{cases}$$

$$y^t = \begin{cases} A_2\rho^t \\ \alpha_2\rho^t \end{cases}$$

$$x^k y^t = \begin{cases} A_2A_1\rho^{t+k} \\ A_1\alpha_2\rho^{k+t} \\ A_2\alpha_1\rho^{k+t} \\ \alpha_2\alpha_1\rho^{k+t} \end{cases} = \begin{cases} O(\rho^{t+k}) \\ \overline{\overline{o}}(\rho^{t+k}) \end{cases} = \overline{\overline{o}}(\rho^{t+k-1})$$

Если обобщить это правило то получим $x^k y^t = \overline{\overline{o}}(\rho^{t+k-1})$.

Возвращаясь к примеру разложения функции по формуле Тейлора, несложно увидеть, что часть слагаемых уйдёт в $o(\rho^5)$, и получится формула

$$f(x,y) = 2xy - \frac{2}{3!}x^3y + \frac{8}{3!}xy^3 + o(\rho^5).$$

□

Задача 7.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$ до $o(\rho^3)$

1. $f(x,y) = x\sqrt{1+y}$.
2. $f(x,y) = \sin x \sin y$.
3. $f(x,y) = e^{1x}\ln(1+y)$.
4. $f(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

18 апреля 2023 г.

Семинар предконтрольный. Представлены основные типы задач, которые будут фигурировать в контрольной работе.

Задача 1.

Вычислить интеграл или установить его расходимость.

1. $\displaystyle\int\limits_{-0.5}^{-0.25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;
2. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$;
3. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$;
4. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$;
5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x\,2^{-x}\,dx$;
6. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \tfrac{1}{x^2}\sin\tfrac{1}{x}\,dx$;
7. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$;
8. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^3}\,dx$;
9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3\,e^{-x^2}\,dx$;
10. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^4}\,dx$;

Задача 2.

Исследовать на сходимость интеграл:

1. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

2. $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;

3. $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}\,dx$;

4. $\displaystyle\int\limits_0^{1/8} \frac{\arcsin\left(x^2+x^5\right)}{x\ln^2(1+x)}\,dx$;

5. При каких значениях p сходится интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}\,dx$;

6. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{x^5+x^3}}\,dx$;

7. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} x\,e^{-x^2}(2x^4-1)\,dx$.

8. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{7/2}}{(1+x^2)^2}\,dx$;

9. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}\,dx$.

10. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-1/x^2}-e^{-9/x^2}\right)\,dx$.

11. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. *Используя замену переменной* $t=\frac{\pi}{2}-x$ *и свойство линейности, вычислить данный интеграл.*

12. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{3x}-1}}\,dx$.

13. $\displaystyle\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{4/5}}\,dx$.

14. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x\operatorname{arctg} 5x}{x^2}\,dx$.

Задача 3.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

1. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+12}\,dx;$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}\,dx;$

3. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} 2x\,dx;$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}e^{\frac{1-x}{1+x}}\,dx;$

5. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx;$

6. $\displaystyle\int\limits_0^{0.5} \frac{\cos^3 \ln x}{x\ln x}\,dx;$

7. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+\sqrt{x^3}+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx;$

8. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x}\sin x\,dx;$

9. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx;$

10. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \tfrac{x\sin ax}{k^2+x^2}\,dx;$

11. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x^4\,dx$

Задача 4.

Доказать неравенство

$$0<\int\limits_{10\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx<\frac{1}{10\pi}.$$

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

18 апреля 2023 г.

Сходиомсть интегралов от знакопеременных функций

Задача 1.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$
2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$

Решение. 1. • Случай $\alpha \le 0$. Покажем, что выполняется отрицание утверждения из критерия Коши сходимости несобственного интеграла.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall B \in (1, +\infty)\ \exists b_2 > b_1 > B :$$

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \right| > \varepsilon$$

Возьмём произвольное $B > 1$ и для натурального $k > \frac{B}{2\pi}$ положим $b_1 = 2\pi k$, $b_2 = \pi + 2\pi k$. Тогда верна оценка:

$$\int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \ge \int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin x\, dx = 2$$

- Случай $0 < \alpha \le 1$. В данном случае интеграл сходится по признаку Дирихле (разбор данного вопроса был на прошлом семинаре). В данном случае рассматриваем $\frac{1}{x^\alpha}$ – как убывающую ограниченную функцию и ограниченный интеграл $\int_1^t \sin x\, dx$. Рассмотрим вопрос абсолютной сходимости данного интеграла:

$$\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \ge \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx = \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}\, dx}_{I_2}.$$

Интеграл I_2 – сходится по признаку Дирихле, интеграл I_1 – расходится, а значит исходный интеграл расходится. В итоге при $0 < \alpha \le 1$ интеграл сходится условно.

- Случай $\alpha > 1$. В данном случае справедливо

$$\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx < \infty$$

.

Следовательно, в этом случае интеграл сходится абсолютно

2. Аналогично интегралу 1, данный интеграл расходится при $\alpha \leq 0$, сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$ и сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

$\square$

Задача 2.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx.$

2. $\int\limits_0^{+\infty} x\sin\left(x^3\right)\, dx$

Решение. 1. Поскольку подынтегральная функция $\sin\left(x^2\right)$ интегрируема на отрезке $[0,1]$ достаточно исследовать на сходимость интеграл на промежутке $[1,+\infty)$. Проведём замену переменных в интеграле:

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx = \left\{\begin{smallmatrix} x^2=t \\ dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

В данном случае $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$ и интеграл сходится лишь условно.

2. Самостоятельно.

$\square$

Задача 3.

Исследовать на условную и абсолютную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2 - x)\, dx$$

Решение. Разобьём исходный интеграл на два.

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2-x)\, dx = \int\limits_0^{1} \sin(x^2-x)\, dx \int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2-x)\, dx$$

Функция $x^2 - x$ непрерывна на промежутке $[0,1]$ поэтому первый интеграл конечен. Рассмотрим второй интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2-x)\, dx = \left\{\begin{smallmatrix} t=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{4t+1}} \end{smallmatrix}\right\} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}}\, dx$$

Последний интеграл сходится по признаку Дирихле. Рассмотрим вопрос абсолютной сходимости

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}}\right| dx \geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{4t+1}}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{4t+1}}\, dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2\sqrt{4t+1}}\, dx$$

Из последнего соотношения следует,что интеграл абсолютно расходится.

Следовательно и исходный интеграл сходится лишь условно.

Замечание 1. *Стоит отметить, что вместо* 1 *можно было взять любое значение* $\lambda > \frac{1}{2}$, *поскольку на промежутке* $(\lambda, +\infty)$ *функция* $x^2 - x$ *монотонна.*

$\square$

Задача 4.

исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{40+x^2}\,dx$
2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$
3. $\int\limits_0^{1} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$
4. $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2-x)\operatorname{arctg} x\,dx$
5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
6. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}\cos x\,dx$
7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,dx, a>0$
8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$
9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
10. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^p}\sin x\,dx$
11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}\,dx$

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

10 мая 2023 г.

1 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Задача 1.

Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{4/3}\ln(y^2 + x^{4/3}). \, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение. Выпишем приращение функции в окрестности нуля

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = y^{4/3}\ln(y^2 + x^{4/3}).$$

Для точек (x, y), $|x| < 1/2$, $|y| < 1/2$ $y^2 + x^{4/3} < 0.25 + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} < 1$ и следовательно справедлива оценка

$$\left|\ln\left(y^2 + x^{\frac{4}{3}}\right)\right| \leq \left|\ln\left(y^2\right)\right| = \left|2\ln\left(|y|\right)\right|.$$

Откуда следует, что

$$|\Delta f(0,0)| \leq |y||y|^{\frac{1}{3}} \left|2\ln\left(|y|\right)\right| = o(|y|) = o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Таким образом, приращение функции в нуле ведёт себя как $o(\sqrt{x^2 + y^2})$, следовательно, если положить $df = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy$, то по определению функция будет дифференцируема в нуле. При этом частные производные имеют в точке $(0, 0)$ разрыв.

В самом деле $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4y^{4/3}x^{1/3}}{3(y^2+x^{4/3})}$ и если взять путь $y = x^{2/3}$, то $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3x^{1/9}}$ и при $x \to 0$ производная неограниченно возрастает.

Получается, что функция f дифференцируема в окрестности нуля, но при этом не принадлежит к классу функций с непрерывными в нуле частными производными.

□

Задача 2.

Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $(0, 0)$:

1. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$,
2. $f(x, y) = \cos\sqrt[3]{xy}$,

Задача 3.

Найти дифференциал сложной функции:

1. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$, $z = u + v$ в области $G = \{(u,v) : v > 0, u \in \mathbb{R}\}$
2. $f(x,y) = xy + y^2/x$, $x = v/(u+v)$, $y = u^2 - v^3$.
3. $f(x,y,z) = \varphi(x^{yz}, y^{xz})$ в области $G = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0\}$, $\varphi(u,v) = \sqrt{2u^2 + v^2}$.

Задача 4.

Найти производные указанных порядков от функции:

1. $f(x,y) = cos(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
2. $f(x,y) = x^y + y^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. $f(x,y) = \ln(1 + 2x + 2y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$.
4. $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
5. $f(x,y) = \sin\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

Задача 5.

Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции u, если φ – дважды дифференцируемая функция и x, y, z - независимые переменные: $u = \varphi(xyz)$.

Решение. Первый дифференциал равен $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(xyz) \cdot yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(xyz) \cdot xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi'(xyz) \cdot xy.$$

Поэтому получаем

$$du = \varphi'(xyz)\left(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz\right).$$

Второй дифференциал

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dz\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dz\right)dy +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}dy\right)dz =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)dxdz + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)dzdy$$

Вычислим вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(xyz)\cdot yz\right) = \varphi''(xyz)\cdot(yz)^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(xyz)\cdot xz\right) = \varphi''(xyz)\cdot(xz)^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi'(xyz)\cdot xy\right) = \varphi''(xyz)\cdot(xy)^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(xyz)\cdot xz\right) = \varphi''(xyz)\cdot xyz^2 + \varphi'(xyz)\cdot z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(xyz)\cdot xy\right) = \varphi''(xyz)\cdot xy^2z + \varphi'(xyz)\cdot y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(xyz)\cdot xy\right) = \varphi''(xyz)\cdot x^2yz + \varphi'(xyz)\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi'(xyz)\cdot xz\right) = \varphi''(xyz)\cdot x^2yz + \varphi'(xyz)\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi'(xyz)\cdot yz\right) = \varphi''(xyz)\cdot xy^2z + \varphi'(xyz)\cdot y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'(xyz)\cdot yz\right) = \varphi''(xyz)\cdot xyz^2 + \varphi'(xyz)\cdot z$$

Получаем значение второго дифференциала

$$d^2u = \varphi''(xyz)\cdot(yz)^2dx^2 + \varphi''(xyz)\cdot(xz)^2dy^2 + \varphi''(xyz)\cdot(yx)^2dz^2 +$$

$$+\,2\left(\varphi''(xyz)\cdot xyz^2 + \varphi'(xyz)\cdot z\right)dxdy + 2\left(\varphi''(xyz)\cdot xy^2z + \varphi'(xyz)\cdot y\right)dxdz +$$

$$+\,2\left(\varphi''(xyz)\cdot x^2yz + \varphi'(xyz)\cdot x\right)dydz$$

□

Задача 6.

Найти дифференциалы первого и второго порядков функции:

1. $f(x,y) = x^2y^2$.
2. $f(x,y,z) = \ln xyz$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
3. $f(x,y) = x^y + y^x$.
4. $f(x,y) = \cos(e^x y)$.
5. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z}$

Решение. Посчитаем дифференциалы для функции $f(x, y, z) = \ln xyz$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Вычислим частные производные для функции

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz}{xyz} = \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{xyz} = \frac{1}{z}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

Несложно видеть, что вторые смешанные производные равны нулю

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \ldots = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0$$

В итоге получаем

$$df = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$
$$d^2 f = -\frac{dx^2}{x^2} - \frac{dy^2}{y^2} - \frac{dz^2}{z^2}$$

□

Задача 7.

найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции u, если φ – дважды дифференцируемая функция и x, y, z - независимые переменные:

1. $u = \varphi(x^2 - y^2)$.
2. $u = \varphi(xy + yz + xz)$.

Задача 8.

Принявъ u и v за новые переменные, преобразовать выражение:

$2y\frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^x$, $u = y^2 + e^x$, $v = y^2 - e^x$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Также верны соотношения $2y^2 = u+v$ и $2e^x = u-v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x$. В соответствии с приведёнными равенствами выражение $2y\frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial x}{\partial y} = 4ye^x$ можно переписать в виде

$$2y\left(\frac{\partial z}{\partial u}e^x - \frac{\partial z}{\partial v}e^x\right) + e^x\left(\frac{\partial z}{\partial u}2y + \frac{\partial z}{\partial v}2y\right) = 4ye^x$$

$$2ye^x\frac{\partial z}{\partial u} - 2ye^x\frac{\partial z}{\partial v} + 2ye^x\frac{\partial z}{\partial u} + 2ye^x\frac{\partial z}{\partial v} = 4ye^x$$
$$4ye^x\frac{\partial z}{\partial u} = 4ye^x$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1$$

□

Задача 9.

Приняв u и v за новые переменные, преобразовать выражение:

1. $y\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + xy = 0$, $u = \frac{y}{x}$, $v = yx^3$.
2. $y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0$, $y = v$, $x = \frac{u+v^2}{2}$.
3. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $u = x$, $v = \frac{y+z}{x+z}$.

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

30 мая 2023 г.

1 Экстремум функций нескольких переменных

Задача 1.

Исследовать на экстремум функцию $f = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Решение. Локальным экстремумом функции является точка локального максимума или локального минимума.

Точка (x_0, y_0, z_0) - называется локальным максимумом (минимума), если в окрестности этой точки значение функции $f(x, y, z)$ меньше (больше), чем значение функции в данной точке $f(x_0, y_0, z_0)$.

Если функция является дважды дифференцируемой, то справедливо разложение по формуле Тейлора

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = df(x_0, y_0, z_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0, z_0)}{2!} + o(\rho^2).$$

Вспомнив, что необходимым условием наличия экстремума является равенство нулю частных производных первого порядка, разложение по формуле Тейлора в окрестности точки экстремума примет вид

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\Delta z)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\Delta z \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z\right) + o(\rho^2).$$

Приведём данную квадратичную форму к каноническому виду.

$$f''_{xx}\left((\Delta x)^2 + 2\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta x \Delta y + 2\frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta x \Delta z\right) + f''_{yy}(\Delta y)^2 + f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left((\Delta x)^2 + 2\Delta x\left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right) + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)^2\right. + f''_{yy}(\Delta y)^2 + f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 - f''_{xx}\left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)^2 + f''_{yy}(\Delta y)^2 +$$
$$+ f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 - f''_{xx}\left(\left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\right)^2(\Delta y)^2 + 2\frac{f''_{xy}f''_{xz}}{(f''_{xx})^2}\Delta y \Delta z + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\right)^2(\Delta z)^2\right) + f''_{yy}(\Delta y)^2 + f''_{zz}(\Delta z)^2 + 2f''_{yz}\Delta z \Delta y =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + (\Delta y)^2\left(f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}\right) +$$

$$+2\Delta z\Delta y\left(f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}\right) + (\Delta z)^2\left(f''_{zz} - \frac{(f''_{xz})^2}{f''_{xx}}\right) =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \left(f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}\right)\left((\Delta y)^2 + 2\Delta z\Delta y\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}} + \right.$$

$$+(\Delta z)^2\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)^2$$

$$\left. -(\Delta z)^2\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)^2\right) + (\Delta z)^2\left(f''_{zz} - \frac{(f''_{xz})^2}{f''_{xx}}\right) =$$

$$= f''_{xx}\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \frac{1}{f''_{xx}}\left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\left(\Delta y + \Delta z\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)\right)^2 +$$

$$+(\Delta z)^2\left(f''_{zz} - \frac{(f''_{xz})^2}{f''_{xx}} - \frac{\left(f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}\right)^2}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right) =$$

$$= M_1\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \frac{M_2}{M_1}\left(\Delta y + \Delta z\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\left(\left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\left(f''_{zz}f''_{xx} - (f''_{xz})^2\right) - \left(f''_{yz}f''_{xx} - f''_{xy}f''_{xz}\right)^2\right)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\alpha^2 + \frac{M_2}{M_1}\beta^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\Big(\left(f''_{yy}f''_{zz}(f''_{xx})^2 - f''_{zz}f''_{xx}(f''_{xy})^2 - f''_{yy}f''_{xx}(f''_{xz})^2 + (f''_{xz})^2(f''_{xy})^2\right) -$$

$$-\left(f''_{yz}f''_{xx}\right)^2 + 2f''_{yz}f''_{xx}f''_{xy}f''_{xz} - \left(f''_{xy}f''_{xz}\right)^2\Big)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\left(\Delta x + \left(\frac{f''_{xy}}{f''_{xx}}\Delta y + \frac{f''_{xz}}{f''_{xx}}\Delta z\right)\right)^2 + \frac{M_2}{M_1}\left(\Delta y + \Delta z\left(\frac{f''_{yz} - \frac{f''_{xy}f''_{xz}}{f''_{xx}}}{f''_{yy} - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}}}\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\left(\left(f''_{yy}f''_{xx} - (f''_{xy})^2\right)\left(f''_{zz}f''_{xx} - (f''_{xz})^2\right) - \left(f''_{yz}f''_{xx} - f''_{xy}f''_{xz}\right)^2\right)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\alpha^2 + \frac{M_2}{M_1}\beta^2 +$$

$$+\frac{1}{M_1M_2}\left(M_1\left[f''_{xx}(f''_{yy}f''_{zz} - (f''_{yz})^2) - f''_{xy}(f''_{xy}f''_{zz} - f''_{xz}f''_{zy}) + f''_{xz}(f''_{xy}f''_{zy} - f''_{yy}f''_{zx})\right]\right)(\Delta z)^2 =$$

$$= M_1\alpha^2 + \frac{M_2}{M_1}\beta^2 + \frac{M_3}{M_2}(\Delta z)^2,$$

где M_1, M_2, M_3 главные миноры матрицы частных производных

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}.$$

Несложно увидеть(по построению) что неотрицательность квадратичной формы влечёт за собой неотрицательность главных миноров. Наборот это также работает. Пусть к примеру $M_1 < 0$, тогда, положив $\beta = 0, \Delta z = 0$ мы получим противоречие. За возможность выбрать так переменные можно аргументировать тем, что $\beta = 0, \Delta z = 0$ даёт лишь два линейных уравнения на три исходные переменные $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, поэтому будет существовать бесконечное число решение данной системы, параметризуемые переменной Δx. Критерии неположительности квадратичной формы $d^2 f$ можно получить из критерия неотрицательности квадратичной формы $-d^2 f$.

Точка $(x_0, y_0 z_0)$ будет точкой минимума (квадратичная форма второго дифференциала неотрицательна), если частные производные в данной точке удовлетворяют условиям:

$$M_1 = f''_{xx} > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{yy} f''_{xx} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = f''_{xx}(f''_{yy} f''_{zz} - (f''_{yz})^2) - f''_{xy}(f''_{xy} f''_{zz} - f''_{xz} f''_{zy}) + f''_{xz}(f''_{xy} f''_{zy} - f''_{yy} f''_{zx}) > 0.$$

Точка $(x_0, y_0 z_0)$ будет точкой максимума (квадратичная форма второго дифференциала неположительна), если частные производные в данной точке удовлетворяют условиям:

$$M_1 = f''_{xx} < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{yy} f''_{xx} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = f''_{xx}(f''_{yy} f''_{zz} - (f''_{yz})^2) - f''_{xy}(f''_{xy} f''_{zz} - f''_{xz} f''_{zy}) + f''_{xz}(f''_{xy} f''_{zy} - f''_{yy} f''_{zx}) < 0.$$

Воспользуемся этим для исследования предложенной функции.

Найдем все точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль.

$$\begin{cases} 6x^2yz - 2x = 0 \\ 2x^3 z - 2y = 0 \\ 2x^3 y - 2z = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 yz = x \\ x^3 z = y \\ x^3 y = z \end{cases},$$

что, при $x \neq 0$ эквивалентно

$$\begin{cases} xyz = \frac{1}{3} \\ z^2 = y^2 \\ \left[\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ x^3 = -1 \end{array} \right. \end{cases}.$$

Откуда получается пять решений $A_1 = (0,0,0)$, $A_2 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $A_3 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $A_4 = \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $A_5 = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Получаем

$$f''_{xx} = 12xyz - 2,\ f''_{yy} = -2,\ f''_{zz} = -2,$$

$$f''_{xy} = 6x^2 z,\ f''_{xz} = 6x^2 y,\ f''_{yz} = 2x^3$$

Для A_1 получим

$$f''_{xx} = 12xyz - 2\big|_{A_1} = -2,\ f''_{yy} = -2,\ f''_{zz} = -2,$$

$$f''_{xy} = 6x^2 z\big|_{A_1} = 0,\ f''_{xz} = 6x^2 y\big|_{A_1} = 0,\ f''_{yz} = 2x^3\big|_{A_1} = 0,$$

$$M_1 = -2 < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

и $d^2 f = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2$ – отрицательно определённая квадратичная форма, следовательно локальный максимум.

Для A_2 устанавливаем

$$f''_{xx} = 12xyz - 2\big|_{A_2} = 2,\ f''_{yy} = -2,\ f''_{zz} = -2,$$

$$f''_{xy} = 6x^2 z\big|_{A_2} = 2\sqrt{3},\ f''_{xz} = 6x^2 y\big|_{A_2} = 2\sqrt{3},\ f''_{yz} = 2x^3\big|_{A_2} = 2,$$

$$M_1 = 2 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -16 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 48 > 0.$$

Получается, что второй дифференциал в данной точке принимает значения разных знаков, следовательно точка не является точкой экстремума. Данная точка является седловой.

Аналогично проверяется, что оставшиеся точки также являются седловыми и точка $(0,0,0)$ единственная точка экстремума – точка максимума, $f(0,0,0) = 0$. □

Задача 2.

исследовать на экстремум функцию $f = (x-y)^2 + (y^3-1)^4 - 1$.

Решение. Выпишем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y) + 12(y^3-1)^3 y^2 = 0 \end{cases},$$

откуда получим два решения $(0,0)$ $(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 24y(y^3-1)^3 + 108y^4(y^3-1)^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

Для точки $(1,1)$ получаем

$$M_1 = 2 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Для точки $(0,0)$ получаем

$$M_1 = 2 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Поскольку определитель обратился в нуль, необходимо более подробное исследование поведения функции в окрестностях точек $(0,0)$, $(1,1)$.

$$f(1,1) = -1,$$

$$f(0,0) = 0,$$

Стоит также отметить, что в окрестности точки $(1,1)$ $f(x,y) > -1$, поскольку прибавляются положительные числа, следовательно $(1,1)$ – точка минимума. в окрестности же точки $(0,0)$ $f(x,0) > 0$, а для $0 < y < 1$ $f(y,y) < 0$, следовательно данная точка седловая.

□

Задача 3.

Исследовать на экстремум функцию:

1. $f = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|$.
2. $f = xy + yz + xz$.
3. $f = \ln xy - z(x-y) - x^2 - y^2 + 2xy - y$.
4. $f = x^3 + y^3 + 3xy$.
5. $f = xy^2(12 - x - y)$.

Задача 4.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ на множестве $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$.

Решение. Для исследования на экстремум функции на множестве необходимо:

1. Найти все точки экстремума и выбрать те, которые лежат внутри множества.
2. Исследовать поведение функции на границе множества, если граница входит в множество.

Для поиска точек экстремума выпишем систему

$$\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8} = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4} = 0 \end{cases} = \begin{cases} y\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{y}{8}\right) = 0 \\ x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6} - \frac{y}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

Соответственно получаем решения $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,0)$. $\left(1, \frac{4}{3}\right)$. Все они принадлежат рассматриваемому множеству. Стоит также обратить внимание, что кроме последней все точки лежат на границе рассматриваемого множества, поэтому их проверку можно отложить до проверки значений функции на границе.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y}{3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{4}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$$

В точке $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ $M_1 = -\frac{4}{9} < 0$, $M_2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} > 0$ – точка локального максимума, $f\left(1, \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

Рассмотрим поведение функции на границах. В данном случае граница множество – три прямые. При $y = 0$ получим $f(x,0) = 0$, $x \in [0,3]$. Аналогично при $x = 0$ $f(0,y) = 0$. И наконец при $y = 4 - \frac{4}{3}x$ получим $f\left(x, 4 - \frac{4}{3}x\right) = \frac{x}{2}\left(4 - \frac{4}{3}x\right) - \frac{x^2}{6}\left(4 - \frac{4}{3}x\right) - \frac{x}{8}\left(4 - \frac{4}{3}x\right)^2 = 0$.

Из этого заключаем, что в точке $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ достигается максимальное значение $\frac{2}{9}$ на множестве, а минимальное значение 0 достигается на границе множества. □

Задача 5.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции f на множестве:

1. $f = 2x^2 - xy + y^2$, $|x| + |y| \leq 1$
2. $f = x + |x - y|$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$
3. $f = x^2 + y^2 - 4x$, $-2 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 3$.
4. $f = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$, $x + y \leq 2\pi$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. $f = (x-6)^2 + (y+8)^2$, $x^2 + y^2 \leq 25$.
6. $f = 3 + 2xy$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

10 мая 2023 г.

1 Функции многих переменных

Задача 1.

Найти область определения функции:

1. $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.
2. $f(x, y) = \ln \frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$.

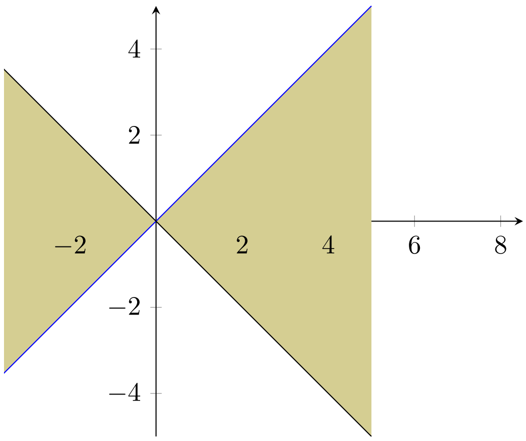
Решение. 1. Область определения функции задаётся системой неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0. \end{cases}$$

которая эквивалента системе

$$\begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x. \end{cases}$$

Соответствующая область изображена на рисунке:



ТУТ где-то ошибка

2. Аргумент логарифма должен быть положителен, поэтому область определения функции задаётся неравенством

$$\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2} > 0,$$

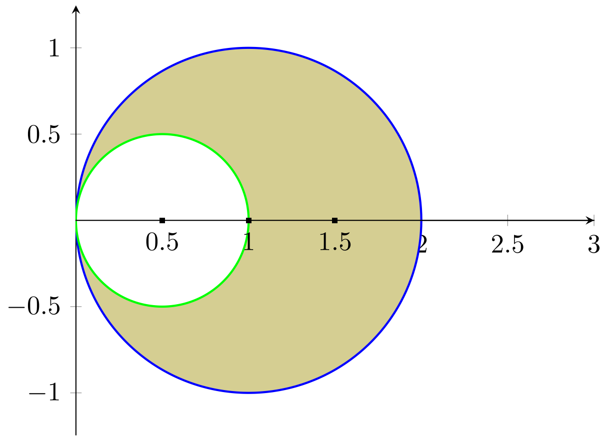
что эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2+y^2-x > 0 \\ 2x-x^2-y^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2-x < 0 \\ 2x-x^2-y^2 < 0 \end{cases}$$

После преобразования выражений получим:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Несложно видеть, что вторая система не имеет решений, а множество решений первой изображено на рисунке:



$\square$

Задача 2.

Найти множество определения функции:

1. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
2. $f(x,y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$.
4. $f(x,y) = \frac{\ln x \ln y}{\sqrt{1-x-y}}$.

Задача 3.

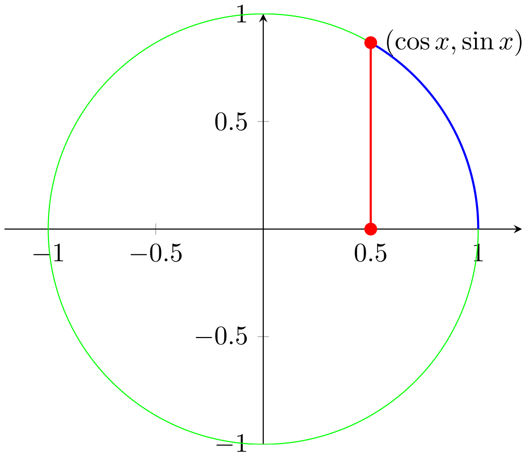
Используя оценки для функций и замену переменных, найти пределы

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty,\, y\to 3} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

Решение. 1. Заметим, что при $(x,y)\to(0,0)$, $\sqrt{x^2+y^2}\to 0$. Также верна оценка

$$|\sin xy| \le |xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Первое неравенство справедлива как длина дуги в первой четверти круга и ординаты точки конца этой дуги.



Последнее неравенство верно в силу неравенства $(x-y)^2 \geq 0$. Соответственно верно:

$$0 \leq \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

Окончательно

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

2. При $(x,y) \to (1,0)$ $x+y \to 1$. Получаем, что $\ln(x+y) \sim x+y-1$. Введём новые переменные (r,φ): $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тогда условие $(x,y) \to (1,0)$ эквивалентно $r \to 0$. Получаем:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x+y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{r} = 0$$

3. Обозначим $x = \frac{1}{t}$, тогда $x \to \infty$, $y \to 3$ эквивалентно $t \to 0$, $y \to 0$ и верно

$$\lim_{x\to\infty,\, y\to 3} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = exp\left\{\lim_{x\to\infty, y\to 3} \frac{x^2}{x+y} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} = exp\left\{\lim_{t\to 0, y\to 3} \frac{1}{(t^2\frac{1}{t}+y)} \ln(1+t)\right\} =$$

$$= exp\left\{\lim_{t\to 0, y\to 3} \frac{t}{(t+yt^2)}\right\} = exp\left\{\lim_{t\to 0, y\to 3} \frac{1}{(1+yt)}\right\} = e^1$$

□

Задача 4.

Найти предел функции $f(x,y)$, при $(x,y) \to (0,0)$:

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0,\ x^2+y^2 = 0 \end{cases},$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0,\ x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

3. $$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}.$$

Решение. 1. Несложно видеть, что $f(0,y) = f(x,0) = 0$, а при $x \neq 0$ $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Таким образом, существуют разные пути к точке $(0,0)$ следуя которым, мы будем получать различные пределы, а значит, что предела не существует.

Но в то же время верно:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

2. Имеем

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^2}{y^2}\right) = -1,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1.$$

Заметим, что $f(x,x) = 0$, $f(2x,x) = \frac{3}{2}$, Следовательно предела не существует.

3. Сделав замену переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим, что стремление $(x,y) \to (0,0)$ эквивалентно $r \to 0$. Тогда

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\left(\cos\varphi + \sin\varphi\cos\frac{1}{r\cos\varphi}\right) = 0$$

При этом $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не существует и соответственно не существует и $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$. В то же самое время $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$.

□

Задача 5.

Найти пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ для функций:

1. $f(x,y) = x + y\sin\frac{1}{x}$.
2. $f(x,y) = \frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{x+y}$.
3. $f(x,y) = \frac{x^3-y}{x^3+y}$.
4. $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$.
5. $f(x,y) = \log_{1+x}(1+x+y)$.

Задача 6.

Найти пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$ для функций:

1. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^3}$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.
3. $f(x,y) = \sin\frac{\pi y^2}{x^2+3y^2}$.

2 Дополнительные задачи. Для любознательных. Тяжёлые.

Задача 1.

Докажите, что любое конечное множество точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, является компактом.

Задача 2.

Показать, что каждая точка сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ является граничной.

Задача 3.

Доказать, что множество $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > r^2\}$ является открытым в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4.

Для чисел $a \geq 0, b \geq 0$ и $p > 1$ и $q > 1$ – действительные положительные числа и $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ доказать неравенство Юнга

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Указание: рассмотреть функцию $f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p}$ и найти её точку максимума.

Задача 5.

Доказать неравенство Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $a_i \geq 0, b_i \geq 0$ и найдётся хотя бы один строго положительный элемент, $p > 1$ и $q > 1$ – действительные положительные числа и $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Указание: рассмотреть величины $\alpha_i = \frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}$ и $\beta_i = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}$ и показать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{p}} \beta_i^{\frac{1}{q}} \leq 1$.

Задача 6.

Доказать неравенство Минковского для сумм:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $a_i \geq 0, b_i \geq 0$ и не все равны нулю одновременно, $p > 1$.

Указание: рассмотреть сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}$ и применить неравенство Гёльдера к каждому из слагаемых.

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

16 апреля 2024 г.

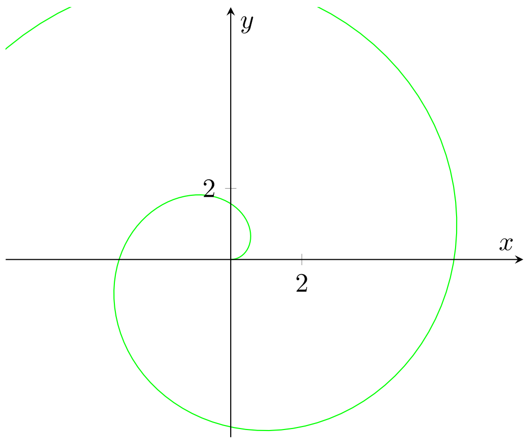
Криволинейные интегралы 1-го рода

Задача 1.

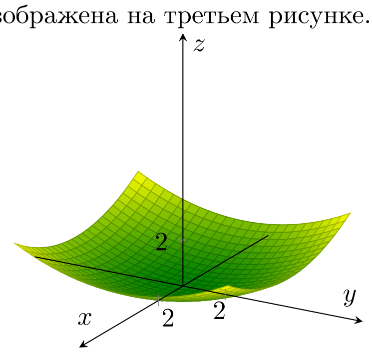
Рассмотрим кривую L, график которой представляет собой спираль. Координаты точек этой кривой в зависимости от параметра t задаются в виде:

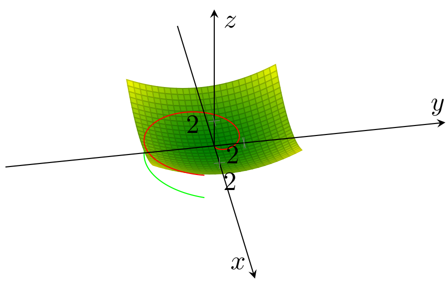
$$\begin{cases} x(t) = t \cdot \cos t \\ y(t) = t \cdot \sin t \end{cases}$$

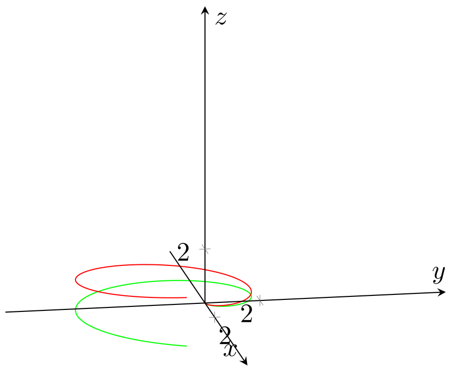
Графически, эта кривая представлена на рисунке.



Возьмём функцию двух переменных $f(x, y) = \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{20}$, график которой изображён дальше, и будем рассматривать только те аргументы, которые лежат на кривой L. Полученная кривая графически изображена на третьем рисунке.







Требуется найти длину дуги J, лежащей на параболоиде $f(x,y) = \frac{1}{20}\left(x^2+y^2\right)$, аргумента которой принадлежат кривой $L = \{x = t\cdot\cos t, y = t\cdot\sin t, t\in[0,2\pi]\}$, символьно это выглядит как $\int\limits_J ds$.

Решение. По определению длиной дуги является криволинейный интеграл 1-го рода по кривой от единичной функции. По формуле сведения криволинейного интеграла 1-го рода к интегралу Римана имеем:

$$\int\limits_J ds = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + \left(\frac{1}{20}2t\right)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2+\frac{t^2}{100}}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\frac{101t^2}{100}}\,dt = \left\{\begin{smallmatrix} z=\sqrt{\frac{101}{100}}t \\ dt=\frac{10}{\sqrt{101}}dz\end{smallmatrix}\right\} = \frac{10}{\sqrt{101}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{101}{100}}2\pi}\sqrt{1+z^2}\,dz$$

Найдём первообразную

$$\int\sqrt{1+z^2}\,dz = \left\{\begin{smallmatrix} z=\operatorname{sh} v \\ dz=\operatorname{ch} v\,dv\end{smallmatrix}\right\} =$$

$$= \int \operatorname{ch}^2 v\,dv = \int\frac{e^{2v}+2+e^{-2v}}{4}\,dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2v}}{2}+2v-\frac{e^{-2v}}{2}\right)+C = \left(\frac{v}{2}+\frac{\operatorname{sh}2v}{4}\right)+C$$

Для того чтобы вернуться к переменной z заметим, что $e^v = \operatorname{sh} v + \operatorname{ch} v = z+\sqrt{1+z^2}$ и $e^{-v} = \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v = \sqrt{1+z^2}-z$, соответственно $v = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$. Также заметим, что $\operatorname{sh}2v = \frac{1}{2}e^{2v}-\frac{1}{2}e^{-2v} = \frac{1}{2}\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+z^2}-z\right)^2 = \frac{1}{2}\left(z^2+2z\sqrt{1+z^2}+(1+z^2)-(1+z^2)+2z\sqrt{1+z^2}-z^2\right) = 2z\sqrt{1+z^2}$
В итоге получаем

$$\int\sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)+\frac{1}{2}z\sqrt{1+z^2}+C.$$

У логарифма не возникает знак модуля в силу неотрицательности значений, которые принимает переменная z. И длина дуги J равна

$$\int\limits_J ds = \frac{10}{\sqrt{101}}\cdot\left[\frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)+\frac{1}{2}z\sqrt{1+z^2}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{101}{100}}2\pi} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{101}}\cdot\left[\ln\left(\sqrt{\frac{101}{100}}2\pi+\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{101}{100}}2\pi\right)^2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{101}{100}}2\pi\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{101}{100}}2\pi\right)^2}\right]$$

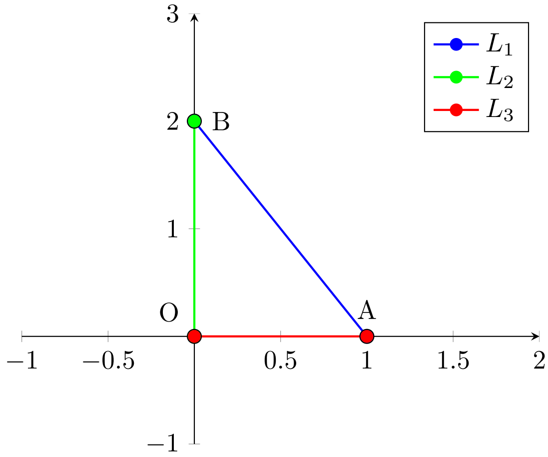
$\square$

Задача 2.

Найти значение криволинейного интеграла 1-го рода:

1. $\int\limits_L (2x+y)\,ds$, L – ломаная $ABOA$, где $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

Решение. Представим ломаную L в виде суммы прямых L_1, L_2 и L_3, как показано на рисунке.



В силу аддитивности криволинейного интеграла 1-го рода получаем:

$$\int\limits_L (2x+y)\,ds = \int\limits_{L_1} (2x+y)\,ds + \int\limits_{L_2} (2x+y)\,ds + \int\limits_{L_3} (2x+y)\,ds.$$

$$\int\limits_{L_1} (2x+y)\,ds = \int\limits_0^1 (2x+2-2x)\sqrt{1+4}dx = 2\sqrt{5}x\Big|_0^1 = 2\sqrt{5};$$

$$\int\limits_{L_2} (2x+y)\,ds = \int\limits_0^2 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 2;$$

$$\int\limits_{L_3} (2x+y)\,ds = \int\limits_0^1 2x\,dx = 1.$$

□

Задача 3.

Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода:

1. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)ds$, где $L = \big\{(x,y,z) : x = a(t\cos t - \sin t),\ y = a(t\sin t + \cos t),\ z = bt^2,\ t \in [0, 2\pi]\big\}$.
2. $\int\limits_L y\,ds$, где L – дуга $\breve{AB}$ кривой $y = x^2 + |x^2 - x|$, $A = (-1,3)$, $B = (2,6)$.

Решение. 1. Вычислим производные координатных функций: $x'_t = -at\sin t$, $y'_t = at\cos t$, $z'_t = 2bt$. Соответственно $ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} = t\sqrt{a^2+4b^2}\,dt$ и

$$\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)ds = \int\limits_0^{2\pi} \left((a(t\cos t - \sin t)^2 + (a(t\sin t + \cos t))^2 + b^2t^4\right) t\sqrt{a^2+4b^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(a^2 + a^2t^2 + b^2t^4\right) t\sqrt{a^2+4b^2} dt = \sqrt{a^2+4b^2}\left(a^2\frac{t^2}{2} + a^2\frac{t^4}{4} + b^2\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{a^2+4b^2}\left(a^2\frac{4\pi^2}{2} + a^2\frac{16\pi^4}{4} + b^2\frac{64\pi^6}{6}\right).$$

2. Раскрывая модуль кривую можно представить в виде объединения кривых по промежуткам знакопостоянства модуля:

$$L_1 = \left\{(x,y) : y = 2x^2 - x,\, x \in [-1,0]\right\},$$

$$L_2 = \{(x,y) : y = x,\, x \in [0,1]\},$$

$$L_3 = \left\{(x,y) : y = 2x^2 - x,\, x \in [1,2]\right\}.$$

По свойству аддитивности

$$\int\limits_L y + = \int\limits_{L_1} y\,ds + \int\limits_{L_2} y\,ds + \int\limits_{L_3} y\,ds.$$

$$\int\limits_{L_1} y\,ds = \int\limits_{-1}^{0} (2x^2-x)\sqrt{1+(4x-1)^2}\,dx = \left\{\begin{smallmatrix} t=4x-1 \\ dx=\frac{dt}{4} \\ 2x^2-x=\frac{t^2-1}{8}\end{smallmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{32}\int\limits_{-5}^{-1} (t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{32\cdot 8}\left(\sqrt{t^2+1}\left(2t^3-5t\right) - 5\ln\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)\right)\Bigg|_{-5}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2^8}\left(-\sqrt{2} - 5\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 225\sqrt{26} + 5\ln\left(\sqrt{26}-5\right)\right).$$

$$\int\limits_{L_2} y\,ds = \int\limits_0^1 x\sqrt{2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\int\limits_{L_3} y\,ds = \int\limits_1^2 (2x^2-x)\sqrt{1+(4x-1)^2}\,dx == \frac{1}{32}\int\limits_3^7 (t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{32\cdot 8}\left(\sqrt{t^2+1}\left(2t^3-5t\right) - 5\ln\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)\right)\Bigg|_3^7 =$$

$$= \frac{1}{2^8}\left(\sqrt{50}\cdot 651 - 5\ln\left(7+\sqrt{50}\right) - 39\sqrt{50} + 5\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right).$$

Найдём первообразную:

$$\int (t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt = \left\{\begin{smallmatrix} t=\operatorname{sh} z \\ dt=\operatorname{ch} z\,dz\end{smallmatrix}\right\} = \int \left(\operatorname{sh}^2 z - 1\right)\operatorname{ch}^2 z\,dz =$$

$$= \int \left[\left(\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4}\right)^2 - \frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4}\right] dt =$$

$$= \int \left[\frac{e^{4z} - 2 + e^{-4z}}{16} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} \right] dt = \frac{e^{4z}}{16 \cdot 4} - \frac{1}{8} z - \frac{e^{-4z}}{16 \cdot 4} - \frac{e^{2z}}{4 \cdot 2} + \frac{e^{-2z}}{4 \cdot 2} - \frac{1}{2} z =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} 4z}{16 \cdot 2} - \frac{\operatorname{sh} 2z}{4} - \frac{5}{8} z + C =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2} \sqrt{t^2+1} \left(2t^3 - t\right) - \frac{1}{2} t \sqrt{t^2 - 1} - \frac{5}{8} \ln \left| \sqrt{t^2+1} + t \right| + C =$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{t^2+1} \left(2t^3 - 5t\right) - \frac{5}{8} \ln \left| \sqrt{t^2+1} + t \right| + C$$

При переходе обратно к переменной t использовались равенства:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = \sqrt{t^2+1} + t$$

$$z = \ln \left| \sqrt{t^2+1} + t \right|$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = \sqrt{t^2+1} - t$$

$$\operatorname{sh} 4z = \frac{1}{2} \left(e^{4z} - e^{-4z}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{t^2+1} + t \right)^4 - \left(\sqrt{t^2+1} - t \right)^4 \right] =$$

$$= 4\sqrt{t^2+1} \left(2t^3 - t\right)$$

$$\operatorname{sh} 2z = \frac{1}{2} \left(e^{2z} - e^{-2z}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{t^2+1} + t \right)^2 - \left(\sqrt{t^2+1} - t \right)^2 \right] =$$

$$= 2t\sqrt{t^2+1}$$

□

Задача 4.

Найти значение криволинейного интеграла 1-го рода:

1. $\int\limits_L (x+y)\, ds$, где L – граница треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
2. $\int\limits_L \frac{ds}{y-x}$, L – отрезок с концами в точках $(0,-2)$ и $(4,0)$.
3. $\int\limits_L xy\, ds$, где L – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.
4. $\int\limits_L x^2\, ds$, где L – дуга окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$.
5. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, где L – $x^2 + y^2 = ax$.
6. $\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$, где L – астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Задача 5.

Нарисовать график кривой, заданной уравнением:

1. $x^4 + y^4 = a^2 x^2$.
2. $(x^2 + y^2)^3 = a x^4 y$, $a > 0$.
3. $x^6 + y^6 = a^2 (x^4 + y^4)$.

4. $(x^2+y^2)^3 = ax^4y$, $a>0$.

Задача 6.

Найти длину дуги следующих кривых:

1. $r=\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$. Уравнение кривой задано в полярной системе координат.
2. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$.
3. $x=a\cos^5 t, y=a\sin^5 t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$.
4. $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\cos t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$.
5. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le 1$.
6. $x=6at^5$, $y=5at(1-t^8)$ от точки $A(0,0)$ до $B(6a,0)$.

Задача 7.

Вычислить криволинейный интеграл первого рода:

1. $\int\limits_L y\,ds$, $L=\{(x,y): y=\sin x, 0\le x\le\pi\}$
2. $\int\limits_L xy\,ds$, $L=\{(x,y): x=t-\sin t, y=1-\cos t, t\in[0,2\pi]\}$
3. $\int\limits_L x^2y\,ds$, $L=\{(x,y): x=4\cos t, y=\sin 2t, x\ge 0, y\ge 0\}$.
4. $\int\limits_L \frac{ds}{x^2+y^2}$, $L=\{(x,y): x=\cos t+t\sin t, y=\sin t-t\cos t, t\in[0,2\pi]\}$.

Задача 8.

С помощью надлежащей параметризации кривой L вычислить криволинейный интеграл 1-го рода.

1. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, L – отрезок AB, где $A(0,-2)$, $B(4,0)$.
2. $\int\limits_L xy\,ds$, L – контур квадрата, ограниченного прямыми $x\pm y=1$, $x\pm y=-1$.
3. $\int\limits_L xy\,ds$, L – четверть окружности $x^2+y^2=1$, лежащая в первом квадранте.

Семинар по математическому анализу

А.Б. Чухно

23 апреля 2024 г.

Задача 1.

Рассмотрим функцию $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. вычислить значение криволинейного интеграла 2-го рода вдоль кривой L, заданной параметрически $x = \cos t$, $y = \sin t$ $t \in [0, 2\pi]$.

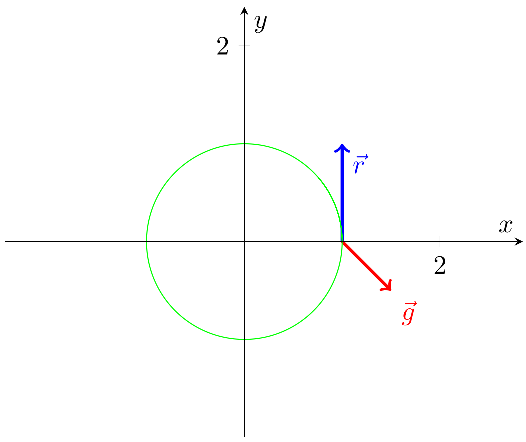
Решение. Изменение параметра t от 0 2π соответствует положительному направлению обхода кривой. Напомним, что положительным направлением обхода замкнутой кривой называется то, при движении в котором по кривой внутренняя часть остаётся слева.

Как известно, вектор $\vec{r}$, задающий направление кривой может быть выписан в виде

$$\vec{r} = \left(\frac{x_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}}, \frac{y_t'}{\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}}\right).$$

Напомним лишь, что данное представление получается как предел секущих кривую в двух точках t_0 и $t_0 + \Delta t$, то есть существует вектор $\vec{r}$ такой, что $\vec{r} \cdot \Delta t \approx (\Delta x, \Delta y)$, при $\Delta t \to 0$. Знаменатель же возникает как нормировочный коэффициент.

В каждой точке кривой приложен вектор напревления $\vec{r}$ и некоторая векторная функция $\vec{g}$



В каждой точке кривой можно найти значение скалярного произведения вектора направления на функцию. От полученного значения в каждой точке кривой можно посчитать уже знакомый нам криволинейный интеграл 1-го рода. Вычисленный интеграл от скалярного произведения

$$\int_L \left\langle \vec{F}, \vec{r} \right\rangle ds$$

называется криволинейным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$.

Перед непосредственным вычислением требуемого интеграла заметим, что в случае заданной параметризации кривой по переменной t, принимающей значение из $[a, b]$, выписанный интеграл можно представить в виде определённого интеграла:

$$\int\limits_L \left\langle \vec{F}, \vec{r} \right\rangle ds = \int\limits_a^b \left(\frac{P(x(t), y(t))x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}} + \frac{Q(x(t), y(t))y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}} \right) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t\right) dt = \int\limits_L P\, dx + Q\, dy.$$

Последняя запись является принятой за обозначение криволинейного интеграла 2-го рода.

В нашем случае криволинейный интеграл 2-го рода от векторной функции $\vec{F} = (P, Q)$ вдоль кривой L равен:

$$\int\limits_L P\, dx + Q\, dy = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)\right) dt = 2\pi.$$

□

Задача 2.

Найти значение криволинейного интеграла 2-го рода от функции $\vec{F}$ по кривой L, где $\vec{F}(x, y) = \left(y^2 + xy + x^2, x^2 - y^2\right)$, L – замкнутый контур OAB с вершинами $O = (0, 0)$, $A = (1, 2)$, $B = (0, 2)$.

Решение. кривая L – кусочно-гладкая, состоящая из трёх отрезков : OA, AB и BO. Запишем уравнения координат на каждом из отрезков:

$$OA = \{(x, y) : x = x, y = 2x, x \in [0, 1]\},$$
$$AB = \{(x, y) : y = 2, x = 1 - t, t \in [0, 1]\},$$
$$BO = \{(x, y) : x = 0, y = 2 - t, t \in [0, 2]\}.$$

Соответственно получаем:

$$I_1 = \int\limits_{OA} (y^2 + x^2 + xy)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy = \int\limits_0^1 (4x^2 + x^2 + 2x^2)\, dx + (x^2 - 4x^2) 2\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} (y^2 + x^2 + xy)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy = \int\limits_0^1 (4 + (1 - t)^2 + 2(1 - t))(-1)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (4t - 7 - t^2)\, dt = 2 - 7 - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$I_3 = \int\limits_{BO} (y^2 + x^2 + xy)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy = \int\limits_0^2 -(2 - t)^2(-1)\, dt = \int\limits_0^2 (4 - 4t + t^2)\, dt = \frac{8}{3}$$

Воспользовавшись свойством линейности в итоге получим

$$\int\limits_L (y^2 + x^2 + xy)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}.$$

□

Задача 3.

Найти значение криволинейного интеграла 2-го рода от функции $\vec{F}$ по кривой L:

1. $\vec{F}(x,y) = \left(y^2 + 2xy, x^2 - 2xy\right)$, L – дуга $\breve{AB}$ параболы $y = x^2$, $A = (1,1)$, $B = (2,4)$.
2. $\vec{F}(x,y) = (y, -x)$, L – астроида с положительным направлением обхода, заданная уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Указание:* воспользоваться параметрическим заданием кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. $\vec{F}(x,y) = (xy, 0)$, L – синусоида $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.
4. $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$, L – дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 2$.
5. $\vec{F}(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, L – кривая $y = 1 - |x - 1|$, $0 \le x \le 2$.
6. $\vec{F}(x,y) = (-3x^2, y^3)$, L – отрезок AB, $A = (0,0)$, $B = (2,4)$.

Задача 4.

Найти значение криволинейного интеграла 2-го рода:

$$\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy,$$

если L это :

1. отрезок OA прямой $y = x$, $O = (0,0)$, $A = (1,1)$,
2. участок параболы $y = x^2$ от точка $O = (0,0)$ до $A = (1,1)$,
3. участок кубической параболы $y = x^3$ от точка $O = (0,0)$ до $A = (1,1)$.

Решение. 1. В случае кривой $y = x$ получаем

$$\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 2x^2 + x^2\,dx = 1.$$

2. В случае параболы $y = x^2$ имеем

$$\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 2x^3 + 3x^3\,dx = 1$$

3. В случае кубической параболы имеем

$$\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 2x^4 + 3x^4\,dx = 1$$

Стоит обратить внимание, что в данном случае значение криволинейного интеграла не зависило от выбора кривой, а лишь от точек начала и конца. В данном случае $P(x,y) = 2xy$, $Q(x,y) = x^2$ и верно равенство

$$2x = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

□

Задача 5.

Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром L, где L – петля декартова листа , задаваемого уравнением $x^3 + y^3 = 3axy$.

Решение. Как было установлено ранее, петля декартова листа лежит в первом координатном угле. Также справедливо парметрическое представление координат точек, лежащих на петле:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases} \qquad t \in [0, +\infty).$$

Для вычисления площади D, ограниченной замкнутым контуром L верна одна из следующих формул:

$$D = -\int\limits_L y dx,$$

$$D = \int\limits_L x dy,$$

$$D = \frac{1}{2}\int\limits_L x dy - y dx.$$

В соответствии с параметрическим представлением верно $dx = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,dt$, $dy = 3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}\,dt$, и тогда

$$D = \frac{1}{2}\int\limits_L x dy - y dx =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3}3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} - 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\frac{3at^2}{1+t^3}\right)dt = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^5+t^2}{(1+t^3)^3}\,dt =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^2}\,d(t^3+1) = \frac{3a^2}{2}\left.\frac{-1}{1+t^3}\right|_0^{+\infty} = \frac{3}{2}a^2.$$

□

Задача 6.

Используя криволинейный интеграл второго рода найти площадь следующих фигур:

1. эллипса с полуосями a и b, задаваемого уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. астроиды, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.