Глава 1

Предколлок

1.1 Дать определение ограниченного (сверху, снизу) множества, последовательности, функции.

1. Множество называется **ограниченным сверху**, если существует действительное число C такое, что все элементы множества X не превосходят C:
   $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \to x \leq C$
   Пример: $\{-n\}\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$

2. Множество называется **ограниченным снизу**, если существует действительное число C' такое, что все элементы множества X не меньше C':
   $\exists C' \in \mathbb{R} : \forall x \in X \to x \geq C'$
   Пример: $\{n\}\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$

3. Множество называется **ограниченным**, если:
   $\exists C > 0 : \forall x \in X \to |x|\ \leq C$
   Пример: $\{1/n\}\ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$

4. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если существует действительное число C_1 такое, что все члены последовательности X не превосходят C_1:
   $\exists C_1 : \forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leq C_1$

5. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если существует действительное число C_2 такое, что все члены последовательности X не меньше C_2:
   $\exists C_2 : \forall n \in \mathbb{N} \to x_n \geq C_2$

6. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если:
   $\exists C_1\ \exists C_2 : \forall n \in \mathbb{N} \to C_1 \leq x_n \leq C_2$

7. Функция f называется **ограниченной снизу на множестве** X, если:
   $\exists C_1 : \forall x \in X \to f(x) \geq C_1$

8. Функция f называется, **ограниченной сверху на множестве** X, если:
   $\exists C_2 : \forall x \in X \to f(x) \leq C_2$

9. Функция f называется **ограниченной на множестве** X, если:
   $\exists C > 0 : \forall x \in X \to |f(x)| \leq C$

1.2 Дать определение (придумать) не ограниченного множества, последовательности, функции

1. Множество называется **неограниченным**, если:
   $\forall C > 0 : \exists x \in X : |x| > C$

2. Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если:
   $\forall C > 0 : \exists x_n : |x_n| > C$

3. Функция называется **неограниченной на множестве X**, если:
   $\forall C > 0 : \exists x_C \in X : |f(x_C)| > C$

1.3 Дать определение пределов.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0 :\ \exists N = N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow\ \forall\delta > 0 :\ \exists N = N_\delta : \forall n \geq N_\delta\ \rightarrow a_n > \delta$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow\ \forall\delta > 0 :\ \exists N = N_\delta : \forall n \geq N_\delta\ \rightarrow a_n < -\delta$

1.4 Дать определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно малой**, если
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0 :\ \exists N = N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow\ \forall\delta > 0 :\ \exists N = N_\delta : \forall n \geq N_\delta : |x_n| > \delta$