Экзаменационная сессия 4 модуля 2022/23 учебного года

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №

по курсу «Математический анализ». Группы СКБ221- СКБ223

1. Теоретический вопрос, связанный с вопросником 1 или вопросником 2.
2. Теоретический вопрос, связанный с вопросником 3.
3. Задача на интегралы (в том числе, несобственные интегралы) или формулу Тейлора.
4. Задача на функции нескольких переменных.

1	**2**	**3**	**4**	**∑**
3	3	2	2	10

Основные типы задач для экзаменационных билетов

Интегралы: см. КР 3-го модуля (ауд. и домашнюю части), см. часть 1 КР 4 модуля.

Формула Тейлора:

- При помощи разложений Тейлора найдите асимптотику при $x \to 0$ для функции

  $f(x) = Sinx + Cosx - \sqrt{1+2x}$.

- При помощи разложений Тейлора вычислите пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt{1+2x^2}\,\mathrm{Cos}\,x-1}\ ;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Cos}\,x-\sqrt[3]{1-1{,}5x^2}}{(x-\ln(1+x))\;arctg(x^2)}\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\ln(1-x))\,\mathrm{Sin}\,x}{arctgx-\mathrm{Sin}\,x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(arctgx-\mathrm{Sin}\,x)\,\mathrm{Sin}\,x}{\exp(x^2/2)\,\mathrm{Cos}\,x-1};$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^6+3x^5}-\sqrt{x^4+2x^3})\,;\qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3}-2\sqrt{x^2+2})\,x^3\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2\ln(x+1)-x^2\ln x-x)=-\frac{1}{2}\,;\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+2x^5}-x^3-x^3\ln(x+1)+x^3\ln x)\,.$$

Функции нескольких переменных:

- Изобразите множество определения функции $z=\sqrt{\dfrac{2x+y}{x-y}}+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Является ли это множество определения ограниченным? замкнутым?
- Построив семейство линий уровня функции $z = x^2 + y^2$, определите её наибольшее и наименьшее значения в области треугольника с вершинами в точках A(–1, 7),
- B(7, 1), C(5, 12). Объясните своё решение.

- Заменив приращение функции дифференциалом, вычислите величины

  а) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x=2{,}995$, $y=4{,}015$; б) $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$ при $x=1{,}008$, $y=0{,}992$.

- Исследуйте на экстремум функцию $z = 3x^2y - 2xy^2 + 18xy$. Изобразите на плоскости линию уровня $z = 0$, области знакопостоянства функции и её точки стационарности.
- Проверьте, что функциональное уравнение $x^2 - x^3y + 2\ln y = 0$ удовлетворяет условиям теоремы Юнга в окрестности точки (1, 1). Для проходящего через указанную точку решения $y = y(x)$ этого уравнения найдите первые три слагаемые формулы Тейлора – Пеано.
- Проверьте, что функциональное уравнение $\dfrac{8\sqrt{x}}{y^2} - \dfrac{2\sqrt{y}}{z^2} - \dfrac{6\sqrt{z}}{x^2} = 0$ удовлетворяет условиям теоремы Юнга в окрестности точки (1, 1, 1). Найдите линейное приближение проходящего через указанную точку решения $z = z(x,y)$ этого уравнения.
- В дифференциальном уравнении $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 3e^y$ произведите замену независимых переменных $u = x^3 + e^y$, $v = x^3e^y$.
- Исследуйте на условный экстремум функцию $z = 2x + 3y$ при условии

$$2x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0.$$