Документ для подготовки к КР №3 по Математическому анализу

Куркотов Александр Сергеевич, СКБ-222

Содержание

Условия

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f \,\mathrm{d}x$$

2. Вычислить

$$\iint_D \left(12x^3y^2 + 16x^3y^3\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

   Где:

$$D : x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$$

3. Перейдя к полярным координатам, найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями (изобразить данную фигуру)

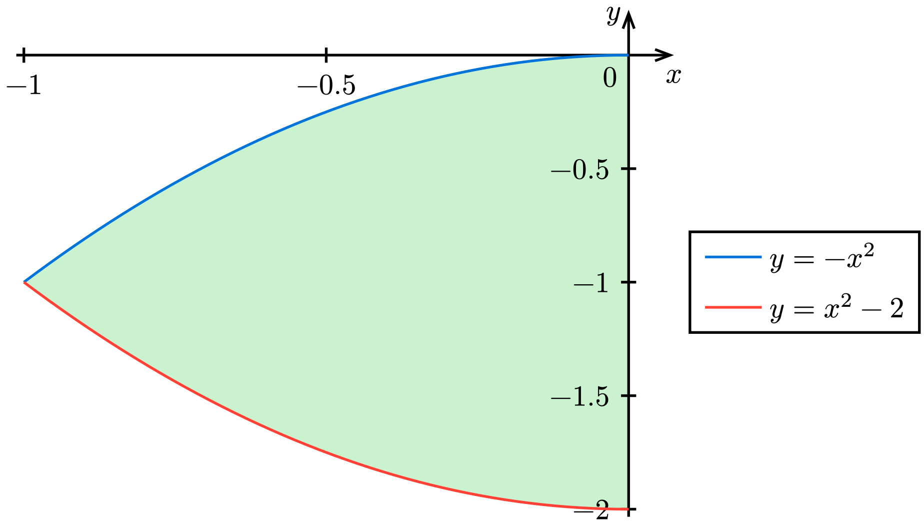
$$y^2 - 2y + x^2 = 0$$
$$y^2 - 4y + x^2 = 0$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ y = x\sqrt{3}$$

Первый номер (смена пределов интегрирования)

Чтобы изменить порядок интегрирования, нуджно «перевернуть» выражения x через y, выразив y через x (и наоборот, если того требует задача). В качестве проверки может пригодиться начертить полученное выражение, чтобы определить новые границы интегрирования

$$x = -\sqrt{2+y} \Rightarrow x^2 = 2 + y \Rightarrow y = x^2 - 2$$

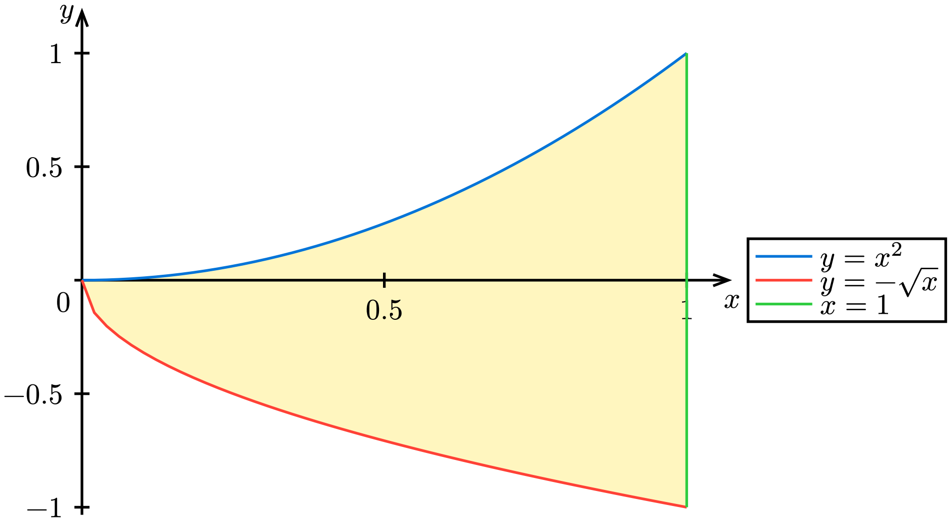
$$x = -\sqrt{-y} \Rightarrow x^2 = -y \Rightarrow y = -x^2$$



Таким образом легко заметить, что при смене границ мы избавились от слагаемого. Новые границы:

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{x^2-2}^{-x^2} f \,\mathrm{d}y$$

Второй номер (интеграл по области)



Определяем верхние и нижние границы по x и y, выбирая самые удобные. В данном случае очевидно, что по x границы от 0 до 1, и для каждой точки на x мы берем y от $-\sqrt{x}$ до x^2. Получим запись:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \left(12x^3y^2 + 16x^3y^3\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \left(12y^2 + 16y^3\right) \mathrm{d}y =$$

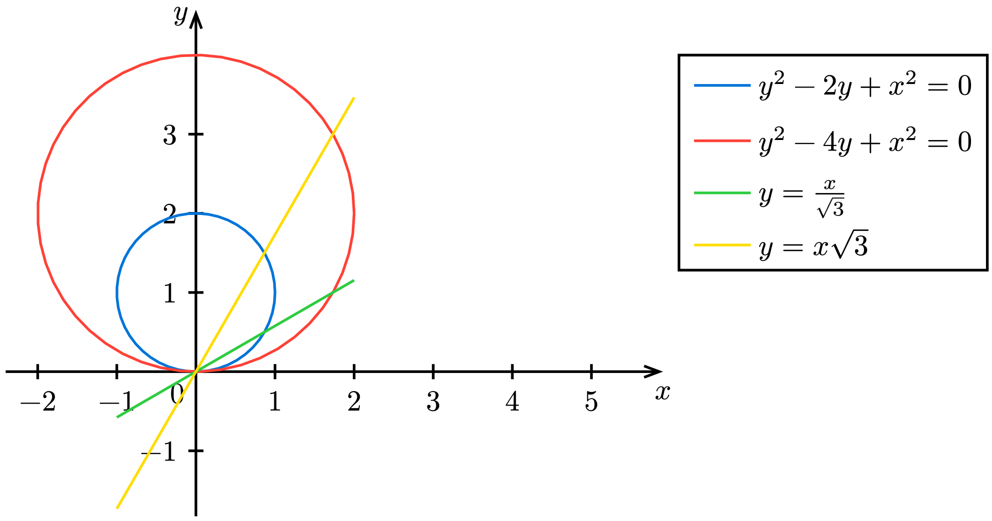
$$= 4 \int_0^1 x^3 \cdot \left(\left(x^2\right)^3 + \left(\sqrt{x}\right)^3 + \left(x^2\right)^4 - \left(-\sqrt{x}\right)^4\right) =$$

$$= 4 \int_0^1 x^3 \cdot \left(x^6 + x^{\frac{3}{2}} + x^8 - x^2\right) =$$

$$= 4 \int_0^1 \left(x^9 + x^{\frac{9}{2}} + x^{11} - x^5\right) =$$

$$= 4\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) = \frac{131}{165}$$

Третий номер (переход в полярные)



Переход к полярным координатам осуществляется по следующей формуле:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Получим, что в новой системе координат уравнения принимают следующий вид:

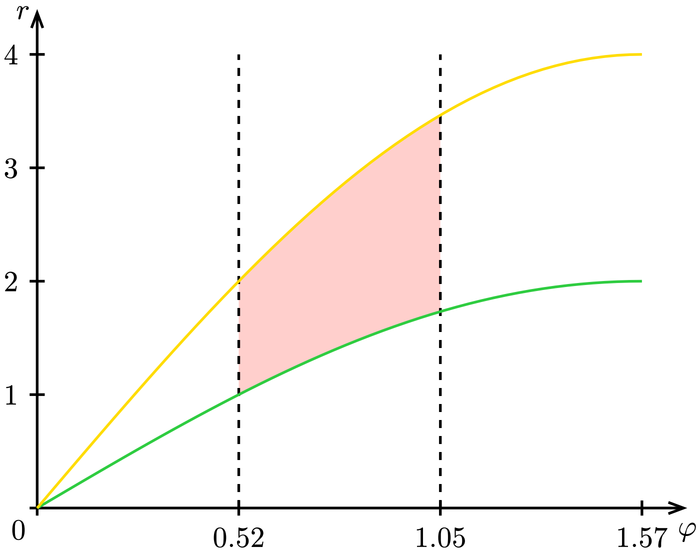
$$y^2 - 2y + x^2 =$$
$$r^2\sin^2\varphi - 2r\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi =$$
$$r(r - 2\sin\varphi) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ r = 2\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$y^2 - 4y + x^2 =$$
$$r^2\sin^2\varphi - 4r\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi =$$
$$r(r - 4\sin\varphi) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ r = 4\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = x\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Получаем, что ограничения по φ у нас от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, и по r от $2\sin\varphi$ до $4\sin\varphi$ (поскольку углы оба в первой четверти — можем не волноваться о знаках). Фигура в новых координатах выглядит следующим образом:



Таким образом площадь ищется как:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} r \, \mathrm{d}r =$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 6\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\varphi d2\varphi\right) =$$

$$3\left(\frac{\pi}{6} - \cancel{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)}\right) = \frac{\pi}{2}$$