Вопросы по системам линейных уравнений и линейным

Ответы

1. Дать определение системы линейных уравнений, совместной и несовместной системы. Привести примеры.

Система линейных уравнений с n неизвестными - это система вида:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_n \end{cases}, \text{ где:}$$

$x_1, \ldots, x_n -$ неизвестные;
$a_{ij} -$ коэффициент при неизвестных, где $i -$ номер строки, а $j -$ номер столбца

Встречаются 2 формы записи:

1) Матричная форма записи:

$A \cdot X = B,$ где

$A -$ матрица коэффициентов системы,
$X -$ вектор $-$ столбец неизвестных
$B -$ вектор $-$ столбец свободных членовъ

По другому:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2) Векторная форма записи:

$A^1 \cdot x_1 + \ldots + A^n \cdot x_n = B,$ где

$A^1 \ldots A^n -$ вектор $-$ столбцы матрицы A
$B -$ вектор $-$ столбец свободных членов
$x_1 \ldots x_n -$ неизвестные коэффициенты

Система называется совместной, если у нее имеется хотя бы одно решение и несовместной в противном случае.

Примеры:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} - \text{ несовместная система}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} - \text{ совместная неопределенная система } (\infty \text{ количество решений})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} - \text{ совместная оределенная система } (1 \text{ решение})$$

2. Дать определение матрицы системы, расширенной матрицы. Записать в матричном виде систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Матрица-система - это матрица m на n, составленная из коэффициентов при неизвестных.

Расширенная матрица(1) - это матрица, которая получается если к матрице A добавить(дописать сбоку) вектор-столбец B.

$$\hat{A} = \left(A \vdots B\right) \qquad (1)$$

Запись системы в матричном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

3. Дать определение решения системы, множества решений $V(\hat{A})$, определенной и неопределенной системы. Привести примеры.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = & 2 \end{cases} - \text{ неопределенная система}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & 2 \\ x_1 + 2x_2 = & 3 \end{cases} - \text{ определенная система}$$

Решением системы называется упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, при подстановке которого вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в уравнения системы получаются верные равенства. Множество решений системы обозначается $V(\hat{A})$.

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

В этом случае вектор-столбец C (1) является решением матричного уравнения, причем каждое решение матричного уравнения определяет решение системы. Кроме того линейная комбинация столбцов матрицы системы с коэффициентами $c_1, c_2 \ldots c_n$, будет, согласно векторной записи системы, равна вектор - столбцу B.

Система, имеющая единственное решение, называется определенной.

Система, имеющая множество решений, называется неопределенной

4. Дать определение равносильных систем. Показать, что при элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы система переходит в равносильную.

Две системы линейных уравнений $A_1 X=B_1$ и $A_2 X=B_2$ (матричный вид системы линейных уравнений – удобная запись этой системы!) называются эквивалентными или равносильными, если у них одно и то же множество решений $V(\hat{A}_1) = V(\hat{A}_2)$.

Рассмотрим систему $A_1 X=B_1$ вида (1) и матрицу $P\in M_k^m$.Такую матрицу можно умножить слева на матрицу системы A_1 и на столбец свободных членов B_1 , так как $A_1 \in M_m^n$, а $B_1 \in M_m^1$.

$$A_1 \cdot X = B_1$$

$$P \cdot A_1 \cdot X = P \cdot B_1$$

$PA_1X = PB_1$ – это новая система линейных уравнений. Обозначим PA_1 через A_2 , а PB_1 через B_2 и получим систему $A_2 X=B_2$.

Если вектор-столбец C* является решением первой системы уравнений , то есть $A_1C=B_1$,то этот же вектор будет решением второй системы уравнений. Действительно:

$$P \cdot (A_1 C) = PB_1 \Leftrightarrow (PA_1) \cdot C = PB_1 \Leftrightarrow A_2 \cdot C = PB_2$$

Из этого следует, что $V(\hat{A}_1) \subset V(\hat{A}_2)$. Предположим, что у матрицы P существует обратная матрица Q. Тогда для системы $QA_2X=QB_2$ справедливы аналогичные рассуждения, то есть $V(\hat{A}_2) \subset V(Q\hat{A}_2)$. Но если $Q \cdot A_2 = Q \cdot P \cdot A_1 \Leftrightarrow Q \cdot B_2 = Q \cdot = Q \cdot P \cdot B_1,\ Q \cdot P = E$. Мы видим, что система $QA_2 X=QB_2$ - это исходная система $A_1 X=B_1$ и , следовательно $V(\hat{A}_2) \subset V(\hat{A}_1)$. Системы равносильны.

Возьмем в качестве матрицы P элементарную матрицу Э порядка m (любую из трех типов). Ранее(посмотрите в конспекте) мы установили обратимость всех элементарных матриц, следовательно системы AX=B и ЭAX=ЭB равносильны. Умножение на элементарную матрицу слева осуществляет соответствующее элементарное преобразование над строками исходной матрицы. Э$\hat{A}$ = Э(A⁝ B) = (Э A⁝ ЭB). Таким образом эта теорема нами доказана.

Примечание. Важно, чтобы у P была обратная матрица.

5. Изложить метод решения систем главного ступенчатого вида. В каком случае такая система несовместна?

Пусть AX = B система линейных уравнений, $\hat{A}$ – расширенная матрица этой системы $\hat{A} = (B)$, $\hat{A}_{\text{гл.ст.}}$ – матрица главного ступенчатого вида, полученная из $\hat{A}$ с помощью элементарных преобразований над строками матрицы . Заметим, что матрица системы A также принимает главный ступенчатый вид: $A \to A_{\text{гл..ст}}$. Сравним число ненулевых строк матриц $A_{\text{гл..ст.}}$ и $\hat{A}_{\text{гл.ст.}}$.

Возможны два случая:

1) Столбец свободных членов главный (система противоречива):

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$$

2) Столбец свободных членов не главный:

Пусть число ненулевых строк равняется r.

$$\begin{cases} x_1 \, + \, a_1^{r+1} \cdot x_{r+1} \, + \, \ldots \, a_1^n \cdot x_n \, = \, b_1 \\ \vdots \\ x_r \, + a_r^{r+1} \cdot x_{r+1} \, + \, \ldots \, a_r^n \cdot x_n \, = \, b_r \end{cases},$$

где $x_1 \ldots x_r -$ главные неизвестные. Остальные неизвестные называются свободными

Отделим неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 \, = -a_1^{r+1} \cdot x_{r+1} \, - \, \ldots \, - a_1^n \cdot x_n \, - \, b_1 \\ \vdots \\ x_r \, = -a_r^{r+1} \cdot x_{r+1} \, - \, \ldots \, - \, a_r^n \cdot x_n \, - \, b_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{r+1} \, = \, C_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \, = \, C_n \end{cases} \quad - \text{ Запишем в свободные неизвестные произволные числа}$$

Таким образом главные неизвстные опеределены однозначно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{r+1} \cdot C_{r+1} \, - \, \ldots \, - a_1^n \cdot C_n \, - \, b_1 \\ \vdots \\ -a_r^{r+1} \cdot C_{r+1} \, - \, \ldots \, - \, a_r^n \cdot C_n \, - \, b_r \\ C_{r+1} \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

6. Изложить метод Гаусса решения систем линейных уравнений на примере

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

7. Дать определение однородной и неоднородной систем. Показать, что однородная система всегда совместна.

Рассмотрим еще одну классификацию систем линейных уравнений . Система называется **однородной** , если **все свободные члены уравнений равны нулю** и **неоднородной в противном случае**. Однородная система всегда совместна, так как у нее имеется тривиальное решение:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$$

8. Доказать, что однородная система m уравнений с n неизвестными при m < n имеет нетривиальное решение. (Сколько таких решений?)

Утверждение. Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^k \in R^n$. Если k > n, то векторы линейно зависимы.

Доказательство. Для доказательств нам понадобиться небольшая лемма:

Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^k$ векторы пространства R^n, тогда они линейно зависимы в том и только в том случае, когда существует нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений с матрицей A, столбцы которой есть векторы $a^1, a^2, \ldots, a^k$.

Доказательство. Рассмотрим векторы и матричную запись системы:

$$a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, a^k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + x_k \cdot \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Существование нетривиального решения системы означает, что существует набор чисел $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, среди которых есть хотя бы одно отличное от нуля , который является решением системы. Подставив эти числа в векторную запись системы , получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ равную 0.

Вернемся к нашему доказательству. Согласно только что доказанной лемме вопрос о линейной зависимости векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ сводится к вопросу о существовании нетривиального решения однородной системы линейных уравнений :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

В этой системе число уравнений n, а число неизвестных k. Но мы знаем, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то в системе есть свободные неизвестные и, следовательно, есть нетривиальные решения. Поэтому, если $k > n$, то система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ линейно зависима.

9. Дать определение линейного пространства R^n, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Привести примеры таких систем в R^n.

Множество n-мерных векторов с операциями сложения векторов и умножения на действительные числа называется **n-мерным линейным координатным пространством** и обозначается R^n.

Векторы $a^1, a^2, \ldots, a^k$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулевой матрице(простыми словами, нулю), то есть, если существуют числа $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ не все равные нулю ($\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0$) и такие, что:

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_\kappa a^k = 0$$

В противном случае векторы называются линейно независимыми.

10. Доказать, что k векторов в пространстве R^n линейно зависимы при k > n. Показать, что в пространстве R^n существует система из n линейно независимых векторов. (Единственна ли такая система?)

Утверждение. Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^k \in R^n$. Если k > n, то векторы линейно зависимы.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме вопрос о линейной зависимости векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ сводится к вопросу о существовании нетривиального решения однородной системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^k \\ \vdots & & \\ a_n^1 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

В этой системе число уравнений n, а число неизвестных k. Но мы знаем, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то в системе есть свободные неизвестные и , следовательно, есть нетривиальные решения. Поэтому, если $k > n$, то система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ линейно зависима.

11. Дать определение линейного подпространства. Привести примеры. Дать определение линейной оболочки векторов. Доказать, что она является линейным подпространством. Почему этот пример является универсальным?

Подмножество L линейного координатного пространства R^n называется линейным подпространством, если оно обладает следующими свойствами

1. $\bar{0} \in L$
2. Если $v \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda v \in L$
3. Если v_1 и $v_2 \in L$, то $(v_1 + v_2) \in L$

Линейной оболочкой векторов $a^1, a^2, \dots, a^k$ в пространстве R^n называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Линейная оболочка векторов $a^1, a^2, \dots, a^k$ обозначается $L(a^1, a^2, \dots, a^k)$.

Утверждение. Линейная оболочка векторов $L(a^1, a^2, \dots, a^k)$ является линейным подпространством пространства R^n .

Доказательство. Проверим, что выполняются все три свойства определения линейного подпространства.

1) Нулевой вектор принадлежит линейной оболочке, так как

$$a_1 \cdot 0 + \dots a_k \cdot 0 = 0$$

2) Если $v_1 = a_1 \cdot \alpha_1 + \dots + a_k \cdot \alpha_k$ и $v_2 = a_1 \cdot \beta_1 + \dots + a_k \cdot \beta_k$, то $(v_1 + v_2) = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot a_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) \cdot a_k$

3) Если $v_1 = \alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \alpha_k \cdot a_k$, а $\lambda \in \mathbb{R}$, то
$(\lambda \cdot v_1) = \lambda \cdot \alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda \cdot \alpha_k \cdot a_k =$
$= \beta_1 \cdot a_1 + \dots + \beta_k \cdot a_k$

Все линейные подпространства L, в пространства R^3, описанные выше, являются линейными оболочками некоторого множества векторов. Можно ли утверждать, что линейная оболочка векторов является универсальным способом описания линейных подпространств в R^n ?

12. Доказать, что множество решений однородной системы является линейным подпространством.

Утверждение. Множество решений V($\hat{A}$) однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством в пространстве R^n, где n число неизвестных системы.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений AX = O и ее множество решений V($\hat{A}$). Каждое решение – набор из n чисел, где n - число неизвестных в системе. Покажем, что это множество удовлетворяет всем трем свойствам определяющим линейное подпространство в пространстве R^n.

Действительно, $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ является решением однородной системы и следовательно 0 ∈ V($\hat{A}$).

Если $X_1 \in V\left(\hat{A}\right)$ и $X_2 \in V\left(\hat{A}\right)$, то есть $AX_1 = 0$ и $AX_2 = 0$, то $A \cdot (X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0$ (дистрибутивность умножения матриц по отношению к сложению). Таким образом X_1 и $X_2 \in V\left(\hat{A}\right)$.

Наконец, если $AX = 0$, то $A \cdot (\lambda X) = \lambda \cdot AX$ и множество $V\left(\hat{A}\right)$ – замкнут относительно операций сложения и умножения на число.

Заметим, что для неоднородной системы линейных уравнений множество решений V($\hat{A}$) не является линейным подпространством, ибо ни одно свойство линейного подпространства не выполняется для этого множества.

13. Дать определение базиса множества М , координат вектора в данном базисе. Показать что координаты вектора определены однозначно.

Утверждение. Пусть $m_1, \dots, m_k$ - базис множества М, тогда любой вектор m является линейной комбинацией базисных векторов. То есть существуют числа $x_1, \dots, x_k$ такие, что $m = \sum_{i=1}^{k} x_i m_i$.

Доказательство.

$m_1, \dots, m_k$ – базис множества М, т.е. максимальная совокупность линейно независимых векторов, то для любого вектора m система $\{m_1, \dots, m_k, m\}$ линейно зависима, то есть существуют числа, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ не все равные нулю и такие, что $\lambda_0 m + \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_k = 0$. Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, так как иначе $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_k = 0$ и среди коэффициентов λ_i i=1,2..k есть ненулевые. Но это противоречит линейной независимости базисных векторов. Если $\lambda_0 \neq 0$, то

$$m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} m_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} m_k = x_1 m_1 + \dots + x_k m_k, \text{ где } x_i == -\frac{\lambda_i}{\lambda_0}.$$

14. Дать определение размерности множества. Объяснить, как найти размерность линейной оболочки векторов.

Размерностью линейного подпространства L называется число векторов в его базисе, которое обозначается $dim\ L$.

Размерность линейной оболочки $L(a^1, a^2, ..., a^m)$ равна максимальному числу линейно независимых векторов в системе $\{a^1, a^2, ..., a^m\}$, то есть числу векторов в базисе конечного множества $\{a^1, a^2, ..., a^m\}$.

Рассмотрим линейную оболочку векторов $L = L(a^1, a^2, ..., a^k)$ и найдем ее размерность.

Доказательство.

Пусть векторы $a^1, a^2, ..., a^k$ образуют базис конечного множества:

$$M = \{a^1, a^2, ..., a^m\} \ (m \ge k),$$

тогда каждый вектор множества M можно записать в виде линейной комбинации базисных векторов. В частности:

$$a_{k+1} = \alpha_1^{k+1} \cdot \bar{a_1} + \ldots + \alpha_k^{k+1} \cdot \bar{a_k},$$

$$\vdots$$

$$a_m = \alpha_1^m \cdot \bar{a_1} + \ldots + \alpha_k^m \cdot \bar{a_k},$$

Покажем, что векторы $a^1, a^2, ..., a^k$ образуют базис линейной оболочки $L(a^1, a^2, ..., a^m)$**.** Векторы $a^1, a^2, ..., a^k$ линейно независимы, как базис множества M. Проверим, что $a^1, a^2, ..., a^k$ максимальная линейно независимая система векторов в линейной оболочке $L(a^1, a^2, ..., a^m)$. Для этого достаточно убедиться в том, что любой вектор a из $L(a^1, a^2, ..., a^m)$ является линейной комбинацией векторов системы $a^1, a^2, ..., a^k$. В этом случае добавление любого вектора к системе превращает ее в линейно зависимую.

$$\bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{a_1} + \ldots + \lambda_k \cdot \bar{a_k} + \ldots + \lambda_m \cdot \bar{a_m} =$$
$$\lambda_1 \cdot \bar{a_1} + \ldots + \lambda_k \cdot \bar{a_k} + \lambda_{k+1} \cdot \left(a_1^{k+1} \cdot \bar{a_1} + \ldots + a_k^{k+1} \cdot \bar{a_k}\right) + \ldots + \lambda_m \cdot \left(a_1^m \cdot \bar{a_1} + \ldots + a_k^m \cdot \bar{a_k}\right)$$
$$= \left(\lambda_1 + \lambda_{k+1} \cdot a_1^{k+1} + \ldots + \lambda_m \cdot a_1^m\right) \cdot \bar{a_1} + \ldots + \left(\lambda_k + \lambda_{k+1} \cdot a_k^{k+1} + \ldots + \lambda_m \cdot a_k^m\right) \cdot \bar{a_k}$$

Следовательно, $dim\ L(a^1, a^2, ..., a^m) = k$**.**

15. Вывести формулу размерности подпространства решений $V(\hat{A})$ для однородной системы

Утверждение. $\dim V\left(\hat{A}\right) = n - r$, где:

$n -$ число неизвестных в однородной системе, а

$r -$ ранг матрицы A(матрицы $-$ системы)

Доказательство.

Пусть $r = rk\ A$, тогда после приведения матрицы A к главному ступенчатому виду $A_{гл.ст.}$ у нее будет r ненулевых строк, и, соответственно, r главных столбцов и столько же главных неизвестных. Свободных неизвестных будет n - r. Для удобства записи рассмотрим случай, когда первые r столбцов - главные. Система уравнений, соответствующая $A_{гл.ст.}$ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_1^{r+1} \cdot x_{r+1} + \ldots + a_1^n \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ x_r + a_r^{r+1} \cdot x_{r+1} + \ldots + a_r^n \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Разделим неизвестные :

$$\begin{cases} x_1 = - a_1^{r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_1^n \cdot x_n \\ \vdots \\ x_r = - a_r^{r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_r^n \cdot x_n \end{cases}$$

Дополним систему тождествами :

$$\begin{cases} x_1 = - a_1^{r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_1^n \cdot x_n \\ \vdots \\ x_r = - a_r^{r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_r^n \cdot x_n \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

Придадим свободным неизвестным произвольные значения $x_{r+1} = c_{r+1}, \ldots, x_n = c_n$ и подставим правую часть системы.

$$\begin{cases} x_1 = -a_1^{r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_1^n \cdot x_n \\ \vdots \\ x_r = -a_r^{r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_r^n \cdot x_n \\ x_{r+1} = c_{r+1} \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

Запишем полученное решение системы в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ x_{r+3} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_{r+1}}_{c_{r+1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1^{r+1} \\ -a_2^{r+1} \\ \vdots \\ -a_r^{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b_1}} + \underbrace{x_{r+2}}_{c_{r+2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1^{r+2} \\ -a_2^{r+2} \\ \vdots \\ -a_r^{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b_2}} + \ldots + \underbrace{x_n}_{c_n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1^n \\ -a_2^n \\ \vdots \\ -a_r^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{b}_{n-r}}$$

Запишем в векторной форме:

$$\bar{X} = c_{r+1} \cdot \bar{b_1} + c_{r+2} \cdot \bar{b_2} + \ldots + c_n \cdot \bar{b}_{n-r}$$

Каждый из этих векторов является решением системы, то есть $\bar{b_i} \in V\left(\hat{A}\right)$ для $i \in (1;\, n-r)$. Любой вектор решения *X*, как следует из формулы выше, линейно выражается через векторы $\bar{b_1}, \ldots, \bar{b}_{n-r}$. Осталось проверить линейную независимость векторов $\bar{b_1}, \ldots, \bar{b}_{n-r}$.

Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее к нулю.

$$\lambda_1 \cdot \bar{b_1} + \lambda_2 \cdot \bar{b_2} + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot \bar{b}_{n-r} = 0$$

Следовательно все $\lambda_i = 0$ при $i \in (1; n - r)$, векторы $\bar{b_1}, \ldots, \bar{b}_{n-r}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $V(\hat{A})$. Векторная запись общего решения однородной системы принимает вид:

$$\bar{X} = \alpha_1 \cdot \bar{b_1} + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{b_k}$$

Теперь рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений *AX=B* и предположим, что она совместна, то есть $rk\,A = rk\,\hat{A}$. Пусть x_0 - вектор частного решения системы то есть $AX_O=B$. Если x – другое решение системы, то AX=B и $A(X-X_o)=O$. Это означает, что вектор $x-x_0$ является решением соответствующей однородной системы линейных уравнений AX=O.

Верно и обратное утверждение: если x_0 – вектор частного решения неоднородной системы линейных уравнений $AX_o=B$, а C – вектор какого-либо решения соответствующей однородной системы AC = O, то вектор $X = X_0 + C$ является решением неоднородной системы, так как A(Xo+C)=B. Тем самым формула доказана.

16. Дать определение ранга матрицы. Изложить и обосновать метод нахождения ранга матрицы.

Рангом матрицы A $\in M_m^n$ называется максимальное число линейно независимых столбцов этой матрицы и обозначается $rk\,A$.

Ранг матрицы определяет число базисных векторов множества столбцов матрицы и совпадает с размерностью линейной оболочки ее столбцов (посмотрите предыдущий пункт).

Утверждение. Чтобы найти ранг матрицы необходимо привести её к главному ступенчатому виду и подсчитать число ненулевых строк.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу главного ступенчатого вида $A_{гл.ст}$, в которой число ненулевых строк равно r. Ее главные столбцы-векторы $e_1, \ldots, e_r$, а остальные столбцы (последние $(n - r)$ координат у всех векторов нулевые) линейно выражаются через главные столбцы. Тем самым главные столбцы образуют базис множества столбцов матрицы главного ступенчатого вида. Следовательно $rk\,A_{гл.ст} = r$, то есть ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.

(Вам не кажется, это практически 18 вопрос)

17. Доказать, что при элементарных преобразованиях над строками матрицы линейные соотношения между столбцами сохраняются.

Утверждение. При элементарных преобразованиях над строками матрицы A$\in M_m^n$ линейные соотношения между ее столбцами сохраняются.

Доказательство. Рассмотрим векторную запись однородной системы линейных уравнений вида:

$x_1 \cdot \bar{a_1} + \ldots + x_n \cdot \bar{a_n} = 0$, где

$\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n}$ – столбцы матрицы – системы A

Любое линейное соотношение $\alpha_1 \cdot \bar{a_1} + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{a_n} = 0$ между векторами $\bar{a_1} \ldots \bar{a_n}$ задает набор чисел α_1 ... α_n, который является решением системы и наоборот, любое решение рассматриваемой системы определяет линейное соотношение между столбами матрицы А. При элементарных преобразованиях над строками расширенной матрицы система переходит в эквивалентную, то есть множество решений не меняется и, следовательно, не меняются линейные соотношения между столбцами.

Дополнительно (Нужно для других вопросов):

Следствие 1. При элементарных преобразованиях над строками матрицы линейная зависимость и линейная независимость столбцов сохраняется.

Следствие 2. При элементарных преобразованиях над строками матрицы ранг матрицы не меняется.

18.Доказать, что ранг матрицы равен числу ненулевых строк ее ступенчатого вида.

Утверждение. Ранг матрицы главного ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство.

Рассмотрим матрицу главного ступенчатого вида $A_{гл.ст}$, в которой число ненулевых строк равно r. Ее главные столбцы-векторы $e_1, \ldots, e_r$, а остальные столбцы (последние $(n - r)$ координат у всех векторов нулевые) линейно выражаются через главные столбцы. Тем самым главные столбцы образуют базис множества столбцов матрицы главного ступенчатого вида. Следовательно $rk\ A_{гл.ст} = r$, то есть ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.

19. Изложить метод нахождения базиса конечной системы векторов.

Для нахождения базиса конечного множества векторов $a^1, a^2,..., a^m$ нужно записать матрицу A, столбцами которой будут векторы $a^1, a^2,..., a^m$ ($A \in M_n^m$), а затем привести ее к главному ступенчатому виду (число ненулевых строк будет рангом матрицы: $rk\, A = r$).

Главные столбцы имеют вид $e_1, ..., e_r$ и являются базисом столбцов матрицы $A_{гл.ст}$. Остальные столбцы этой матрицы линейно выражаются через главные столбцы естественным образом .

Из теоремы, изложенной под вопросом 17, следует, что столбцы исходной матрицы A с теми же номерами, что и главные столбцы матрицы $A_{гл.ст}$ образуют базис множества векторов $a^1, a^2,..., a^m$.

Остальные векторы множества линейно выражаются через базисные векторы с теми же коэффициентами, с какими столбцы матрицы $A_{гл.ст}$ теми же номерами выражаются через векторы $e_1, ..., e_r$.

20. Доказать теорему Кронекера – Капелли

Утверждение. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда , когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы

$$rk\,A = rk\,\hat{A}$$

Доказательство.

Приведем $\hat{A}$ к главному ступенчатому виду $\hat{A}_{гл.ст.}$, при этом матрица A будет приведена к $A_{гл.ст.}$ Согласно следствию 2 из теоремы 3 при элементарных преобразованиях над строками матрицы ее ранг не меняется.

$$rk\,A = rk\,A_{гл.ст.}$$

$$rk\,\hat{A} = rk\,\hat{A}_{гл.ст}$$

Ранг матрицы главного ступенчатого вида равен числе ее ненулевых строк. Линейная система совместна тогда и только тогда, когда столбец свободных членов не является главным. Но это бывает в том и только в том случае, когда у матриц $A_{гл.ст.}$ и $\hat{A}_{гл.ст.}$ одинаковое число ненулевых строк, то есть одинаковые ранги.

21. Дать определение фундаментальной системы решений для однородной системы. Записать формулу общего решения однородной и неоднородной систем.

Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис в пространстве решений этой системы.

$\bar{c_1} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, \bar{c_k} = \begin{pmatrix} c_{k1} \\ \vdots \\ c_{kn} \end{pmatrix}$ – это конечный набор решений системы, причем $k \le n$.

Эти векторы линейно независимы и вектор решения $X \in V\left(\hat{A}\right)$ линейно выражается через векторы $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c_k}$:

$$X = a_1 \cdot \bar{c_1} + \ldots + a_k \cdot \bar{c_k} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + a_k \cdot \begin{pmatrix} c_{k1} \\ \vdots \\ c_{kn} \end{pmatrix}$$