**Департамент прикладной математики МИЭМ, 2022/23 уч. год,**

**Математический анализ. Лектор Л.И. Кузьмина**

**Вопросы для подготовки к экзамену за 1, 2 модули.**

**СКБ221 - СКБ 223**

1. Дать определения множества, ограниченного сверху (снизу), ограниченного множества. Доказать эквивалентность двух определений ограниченного множества.

2. Дать определения верхней и нижней граней множества. Привести примеры ограниченных сверху (снизу) множеств, содержащих и не содержащих свою верхнюю (нижнюю) грань. Сформулировать теорему о существовании верхней (нижней) грани у множества.

3. Дать определения (в различных формах) пределов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

4. Доказать ограниченность последовательности, имеющей конечный предел. Показать на примерах, что обратное утверждение неверно.

5. Дать определения бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей. Привести примеры.

6. Доказать теорему Вейерштрасса о существовании предела у неубывающей ограниченной сверху последовательности. Сформулировать варианты этой теоремы.

7. Сформулировать следующие определения пределов (при помощи неравенств и при помощи окрестностей).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ | II | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ | III | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ |
| IV | $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ | V | $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ | VI | $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ |
| VII | $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$ | VIII | $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ | IX | $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ |
| X | $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ | XI | $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$ | XII | $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$ |
| XIII | $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ | XIV | $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$ | XV | $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$ |

8. Дать определение бесконечно малой функции при $x \to x_0$. Доказать теорему: функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда

величина $f(x) - b$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

9. Доказать теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

10. Доказать теоремы о пределе суммы и произведения двух функций.

11. Доказать теорему о частном двух функций.

12. Дать определение непрерывности функции в точке: 1) при помощи понятия предела, 2) при помощи неравенств, 3) при помощи окрестностей, 4) при помощи приращений $\Delta x$ и $\Delta y$.

13. Доказать теорему о пределе сложной функции. Вывести следствие о непрерывности сложной функции. Построить пример, показывающий, что в теореме п.1 существенно требование непрерывности внешней функции: указать такие функции $u = f(x)$ и $y = g(u)$, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{u\to b} g(u) = c$, но $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)] \neq c$.

14. Доказать теорему: если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ и $c > b$, то $g(x) > f(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$. Вывести следствия из нее. Доказать лемму о сохранении знака непрерывной функции.

15. Доказать теорему о переходе к пределу в двойном неравенстве.

16. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

17. Доказать лемму о вложенных отрезках. Показать на примере, что для интервалов аналогичное утверждение не имеет места.

18. Доказать теорему Коши о промежуточном значении функции $f$, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Вывести варианты этой теоремы для случаев, когда $a, b$ заменяются на $-\infty$, $+\infty$ и $f(a)$, $f(b)$ на $\pm\infty$.

19. Дать определение обратной функции. Привести примеры. Показать, что строгая монотонность функции на промежутке $(a, b)$ является достаточным, но не необходимым условием существования обратной функции на $f(\langle a,b\rangle)$.

20. Доказать теорему о существовании и непрерывности обратной функции для функции $f$, непрерывной и строго монотонной на отрезке $[a, b]$. Сформулировать варианты этой теоремы для случаев, когда $a, b$ заменяются на на $-\infty$, $+\infty$ и $f(a)$, $f(b)$ на $\pm\infty$.

21. Дать определения и доказать непрерывность обратных тригонометрический функций. Построить графики этих функций.

22. Перечислить основные элементарные функции. Дать определение элементарной функции, привести примеры. Доказать теорему о непрерывности элементарной функции.

23. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

24. Вывести следствия из п.13

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{\tilde{o}\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a\ (a>0,\ a\neq1),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha\,(\forall\alpha).$$

25. Дать определение гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$; построить их графики, доказать непрерывность. Доказать, что

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1,\ \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1.$$

26. Рассмотреть типы неопределенностей:

$$[\infty-\infty],\ [0\cdot\infty],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [1^{\infty}],\ [\infty^0],\ [0^0].$$

Привести примеры.

27. Доказать лемму Больцано-Вейерштрасса.

28. Доказать 1-ю теорему Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке. Привести примеры, показывающие существенность условий в этой теореме.

29. Доказать 2-ю теорему Вейерштрасса: функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Привести примеры, показывающие существенность условий в этой теореме.

30. Дать определение функции, равномерно непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$. Исследовать на равномерную непрерывность функции

$$f(x) = \mathrm{const},\ f(x) = x,\ f(x) = \sin x\ (x\in\mathbf{R}),\ f(x) = x^2\ (x\in[0;\,a]),$$

$$f(x) = x^2\ (x\in\mathbf{R}),\ f(x) = \frac{1}{x}\ (x\in(0;\,1)),\ f(x) = \sin x^2\ (x\in\mathbf{R}).$$

31. Доказать теорему Кантора. Показать на примерах существенность условий этой теоремы.

32. Дать определения производной, дифференцируемой функции. Вычислить производные функций const, ($n \in \mathbf{R}$), $x^n$ ($x \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$), $e^x$ ($x \in \mathbf{R}$), $\ln x$ ($x > 0$), $\sin x$ ($x \in \mathbf{R}$), $\cos x$ ($x \in \mathbf{R}$).

33. Дать определение односторонних производных и бесконечной производной. Привести примеры.

34. Дать определения касательной и нормали к кривой. Выяснить геометрический смысл производной. Записать уравнения касательной и нормали.

35. Сформулировать два определения дифференцируемой функции (с помощью понятия производной и с помощью формулы для приращения функции); доказать их эквивалентность.

36. Доказать непрерывность функции в точке, где она дифференцируема. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

37. Вывести формулы для производной суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций.

38. Вычислить производные функций $\operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ и $\operatorname{ctg} x$ ($x \neq \pi k$).

39. Доказать теорему о производной сложной функции. Привести примеры.

40. Доказать теорему о производной обратной функции.

41. Вывести формулу для производных функций $\arcsin x$ ($|x| < 1$), $\arccos$ $x$
($|x| < 1$), $\operatorname{arctg} x$ ($x \in \mathbf{R}$), $\operatorname{arcctg} x$ ($x \in \mathbf{R}$).

42. Дать определение логарифмической производной. Вывести формулу для производной показательно-степенной функции. Привести пример.

43. Дать определение функции, заданной параметрически. Привести примеры. Вывести формулу для производной функции, заданной параметрически.

44. Дать определение производной функции порядка $n$. Найти $(\sin x)^{(n)}$, $(\cos x)^{(n)}$, $(e^x)^{(n)}$, $P^{(n)}(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен ($\forall x$). Записать формулу Лейбница для производной порядка $n$ произведения двух функций; привести пример ее применения.

45. Дать определение класса функций $C^k[a;b]$. Привести примеры.

46. Дать определение дифференциала функции. Вывести его свойства.

Выяснить геометрический смысл дифференциала.

47. Доказать инвариантность первого дифференциала относительно замены независимого переменного.

48. Дать определение дифференциала порядка $n$. Привести пример. Проверить, что дифференциалы порядка выше первого, вообще говоря, не обладают свойством инвариантности относительно замены переменного. Показать, что инвариантность имеет место в случае линейной замены.

49. Дать определение точки экстремума функции. Привести примеры. Доказать теорему Ферма. Объяснить ее геометрический смысл. Проверить на примере, что обратная теорема не верна.

50. Доказать теорему Ролля. Проверить на примерах существенность условий в этой теореме.

51. Доказать теорему Лагранжа. Объяснить ее геометрический смысл. Вывести из нее достаточное условие для равномерной непрерывности функции на промежутке.

52. Доказать теорему об условии постоянства функции на отрезке.

53. Доказать теорему об условиях монотонности функции на отрезке.

54. Рассказать об условиях строгой монотонности функции на отрезке.

55. Сформулировать и пояснить достаточные условия экстремума.

56. Сформулировать теорему Дарбу.

57. Доказать теорему о достаточном условии равномерной непрерывности функции на промежутке $\langle a;b \rangle$.

58. Доказать теорему Коши о среднем значении.

59. Доказать первое правило Лопиталя раскрытия неопределённостей

($\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

60. Сформулировать второе правило Лопиталя раскрытия неопределённостей ($\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$). Привести примеры.