1 Теоремы

1.1 Утверждение о том, что множество четных подстановок образуют подгруппу

Пререквизиты: $A_n = \{\pi \in S_n \mid \pi$ - чётная подстановка$\}$

Утверждение: Множество четных перестановок A_n является подгруппой группы подстановок

Доказательство:
В начале проверяем, что A_n является группой (кроме последнего пункта):
1. $e \in A_n$, т.к. e - четная перестановка;
2. $\pi = t_{i,i+1} * t_{i+1,i+2} * ... * t_{i_n,i_{n+1}}$ - состоит из четного числа транспозиций.
Обратный элемент $\pi^{-1} = (t_{i,i+1} * t_{i+1,i+2} * ... * t_{i_n,i_{n+1}})^{-1} = t^{-1}_{i_n,i_{n+1}} * ... * t^{-1}_{i+1,i+2} * t^{-1}_{i,i+1} = t_{i_n,i_{n+1}} * ... * t_{i+1,i+2} * t_{i,i+1}$ - также состоит из четного числа транспозиций, а следовательно $\pi^{-1} \in A_n$;

Группа $H \subset G$ является подгруппой группы G, если $\forall\ a, b \in H$: $a * b^{-1} \in H$

Остается проверить это утверждение Число перестановок остается все так же четным

1.2 Утверждение о нормальности знакопеременной подгруппы

Пререквизиты: -

Утверждение: $A_n \lhd S_n$

Доказательство:
Группа $H < G$ является **нормальной** подгруппой группы G, если $\forall\ g \in G\ \forall\ h \in H$: $g^{-1} * h * g \in H$
Поэтому, один из вариантов доказательства, необходимо доказать, что $\forall\, \pi \in S_n\ \forall\, g \in A_n : \pi^{-1} * g * \pi \in A_n$

1. Построим такое отображение $\phi : S_n \to S_n : \phi(\pi) = t_{1,2} * \pi$ Очевидно, что:

1. $\phi(A_n) \subset S_n \backslash A_n$
2. $\phi(S_n \backslash A_n) \subset A_n$
3. $|A_n| = |\phi(A_n)|$
4. $|S_n \backslash A_n| = |\phi(S_n \backslash A_n)|$
5. $|S_n \backslash A_n| = |S_n|$ - $|A_n|$

Собирая все вместе:
$|A_n| = |\phi(A_n)| \leq |S_n \backslash A_n| = |\phi(S_n \backslash A_n)| \leq |A_n| \Rightarrow |A_n| = |S_n \backslash A_n|$

Тогда: $|S_n \backslash A_n| = |S_n|$ - $|A_n| = |A_n|$;

$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} \Rightarrow |S_n \vdots A_n| = 2 \Rightarrow A_n \lhd S_n$

1.3 Критерий сопряженности подстановок

Пререквизиты: Утверждение: Доказательство:

1.4 Утверждение о четности подстановки через четность числа транспозиций

Пререквизиты: Утверждение: Доказательство:

1.5 Утверждение о четности подстановки через четность числа транспозиций соседних элементов

Пререквизиты: Утверждение: Доказательство:

1.6 Утверждение о четности подстановки через четность количества циклов четной длин

1.7 Утверждение о неабелевости группы подстановок

1.8 Утверждение о неабелевости знакопеременной группы

1.9 Утверждение о неабелевости группы диэдра

1.10 Утверждение о тривиальности центра группы подстановок

1.11 Утверждение о тривиальности центра знакопеременной группы

1.12 Утверждение о центре групп диэдра

1.13 Утверждение о нормальных подгруппах группы диэдра

1.14 Сформулировать и доказать утверждение о нормальности подгруппы индекса 2 в группе

Пререквизиты:
Определение нормальной подгруппы// Индекс

Утверждение: Пусть $H < G$ and $|GH| = 2$. Then $H \lhd G$ Доказательство: Доказывать задачу будем по определению №1:
$\forall g \in G$: $gH = Hg$

1.15 Любая транспозиция представляется в виде произведения нечетного числа транспозиций соседних элементов

Доказательство: Рассматриваем транспозицию $t_{i,j}$. Для удобства скажем, что i < j
1. j = i + 1, тогда $t_{i,j}$ - транспозиция соседних элементов.
2. j > i + 1. Запишем данное произведение:

$$(j-1, j) * (i, j-1) * (j-1, j) = (j-1) * (j, i)$$

Для нее мобильными элементами являются только $i, j, j-1$. Получили разложение $t_{i,j}$ через $t_{i,j-1}$ и две транспозиции соседних элементов $t_{j-1,j}$. Можем продолжать до тех пор, пока $j \neq i+1$. В итоге, получили разложение траспозиции в произведение транспозиций соседних элементов.

$$t_{j-1,j} * ... * t_{i+2,i+3} * t_{i+1,i+2} * t_{i,i+1} * t_{i+1,i+2} * t_{i+2,i+3} * ... * t_{j-1,j}$$

Очевидно, что число транспозиций - нечетно.

1.16 Сформулировать и доказать утверждение о совпадении четности количества беспорядков в подстановке с четностью количества транспозиций, в виде произведения которых может быть записана подстановка

Утверждение: $\pi = \prod_{s=1}^{R} t_{i_s,i_s+1}$ (Подстановка представляется в виде произведения транспозиций соседих элементов). Тогда $\delta(\pi) = R \bmod 2$

Доказательство:

$$\pi = t_{i_1,i_1+1} * t_{i_2,i_2+1} * ... * t_{i_R,i_R+1} * e$$

Как нам известно, транспозиция меняет четность подстановки на противоположную. Нейтральная подстановка - четная. Далее очевидно, что четность изменится R раз, а значит сама четность равна R mod 2.

Возникает вопрос. Подстановку π мы можем представить в виде произведения транспозиций неоднозначно $\pi = \prod_{s=1}^{R'} t_{s,s+1}$. Не получится ли другая четность?

$$\pi = t_{i_1,i_1+1} * t_{i_2,i_2+1} * ... * t_{i_{R'},i_{R'}+1} = t_{i_1,i_1+1} * t_{i_2,i_2+1} * ... * t_{i_R,i_R+1} * e$$

Умножим слева на обратные транспозиции первого разложения слева направо. А так как транспозиция обратна сама себе, то: получим:

$$t_{i_R,i_R+1} * .. * t_{i_2,i_2+1} * t_{i_1,i_1+1} * t_{i_1,i_1+1} * t_{i_2,i_2+1} * ... * t_{i_{R'},i_{R'}+1} * e = e$$

Четность левой подстановки - четная, она же равна (R + R') mod 2 = 0. Если R - нечетно, то тогда R' также обязано быть нечетным. Аналогично, если R - четное, то R' обязано быть четным

1.17 Сформулировать и доказать утверждение о порождении переменной группы циклами вида (1, 2, k)

Утверждение: $A_n = < (1, 2, k) | k = 3, 4, ..., n >$

1.18 Сформулировать и доказать утверждение о порождении группы транспозициями соседних элементов

Утверждение: Любая подстановка $\pi \in S_n$ может быть записать в виде произведения транспозиций соседних элементов. Аналогично, можно сказать, что $S_n =< t_{i,i+1} | 1 \leq i < n >$

Доказательство:
Подзадачи:

1. Любая подставновка рассклaдывается в произведение независимых циклов единственным способов, с точностью до перестановки циклов
2. $\pi = (i_1, i_2, ..., i_k) = (i_1, i_2, ..., i_{k-1}) * (i_1, i_k)$ (Любой цикл длины k может быть представлен в виде k-1 транспозиции)
3. $\pi = (i_1, i_2) * (i_1, i_3) * (i_1, i_4) * ... * (i_1, i_k)$ (множеством образующих группы S_n могут являться транспозиции)
4. любую транспозицию можно представить в виде произведения транспозиций соседних элементов

Собирая пункты 1-3 вместе, получаем, что любой цикл представляется в виде транспозиций соседних элементов Доказательства подзадач:

1. См отдельное доказательство
2. Элементы от $i_1, ..., i_{k-2}$ переходят по обычному правилу, т.к. последняя транспозиция на них не влияет. Для i_{k-1} сначала происходит переход в i_1, а затем в i_k через транспозицию. Последний элемент i_k никак не изменяется под действием первого цикла, а затем переходит в i_1 под действием транспозиции
3. по индукции
4. См доказательство отдельное

1.19 Сформулировать и доказать утверждение о количестве образующих элементов в группе Z_n

Утверждение: $Z_n =< g >$ - группа Z_n порождается одним элементом

1.20 Сформулировать и доказать утверждение о подгруппах конечной циклической группы

Утверждение: |G| = n, G - циклическая

1. H < G ⇒ H - циклическая
2. $d \in \mathbb{N}$ $d|n$, то H < G: $|H| = d$
3. Группа такого порядка - единственная

1.21 Сформулировать и доказать утверждение о том, что множество четных подстановок группы S$_n$

Утверждение: $A_n \lhd S_n$

Доказательство: См. выше

1.22 Сформулировать и доказать утверждение об изменении четности подстановки на противоположную при умножении ее на транспозицию соседних элементов

Утверждение: $\delta(t_{k,k+1}, \pi) = \delta(\pi) + 1$ mod 2- При умножении подстановки на транспозицию соседних элементов слева ее четность меняется на противоположную

Доказательство:
Рассмотрим подстановку π. При умножении транспозиции на π получим, что элементы от (1 до k) и их образы - остались на месте, аналогично для (k + 2, n), а теперь вместо $k \to i_k$ и $k + 1 \to i_{k+1}$ получили $k \to i_{k+1}$ и $k + 1 \to i_k$
Число беспорядков относительно остальных элементов не меняется.Т.е. если пара не образовывала беспорядок, то она и не будет образовывать беспорядок. (необходимо разобрать 4 случая). Получается, что беспорядок образуется только i_k и i_{k+1}
Таким образом, появляется (или убирается) один беспорядок.