

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям: «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика»



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2011

УДК 510.6(075.8)

ББК 22.12

Е80

Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. **Математическая логика.** — 6-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 356 с. — ISBN 978-5-9221-1301-4.

В книге изложены основные классические исчисления математической логики: исчисление высказываний и исчисление предикатов; имеется краткое изложение основных понятий теории множеств и теории алгоритмов. Ряд разделов книги — теория моделей и теория доказательств — изложены более подробно, чем это предусмотрено программой.

Для студентов математических специальностей вузов. Может служить пособием для специальных курсов.

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям: «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика».

Учебное издание

ЕРШОВ Юрий Леонидович
ПАЛЮТИН Евгений Андреевич
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редактор И.Л. Легостаева

Оригинал-макет: И.Г. Андреева

Оформление переплета: Д.Б. Белуха

Подписано в печать 26.01.11. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 22,25. Уч.-изд. л. 24,75. Тираж 500 экз. Заказ № К-5586.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерperiодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

ISBN 978-5-9221-1301-4

Отпечатано в ГУП

«ИПК «Чувашия», 428019

г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13



9 785922 113014

© ФИЗМАТЛИТ, 2011

© Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин, 2011

ISBN 978-5-9221-1301-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию	5
Предисловие к первому изданию	6
Введение	8
Глава 1. Исчисление высказываний	13
§ 1.1. Множества и слова	13
§ 1.2. Язык исчисления высказываний	17
§ 1.3. Система аксиом и правил вывода	22
§ 1.4. Эквивалентность формул	29
§ 1.5. Нормальные формы	32
§ 1.6. Семантика исчисления высказываний	38
§ 1.7. Характеризация доказуемых формул	43
§ 1.8. Исчисление высказываний гильбертовского типа	46
§ 1.9. Консервативные расширения исчислений	50
Глава 2. Теория множеств	60
§ 2.1. Предикаты и отображения	60
§ 2.2. Частично упорядоченные множества	65
§ 2.3. Фильтры булевой алгебры	75
§ 2.4. Мощность множества	80
§ 2.5. Ординалы и кардиналы	81
§ 2.6. Аксиоматическая теория множеств ZF и аксиома выбора	87
Глава 3. Истинность на алгебраических системах	93
§ 3.1. Алгебраические системы	93
§ 3.2. Формулы сигнатуры Σ	99
§ 3.3. Теорема компактности	107
Глава 4. Исчисление предикатов	114
§ 4.1. Аксиомы и правила вывода	114
§ 4.2. Эквивалентность формул	122
§ 4.3. Нормальные формы	126
§ 4.4. Теорема о существовании модели	128
§ 4.5. Исчисление предикатов гильбертовского типа	135
§ 4.6. Чистое исчисление предикатов	139

Глава 5. Теория моделей	144
§ 5.1. Элементарная эквивалентность	144
§ 5.2. Аксиоматизируемые классы	152
§ 5.3. Скулемовские функции	161
§ 5.4. Механизм совместности	163
§ 5.5. Счетная однородность и универсальность	175
§ 5.6. Категоричность	182
§ 5.7. RQ-формулы и Σ -формулы	191
§ 5.8. Формульная определимость	202
§ 5.9. Позитивные формулы и монотонные операторы	209
Глава 6. Теория доказательств	215
§ 6.1. Генценовская система G	215
§ 6.2. Обратимость правил	220
§ 6.3. Сравнение исчислений ИП $^\Sigma$ и G	225
§ 6.4. Теорема Эрбрана	232
§ 6.5. Исчисления резольвент	245
Глава 7. Вычислимость	251
§ 7.1. Понятие алгоритма	251
§ 7.2. Σ -предикаты и Σ -функции на Ω	252
§ 7.3. Σ -определимость истинности Σ -формул на Ω	265
§ 7.4. Универсальные Σ -предикаты, универсальные частичные Σ -функции	277
§ 7.5. Теорема Чёрча и теорема Гёделя о неполноте	283
§ 7.6. Машины Тьюринга	294
§ 7.7. Рекурсивные функции	297
Глава 8. Разрешимые и неразрешимые теории	300
§ 8.1. Разрешимость теории одноместных предикатов	300
§ 8.2. Элиминация кванторов и разрешимость теории алгебраически замкнутых полей	303
§ 8.3. Элиминация кванторов и разрешимость теории вещественно замкнутых полей	308
§ 8.4. Разрешимые теории абелевых групп	311
§ 8.5. Теории декартовых произведений	328
§ 8.6. Неразрешимые теории	332
Предметный указатель	343
Указатель обозначений	352

Предисловие к шестому изданию

Это издание является переработкой и дополнением 2-го издания (издания 3–5 являются стереотипными). Изменения коснулись всех глав книги. Наибольшей корректировке подверглась глава 7, на основании которой сформирована глава 8. В частности, за основу изложения теории вычислимости выбрано понятие Σ -определенности. Этот подход поможет естественному освоению теории вычислимости на допустимых множествах.

Изменения относятся как к дополнениям материала, так и к более подробному изложению мест в доказательствах, которые ранее были более схематичны.

Благодарим С. В. Судоплатова за полезные замечания и помошь в подготовке рукописи к изданию, а также М. А. Русалеева за компьютерный набор текста.

Настоящее шестое издание книги является первым в издательстве «ФИЗМАТЛИТ».

Май 2010 г.

*Ю. Л. Ершов
Е. А. Палютин*

Предисловие к первому изданию

Настоящая книга представляет собой систематическое изложение ряда разделов современной математической логики и теории алгоритмов. Написана она с целью использования ее в преподавании как в качестве учебника по математической логике для университетов, так и в качестве учебного пособия при чтении спецкурсов.

Разделы, соответствующие обязательной программе (§ 1–9 в гл. 1 (без мелкого шрифта), § 10–11 в гл. 2, § 15–16 в гл. 3, § 18–20, 22–23 в гл. 4 и § 35 в гл. 7), написаны более тщательно и подробно, чем разделы, относящиеся к более специальным вопросам.

Изложение исчисления высказываний и исчисления предикатов не является традиционным и начинается с изучения секвенциальных вариантов исчислений натурального вывода (хотя традиционные исчисления также появляются здесь под названием гильбертовских). Основанием к этому являются:

- 1) возможность хорошего объяснения смысла всех правил вывода;
- 2) возможность более быстрого приобретения навыка формальных доказательств;
- 3) практическая возможность проделать все необходимые в курсе формальные доказательства в таких исчислениях.

Многолетний опыт чтения старшим из авторов курса математической логики на математическом факультете Новосибирского государственного университета, на основе которого написаны главы 1–4, показывает, что указанные выше возможности вполне реализуются. Это оправдывает использование такого способа изложения наряду с традиционными.

Более подробные сведения о содержании книги можно получить из ее оглавления.

Ввиду учебного характера книги, несмотря на названия «Теория множеств», «Теория моделей», «Теория доказательств» и «Алгоритмы и рекурсивные функции», соответствующие главы, конечно, содержат лишь малую часть содержания этих больших разделов современной математической логики. Как и принято в учебниках, большинство результатов приведено в данной книге без указания авторов.

В тексте имеется небольшое число упражнений почти после каждого параграфа книги. Однако этих упражнений явно недостаточно для учебных целей. Мы рекомендуем использовать в качестве задачника для данного курса следующий: *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи

по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1984. ¹⁾

Сделаем несколько замечаний технического порядка. Нумерация теорем — сквозная по главам, нумерация предложений и лемм — своя в каждом параграфе. Выражение «предложение 12.2» («теорема 12.2», ...) означает «предложение 2 (теорема 2, ...) из § 12». При ссылке на предложения и леммы внутри одного параграфа и часто при ссылке на теоремы внутри одной главы параграф не указывается. Символ « \implies » является сокращением для выражения «из ... следует ...», символ « \iff » является сокращением для выражения «... равносильно ...». Символ « \square » указывает на окончание доказательства.

Создание этой книги не было бы возможно без коллектива кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного университета. Основатель этой кафедры — выдающийся советский математик академик А. И. Мальцев (1909–1967) — оказал решающее влияние на формирование научных интересов и педагогических взглядов авторов. На разных этапах подготовки настоящей книги большую помощь и поддержку мы получали от М. И. Каргаполова, Н. В. Белякина, И. А. Лаврова, Л. Л. Максимовой и многих других. Этим коллегам и товарищам мы выражаем свою искреннюю признательность и благодарность.

При работе над данной книгой были использованы записи курсов лекций А. И. Мальцева и Ю. Л. Ершова, книги: *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Тайцлин М.А. Математическая логика.* — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973; *Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.* — М.: Мир, 1970; *Мальцев А.И. Алгебраические системы.* — М.: Наука, 1970; *Марков А.А. Теория алгорифмов.* — М.: Изд-во АН СССР, 1954; *Шенфилд Дж. Математическая логика.* — М.: Наука, 1975, а также другие монографии и научные статьи.

Новосибирск
Академгородок

Ю. Л. Ершов
Е. А. Палютин

¹⁾ Последнее издание — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. (Прим. ред.)

Введение

Математическая логика как самостоятельный раздел современной математики сформировалась сравнительно недавно — на рубеже девятнадцатого — двадцатого веков. Возникновение и быстрое развитие математической логики в начале двадцатого века было связано с так называемым кризисом в основаниях математики. Поговорим об этом чуть подробнее.

При любой попытке систематического изложения математики (как, впрочем, и любой другой науки) возникает проблема выбора начальных (исходных) понятий и принципов, которые будут положены в основу всего изложения. Проблема выбора и обоснование этого выбора исходных данных лежит, как правило, вне самой научной дисциплины и относится к философии и методологии научного познания. Систематизация математики в конце девятнадцатого века выявила, что весьма перспективным является использование понятия множества в качестве единственного исходного понятия для всей математики. Работами Б. Больцано, Р. Дедекинда и Г. Кантора была создана новая область математики — теория множеств, которая красотой и силой своих построений и перспективами использования ее в основаниях математики привлекла внимание многих ведущих математиков того времени. Была проделана большая работа по теоретико-множественному осмыслению математических и даже логических понятий. В этой связи большой интерес представляют исследования Г. Фреге и Б. Рассела. Однако высокая степень абстрактности и «универсальность» понятия множества не могли не привести в конце концов к трудностям, хорошо и давно известным в философии при работе с «универсалами». Проявилось это в появлении так называемых теоретико-множественных парадоксов.

Приведем один из наиболее типичных теоретико-множественных парадоксов — парадокс Рассела. Для произвольного множества является вполне осмысленным вопрос, «будет ли это множество своим элементом». Примером множества, которое содержит само себя в качестве элемента, могло бы служить, например, множество всех множеств. Рассмотрим множество M_0 всех множеств, для которых ответ на этот вопрос отрицателен. Спросим теперь, является ли это множество своим элементом? К своему (наивному) удивлению обнаружим, что если ответ положительный, то имеем $M_0 \notin M_0$, т. е. ответ должен быть отрицательным. Если же ответ отрицателен, то в силу определения множества M_0 ответ должен быть положительным. Этот парадокс показывает, что если мы не хотим приходить к противоречиям, то необходимо отказаться от приятной мысли, что любое осмысленное условие на

элементы определяет некоторое множество. К счастью, такого рода парадоксы можно получить лишь с «большими» или «неестественными» множествами, без которых в математике можно вполне обойтись¹⁾.

Появление таких парадоксов в теории множеств было воспринято многими математиками очень болезненно и поэтому привлекло к вопросам оснований математики пристальное внимание практически всех ведущих математиков того времени (назовем, к примеру, Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Г. Вейля). Было предложено несколько программ «спасения» математики от «ужаса» парадоксов, входить в детали которых мы не будем. Укажем вкратце только две наиболее действенные программы, различные модификации которых обсуждаются и в настоящее время. Отметим, что многообразие подходов к основаниям математики остается и поныне. Однако прошедшие годы и безусловные достижения математической логики, речь о которых еще впереди, сняли остроту этой проблемы настолько, что большинство математиков, работающих в других разделах математики, не уделяют особого внимания тем дискуссиям, которые ведут ныне специалисты по основаниям математики.

Одной из наиболее разработанных программ по основаниям математики является предложенная Д. Гильбертом программа финитарного обоснования математики. Суть этой программы состоит в попытке построения такой формализации математики, что средствами этой системы можно доказать свою собственную непротиворечивость. Другим принципиальным требованием к такой формализации является условие, чтобы все простейшие, проверяемые непосредственно утверждения о натуральных числах были истинными в этой формализации. Работа над этой программой как самого Гильberta, так и его учеников и последователей оказалась весьма плодотворной для математической логики, в частности, в разработке современного аксиоматического метода. Хотя программа «финитизма» в своей исходной постановке оказалась невыполнимой, как показал в своих знаменитых работах К. Гёдель, однако возможные модификации этой программы подвергаются полезному обсуждению и до настоящего времени.

Другой подход к основаниям математики был связан с критикой ряда положений, которые использовались в математике без должного обоснования. Это относится, в частности, к неограниченному использованию закона исключенного третьего и аксиомы выбора. Программа построения математики при жестких ограничениях на использование этих принципов получила название интуиционизма; ее создание и развитие связано в первую очередь с именем Л. Э. Я. Брауэра. Развитый

¹⁾ Упоминаемые ниже формализации теории множеств — аксиоматические теории множеств, — сохраняя все полезное, не допускают прямого проведения всех известных «парадоксальных» рассуждений.

в Советском Союзе А. А. Марковым и его последователями конструктивистский подход к основаниям математики также связан с критическим подходом к допустимым логическим средствам в математике и систематически использует понятие алгоритма при конструктивистском воспроизведении математических результатов.

Хотя основания математики традиционно относятся к математической логике, в настоящем учебнике не место вдаваться в большие подробности этого раздела, находящегося на стыке математики и философии. Поэтому ограничим обсуждение оснований математики приведенными выше замечаниями, служащими скорее иллюстративным целям.

Основным итогом деятельности в области оснований математики можно считать становление математической логики как самостоятельного раздела математики, а принципиальным достижением математической логики — разработку *современного аксиоматического метода*, который может быть охарактеризован следующими тремя чертами:

1. Явная формулировка исходных положений (аксиом) той или иной теории.
2. Явная формулировка логических средств (правил вывода), которые допускаются для последовательного построения (развертывания) этой теории.
3. Использование искусственно построенных формальных языков для изложения всех положений (теорем) рассматриваемой теории.

Первая черта характеризует классический аксиоматический метод. Две следующие являются дальнейшими шагами в достижении максимальной точности и ясности в изложении теорий. Введение и использование подходящих обозначений было на протяжении всей истории математики весьма важной и продуктивной процедурой. Но математические символы были только элементами формальных языков. В математической же логике впервые в истории были созданы такие богатые формальные языки, которые позволяют формулировать практически все основные положения современной математики. Богатые формальные языки математической логики и успешный опыт работы с ними создали одну из объективных предпосылок для создания универсальных вычислительных машин, пользующихся в настоящее время весьма разнообразным спектром формальных языков программирования.

Основным объектом изучения в математической логике являются различные исчисления. В понятие исчисления входят такие основные компоненты, как: а) язык (формальный) исчисления; б) аксиомы исчисления; в) правила вывода. Понятие исчисления позволяет дать строгое математическое определение понятия доказательства и получить точные утверждения о невозможности *доказательства* тех или

иных предложений теории. Еще одним замечательным достижением математической логики является нахождение математического определения понятия *алгоритма*, т. е. эффективной процедуры для решения задач из того или иного (бесконечного) класса задач. Интуитивно понятие алгоритма использовалось очень давно. Выдающийся мыслитель XVII–XVIII вв. Г. Лейбниц даже мечтал о нахождении универсального алгоритма для решения всех математических проблем. Точное определение понятия алгоритма позволило довольно быстро разрушить эту красивую утопию: А. Чёрч в 1936 г. показал, что невозможен алгоритм, который по произвольному утверждению, записанному на формальном языке элементарной арифметики, отвечал бы на вопрос: будет ли это утверждение истинно на натуральных числах? Далее оказалось, что даже в системе, описывающей «чистую логику» (исчисление предикатов), проблема доказуемости алгоритмически неразрешима. В последующие годы было обнаружено большое многообразие алгоритмически неразрешимых проблем в многих разделах математики. Большой вклад в разработку теории алгоритмов и решение алгоритмических проблем внесли Э. Пост, А. Тьюринг, С. Клини и советские математики А. И. Мальцев, П. С. Новиков и А. А. Марков.

Изучение исчислений составляет синтаксическую часть математической логики. Наиболее глубокое изучение (синтаксического) понятия доказательства в тех или иных исчислениях составляет самостоятельный раздел математической логики, который носит название *теории доказательств*. Наряду с синтаксическим изучением исчислений проводится также семантическое изучение формальных языков математической логики. Основным понятием семантики является понятие истинности для выражений (формул, секвенций и т. п.) формального языка. Семантические понятия также получили точные математические определения, что дало возможность систематического и строгого изучения различных понятий истинности. Классическая семантика языка исчисления предикатов составила весьма богатый раздел математической логики — *теорию моделей*, которая активно развивается, а ее методы и результаты успешно применяются и в других областях математики (алгебре, анализе). Основателями теории моделей являются А. Тарский и А. И. Мальцев.

Исчисления позволяют формализовать многие разделы математики и других наук. Исчисление высказываний и упоминавшееся выше исчисление предикатов являются формализациями логики, древнейшей науки о законах правильного мышления. Создание и изучение этих формализаций явилось важным этапом в развитии логики как науки. Первые попытки формализации логики связаны с именами Аристотеля и Дж. Буля, но действительная (и действенная) формализация логики была осуществлена только с созданием математической логики.

Итальянский математик Дж. Пеано много сделал для разработки и популяризации формальных языков логики.

Для математики особенно важной оказалась возможность формализации теории множеств. Исчисления, формализующие основные конструкции «наивной» теории множеств, оказались столь богатыми, что любое теоретико-множественное рассуждение, встречающееся в реальной математической практике, можно формально воспроизвести в этих исчислениях. Естественной «расплатой» за это богатство было обнаружение К. Гёдelem эффектов неполноты и даже неполнотности таких исчислений.

На пути построения семантики естественных или формальных языков нас поджидают также большие трудности. Так, простодушное убеждение, что каждой повествовательной фразе русского языка можно правдоподобным (или, по крайней мере, непротиворечивым) образом приписать значение истинности, опровергается так называемым «парадоксом лжеца». Некто говорит: «Фраза, которую я сейчас произношу, ложна». Попробуем выяснить, правду сказал этот человек или солгал. Если предположить, что он сказал правду, то из смысла фразы получается, что он солгал. Если он солгал, то из того, что фраза ложна, получаем, что он сказал правду. Этот парадокс лежит в основе ряда замечательных теорем математической логики (теорем о неполноте и о неопределимости истинности в системе).

История создания и развития математической логики является самостоятельным предметом и ей не будет уделено внимания в этой книге, за исключением приведенных выше заведомо неполных указаний некоторых имен и обстоятельств.

В заключение настоящего введения нужно отметить, что современная математическая логика представляет собой обширный и разветвленный раздел математики, источником проблем для которого наряду с внутренними ее проблемами служат как философские проблемы оснований математики и логики, так и проблемы, возникающие в других разделах математики (алгебра, анализ, теоретическая кибернетика, программирование и др.).

Глава 1

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1.1. Множества и слова

Под *буквой* мы понимаем знак, который рассматривается как целий, т. е. знак, части которого нас не интересуют. Букву будем называть также *символом*.¹⁾ Про две данные (например, написанные) буквы мы можем говорить, что они одинаковы или что они различны. Например, все строчные буквы «а» в данной книге считаем одинаковыми. Одинаковыми мы считаем также все строчные буквы «а» в некотором рукописном тексте, хотя одинаковость двух букв в этом случае установить трудней, чем в предыдущем. Будет предполагаться, что для рассматриваемых двух конкретных букв мы всегда можем установить их одинаковость или различие. Если буквы a_1 и a_2 одинаковы, то будем писать $a_1 = a_2$.

Абстракция отождествления одинаковых букв дает нам понятие абстрактной буквы. В дальнейшем о двух одинаковых конкретных буквах a_1 и a_2 мы будем говорить как об одной и той же (абстрактной) букве a . При этом каждая из этих двух конкретных букв будет называться *представителем абстрактной буквы a*.²⁾

Совокупность X некоторых объектов, которые будут называться *элементами X*, назовем *множеством*³⁾.

¹⁾ Иногда слово «буква» будет иметь и обычный смысл, например, «латинская буква», «строчная буква».

²⁾ Следует при этом различать абстрактную букву, обозначаемую символом a , и сам символ a , который является обозначением или именем упомянутой абстрактной буквы.

³⁾ Как отмечалось во введении, такое определение, вообще говоря, может привести к противоречию. Однако это не должно пугать читателя, так как существование всех рассматриваемых в этой книге множеств можно вывести в рамках формальной системы, описанной в § 2.6, в которой невозможно прямо провести ни одно известное «парадоксальное» рассуждение о множествах.

Если a — элемент множества X , то пишем $a \in X$. Если любой элемент множества X является элементом множества Y , то множество X называется *подмножеством* множества Y и обозначается это так: $X \subseteq Y$. Если для множеств X и Y имеем $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то будем считать множества X и Y равными и писать $X = Y$. Таким образом, множество полностью определено своими элементами. В частности, существует только одно множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество будем называть *пустым* и обозначать символом \emptyset . Если для множества X не имеет место $a \in X$, то будем писать $a \notin X$.

Буквами $i, j, k, l, m, n, p, r, s$, возможно с индексами, будем обозначать натуральные числа. Множество всех натуральных чисел будем обозначать буквой ω . Если $a_1 \in X, \dots, a_n \in X$, то будем писать $a_1, \dots, a_n \in X$. Если X — множество, $a_1, \dots, a_n \in X$ и любой элемент X равен одному из a_1, \dots, a_n , то X называем *конечным множеством* и пишем $X = \{a_1, \dots, a_n\}$.¹⁾ Если $\varphi(a)$ — некоторое условие на объект a , а X — множество, то через $\{a \in X \mid \varphi(a)\}$ или $\{a \mid \varphi(a), a \in X\}$ обозначаем множество, содержащее в качестве элементов те и только те элементы $a \in X$, которые удовлетворяют условию $\varphi(a)$. Например, $\{n \in \omega \mid n = 2k \text{ для некоторого } k \in \omega\}$ является множеством всех четных натуральных чисел.

Множество абстрактных букв называется *алфавитом*. Букву, являющуюся элементом алфавита A , будем называть *буквой алфавита A* .

Конечный ряд написанных друг за другом конкретных букв называется *конкретным словом*. В частности, каждая конкретная буква является конкретным словом. Если каждая из букв конкретного слова α является представителем некоторой буквы алфавита A , то будем говорить, что α является *словом в алфавите A* . Мы допускаем также случай, когда слово α не содержит ни одной конкретной буквы. Такое слово будем называть *пустым* и обозначать через Λ . Будем говорить, что два конкретных слова $a_1 \dots a_n$ и $b_1 \dots b_k$ алфавита A *равны*, и писать $a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_k$, если $n = k$ и $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. Все пустые слова считаем равными. Если $a_1 \dots a_n$ — конкретное слово, состоящее из n букв a_1, \dots, a_n алфавита A , то число n называется *длиной* этого слова. Длиной пустого слова будет число 0.

Применяя абстракцию отождествления, будем говорить о двух равных конкретных словах α_1, α_2 как об одном и том же (*абстрактном*) слове α . При этом эти два конкретных слова будем называть *представителями слова α* . Из определения равенства конкретных слов получаем, что абстрактное слово α можно определить как конечный ряд абстрактных букв такой, что каждый представитель слова α есть

¹⁾ Отметим, что при этом попарное различие элементов a_1, \dots, a_n не предполагается. В частности, $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$.

ряд представителей соответствующих абстрактных букв. Количество абстрактных букв в этом ряду будем называть *длиной абстрактного слова* α . Пустое абстрактное слово будем обозначать той же буквой Λ , что и конкретные пустые слова.

Для абстрактных слов α и β определяем абстрактное слово $\alpha\beta$ как такое абстрактное слово, все представители которого получаются приписыванием к некоторому представителю слова α некоторого представителя слова β . Абстрактное слово $\alpha\beta$ будем называть *соединением* абстрактных слов α и β ; абстрактное слово α будем называть *началом* слова $\alpha\beta$. Аналогично определяется соединение $\alpha_1 \dots \alpha_n$ абстрактных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

В дальнейшем под *словом* мы понимаем абстрактное слово. Очевидно, что для любых слов α, β имеем $\Lambda\alpha = \alpha\Lambda = \alpha$ и $\alpha\Lambda\beta = \alpha\beta$.

Слово β алфавита A называется *подсловом* слова α алфавита A , если $\alpha = \gamma\beta\delta$ для некоторых слов γ, δ . В частности, любое начало слова α будет подсловом α . Может оказаться, что $\alpha = \gamma\beta\delta$ и $\alpha = \gamma_1\beta\delta_1$ для различных слов γ, γ_1 . В этом случае говорим о различных *вхождениях* под слова β в α . Таким образом, вхождением под слова β в слово α называется слово β вместе с местом его расположения в слове α . Вхождение под слова β в слово α можно изображать так: $\gamma * \beta * \delta$, где $*$ — символ, не принадлежащий алфавиту A . В частности, если $\alpha = \gamma\beta\delta = \gamma_1\beta\delta_1$ и $\gamma \neq \gamma_1$, то мы имеем два различных вхождения $\gamma * \beta * \delta$ и $\gamma_1 * \beta * \delta_1$ под слова β в слово α . Если для вхождения $\gamma_0 * \beta * \delta_0$ под слова β в α слово γ_0 (слово δ_0) имеет наименьшую длину среди всех слов γ (слов δ), для которых $\alpha = \gamma\beta\delta$, то $\gamma_0 * \beta * \delta_0$ называется *первым (последним) вхождением* β в α .

Вхождением буквы a в слово α называется вхождение в α слова, состоящего из одной буквы a . Если существует вхождение буквы a в слово α , то говорим, что буква a *входит* в α . Пусть $\gamma * \beta * \delta$ — вхождение слова β в α . Если $\alpha' = \gamma\beta'\delta$ для некоторого слова β' , то будем говорить, что слово α' получается из α *заменой вхождения* $\gamma * \beta * \delta$ под слова β на слово β' .

Ряд X_1, \dots, X_n некоторых объектов $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, будем называть *последовательностью* или *кортежем*, а число n — *длиной* этой последовательности. Объекты $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, будут называться *членами* или *элементами* последовательности X_1, \dots, X_n . Мы предполагаем, что по записи последовательности ее члены и их порядок восстанавливаются однозначно. Для этого нам необходимо разделять члены последовательности, например, с помощью запятой. Если $n = 0$, то ряд X_1, \dots, X_n будем считать *пустой последовательностью* и обозначать его тем же символом \emptyset , что и пустое множество. Иногда последовательность X_1, \dots, X_n будем обозначать через $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Если X_1, \dots, X_n — множества, то множество всех кортежей $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$,

где $a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n$, будем обозначать через $X_1 \times \dots \times X_n$. Если $X_1 = X_2 = \dots = X_n$, то множество $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ будем обозначать также через X_1^n . Последовательность из двух (трех и т. д.) членов будем называть *парой* (*тройкой* и т. д.). Последовательность из n элементов будем называть *n-кой*.

Отображением f множества X в множество Y называется соответствие, сопоставляющее каждому элементу $a \in X$ элемент $f(a) \in Y$, называемый *значением* отображения f на элементе a . Ясно, что отображение f множества X в множество Y однозначно определяется множеством $\{(a, f(a)) \in X \times Y \mid a \in X\}$. Это множество (называемое иногда *графиком* f) мы будем отождествлять с отображением f . Если f — отображение X в Y , то пишем $f : X \rightarrow Y$. Если X — множество, то всякое отображение $f : X^n \rightarrow X$ будем называть *n-местной операцией на* X , а n — *местностью* операции f . Если $f : Y \rightarrow X$ и $Y \subseteq X^n$, то f будет называться *частичной n-местной операцией на* X с областью определения Y .

Для того чтобы задать множество X , достаточно указать, для каких объектов a истинно отношение $a \in X$. Поэтому следующие выражения будут однозначно определять по двум множествам X и Y новые множества $X \cap Y$, $X \cup Y$ и $X \setminus Y$, называемые соответственно *пересечением*, *объединением* и *разностью* множеств X и Y :

- а) $a \in X \cap Y \iff (a \in X \text{ и } a \in Y);$
- б) $a \in X \cup Y \iff (a \in X \text{ или } a \in Y);$
- в) $a \in X \setminus Y \iff (a \in X \text{ и } a \notin Y).$

Предложение 1.1.1. *Операции пересечения и объединения удовлетворяют следующим равенствам для любых множеств X , Y и Z :*

- | | |
|--|-----------------------|
| 1 а) $X \cap Y = Y \cap X$
1 б) $X \cup Y = Y \cup X$ | } — коммутативность; |
| 2 а) $X \cap X = X$
2 б) $X \cup X = X$ | } — идемпотентность; |
| 3 а) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
3 б) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ | } — ассоциативность; |
| 4 а) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
4 б) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ | } — дистрибутивность. |

Проверка этих равенств не представляет труда. Докажем, например, 4б. Пусть элемент a принадлежит левой части равенства. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \cap Z$, поэтому $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, т. е. a принадле-

жит правой части. Если $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, то $a \in X$ или $a \in Y \cap Z$. Следовательно, a принадлежит левой части равенства (46). \square

Если X — множество, то множество всех его подмножеств будем называть **множеством-степенью** X и обозначать через $P(X)$.

Пусть J — непустое множество и X_i для $i \in J$ — некоторые множества. Объединением $\bigcup_{i \in J} X_i$ и пересечением $\bigcap_{i \in J} X_i$ множеств X_i , $i \in J$, будем называть множества, определенные следующим образом:

$$a \in \bigcup_{i \in J} X_i \iff (a \in X_i \text{ для некоторого } i \in J),$$

$$a \in \bigcap_{i \in J} X_i \iff (a \in X_i \text{ для всех } i \in J).$$

Для множества X через $\bigcup X$ и $\bigcap X$ будут обозначаться соответственно множества $\{a \mid a \in b \text{ для некоторого } b \in X\}$ и $\{a \mid a \in b \text{ для всех } b \in X\}$.

Упражнения

1. Сколько различных вхождений имеет пустое слово Λ в слово длины n ?
2. Показать, что число различных подслов слова α длины n не превышает $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.
3. Для каких слов α длины n число различных подслов α равно $\frac{n(n+1)}{2} + 1$?
4. Пусть множества X_0, \dots, X_{n+1} являются подмножествами некоторого множества Y . Обозначим через \overline{X}_i множество $Y \setminus X_i$. Показать, что
 - а) $\overline{\bigcup_{i \leq n} X_i} = \bigcap_{i \leq n} \overline{X}_i$; б) $\overline{\bigcap_{i \leq n} X_i} = \bigcup_{i \leq n} \overline{X}_i$; в) $X_0 \cap X_1 = X_0 \setminus (X_0 \setminus X_1)$.

§ 1.2. Язык исчисления высказываний

Опр Будем говорить, что задано *исчисление I*, если заданы следующие четыре множества:

- а) алфавит $A(I)$;
- б) множество $E(I)$ слов алфавита $A(I)$, называемое **множеством выражений исчисления I**;
- в) множество $Ax(I)$ выражений исчисления I , называемое **множеством аксиом исчисления I**;
- г) множество $R(I)$ правил вывода исчисления I .

Правило вывода в этой книге будет записываться так:

$$\frac{S_1, \dots, S_n}{S}.$$

При этом S_1, \dots, S_n и S будут некоторыми схемами выражений данного исчисления, выражающими их определенную структурную зависимость. Схемы S_1, \dots, S_n будут называться *посылками*, а схема S — *заключением данного правила*. Число n называется *местностью* данного правила; n -местное правило будем называть также *n-посыloчным правилом*.

Если конкретные выражения Φ_1, \dots, Φ_n и Φ удовлетворяют структурным условиям данного правила, выраженные схемами S_1, \dots, S_n и S , то запись

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n}{\Phi}$$

будет называться применением данного правила, а выражение Φ — результатом применения этого правила к выражениям Φ_1, \dots, Φ_n или что Φ получается из Φ_1, \dots, Φ_n по этому правилу вывода.

Опр Пару $\langle A(I), E(I) \rangle$, состоящую из алфавита $A(I)$ и множества выражений $E(I)$ исчисления I , будем называть *языком* исчисления I и обозначать через $L(I)$. Пусть даны два исчисления I_1 и I_2 . Если $A(I_1) \subseteq A(I_2)$ и $E(I_1) \subseteq E(I_2)$, то будем говорить, что язык $L(I_2)$ исчисления I_2 является *расширением языка* $L(I_1)$ исчисления I_1 , и обозначать это так: $L(I_2) \supseteq L(I_1)$.¹⁾

Если дано исчисление I , то множество *доказуемых выражений* или *теорем исчисления I* определяется как наименьший класс $T(I) \subseteq E(I)$, содержащий множество аксиом исчисления I и обладающий следующим свойством:

(*) если выражение Φ является результатом применения некоторого правила $\rho \in R(I)$ к выражениям $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in T(I)$, то $\Phi \in T(I)$.²⁾

Опр *Высказыванием* в русском языке мы называем повествовательное предложение, про которое можно утверждать, что оно истинно или ложно. Например, высказывание «вода — продукт горения водорода» истинно, а высказывание «все нечетные натуральные числа простые» ложно. Из высказываний A, B в русском языке мы можем образовывать более сложные высказывания такие, как « A и B », « A или B », «неверно, что A », «если A , то B ». Если мы знаем, истинно или ложно каждое из высказываний A, B , то мы можем определить, истинны или ложны

1) Это обозначение не совсем согласуется с уже введенным обозначением включения для множеств, однако оно удобно и путаницы не вызывает.

2) В дальнейшем нам будет удобнее работать с равносильным, но более конструктивным определением множества теорем исчисления.

выписанные выше сложные высказывания. Например, если A истинно, а B ложно, то высказывание «если A , то B » ложно. Однако иногда мы можем утверждать об истинности сложного высказывания, не зная, истинны или ложны высказывания, из которых оно составлено. Например, каковы бы ни были высказывания A и B , высказывание «неверно, что A , или если B , то A » всегда истинно. В этом случае говорим, что схема «неверно, что A , или если B , то A » тождественно истинна. Одной из основных задач исчисления высказываний, к изучению которого мы приступаем, является описание тождественно истинных схем. Для этого придется заменить русский язык формальным языком, который не допускает двусмысленностей.

Опр Алфавит исчисления высказываний, которое будем обозначать через ИВ, состоит из трех групп символов.

1. Пропозициональные переменные: $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots$, где n — натуральное число.
2. Логические символы или связки: импликация \rightarrow , конъюнкция \wedge , дизъюнкция \vee , отрицание \neg , символ следования \vdash , логическая константа \exists .
3. Вспомогательные символы: левая скобка (, правая скобка), запятая ,.

Определение. Формулой ИВ назовем слово алфавита ИВ, удовлетворяющее следующему индуктивному (по длине слова) определению.

1. Пропозициональные переменные и логическая константа являются формулами (будем называть их *элементарными* или *атомарными*).
2. Если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ и $\neg \Phi$ — формулы.

Из определения следует, что $(Q_0 \wedge Q_1) \vee Q_0$ — не формула (нет внешних скобок). Однако в целях сокращения записи мы часто будем опускать внешние скобки. Таким образом, $(Q_0 \wedge Q_1) \vee Q_0$ будет сокращенной записью $((Q_0 \wedge Q_1) \vee Q_0)$.

В дальнейшем формулы исчисления высказываний будут обозначаться буквами Φ , Ψ , X , а пропозициональные переменные — буквами P , R , причем Φ , Ψ , X , P , R могут иметь индексы.

Опр Подформулой Ψ формулы Φ ИВ будем называть подслово Φ , являющееся формулой ИВ.

Докажем теперь утверждение об однозначности разложения формулы ИВ.

Предложение 1.2.1. Всякая неатомарная формула Φ ИВ представима в одном и только одном из следующих видов: $(\Psi \wedge X)$, $(\Psi \vee X)$, $(\Psi \rightarrow X)$ или $\neg \Psi$ для однозначно определенных формул Ψ и X .

Для доказательства предложения установим сначала один технический факт.

Лемма 1.2.2. *Если Φ и Ψ — формулы ИВ и Φ — начало Ψ , то $\Phi = \Psi$.*

Доказательство. Доказывать лемму будем индукцией по длине формулы Φ . Если Φ атомарна, то и Ψ должна быть атомарной, так как в противном случае Ψ начинается со скобки или с символа \neg и тогда Φ не может быть началом Ψ . Следовательно, $\Phi = \Psi$.

Пусть Φ не атомарна и имеет вид $\neg\Phi'$, тогда Ψ должна иметь вид $\neg\Psi'$, причем, как нетрудно усмотреть из определения формулы, Φ' и Ψ' должны быть формулами. Кроме того, Φ' является, очевидно, началом Ψ' . Индукционное предположение дает $\Phi' = \Psi'$ и, следовательно, $\Phi = \neg\Phi' = \neg\Psi' = \Psi$.

Пусть Φ имеет вид $(\Phi_0\tau\Phi_1)$, где Φ_0 и Φ_1 — формулы ИВ, τ — один из символов \wedge , \vee или \rightarrow . Тогда Ψ начинается со скобки (и поэтому может быть представлена в виде $(\Psi_0\tau'\Psi_1)$, где Ψ_0 и Ψ_1 — формулы и τ' — один из символов \wedge , \vee или \rightarrow). Так как $(\Phi_0\tau\Phi_1)$ является началом $(\Psi_0\tau'\Psi_1)$, то слово Φ_0 будет началом слова $\Psi_0\tau'\Psi_1$, Ψ_0 — тоже начало этого слова. Из двух начал одного и того же слова одно из них есть начало другого (нужно взять начало меньшей длины). Значит, Φ_0 — начало Ψ_0 , или Ψ_0 — начало Φ_0 . В любом случае применимо индукционное предположение и, следовательно, $\Phi_0 = \Psi_0$, $\tau = \tau'$ и Φ_1 — начало Ψ_1 . Снова, применив индукционное предположение, получаем, что $\Phi_1 = \Psi_1$ и $\Phi = (\Phi_0\tau\Phi_1) = (\Psi_0\tau'\Psi_1) = \Psi$. \square

Доказательство предложения 1.2.1. Если формула Φ начинается с символа \neg , то доказывать нечего. Пусть Φ представлена в виде $(\Phi_0\tau\Phi_1)$, где τ — один из символов \wedge , \vee или \rightarrow , а Φ_0 , Φ_1 — формулы ИВ, и в виде $(\Phi'_0\tau'\Phi'_1)$, где τ' — один из символов \wedge , \vee или \rightarrow , а Φ'_0 , Φ'_1 — формулы ИВ. Тогда Φ_0 — начало Φ'_0 или Φ'_0 — начало Φ_0 . По лемме $\Phi_0 = \Phi'_0$ поэтому $\tau = \tau'$ и $\Phi_1 = \Phi'_1$. Следовательно, представление $\Phi = (\Phi_0\tau\Phi_1)$ единственno. \square

Следствие 1.2.3. *Пусть Φ — формула ИВ. Тогда с каждым вхождением символа $($ или $)$ в формулу Φ однозначно связано некоторое вхождение подформулы формулы Φ , первым символом которого является рассматриваемое вхождение $($ или $)$ соответственно.*

Доказательство. Индукцией по длине формулы с каждым вхождением символа $($ или $)$ можно связать некоторое такое вхождение подформулы, а лемма 1.2.2 позволяет утверждать единственность такого вхождения. \square

Предложение 1.2.4. *Если Φ — формула ИВ, η , θ — вхождения в Φ подформул Ψ , X соответственно, то либо η и θ не имеют*

общих вхождений символов алфавита ИВ, либо одно из них целиком содержится в другом.

Доказательство. Если η и θ имеют общие вхождения символов, то первое вхождение первого символа η или θ должно быть общим. Пусть первое вхождение первого символа η входит в θ . Если Ψ — атомарная формула, то утверждение очевидно. Пусть Ψ не атомарна, тогда первый символ Ψ есть (или \neg . По следствию 1.2.3 этот символ однозначно определяет вхождение некоторой подформулы Ψ' в X . Но эта подформула будет подформулой и в Φ . В формуле Φ с рассматриваемым вхождением символа (или \neg связано вхождение η подформулы Ψ . В силу единственности Ψ должна совпадать с Ψ' , следовательно, η целиком содержится в θ . \square

Если все вхождения подформулы Ψ в формулу Φ заменить на формулу X , то получим новую формулу, которую обозначим через $(\Phi)_X^\Psi$. Такое определение корректно, так как из предложения 1.2.4 следует, что два различных вхождения подформулы Ψ в Φ не имеют общих вхождений символов алфавита ИВ.

Определение. Секвенцией ИВ называется слово алфавита ИВ вида

$$\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi,$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ — формулы ИВ, n — натуральное число. Отметим, что при $n = 0$ это слово будет иметь вид $\vdash \Psi$.

Часто секвенции будут обозначаться через $\Gamma \vdash \Psi$, где Γ обозначает последовательность формул ИВ, может быть, пустую.

Если формулы ИВ можно рассматривать как «формы» сложных высказываний нашего языка, то секвенции являются «формами» утверждений (теорем), в которых можно отчетливо выделить условия (посылки) и заключение. А именно, рассматривая знак \vdash как знак (логического) следования, секвенцию $\Phi_0, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ можно понимать как утверждение вида «Из (истинности) посылок Φ_0, \dots, Φ_n (логически) следует высказывание Ψ ».

Правила вывода ИВ, которые будут описаны в следующем параграфе, отражают (формализуют) некоторые простейшие стандартные логические способы рассуждения, позволяющие переходить от одних истинных утверждений (теорем) к другим истинным утверждениям (теоремам).

Упражнения

1. Используя предложение 1.2.1, показать, что для любого слова α алфавита ИВ мы через конечное число шагов сможем определить, является ли α формулой ИВ или нет.

2. Заменим в определении формулы ИВ п. 2 на следующий: если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \rightarrow (\Psi)$ и $\neg(\Phi)$ — формулы. Показать, что при таком определении имеют место утверждения, аналогичные предложениям 1.2.1 и 1.2.4.

§ 1.3. Система аксиом и правил вывода

В дальнейшем мы часто будем иметь дело не с конкретными формулами и секвенциями, а с так называемыми схемами формул и секвенций. Буквы Φ , Ψ , X (буквы Γ , Δ , Θ), возможно с индексами из множества натуральных чисел, будем называть *переменными для формул (последовательностей формул)*. Пусть алфавит B содержит кроме символов алфавита ИВ переменные для формул и последовательностей формул.

Схемой секвенций (формул) ИВ мы будем называть такое слово в алфавите B , что при любых подстановках в это слово вместо переменных для формул и последовательностей формул соответственно конкретных формул и последовательностей конкретных формул получаются конкретные секвенции (формулы) ИВ. Результаты таких подстановок будут называться частными случаями этой схемы. Например, $\Psi, \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi$ и $\Phi \rightarrow (X_1 \wedge X_2)$ будут схемами секвенций и формул соответственно, а

$$Q_0 \wedge \neg Q_1, \neg Q_0, \neg(Q_2 \rightarrow Q_1) \vdash Q_3 \vee (Q_0 \wedge \neg Q_1),$$

$$((Q_1 \rightarrow \neg Q_1) \wedge Q_0) \rightarrow (Q_3 \wedge \neg(Q_2 \vee \neg Q_0))$$

— частными случаями соответствующих схем¹⁾.

Определение. Схема секвенций

$$\Phi \vdash \Phi$$

называется *схемой аксиом* ИВ. Частный случай схемы аксиом будем называть *аксиомой*.

Правилами вывода ИВ являются следующие:

$$1. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi},$$

$$2. \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi},$$

$$7. \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi},$$

$$8. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi},$$

¹⁾ Когда значения переменных для формул и последовательностей формул в схеме C секвенций (формул) в тексте зафиксированы, схему C будем называть просто секвенцией (формулой).

-
- | | |
|---|---|
| 3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$, | 9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \Phi}$, |
| 4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$, | 10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}$, |
| 5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$, | 11. $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash X}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash X}$, |
| 6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash X; \Gamma, \Psi \vdash X; \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash X}$, | 12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi}$. |

Как отмечалось в конце предыдущего параграфа, правила вывода ИВ формализуют определенные стандартные логические способы рассуждений. Прокомментируем на содержательном уровне, не очень строго, правила 1–12 с этой точки зрения.

Правила 1–3 — это просто правила, разъясняющие смысл союза «и» (конъюнкции).

Правила 4, 5 так же относятся к пояснению смысла союза «или» (дизъюнкции).

Правило 6 формализует способ рассуждения «разбором (двух) возможных случаев». Если при выполнении посылок Γ справедливо Φ или X , а Ψ справедливо при выполнении условий Γ и Φ , а также при выполнении условий Γ и X , то Ψ всегда справедливо при выполнении посылок Γ . Это устанавливается рассмотрением двух возможных случаев (один из которых обязательно выполняется): 1) выполнены условия Γ и условие Φ , 2) выполнены условия Γ и условие X .

Правило 7 формализует прием эквивалентной переформулировки теоремы, позволяющий одно из условий теоремы помещать в ее заключение в виде посылки.

Правило 8 — это одно из логических правил (правило modus ponens или правило отделения), отмеченных еще Аристотелем; оно указывает, как можно освобождаться от посылки в заключении.

Правило 9 формализует правило «рассуждения от противного». Предположим, что условия Γ и $\neg \Phi$ могут одновременно выполнятся; приходя к противоречию, выражаемому логической константой \mathfrak{F} , заключаем, что из выполнимости условий Γ всегда вытекает выполнимость Φ .

Правило 10 — это правило «обнаружения (выведения) противоречия» для последовательности посылок Γ .

Правило 11 носит совершенно технический формальный характер: перестановка посылок не влияет на истинность заключения.

Правило 12, называемое иногда «утончением» или правилом лишней посылки, отражает тривиальный факт, что, добавляя к условиям теоремы лишнее условие, мы не нарушаем истинности заключения теоремы.

Если в правилах вывода в качестве Γ и Γ_1 берутся конкретные последовательности формул ИВ, а в качестве Φ , Ψ , X — конкретные формулы, то получаются *частные случаи* (или *применения*) правил вывода. Правила 1–10 называются *основными*, а правила 11–12 — *структурными*.

Если Θ — применение правила вывода k , то будем говорить, что *секвенция, стоящая в Θ под чертой, получается из секвенций, стоящих над чертой, по правилу k* .

Определение. *Линейным доказательством* в ИВ называется конечная последовательность S_0, \dots, S_n секвенций ИВ, которая удовлетворяет следующему условию: каждая секвенция S_i , $i \leq n$, либо является аксиомой, либо получается из некоторых S_j , $j < i$, по одному из правил вывода 1–12.

Секвенция S называется *доказуемой* в ИВ или *теоремой* ИВ, если существует линейное доказательство S_0, \dots, S_n в ИВ, у которого $S_n = S$. Формула Φ ИВ называется *доказуемой* в ИВ, если в ИВ доказуема секвенция $\vdash \Phi$.

Пусть S_0, \dots, S_n — линейное доказательство в ИВ. Из определения легко следует, что для любого $i \leq n$ последовательность S_0, \dots, S_i будет линейным доказательством в ИВ; и если S'_0, \dots, S'_n — другое доказательство в ИВ, то последовательность $S_0, \dots, S_n, S'_0, \dots, S'_n$ — тоже линейное доказательство в ИВ.

Определим индуктивно понятие *дерева*:

- 1). Всякая секвенция является деревом.
- 2). Если D_0, \dots, D_n — деревья и S — секвенция, то

$$\frac{D_0; \dots; D_n}{S}$$

— также дерево¹⁾.

Одна и та же секвенция может входить в дерево несколько раз. Секвенцию вместе с ее местом расположения в дереве D будем называть *вхождением секвенции в дерево D* . Вхождение секвенции в дерево D , над которым нет горизонтальной черты, будем называть *начальным* в D . Вхождение секвенции в D , под которым нет горизонтальной черты, будем называть *заключительным* в D . Часто будет употребляться слово «секвенция» вместо «вхождение секвенции», если из контекста ясно, о каком вхождении идет речь. Ясно, что дерево может иметь много начальных секвенций, но заключительная секвенция — только одна. Часть дерева, состоящая из секвенций, расположенных непосредственно над некоторой чертой, под той же чертой, и самой черты, называется *переходом*.

¹⁾ При написании конкретных деревьев знак ; часто будет опускаться.

Определение. Дерево D назовем *доказательством в ИВ в виде дерева*, если все его начальные секвенции — аксиомы ИВ, а переходы — применения правил вывода 1–12. Если S является заключительной секвенцией доказательства D в ИВ в виде дерева, то D называется *доказательством S в виде дерева* или *деревом вывода S* в ИВ.

Пусть h — функция, определенная на секвенциях (точнее: на вхождениях секвенций) дерева D и принимающая в качестве значений натуральные числа, со следующими свойствами:

- 1). $h(S) = 0$, если S является заключительной секвенцией дерева D .
- 2). Если

$$\frac{S_0; \dots; S_n}{S}$$

— переход в дереве D , то

$$h(S_0) = \dots = h(S_n) = h(S) + 1.$$

Очевидно, что условия 1), 2) определяют функцию h однозначно. Число $h(S)$ назовем *высотой* (вхождения) секвенции S в дереве D . Максимальную высоту секвенций, входящих в D , назовем *высотой дерева D* .

Предложение 1.3.1 Секвенция S является теоремой ИВ \iff существует доказательство секвенции S в ИВ в виде дерева.

Доказательство (\implies) проведем индукцией по длине n линейного доказательства секвенции S . Пусть S_1, \dots, S_{n-1}, S — линейное доказательство в ИВ. Если S — аксиома, то S будет доказательством секвенции S в виде дерева. Пусть D_1, \dots, D_{n-1} — доказательства секвенций S_1, \dots, S_{n-1} в виде дерева. Если $\frac{S_{i_1}; \dots; S_{i_k}}{S}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k < n$, — применение некоторого правила ИВ, то дерево

$$\frac{D_{i_1}; \dots; D_{i_k}}{S}$$

будет доказательством секвенции S в виде дерева.

(\iff) Пусть D — доказательство секвенции S в виде дерева. Построим линейные доказательства для всех секвенций S' дерева D . Построение будем вести обратной индукцией по высоте секвенции S' в дереве D . Начальные секвенции в дереве D будут линейными доказательствами. Если для всех секвенций S_1, \dots, S_m высоты $k+1$ уже построены линейные доказательства L_1, \dots, L_m , то очевидно, что последовательность

$$L_1, \dots, L_m, S'$$

будет линейным доказательством секвенции S' высоты k . \square

Опр Схема секвенций H называется *доказуемой* в ИВ, если ее добавление к ИВ в качестве схемы аксиом не расширяет множество доказуемых секвенций. Ясно, что это эквивалентно тому, что все частные случаи схемы H доказуемы в ИВ.

Пример 1.3.2. Следующее дерево показывает доказуемость схемы $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$:¹⁾

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi} \text{ — правило 12}}{\frac{\frac{\Psi \vdash \Psi}{\Psi, \Phi \vdash \Psi} \text{ — правило 12}}{\frac{\Phi, \Psi \vdash \Psi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi} \text{ — правило 11}} \text{ — правило 12}} \text{ — правило 1.}$$

Опр Правило вывода называется *допустимым* в ИВ, если добавление его к исчислению ИВ не расширяет множество доказуемых секвенций. В частности, правила 1–12 ИВ допустимы в ИВ.

Конечная последовательность секвенций S_0, \dots, S_n называется *линейным квазивыводом секвенции S_n в ИВ*, если каждая входящая в нее секвенция является доказуемой в ИВ или получается из предыдущих по допустимому в ИВ правилу вывода. Дерево D называется *квазивыводом секвенции S в ИВ в виде дерева*, если всякая начальная секвенция D доказуема в ИВ, заключительной секвенцией является S , а переходы представляют собой применения допустимых в ИВ правил вывода.

Очевидно, что всякая секвенция, для которой существует линейный квазивывод или квазивывод в виде дерева, является доказуемой.

В дальнейшем под доказательством (квазивыводом) в исчислении ИВ мы будем понимать доказательство (квазивывод) в виде дерева. Это мы делаем для более наглядного представления доказательства, а также потому, что поиск доказательства данной секвенции в виде дерева существенно проще, чем поиск ее линейного доказательства.

Ясно, что если в правиле ИВ переставить секвенции над чертой, то полученное правило будет допустимым в ИВ. Так переделанные правила мы не будем различать с исходными правилами.

Для $\delta \in \{0, 1\}$ через Φ^δ будем обозначать формулу Φ , если $\delta = 1$, и формулу $\neg\Phi$, если $\delta = 0$.

Предложение 1.3.3 (основные допустимые правила ИВ). Следующие правила являются допустимыми в ИВ:

a)
$$\frac{\Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi}{X_1, \dots, X_m \vdash \Phi}, \quad \text{где } \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} \subseteq \{X_1, \dots, X_m\},$$

¹⁾ Вместо слов «применение правила k » будем писать короче — «правило k ».

- б) $\frac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma, \Psi \vdash X}{\Gamma \vdash X}$, в) $\frac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash X}{\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash X}$,
- г) $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \neg \Phi}$, д) $\frac{\Gamma, \Phi^\varepsilon \vdash \Psi^\delta}{\Gamma, \Phi^{(1-\varepsilon)} \vdash \Psi^{(1-\delta)}}$, где $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Для установления допустимости правила вывода достаточно построить дерево секвенций, у которого переходы будут применениеми правил вывода ИВ, а начальными секвенциями будут начальные секвенции данного правила и также, возможно, некоторые доказуемые секвенции.

Дерево

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, \Phi, \Phi \vdash \Psi \\ \hline \Gamma, \Phi \vdash \Phi \rightarrow \Psi \quad \Gamma, \Phi \vdash \Phi \end{array}}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}$$

показывает допустимость правила

$$a') \frac{\Gamma, \Phi, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}.$$

Так как любую перестановку формул в последовательности можно осуществить, переставляя соседние формулы, то допустимость правила а) следует из допустимости правила а') с помощью правил 11, 12.

Покажем еще допустимость правил г) и д), оставляя правила б) и в) читателю в качестве упражнения.

г). Воспользуемся доказуемостью схемы $\Gamma, \neg\neg\Phi, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}$, установить которую предлагаем читателю в качестве упражнения:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, \Phi \vdash \mathfrak{F} \\ \hline \Gamma, \Phi, \neg\neg\Phi \vdash \mathfrak{F} \\ \hline \Gamma, \neg\neg\Phi, \Phi \vdash \mathfrak{F} \\ \hline \Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \Phi \rightarrow \mathfrak{F} \end{array}}{\frac{\Gamma, \neg\neg\Phi, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}{\frac{\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \neg\Phi}}}.$$

Для доказательства допустимости правила д) мы воспользуемся установленной выше допустимостью правил а) и г), т. е. построим соответствующее дерево, у которого некоторые переходы будут применениеми правила а) или г):

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, \Phi^\varepsilon \vdash \Psi^\delta \quad \Psi^{(1-\delta)} \vdash \Psi^{(1-\delta)} \\ \hline \Gamma, \Psi^{(1-\delta)}, \Phi^\varepsilon \vdash \Psi^\delta \quad \Gamma, \Psi^{(1-\delta)}, \Phi^\varepsilon \vdash \Psi^{(1-\delta)} \\ \hline \Gamma, \Psi^{(1-\delta)}, \Phi^\varepsilon \vdash \mathfrak{F} \\ \hline \Gamma, \Psi^{(1-\delta)} \vdash \Phi^{(1-\varepsilon)} \end{array}}{\Gamma, \Psi^{(1-\delta)} \vdash \Phi^{(1-\varepsilon)}}.$$

□

Пример 1.3.4. Докажем секвенцию $\vdash Q_0 \vee \neg Q_0$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg Q_0 \vdash \neg Q_0}{\neg Q_0 \vdash Q_0 \vee \neg Q_0} \quad \neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash \neg(Q_0 \vee \neg Q_0)}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0), \neg Q_0 \vdash \mathfrak{F}} \quad \frac{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash Q_0}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash Q_0 \vee \neg Q_0} \quad \neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash \neg(Q_0 \vee \neg Q_0)}{\neg(Q_0 \vee \neg Q_0) \vdash \mathfrak{F}}}{\vdash Q_0 \vee \neg Q_0}.$$

Замечание 1.3.5. Заметим, что приведенное выше дерево не является доказательством в ИВ, так как второй переход не является применением ни одного из правил. Однако ясно, что, дополнив это дерево применениями правил 11 и 12, можно получить доказательство. Вместо нескольких применений правил 11 и 12 можно применять допустимое правило а). В дальнейшем без оговорок будем пользоваться допустимыми правилами 1^*-10^* , которые получаются из основных правил 1–10 заменой вхождений Γ над чертой на $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, а Γ под чертой на Γ_{n+1} и добавлением условия $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\} \subseteq \{\Gamma_{n+1}\}$. Например, правило 6^* будет таким:

$$\frac{\Gamma_1, \Phi \vdash \Psi; \Gamma_2, X \vdash \Psi; \Gamma_3 \vdash \Phi \vee X}{\Gamma_4 \vdash \Psi},$$

где $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} \subseteq \{\Gamma_4\}$.

Ясно, что правило 6^* получается из правила 6 с $\Gamma = \Gamma_4$ добавлением следующих применений правила а):

$$\frac{\Gamma_1, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma_4, \Phi \vdash \Psi}; \quad \frac{\Gamma_2, X \vdash \Psi}{\Gamma_4, X \vdash \Psi}; \quad \frac{\Gamma_3 \vdash \Phi \vee X}{\Gamma_4 \vdash \Phi \vee X}.$$

Упражнения

1. Установить доказуемость в ИВ следующих схем:
 - $\Phi \vdash \neg\neg\Phi$;
 - $\neg\neg\Phi \vdash \Phi$;
 - $\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \wedge \Phi$;
 - $\Phi \vee \Psi \vdash \Psi \vee \Phi$;
 - $\vdash \neg\mathfrak{F}$;
 - $\mathfrak{F} \vdash \Phi$ для любого Φ .
2. Доказать допустимость в ИВ следующих правил:
 - $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \neg\Phi}{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}$;
 - $\frac{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \Phi}$;
 - $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}$.

§ 1.4. Эквивалентность формул

Обозначим через F_0 множество всех формул ИВ, V — множество всех пропозициональных переменных ИВ. Пусть $s_0: V \rightarrow F_0$ — отображение множества V в F_0 . Для формулы Φ ИВ через $s(\Phi)$ обозначим результат подстановки формулы $s_0(P)$ вместо каждой пропозициональной переменной P из формулы Φ . Ясно, что так определенное отображение $s: F_0 \rightarrow F_0$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $s(\Phi \tau \Psi) = s(\Psi) \tau s(\Phi)$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- 2) $s(\neg \Phi) = \neg s(\Phi)$.

Из этих условий индукцией по длине формулы Φ вытекает, что для любой формулы Φ ИВ слово $s(\Phi)$ будет формулой ИВ. Всякое такое отображение будем называть *подстановкой*. Для результата подстановки $s(\Phi)$ введем обозначение $s(\Phi) = (\Phi)_{s(P_0), \dots, s(P_n)}^{P_0, \dots, P_n}$, которое согласуется с обозначением $(\Phi)_X^\Psi$, введенным в § 1.2.

Распространим отображение s на секвенции:

$$3) s(\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi) = s(\Phi_1), \dots, s(\Phi_n) \vdash s(\Psi).$$

По индукции можно определить продолжение s на деревья:

$$4) s\left(\frac{D_1; \dots; D_k}{S}\right) = \frac{s(D_1); \dots; s(D_k)}{s(S)}.$$

Теорема 1.4.1 (о подстановке). *Пусть $s: V \rightarrow F_0$ — произвольное отображение множества V в F_0 , S — доказуемая в ИВ секвенция. Тогда секвенция $s(S)$ доказуема в ИВ.*

Доказательство. Индукцией по высоте дерева будем доказывать, что если D — доказательство секвенции S в ИВ в виде дерева, то $s(D)$ — доказательство секвенции $s(S)$ в ИВ. Если S — аксиома, то $s(S)$ также будет аксиомой. Для доказательства индукционного шага достаточно показать, что если D_1 — применение одного из правил ИВ, то $s(D_1)$ будет применением того же правила. Но это очевидно в силу свойств 1)–4). Например, если

$$\frac{\Phi_0, \Phi \vdash \Psi; \Phi_0, X \vdash \Psi; \Phi_0 \vdash \Phi \vee X}{\Phi_0 \vdash \Psi}$$

— применение правила 6, то

$$\frac{s(\Phi_0), s(\Phi) \vdash s(\Psi); s(\Phi_0), s(X) \vdash s(\Psi); s(\Phi_0) \vdash s(\Phi) \vee s(X)}{s(\Phi_0) \vdash s(\Psi)}$$

— также применение правила 6. \square

Теорема о подстановке, иными словами, утверждает, что если в доказуемой секвенции вместо пропозициональных переменных подста-

вить произвольные формулы, то полученная секвенция будет доказуемой.

Определение. Две формулы Φ и Ψ назовем *эквивалентными* (обозначаем $\Phi \equiv \Psi$), если в ИВ доказуемы две секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$.

Отметим, что символ \equiv не является символом языка исчисления высказываний. Он является символом языка, на котором мы доказываем утверждения об исчислении. Иногда этот язык называют *метаязыком*. Понятия схемы и доказательства также являются понятиями метаязыка.

Лемма 1.4.2. Отношение $\Phi \equiv \Psi$ является отношение эквивалентности, т. е. для любых формул Φ, Ψ, X ИВ справедливы следующие утверждения:

- $\Phi \equiv \Phi$;
- если $\Phi \equiv \Psi$ то $\Psi \equiv \Phi$;
- если $\Phi \equiv \Psi$ и $\Psi \equiv X$, то $\Phi \equiv X$.

Доказательство. а) следует из того, что $\Phi \vdash \Phi$ — аксиома.
б) следует из симметричности Φ и Ψ в определении отношения $\Phi \equiv \Psi$. Если секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash X$ доказуемы, то доказуема секвенция $\Phi, \Psi \vdash X$ и по предложению 1.3.3 б) секвенция $\Phi \vdash X$ доказуема. Аналогично, если $X \vdash \Psi$, $\Psi \vdash \Phi$ доказуемы, то $X \vdash \Phi$ доказуема. \square

Лемма 1.4.3. а). Если $\Phi \equiv \Psi$, то Φ доказуема в ИВ тогда и только тогда, когда в ИВ доказуема Ψ .

б). Если $\Phi_1 \equiv \Psi_1$ и $\Phi_2 \equiv \Psi_2$, то $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \equiv \Psi_1 \wedge \Psi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2 \equiv \Psi_1 \vee \Psi_2$, $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \equiv \Psi_1 \rightarrow \Psi_2$, $\neg\Phi_1 \equiv \neg\Psi_1$.

Доказательство. а). Если доказуемы $\vdash \Phi$ и $\Phi \vdash \Psi$, то по допустимому правилу б) получаем $\vdash \Psi$.

Аналогично из доказуемости $\vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$ получаем доказуемость $\vdash \Phi$.

б). В силу симметричности Φ_i и Ψ_i в б), достаточно доказать секвенции $\neg\Phi_1 \vdash \neg\Psi_1$, $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Psi_1 \wedge \Psi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2 \vdash \Psi_1 \vee \Psi_2$, $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \vdash \Psi_1 \rightarrow \Psi_2$. Это вытекает из следующих квазивыводов:

$$1) \frac{\Psi_1 \vdash \Phi_1; \neg\Phi_1 \vdash \neg\Psi_1}{\neg\Phi_1 \vdash \neg\Psi_1};$$

$$2) \frac{\frac{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1; \Phi_1 \vdash \Psi_1}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Psi_1}; \frac{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_2; \Phi_2 \vdash \Psi_2}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Psi_2}}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Psi_1 \wedge \Psi_2};$$

$$3) \frac{\frac{\Phi_1 \vdash \Psi_1}{\Phi_1 \vdash \Psi_1 \vee \Psi_2} \quad \frac{\Phi_2 \vdash \Psi_2}{\Phi_2 \vdash \Psi_1 \vee \Psi_2} \quad \Phi_1 \vee \Phi_2 \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2}{\Phi_1 \vee \Phi_2 \vdash \Psi_1 \vee \Psi_2};$$

$$4) \frac{\frac{\frac{\Psi_1 \vdash \Phi_1; \Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \vdash \Phi_1 \rightarrow \Phi_2}{\Phi_1 \rightarrow \Phi_2, \Psi_1 \vdash \Phi_2} \quad \frac{\Phi_2 \vdash \Psi_2}{\vdash \Phi_2 \rightarrow \Psi_2}}{\Phi_1 \rightarrow \Phi_2, \Psi_1 \vdash \Psi_2}}{\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \vdash \Psi_1 \rightarrow \Psi_2}. \quad \square$$

Теорема 1.4.4 (о замене). Пусть Φ — формула ИВ, Ψ — ее подформула. Пусть Φ' получается из Φ путем замены некоторого вхождения Ψ на формулу Ψ' . Тогда если $\Psi \equiv \Psi'$, то $\Phi \equiv \Phi'$.

Доказательство. Если $\Psi = \Phi$, то теорема тривиальна. Далее — индукцией по длине формулы Φ . Если $\Phi = Q_i$, то $\Psi = \Phi$.

Индукционный шаг распадается на 4 случая:

- a) $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$;
- б) $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$;
- в) $\Phi = \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$;
- г) $\Phi = \neg \Phi_1$.

По предложению 1.2.4 любое вхождение $\Psi \neq \Phi$ содержится либо в Φ_1 , либо в Φ_2 , поэтому эквивалентность $\Phi \equiv \Phi'$ следует из индукционного предположения и леммы 1.4.3 б). \square

Предложение 1.4.5 (основные эквивалентности ИВ). Пусть Φ , Ψ и X — формулы ИВ, $\tau \in \{\wedge, \vee\}$, $\bar{\wedge} = \vee$, $\bar{\vee} = \wedge$. Тогда имеют место следующие эквивалентности:

- | | |
|---|---|
| 1) $\Phi \equiv \Phi \tau \Phi$; | 8) $\mathfrak{F} \wedge \Phi \equiv \mathfrak{F}$; |
| 2) $\Phi \tau \Psi \equiv \Psi \tau \Phi$; | 9) $\neg \mathfrak{F} \wedge \Phi \equiv \Phi$; |
| 3) $(\Phi \tau \Psi) \tau X \equiv \Phi \tau (\Psi \tau X)$; | 10) $\neg \mathfrak{F} \vee \Phi \equiv \neg \mathfrak{F}$; |
| 4) $\Phi \tau (\Psi \bar{\tau} X) \equiv (\Phi \tau \Psi) \bar{\tau} (\Phi \tau X)$; | 11) $\mathfrak{F} \vee \Phi \equiv \Phi$; |
| 5) $\Phi \rightarrow \Psi \equiv \neg \Phi \vee \Psi$; | 12) $\Phi \wedge \neg \Phi \equiv \mathfrak{F}$; |
| 6) $\neg \neg \Phi \equiv \Phi$; | 13) $\Phi \vee \neg \Phi \equiv \neg \mathfrak{F}$; |
| 7) $\neg (\Phi \tau \Psi) \equiv \neg \Phi \bar{\tau} \neg \Psi$; | 14) если Φ не содержит пропозициональных переменных, то $\Phi \equiv \mathfrak{F}$ или $\Phi \equiv \neg \mathfrak{F}$. |

Доказательство. Эквивалентности 14) получаются из эквивалентностей 8)–11), 5) и 6) индукцией по длине формулы Φ . Чтобы не загромождать изложение, приведем квазивыводы для эквивалентности 4) при $\tau = \wedge$ и 5), 9). Остальные эквивалентности читатель легко докажет сам, используя навык, приобретенный при разборе ранее приведенных доказательств.

В следующих двух деревьях через A будет обозначаться формула $(\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge X)$:

$$\frac{\Phi \wedge (\Psi \vee \Psi) \vdash \Phi; \Psi \vdash \Psi}{\Phi \wedge (\Psi \vee \Psi), \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi} \quad \frac{\Phi \wedge (\Psi \vee X) \vdash \Phi; X \vdash X}{\Phi \wedge (\Psi \vee X), X \vdash \Phi \wedge X}$$

$$\frac{\Phi \wedge (\Psi \vee X), \Psi \vdash A; \quad \Phi \wedge (\Psi \vee X), X \vdash A; \quad \Phi \wedge (\Psi \vee X) \vdash \Psi \vee X}{\Phi \wedge (\Psi \vee X) \vdash A},$$

$$\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \vee X; \quad \Phi \wedge \Psi \vdash \Phi} \quad \frac{\Phi \wedge X \vdash \Phi; \quad \Phi \wedge X \vdash \Psi \vee X}{\Phi \wedge X \vdash \Phi \wedge (\Psi \vee X); \quad A \vdash A}$$

$$\frac{\Phi \vdash \Phi; \Phi \rightarrow \Psi \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \vdash \Psi} \quad \frac{\neg \Phi \vdash \neg \Phi}{\neg \Phi \vdash \neg \Phi \vee \Psi; \quad \vdash \Phi \vee \neg \Phi}$$

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \vdash \neg \Phi \vee \Psi; \quad \neg \Phi \vdash \neg \Phi \vee \Psi; \quad \vdash \Phi \vee \neg \Phi}{\Phi \rightarrow \Psi \vdash \neg \Phi \vee \Psi},$$

$$\frac{\Phi, \neg \Psi \vdash \Phi; \neg \Phi, \neg \Psi \vdash \neg \Phi}{\Phi, \neg \Phi, \neg \Psi \vdash \mathfrak{F}}$$

$$\frac{\Phi, \neg \Phi \vdash \Psi; \quad \Psi \vdash \Psi; \quad \neg \Phi \vee \Psi \vdash \neg \Phi \vee \Psi}{\neg \Phi \vee \Psi, \Phi \vdash \Psi}$$

$$\frac{\neg \Phi \vee \Psi, \Phi \vdash \Psi}{\neg \Phi \vee \Psi \vdash \Phi \rightarrow \Psi},$$

$$\frac{\neg \mathfrak{F} \wedge \Phi \vdash \neg \mathfrak{F} \wedge \Phi}{\neg \mathfrak{F} \wedge \Phi \vdash \Phi}, \quad \frac{\vdash \neg \mathfrak{F}; \Phi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \neg \mathfrak{F} \wedge \Phi}.$$

Заметим, что доказуемость $\vdash \Phi \vee \neg \Phi$ следует из примера 1.3.4 и теоремы о подстановке. Секвенция $\vdash \neg \mathfrak{F}$ получается из аксиомы $\mathfrak{F} \vdash \mathfrak{F}$ по допустимому правилу г). \square

Упражнения

- Доказать допустимость оставшихся правил из предложения 1.4.5.
- Пусть формулы Φ и Ψ ИВ содержат лишь одну пропозициональную переменную P , и для некоторых подстановок s_1, s_2 имеем $s_1(\Phi) = \Psi$ и $s_2(\Psi) = \Phi$. Показать, что $\Phi = \Psi$.
- Пусть $\Phi \equiv \Psi$. Показать, что существует формула X , эквивалентная формулам Φ и Ψ , все пропозициональные переменные которой содержатся как в Φ , так и в Ψ . (Указание. Воспользоваться теоремой 1.4.1.)

§ 1.5. Нормальные формы

Понятие эквивалентности формул ИВ будет иметь для нас большое значение, так как основные изучаемые нами свойства формул ИВ сохраняются при переходе к эквивалентным формулам. Поэтому

очень важно уметь находить для каждой формулы ИВ эквивалентную ей формулу, но устроенную по возможности более просто. В этом параграфе будут определены такие «канонические» представители для формул ИВ.

Лемма 1.5.1. *Любая формула Φ исчисления высказываний эквивалентна формуле Ψ , которая не содержит символа импликации.*

Доказательство индукцией по числу импликаций в формуле Φ . База индукции тривиальна. Так как по определению формулы ИВ любое вхождение импликации в формулу Φ содержится в подформуле формулы Φ вида $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$, то индукционный шаг вытекает из теоремы о подстановке и эквивалентности 5) предложения 1.4.5 \square

Лемма 1.5.2. *Любая формула Φ ИВ эквивалентна формуле Ψ без символа импликации, у которой символы отрицания стоят только перед атомарными подформулами.*

Доказательство. Пусть F^\rightarrow — множество формул, не содержащих символа импликации. Определим отображение $\beta : F^\rightarrow \rightarrow F^\rightarrow$ по индукции:

- 1) $\beta(Q_i) = Q_i$,
- 2) $\beta(\neg Q_i) = \neg Q_i$,
- 3) $\beta(\Phi \wedge \Psi) = \beta(\Phi) \wedge \beta(\Psi)$,
- 4) $\beta(\Phi \vee \Psi) = \beta(\Phi) \vee \beta(\Psi)$,
- 5) $\beta(\neg(\Phi \wedge \Psi)) = \beta(\neg\Phi) \vee \beta(\neg\Psi)$,
- 6) $\beta(\neg(\Phi \vee \Psi)) = \beta(\neg\Phi) \wedge \beta(\neg\Psi)$,
- 7) $\beta(\neg\neg\Phi) = \beta(\Phi)$.

По лемме 1.5.1 существует формула $X \equiv \Phi$, где X не содержит импликации. Эквивалентность $X \equiv \beta(X)$ легко получить индукцией по длине X , используя основные эквивалентности ИВ. Очевидно, что $\Psi = \beta(X)$ удовлетворяет требованиям данной леммы. \square

Опр Определим теперь важные понятия *дизъюнктивного* и *конъюнктивного* члена формулы. Для любой формулы Φ через $D(\Phi)$ будем обозначать множество всех дизъюнктивных членов формулы Φ , а через $K(\Phi)$ — множество всех ее конъюнктивных членов, которые определим индукцией по длине Φ :

- a). Если формула Φ не представима в виде дизъюнкции, т. е. в виде $\Phi = (\Phi_0 \vee \Phi_1)$, то $D(\Phi) = \{\Phi\}$, т. е. Φ является своим единственным дизъюнктивным членом.
- б). Если $\Phi = (\Phi_0 \vee \Phi_1)$, то $D(\Phi) = D(\Phi_0) \cup D(\Phi_1)$.

Множество $K(\Phi)$ определяется двойственno:

- a). Если формула Φ не имеет вида $\Phi_0 \wedge \Phi_1$, то $K(\Phi) = \{\Phi\}$.
- б). Если $\Phi = (\Phi_0 \wedge \Phi_1)$, то $K(\Phi) = K(\Phi_0) \cup K(\Phi_1)$.

Замечание 1.5.3. Из предыдущих определений индукцией по длине Φ получаем, что если $\Psi \in D(\Phi)$ ($\Psi \in K(\Phi)$), то $D(\Psi) \subseteq D(\Phi)$ ($K(\Psi) \subseteq K(\Phi)$).

Предложение 1.5.4. Пусть Φ и Ψ — формулы ИВ. Если $D(\Phi) \subseteq D(\Psi)$ то секвенция $\Phi \vdash \Psi$ доказуема в ИВ.

Доказательство. Установим, что из $\Phi \in D(\Psi)$ следует доказуемость секвенции $\Phi \vdash \Psi$. Докажем это индукцией по длине формулы Ψ при фиксированной формуле Φ . Если Ψ — атомарная формула, то $\Phi = \Psi$ и доказывать нечего. В случае, когда Ψ не представима в виде дизъюнкции, также имеем $\Psi = \Phi$. Пусть $\Psi = \Psi' \vee \Psi''$. Тогда $\Phi \in D(\Psi')$ или $\Phi \in D(\Psi'')$. Если, скажем, $\Phi \in D(\Psi')$, то по индукционному предположению

$$\frac{\Phi \vdash \Psi'}{\Phi \vdash \Psi' \vee \Psi''}$$

— квазивывод секвенции $\Phi \vdash \Psi$.

Установим теперь предложение индукцией по длине Φ при фиксированном Ψ . Если $D(\Phi) = \{\Phi\}$, то $\Phi \in D(\Psi)$ и выше уже установлена доказуемость $\Phi \vdash \Psi$. Если $\Phi = \Phi' \vee \Phi''$, то $D(\Phi') \cup D(\Phi'') = D(\Phi) \subseteq D(\Psi)$ и по индукционному предложению секвенции $\Phi' \vdash \Psi$ и $\Phi'' \vdash \Psi$ доказуемы. Тогда

$$\frac{\Phi' \vdash \Psi; \Phi'' \vdash \Psi; \Phi \vdash \Phi' \vee \Phi''}{\Phi \vdash \Psi}$$

— квазивывод нужной секвенции. \square

Следствие 1.5.5. Если $D(\Phi) = D(\Psi)$, то $\Phi \equiv \Psi$. \square

Полученное следствие показывает, что с точностью до эквивалентности формул можно пользоваться обозначением $\bigvee_{i=1}^n \Phi_i$ или $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_n$ для формул Φ таких, что $D(\Phi) = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$.

Для конъюнктивных членов ситуация вполне аналогичная. Оставляем читателю доказательство следующего предложения.

Предложение 1.5.6. Пусть Φ и Ψ — формулы ИВ. Если $K(\Psi) \subseteq K(\Phi)$, то доказуема секвенция $\Phi \vdash \Psi$. \square

Следствие 1.5.7. Если $K(\Phi) = K(\Psi)$, то $\Phi \equiv \Psi$. \square

Это позволяет использовать обобщенную запись вида $\bigwedge_{i=1}^n \Phi_i$ или $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n$ для формул Φ таких, что $K(\Phi) = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$.

Лемма 1.5.8. Секвенция $\Gamma \vdash \Phi$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуемы секвенции $\Gamma \vdash \Phi'$ для всех $\Phi' \in K(\Phi)$.

Доказательство. В одну сторону лемма вытекает из предложения 1.5.6 и замечания 1.5.3. Пусть для любого $\Phi' \in K(\Phi)$ секвенция $\Gamma \vdash \Phi'$ доказуема. Индукцией по длине Φ покажем, что $\Gamma \vdash \Phi$ доказуема. Если Φ не представима в виде $\Phi_0 \wedge \Phi_1$, то доказывать нечего. Если $\Phi = \Phi_0 \wedge \Phi_1$, то по индукционному предположению $\Gamma \vdash \Phi_0$ и $\Gamma \vdash \Phi_1$ доказуемы (так как $K(\Phi_i) \subseteq K(\Phi)$). Следовательно,

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi_0; \Gamma \vdash \Phi_1}{\Gamma \vdash \Phi_0 \wedge \Phi_1}$$

есть квазивывод секвенции $\Gamma \vdash \Phi$. \square

Определение. Будем говорить, что формула Φ — *элементарная дизъюнкция*, если каждый дизъюнктивный член Φ есть либо пропозициональная переменная, либо отрицание пропозициональной переменной. Будем говорить, что формула Φ находится в *конъюнктивной нормальной форме* (к. н. ф.), если каждый конъюнктивный член Φ является элементарной дизъюнкцией. Формулу Φ , находящуюся в конъюнктивной нормальной форме, с точностью до эквивалентности можно записать в виде $\bigwedge_{i=0}^n (\Phi_0^i \vee \dots \vee \Phi_{m_i}^i)$, где Φ_j^i — атомарные формулы или отрицания атомарных формул, а $\Phi_0^i \vee \dots \vee \Phi_{m_i}^i$ — обобщенные обозначения для конъюнктивных членов формулы Φ .

Двойственным образом (т. е. заменой \wedge на \vee и \vee на \wedge) определяются понятия *элементарной конъюнкции* и *дизъюнктивной нормальной формы* (д. н. ф.).

Теорема 1.5.9. Для любой формулы Φ ИВ существует эквивалентная ей формула Ψ , находящаяся в к. н. ф.

Доказательство. Пусть Ψ_1 — формула, эквивалентная Φ , не содержащая символа импликации и все символы отрицания которой стоят перед атомарными подформулами. Заменив \exists и $\neg\exists$ соответственно на эквивалентные формулы $P \wedge \neg P$ и $P \vee \neg P$ для некоторой пропозициональной переменной P , можно считать, что Ψ_1 не содержит логическую константу. Будем доказывать теорему индукцией по длине Ψ_1 . Если Ψ_1 — пропозициональная переменная или ее отрицание, то Ψ_1 уже находится в к. н. ф. Если $\Psi_1 = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ и X_1, X_2 — формулы, эквивалентные Φ_1 , соответственно Φ_2 , находящиеся в к. н. ф., то по теореме о замене формула $X_1 \wedge X_2$ эквивалентна Ψ_1 и находится в к. н. ф.

Пусть $\Psi_1 = \Phi_1 \vee \Phi_2$. По индукционному предположению существуют формулы X_1 и X_2 , находящиеся в к. н. ф., $X_1 \equiv \Phi_1$ и $X_2 \equiv \Phi_2$. По теореме о замене $\Psi_1 \equiv X_1 \vee X_2$. Доказательство того, что $X_1 \vee X_2$ эквивалентна некоторой Ψ , находящейся в к. н. ф., будем вести индукцией

по $n = m_1 + m_2$, где m_i — число символов \wedge в X_i , $i = 1, 2$. Если $m_1 = m_2 = 0$, то $X_1 \vee X_2$, будучи элементарной дизъюнкцией, находится в к. н. ф. Пусть, например, m_2 не равно нулю. Тогда $X_2 = X_3 \wedge X_4$. По основной эквивалентности 4) получаем

$$X_1 \vee X_2 = X_1 \vee (X_3 \wedge X_4) \equiv (X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee X_4).$$

По индукционному предположению $X_1 \vee X_3$ и $X_1 \vee X_4$ эквивалентны Ψ_2 и соответственно Ψ_3 , которые находятся в к. н. ф. Ясно, что $\Psi = \Psi_2 \wedge \Psi_3$ удовлетворяет требованиям теоремы. \square

Доказательство следующей теоремы по существу повторяет доказательство теоремы 1.5.9 с перестановкой \wedge и \vee .

Теорема 1.5.10. Для любой формулы Φ ИВ существует эквивалентная ей формула Ψ , находящаяся в д. н. ф. \square

Определение. Будем говорить, что формула Φ ИВ находится в *совершенной* к. н. ф. (д. н. ф.), если $\Phi = \neg \mathfrak{F}$ ($\Phi = \mathfrak{F}$) или выполнены следующие условия:

- 1) Φ находится в к. н. ф. (д. н. ф.);
- 2) любая пропозициональная переменная P , входящая в формулу Φ , имеет в любом конъюнктивном (дизъюнктивном) члене Φ ровно одно вхождение;
- 3) любые два различных вхождения конъюнктивных (дизъюнктивных) членов Φ имеют различные множества дизъюнктивных (конъюнктивных) членов.

Например, из формул

$$(Q_1 \vee Q_3) \vee \neg Q_0, (Q_2 \wedge Q_4) \vee (Q_4 \wedge Q_2), (Q_1 \wedge \neg Q_2) \vee (Q_2 \wedge \neg Q_1),$$

находящихся в д. н. ф., первая находится в совершенной к. н. ф., а третья — в совершенной д. н. ф.; первая и вторая формулы не находятся в совершенной д. н. ф. (Почему?)

Лемма 1.5.11. Пусть Φ — формула ИВ.

- 1). Если найдется такая Ψ , что $\Psi, \neg \Psi \in D(\Phi)$, то $\Phi \equiv \neg \mathfrak{F}$, в частности, секвенция $\vdash \Phi$ доказуема.
- 2). Если найдется такая Ψ , что $\Psi, \neg \Psi \in K(\Phi)$, то $\Phi \equiv \mathfrak{F}$, в частности, секвенция $\vdash \neg \Phi$ доказуема.
- 3). Если $K(\Phi) = \{\neg \mathfrak{F}, \Psi_0, \dots, \Psi_n\}$, то $\Phi \equiv \Psi$, где Ψ — формула, для которой выполнено $K(\Psi) = \{\Psi_0, \dots, \Psi_n\}$.
- 4). Если $D(\Phi) = \{\mathfrak{F}, \Psi_0, \dots, \Psi_n\}$, то $\Phi \equiv \Psi$, где Ψ — формула, для которой выполнено $D(\Psi) = \{\Psi_0, \dots, \Psi_n\}$.

Доказательство. Следует из основных эквивалентностей 2), 3), 8)–13), теоремы о замене и следствий 1.5.5, 1.5.7. \square

Теорема 1.5.12. Для любой формулы Φ ИВ существует эквивалентная ей формула Ψ , находящаяся в совершенной к. н. ф. При этом, если секвенция $\vdash \Phi$ не доказуема, то Ψ не содержит логической константы \mathfrak{F} .

Доказательство. Если секвенция $\vdash \Phi$ доказуема, то выполнено $\Phi \equiv \neg \mathfrak{F}$, а формула $\neg \mathfrak{F}$ по определению находится в совершенной к. н. ф. В дальнейшем будем предполагать, что секвенция $\vdash \Phi$ не доказуема в ИВ. Пусть Ψ_1 — формула, эквивалентная Φ и находящаяся в к. н. ф. Такая формула существует по теореме 1.5.9.

Если конъюнктивный член Θ формулы Ψ_1 содержит среди своих дизъюнктивных членов формулы P и $\neg P$, то по лемме 1.5.11.1) мы получаем $\Theta \equiv \neg \mathfrak{F}$. Так как секвенция $\vdash \neg \mathfrak{F}$ доказуема, то в силу леммы 1.5.11, эквивалентности 3) и недоказуемости секвенции $\vdash \Phi$, можно по теореме о замене получить формулу Ψ_2 , эквивалентную формуле Ψ_1 , находящуюся в к. н. ф. и у которой никакой конъюнктивный член не содержит среди своих дизъюнктивных членов P и $\neg P$ ни для какой пропозициональной переменной P . Из основных эквивалентностей вытекает эквивалентность

$$\Theta \equiv \Theta \vee (P \wedge \neg P) \equiv (\Theta \vee P) \wedge (\Theta \vee \neg P).$$

Используя эти эквивалентности и теорему о замене, можно из формулы Ψ_2 получить формулу Ψ_3 , эквивалентную формуле Ψ_2 , находящуюся в к. н. ф. и у которой любой конъюнктивный член содержит все пропозициональные переменные, входящие в формулу Ψ_2 . Если формула Ψ_3 имеет два конъюнктивных члена с одинаковым множеством дизъюнктивных членов, то в силу основных эквивалентностей 2), 3), 1) по теореме о замене из формулы Ψ_3 получается формула Ψ , эквивалентная формуле Ψ_3 и удовлетворяющая всем условиям определения совершенной к. н. ф. \square

Доказательство следующей теоремы аналогично предыдущему доказательству с заменой \wedge на \vee , использованием леммы 1.5.11 пп. 2), 4) и того факта, что если секвенция $\vdash \neg \Phi$ доказуема в ИВ, то $\Phi \equiv \mathfrak{F}$.

Теорема 1.5.13. Для любой формулы Φ существует формула Ψ , эквивалентная Φ и находящаяся в совершенной д. н. ф. При этом если секвенция $\vdash \neg \Phi$ не доказуема, то Ψ не содержит логической константы \mathfrak{F} . \square

Упражнения

1. Доказать предложение 1.5.6, теорему 1.5.10 и теорему 1.5.13.
2. Показать, что в теоремах 1.5.9 и 1.5.10 можно потребовать, чтобы Φ и Ψ содержали одни и те же переменные, если Φ содержит переменные.
3. Показать, что секвенция $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$ тогда и только тогда доказуема в ИВ, когда для любого $X \in D(\Phi)$ секвенция $\Gamma, X \vdash \Psi$ доказуема в ИВ.

§ 1.6. Семантика исчисления высказываний

Опр Исчисление называется *непротиворечивым*, если не все выражения этого исчисления доказуемы.

Пусть X — некоторое множество, f_X — некоторое отображение пропозициональных переменных ИВ в множество $P(X)$ всех подмножеств X . Такое f_X назовем *интерпретацией* ИВ в X . Продолжим f_X до отображения формул ИВ в $P(X)$ (обозначим его также через f_X) по индукции:

1. $f_X(\emptyset) = \emptyset$,
2. $f_X(\Phi \wedge \Psi) = f_X(\Phi) \cap f_X(\Psi)$,
3. $f_X(\Phi \vee \Psi) = f_X(\Phi) \cup f_X(\Psi)$,
4. $f_X(\neg\Phi) = X \setminus f_X(\Phi)$,
5. $f_X(\Phi \rightarrow \Psi) = f_X(\neg\Phi) \cup f_X(\Psi)$.

Определим отношение « \rightarrow » на множествах:

$$X_1, \dots, X_n \rightarrow Y \iff \left(\bigcap_{i \leq n} X_i \subseteq Y \right);$$

При этом, если $n = 0$, то $X_1, \dots, X_n \rightarrow Y = \rightarrow Y$ и $\bigcap_{i \leq n} X_i = X$. Таким образом,

$$\rightarrow Y \iff Y = X.$$

Каждой секвенции S ИВ сопоставим утверждение $f_X(S)$ про подмножества X следующим образом:

$$f_X(\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Phi) \iff f_X(\Phi_1), \dots, f_X(\Phi_n) \rightarrow f_X(\Phi).$$

Теорема 1.6.1. Для любой интерпретации f_X ИВ в X и любой доказуемой в ИВ секвенции S утверждение $f_X(S)$ справедливо.

Доказательство. Индукция по числу переходов в доказательстве D секвенции S . Очевидно, что если S — аксиома, то $f_X(S)$ истинно. Поэтому достаточно доказать, что если значения f_X от секвенций над чертой дерева D справедливы, то значение f_X от секвенции под той же чертой также справедливо. Пусть, например,

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi_0 \vdash \Psi; \Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi_1 \vdash \Psi; \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi_0 \vee \Psi_1}{\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi}$$

— переход в дереве D и утверждения $f_X(\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi_0 \vdash \Psi)$, $f_X(\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi_1 \vdash \Psi)$, $f_X(\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi_0 \vee \Psi_1)$ имеют место. Пусть $x \in \bigcap_{i \leq n} f_X(\Phi_i)$. Так как $\bigcap_{i \leq n} f_X(\Phi_i) \subseteq f_X(\Psi_0) \cup f_X(\Psi_1)$, то $x \in f_X(\Psi_j)$ для некоторого $j \leq 1$. Так как $\bigcap_{i \leq n} f_X(\Phi_i) \cap f_X(\Psi_j) \subseteq f_X(\Psi)$, то $x \in f_X(\Psi)$.

Следовательно, $f_X(\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi)$ имеет место. Проверка для других переходов D также проста и предоставляется читателю. \square

Следствие 1.6.2. ИВ непротиворечиво.

Доказательство. Пусть X — непустое множество, f_X — некоторая интерпретация ИВ в X . По определению интерпретации $f_X(Q_0 \wedge \neg Q_0) = f_X(Q_0) \cap (X \setminus f_X(Q_0)) = \emptyset$. Очевидно, что утверждение $f_X(\vdash Q_0 \wedge \neg Q_0)$ ложно. По теореме 1.6.1 секвенция $\vdash Q_0 \wedge \neg Q_0$ не доказуема. Следовательно, ИВ непротиворечиво. \square

Мы рассмотрели интерпретацию ИВ, при которой пропозициональные переменные интерпретировались как подмножества некоторого множества X , а логические связки как операции на этих подмножествах. Это позволило доказать непротиворечивость ИВ. Представляет интерес и сама параллельность теоретико-множественных операций и логических связок¹⁾.

Конечно, понятие интерпретации выходит за рамки самого исчисления. Оно относится к так называемой *семантике исчисления*, в отличие от понятий формулы, правил вывода, доказательства, которые относятся к *синтаксису исчисления*.

Сейчас рассмотрим другую интерпретацию ИВ, которая очень тесно связана с этим исчислением и которую будем называть *главной интерпретацией* ИВ. На множестве $\{0, 1\}$ определим операции $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ при помощи следующей таблицы:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$\neg x$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Эти функции будут значениями логических связок при главной интерпретации. Эта таблица соответствует правилам 1)–4) определения интерпретации $f_{\{\emptyset\}}$, когда $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$. Иногда употребляют вместо символов 0, 1 слова «ложно» и «истинно». Тогда эта таблица укажет

¹⁾ Полезное обобщение этой интерпретации приведено в упражнении 2 к § 2.2.

правила приписывания значений истинности для связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, довольно хорошо согласующиеся с употреблением соответствующих связок в русском языке.

В дальнейшем для формулы Φ запись $\Phi(P_1, \dots, P_k)$ будет обозначать саму эту формулу, а также тот факт, что все ее пропозициональные переменные находятся среди P_1, \dots, P_k . Также для секвенции S запись $S(P_1, \dots, P_k)$ будет обозначать саму эту секвенцию, а также тот факт, что все ее пропозициональные переменные находятся среди P_1, \dots, P_k .

Значением логической константы \mathfrak{F} при главной интерпретации будет 0. Зафиксируем пропозициональные переменные P_1, \dots, P_k . Если задано отображение f множества $\{P_1, \dots, P_k\}$ в $\{0, 1\}$, то по данной выше таблице и значению логической константы функция f однозначно продолжается на множество формул ИВ, пропозициональные переменные которых находятся среди P_1, \dots, P_k . Если при этом $f(\Phi) = 1$ ($f(\Phi) = 0$), то будем говорить, что *на наборе $\langle f(P_1), \dots, f(P_k) \rangle$ значение истинности формулы Φ равно 1 (0)* или просто, что Φ истинна (ложна) на этом наборе.

Таким образом, для любой формулы $\Phi(P_1, \dots, P_k)$ мы имеем k -местную операцию на множестве $\{0, 1\}$, которая заданным значениям истинности $\delta_1, \dots, \delta_k$ переменных P_1, \dots, P_k сопоставляет значение $\delta \in \{0, 1\}$ истинности формулы Φ . Эту функцию будем называть *истинностной функцией формулы Φ* и обозначать через $\Phi[P_1, \dots, P_k]$. При этом мы говорим, что *функция $\Phi[P_1, \dots, P_k]$ на наборе $\langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle$ принимает значение δ* и пишем $\Phi[\delta_1, \dots, \delta_k] = \delta$.

Формулу $\Phi(P_1, \dots, P_k)$ назовем *тождественно истинной (тождественно ложной)*, если функция $\Phi[P_1, \dots, P_k]$ принимает значение истины (ложи) на всех наборах значений переменных P_1, \dots, P_k . Ясно, что это понятие не зависит от выбора переменных P_1, \dots, P_k , а зависит только от самой формулы Φ .

Секвенция $S(P_1, \dots, P_k)$ вида $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ также определяет k -местную операцию $S[P_1, \dots, P_k]$ на множестве $\{0, 1\}$, которая по определению совпадает с операцией $\Phi[P_1, \dots, P_k]$, где

$$\Phi = (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow \Psi) \dots))).$$

Из этого определения видно, что секвенция $\Gamma \vdash \Psi$ истинна на наборе $\langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle$, если на этом наборе либо одна из формул Γ ложна, либо Φ истинна.

Секвенция S называется *тождественно истинной*, если она истинна на любом наборе $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$ значений истинности переменных P_1, \dots, P_k , среди которых содержатся все переменные, входящие в S . Очевидно, что это понятие также не зависит от выбора P_1, \dots, P_k .

Теорема 1.6.3. Если секвенция S ИВ доказуема в ИВ, то S тождественно истинна.

Доказательство индукцией по числу переходов в доказательстве D секвенции S в виде дерева. Если S — аксиома, то утверждение теоремы тривиально. Чтобы завершить доказательство теоремы, нужно проверить, что правила 1–12 сохраняют тождественную истинность секвенций. Пусть, например,

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$$

— применение правила 8. Если на некотором наборе истинности propositionальных переменных все формулы из Γ истинны, то по индукционному предположению Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$ истинны на этом наборе. Тогда по определению операции \rightarrow формула Ψ тоже истинна.

Проверка других правил также проста и предоставляется читателю. \square

Из теоремы 1.6.3 получаем другое доказательство следствия 1.6.2. В самом деле, ясно, что $Q_0 \wedge \neg Q_0$ — тождественно ложная формула. Поэтому в силу теоремы 1.6.3 секвенция $\vdash Q_0 \wedge \neg Q_0$ не доказуема в ИВ.

Следствие 1.6.4. Если $\Phi(P_1, \dots, P_k) \equiv \Psi(P_1, \dots, P_k)$, то функции $\Phi[P_1, \dots, P_k]$ и $\Psi[P_1, \dots, P_k]$ совпадают.

Доказательство. Пусть $\Phi[\delta_1, \dots, \delta_k] = 1$. По условию $\Phi \vdash \Psi$ доказуема. По теореме 1.6.3 секвенция $\Phi \vdash \Psi$ тождественно истинна. По определению истинности секвенции получаем $\Phi[\delta_1, \dots, \delta_k] = 1$. Аналогично из $\Psi[\delta_1, \dots, \delta_k] = 1$ получаем $\Psi[\delta_1, \dots, \delta_k] = 1$. \square

Обозначение. Напомним, что для формулы Φ введены следующие обозначения: $\Phi^1 = \Phi$, $\Phi^0 = \neg \Phi$. Набор нулей и единиц $\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle$ часто будем обозначать через $\bar{\delta}$. Отметим, что при $n = 0$ это будет пустой набор.

Лемма 1.6.5. Элементарная дизъюнкция Φ вида $P_1^{\delta_1} \vee \dots \vee P_n^{\delta_n}$ принимает значение 0 на единственном наборе $\bar{\delta} = \langle (1 - \delta_1), \dots, (1 - \delta_n) \rangle$ значений истинности переменных P_1, \dots, P_n .

Доказательство. Формула Φ построена из формул $P_i^{\delta_i}$ при помощи операции \vee . Из таблицы истинности для дизъюнкции следует, что если бы одна из формул $P_i^{\delta_i}$ приняла значение 1, то Φ также приняла бы значение 1. Следовательно, P_i должна принимать значение $(1 - \delta_i)$. \square

Теорема 1.6.6 (о функциональной полноте ИВ). Пусть f — функция, определенная на наборах $\langle \delta_0, \dots, \delta_n \rangle$ нулей и единиц и принимающая нуль или единицу в качестве значений. Тогда существует такая формула Φ ИВ, переменные которой содержатся среди Q_0, \dots, Q_n и $\Phi[Q_0, \dots, Q_n] = f$.

Доказательство. Если f тождественно равна единице, то в качестве Φ можно взять формулу $Q_0 \vee \neg Q_0$.

Для набора $\bar{\delta} = \langle \delta_0, \dots, \delta_n \rangle$ элементов множества $\{0, 1\}$ через $f(\bar{\delta})$ обозначим значение функции $f(\delta_0, \dots, \delta_n)$. Пусть множество

$$X = \{ \langle (1 - \delta_0), \dots, (1 - \delta_n) \rangle \mid f(\bar{\delta}) = 0 \}$$

не пусто. Возьмем в качестве Φ формулу вида

$$\bigwedge_{\bar{\delta} \in X} (Q_0^{\delta_0} \vee \dots \vee Q_n^{\delta_n}).$$

Докажем, что $\Phi[\delta_0, \dots, \delta_n] = 0$ равносильно $f(\bar{\delta}) = 0$. Пусть $\Phi[\bar{\delta}] = 0$. Так как Φ построена из конъюнктивных членов с помощью операции \wedge , то существует конъюнктивный член Ψ , который ложен на наборе $\bar{\delta}$. Формула Ψ имеет вид $Q_0^{\delta'_0} \vee \dots \vee Q_n^{\delta'_n}$, где $\langle \delta'_0, \dots, \delta'_n \rangle \in X$. В силу предыдущей леммы $\delta_i = (1 - \delta'_i)$, $i \leq n$, следовательно,

$$\langle (1 - \delta_0), \dots, (1 - \delta_n) \rangle = \langle \delta'_0, \dots, \delta'_n \rangle \text{ и } f(\bar{\delta}) = 0.$$

Пусть теперь $f(\bar{\delta}) = 0$. По предыдущей лемме конъюнктивный член Ψ вида $Q_0^{(1-\delta_0)} \vee \dots \vee Q_n^{(1-\delta_n)}$ ложен на наборе $\bar{\delta}$. Используя опять то, что Φ построена из конъюнктивных членов (среди которых находится Ψ) при помощи операции \wedge , заключаем, что $\Phi[\delta_0, \dots, \delta_n] = 0$. \square

Упражнения

- Предположим, что ваши вычислительные возможности состоят только в следующем: если вам дают пару чисел $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$, то вы можете вычислить максимум $\max(\delta_1, \delta_2)$ этих чисел, а когда вам дадут $\delta \in \{0, 1\}$, то вы можете назвать $\tilde{\delta} \in \{0, 1\}$, который не равен δ . Показать, что вы тогда способны вычислить любую функцию f , сопоставляющую наборам $\langle \delta_0, \dots, \delta_n \rangle$ нулей и единиц нуль или единицу. А именно, для любой такой функции f существует такая последовательность s_0, \dots, s_k , что для любого $i \leq k$ элемент s_i является либо парой $\langle j, m \rangle$ чисел, меньших i , либо одним числом, меньшим i . При этом, если вы по заданному набору $\langle \delta_0, \dots, \delta_n \rangle$ нулей и единиц напишете последовательность q_0, \dots, q_k нулей и единиц по следующему правилу:

- если $i \leq n$, то $q_i = \delta_i$;

- б) если $n < i \leq k$ и $s_i = \langle j, m \rangle$, то $q_i = \max(q_j, q_m)$;
 в) если $n < i \leq k$ и $s_i < i$, то $q_i = \widetilde{q_{s_i}}$,

то тогда q_k будет значением f на наборе $\langle \delta_0, \dots, \delta_n \rangle$. (Указание. Воспользоваться теоремой 1.6.6, следствием 1.6.4 и эквивалентностью $\Phi \wedge \Psi \equiv \neg(\neg\Phi \vee \neg\Psi)$.)

2. Показать, что если формулы $\Phi \equiv \Psi$ находятся в совершенной к. н. ф. (совершенной д. н. ф.) и содержат одни и те же переменные, то $\{D(X) \mid X \in K(\Phi)\} = \{D(X) \mid X \in K(\Psi)\}$ ($\{K(X) \mid X \in D(\Phi)\} = \{K(X) \mid X \in D(\Psi)\}$).

§ 1.7. Характеризация доказуемых формул

Теорема 1.7.1. Пусть Φ — формула ИВ. Следующие три условия эквивалентны:

1). Φ доказуема в ИВ.

2). Для всякой $\Phi' \equiv \Phi$, находящейся в к. н. ф., и любого ее конъюнктивного члена Ψ существует такая атомарная формула P , что $P, \neg P \in D(\Psi)$.

3). Существует $\Phi' \equiv \Phi$, находящаяся в к. н. ф. и такая, что для любого ее конъюнктивного члена Ψ существует такая атомарная формула P , что $P, \neg P \in D(\Psi)$.

Доказательство. 2) \Rightarrow 3) тривиально. 3) \Rightarrow 1) следует из лемм 1.5.8, 1.5.11 и 1.4.3 а).

Докажем 1) \Rightarrow 2). Пусть формула Φ доказуема. Тогда доказуема формула Φ' и по лемме 1.5.8 доказуем любой конъюнктивный член Ψ формулы Φ' . Предположим, что $D(\Psi)$ не содержит никакой атомарной формулы P вместе с ее отрицанием $\neg P$. Рассмотрим два множества атомарных формул $X = \{P \mid P \in D(\Psi)\}$ и $Y = \{P \mid \neg P \in D(\Psi)\}$. По предположению, $X \cap Y = \emptyset$. Пусть Ψ_1 получается из Ψ заменой всех подформул $P \in X$ на Q_0 и всех $P \in Y$ на $\neg Q_0$. По теореме о подстановке Ψ_1 доказуема. Пусть Ψ_2 получается из Ψ_1 заменой $\neg\neg Q_0$ на Q_0 . В силу леммы 1.4.5 б) и теоремы о замене имеем $\Psi_2 \equiv \Psi_1$. Следовательно, Ψ_2 доказуема. Очевидно, что $D(\Psi_2) = \{Q_0\}$. По следствию 1.5.5 выполняется $Q_0 \equiv \Psi_2$. Значит, формула Q_0 доказуема. По теореме о подстановке получаем, что любая формула X доказуема. Это невозможно в силу непротиворечивости ИВ. \square

Теорема 1.7.1 дает характеристизацию доказуемых в ИВ формул, основанную на строении эквивалентных им формул, находящихся в к. н. ф. Такую характеристизацию назовем *дедуктивной*. Сейчас мы получим *семантическую* характеристизацию доказуемых в ИВ формул, основанную на понятии истинности.

Лемма 1.7.2. Секвенция $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi$.

Доказательство непосредственно по правилам 7 и 8. \square

Теорема 1.7.3 (о полноте ИВ). а). Для того чтобы формула Φ ИВ была доказуема в ИВ, необходимо и достаточно, чтобы Φ была тождественно истинной.

б). Для того чтобы секвенция S ИВ была доказуема в ИВ, необходимо и достаточно, чтобы S была тождественно истинной.

Доказательство. Необходимость утверждает теорема 1.6.3. Утверждение б) следует из а), так как в силу леммы 1.7.2 и определения тождественной истинности секвенций и формул доказуемость и тождественная истинность секвенции $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ равносильны доказуемости и тождественной истинности формулы $\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow \Psi) \dots)$.

Пусть Φ — тождественно истинная формула и $\Phi' \equiv \Phi$ находится в к.н.ф. Предположим, что Φ не доказуема. Тогда Φ' тоже не доказуема. В силу лемм 1.5.8 и 1.5.11 существует конъюнктивный член Ψ формулы Φ' , для которого $D(\Psi)$ не содержит атомарной формулы P вместе с ее отрицанием $\neg P$. Пусть $X = \{P \mid P \in D(\Psi)\}$ и $Y = \{P \mid \neg P \in D(\Psi)\}$. Тогда $X \cap Y = \emptyset$. Если переменные из X принимают значение 0, а переменные из Y — значение 1, то по лемме 1.6.5 формула Ψ принимает значение 0. Так как Φ' построена из конъюнктивных членов (среди которых есть Ψ) с помощью одной связки \wedge , то Φ' принимает значение 0, когда переменные из X принимают значение 0, а из Y — значение 1. Следовательно, Φ' — не тождественно истинная формула. В силу следствия 1.6.4 формула Φ тоже не тождественно истинная. Получили противоречие. \square

Если задано исчисление и определено понятие истинности (семантика) формул этого исчисления, то говорят, что исчисление *непротиворечиво по отношению к этой семантике*, если в исчислении доказуемы только истинные формулы. Если доказуемы все истинные формулы, то говорят, что исчисление *полно по отношению к этой семантике*.

Кроме проблемы непротиворечивости и полноты важное значение имеет *проблема разрешимости* исчисления. Говорят, что исчисление *разрешимо*, если существует эффективная процедура (алгоритм), позволяющая для любой формулы Φ через конечное число шагов определить, доказуема Φ или нет. Если такой процедуры не существует, то говорят, что исчисление *неразрешимо*.

Если истинность формул ИВ определить как тождественную истинность, то предыдущая теорема показывает, что ИВ полно и непроти-

воречиво по отношению к этой семантике. Очевидно, что за конечное число шагов можно узнать, является ли данная формула Φ ИВ тождественно истинной или нет. Так как тождественная истинность и доказуемость Φ эквивалентны, то ИВ разрешимо.

При задании исчисления с помощью схем аксиом и правил вывода естественно возникает вопрос о независимости этих схем аксиом и правил вывода. *Схема аксиом называется независимой* в исчислении, если хотя бы один ее частный случай не доказуем в исчислении без этой схемы. *Правило вывода называют независимым* в исчислении, если оно не является допустимым в исчислении без этого правила. *Исчисление называется независимым*, если все его схемы аксиом и правила вывода независимы.

При построении исчисления часто стремятся получить его независимым. (Немаловажную роль здесь играют эстетические соображения.) В оставшейся части параграфа на примере ИВ будет изложен важный метод доказательства независимости исчислений¹⁾.

Предложение 1.7.4. ИВ независимо.

Доказательство. Так как в ИВ только одна схема аксиом, то она независима. Для доказательства независимости правил вывода достаточно для каждого правила α найти характеристическое свойство δ , которым обладают все секвенции, доказуемые при помощи правил, отличных от α , и которым некоторые доказуемые в ИВ секвенции не обладают. Мы ограничимся только формулировками характеристических свойств для правил 1–12, оставляя необходимую проверку читателю.

Характеристическим свойством для правил 1–10 будет тождественная истинность (§ 1.6) секвенций при новом определении для каждого правила одной из логических операций \wedge , \vee , \rightarrow , \neg на множестве $\{0, 1\}$. Остальные операции при этом определяются по таблице § 1.6, а логическая константа принимает значение 0. Приведем **новые определения логических операций, соответствующих правилам 1–10**.

- Правило 1. Конъюнкция определяется как тождественно ложная функция.
- Правило 2. Значение конъюнкции $x \wedge y$ равно значению второго члена y .
- Правило 3. Значение конъюнкции $x \wedge y$ равно значению первого члена x .
- Правило 4. Значение дизъюнкции $x \vee y$ равно значению второго члена y .

¹⁾ См. также упражнение 1 к § 1.8.

- Правило 5. Значение дизъюнкции $x \vee y$ равно значению первого члена x .
- Правило 6. Дизъюнкция определяется как тождественно истинная функция.
- Правило 7. Импликация определяется как тождественно ложная функция.
- Правило 8. Импликация определяется как тождественно истинная функция.
- Правило 9. Отрицание определяется как тождественно ложная функция.
- Правило 10. Отрицание определяется как тождественно истинная функция.
- Правило 11. Характеристическое свойство секвенции $\Gamma \vdash \Phi$ состоит в следующем: если $\Gamma = \Phi_1, \dots, \Phi_n$, $n \geq 1$, то секвенция $\Phi_1 \vdash \Phi$ доказуема в ИВ.
- Правило 12. Характеристическое свойство секвенции $\Gamma \vdash \Phi$ состоит в том, что Γ одноэлементно или пусто. \square

Упражнения

- Пусть формула Φ ИВ находится в д.н.ф. и X — множество ее пропозициональных переменных. Для того чтобы Φ была доказуемой в ИВ, необходимо и достаточно, чтобы для любого разбиения множества X на два множества: X_1, X_2 , существовала бы формула $\Psi \in D(\Phi)$, что выполнялось бы включение $K(\Psi) \subseteq \{P \mid P \in X_1\} \cup \{\neg P \mid P \in X_2\}$. (Указание. Применить теорему о полноте ИВ.)
- Провести необходимую проверку характеристических свойств в доказательстве предложения 1.7.4.

§ 1.8. Исчисление высказываний гильбертовского типа

В этом параграфе мы рассмотрим другую, так называемую гильбертовскую, аксиоматизацию исчисления высказываний — ИВ₁.

Определение. Понятие формулы в ИВ₁ то же, что и в ИВ, за исключением того, что в алфавите ИВ₁ нет символа логической константы; секвенций в ИВ₁ также нет. **Аксиомы ИВ₁** получаются из следующих 10 схем подстановкой конкретных формул ИВ₁ вместо переменных Φ, Ψ, X :

- $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$,
- $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow X)) \rightarrow (\Phi \rightarrow X))$,

3. $(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Phi$,
4. $(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Psi$,
5. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow (\Phi \wedge \Psi))$,
6. $\Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$,
7. $\Phi \rightarrow (\Psi \vee \Phi)$,
8. $(\Phi \rightarrow X) \rightarrow ((\Psi \rightarrow X) \rightarrow ((\Phi \vee \Psi) \rightarrow X))$,
9. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg \Psi) \rightarrow \neg \Phi)$,
10. $\neg \neg \Phi \rightarrow \Phi$.

Правило вывода в ИВ₁ одно:

$$\frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}.$$

Определение. Доказательством в ИВ₁ формулы Φ_n называется такая последовательность Φ_0, \dots, Φ_n формул ИВ₁, что каждая Φ_i , $i \leq n$, либо является аксиомой, либо получена из некоторых Φ_j , Φ_k , $j, k < i$, по правилу вывода. Если существует доказательство в ИВ₁ формулы Φ , то Φ называется *доказуемой* в ИВ₁ и обозначается это так: $H \triangleright \Phi$. Выводом в ИВ₁ формулы Φ_n из множества H формул ИВ₁ называется такая последовательность Φ_0, \dots, Φ_n формул ИВ₁, что каждая Φ_i , $i \leq n$, либо является аксиомой, либо принадлежит H , либо получается из некоторых Φ_j , Φ_k , $j, k < i$, по правилу вывода. Если существует вывод формулы Φ из H , то Φ называем *выводимой* в ИВ₁ из H и пишем $H \triangleright \Phi$, при этом H называется *множеством гипотез*.

Очевидно, что доказуемость Φ в ИВ₁ равносильна выводимости Φ в ИВ₁ из пустого множества гипотез. Отметим, что множество гипотез H не обязано быть конечным, но если $H \triangleright \Phi$, то в силу конечности вывода Φ из H существует конечное множество $H_1 \subseteq H$, для которого $H_1 \triangleright \Phi$. Очевидно также, что если $H \subseteq H'$ и $H \triangleright \Phi$, то $H' \triangleright \Phi$.

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы, которая показывает в определенном смысле равносильность ИВ и ИВ₁.

Теорема 1.8.1. Для формул $\Psi_1, \dots, \Psi_n, \Phi$ ИВ₁ выводимость $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} \triangleright \Phi$ имеет место тогда и только тогда, когда секвенция $\Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi$ доказуема в ИВ.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1.8.1, мы разовьем некоторую теорию выводимости в ИВ₁.

Пример 1.8.2. Пусть Φ — формула ИВ₁. Последовательность из следующих 5 формул будет доказательством формулы $\Phi \rightarrow \Phi$ в ИВ₁:

- 1) $\Phi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi)$ — аксиома,
- 2) $\Phi \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi)$ — аксиома,

- 3) $(\Phi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi)) \rightarrow ((\Phi \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi))$ — аксиома,
 4) $(\Phi \rightarrow ((\Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Phi)$ — правило вывода к 1) и 3)
 5) $\Phi \rightarrow \Phi$ — правило вывода к 2) и 4).

Правило вывода

$$\frac{\Phi_0, \dots, \Phi_k}{\Psi}$$

называется *допустимым* в ИВ₁, если его добавление к исчислению ИВ₁ не увеличивает семейство выводимых из H формул для любого множества гипотез H .

Квазивыводом в ИВ₁ формулы Φ_n из множества гипотез H называется такая последовательность формул Φ_0, \dots, Φ_n , что каждая Φ_i , $i \leq n$, либо выводима в ИВ₁ из H , либо получается из некоторых предыдущих по допустимому в ИВ₁ правилу вывода. Очевидно, что если имеется квазивывод в ИВ₁ формулы Φ из множества H , то Φ выводима в ИВ₁ из H .

Теорема 1.8.3 (о дедукции в ИВ₁). *Если $H \cup \{\Phi\} \triangleright \Psi$, то $H \triangleright \Phi \rightarrow \Psi$.*

Доказательство проведем индукцией по минимальному n , для которого существует вывод Ψ_0, \dots, Ψ_n формулы Ψ из $H \cup \{\Phi\}$. Если $n = 0$, то либо 1) $\Psi = \Phi$, либо 2) Ψ — аксиома или входит в H . В первом случае, в силу примера 1.8.2, формула $\Phi \rightarrow \Psi$ выводима из H . Во втором случае последовательность

$$\Psi, \Psi \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi), \Phi \rightarrow \Psi$$

будет выводом в ИВ₁ из H . Пусть $n > 0$. Из минимальности n имеем, что Ψ получается из Ψ_i и $\Psi_j = (\Psi_i \rightarrow \Psi)$ для $i, j < n$ по правилу вывода. Тогда в силу индукционного предложения последовательность

$$\Phi \rightarrow \Psi_i, \Phi \rightarrow (\Psi_i \rightarrow \Psi),$$

$$(\Phi \rightarrow \Psi_i) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi_i \rightarrow \Psi)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)),$$

$$(\Phi \rightarrow (\Psi_i \rightarrow \Psi)) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi), \Phi \rightarrow \Psi$$

будет квазивыводом $\Phi \rightarrow \Psi$ из H . □

Теорема о дедукции существенно облегчает для многих формул ИВ₁ установление их доказуемости в ИВ₁.

Следствие 1.8.4. $\{\Phi_0, \dots, \Phi_n\} \triangleright \Phi$ равносильно $\triangleright \Phi_0 \rightarrow (\Phi_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow \Phi) \dots)$.

Доказательство. В одну сторону $n + 1$ раз применяем теорему о дедукции. В другую $n + 1$ раз применяем правило вывода. □

Доказательство теоремы 1.8.1. В силу правил 7 и 8 ИВ секвенция $\Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi$ доказуема в ИВ тогда и только тогда, когда доказуема $\vdash \Psi_1 \rightarrow (\Psi_2 \rightarrow \dots (\Psi_n \rightarrow \Phi) \dots)$. Тогда из следствия 1.8.4 получаем, что для доказательства необходимости можно ограничиться случаем $\Gamma = \emptyset$. Легко проверить, что аксиомы ИВ₁ тождественно истинны, а правила вывода ИВ₁ сохраняют тождественную истинность. Поэтому **необходимость** следует из теоремы о полноте ИВ.

Достаточность. Пусть дерево D — доказательство в ИВ секвенции $\Gamma \vdash \Phi$. Если $\Gamma \vdash \Phi$ — аксиома ИВ, то $\Gamma = \Phi$ и утверждение $\{\Phi\} \triangleright \Phi$ очевидно. Пусть D_1 получается из D заменой логической константы \exists на формулу $Q_0 \wedge \neg Q_0$. Ясно, что начальные секвенции в D_1 останутся аксиомами, а переходы по правилам, отличным от 9 и 10, останутся переходами по тем же правилам. Переходы по правилам 9 и 10 станут переходами по правилам

$$9'. \frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash Q_0 \wedge \neg Q_0}{\Gamma \vdash \Phi}, \quad 10'. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash Q_0 \wedge \neg Q_0}.$$

Поэтому осталось показать, что если в правилах вывода 1–8 и 11, 12 исчисления ИВ и правилах 9' и 10' заменить выражения $\Theta \vdash \Psi$ на $\{\Theta\} \triangleright \Psi$, то из истинности утверждений над чертой будет следовать истинность утверждения под чертой. Что касается применений правил 1–5, то сохранение истинности соответствующих утверждений легко получить, используя аксиомы 3–7 исчисления ИВ₁. Пусть $\{\Gamma, \Phi_1\} \triangleright \Psi; \{\Gamma, \Phi_2\} \triangleright \Psi; \{\Gamma\} \triangleright \Phi_1 \vee \Phi_2$. По теореме о дедукции $\{\Gamma\} \triangleright \Phi_1 \rightarrow \Psi$ и $\{\Gamma\} \triangleright \Phi_2 \rightarrow \Psi$. Применяя три раза правило вывода ИВ₁ к аксиоме 8, получаем $\{\Gamma\} \triangleright \Psi$. Следовательно, переход, полученный из применения правила 6, сохраняет выводимость. Правило 7 соответствует теореме о дедукции, правило 8 — правилу вывода ИВ₁.

Докажем сохранение выводимости переходом, полученным из применения правила 9'. Пусть $\{\Gamma, \neg\Phi\} \triangleright Q_0 \wedge \neg Q_0$. Из аксиом 3 и 4 получаем $\{\Gamma, \neg\Phi\} \triangleright Q_0$ и $\{\Gamma, \neg\Phi\} \triangleright \neg Q_0$. По теореме о дедукции получаем $\{\Gamma\} \triangleright \neg\Phi \rightarrow Q_0$ и $\{\Gamma\} \triangleright \neg\Phi \rightarrow \neg Q_0$. Тогда из аксиомы 9 получаем $\{\Gamma\} \triangleright \neg\neg\Phi$ и по аксиоме 10 и правилу вывода получаем $\{\Gamma\} \triangleright \Phi$.

Рассмотрим правило 10'. Пусть $\{\Gamma\} \triangleright \Phi$ и $\{\Gamma\} \triangleright \neg\Phi$. Из аксиомы 1 получаем

$$\{\Gamma\} \triangleright \Phi \rightarrow (\neg(Q_0 \wedge \neg Q_0) \rightarrow \Phi)$$

и

$$\{\Gamma\} \triangleright \neg\Phi \rightarrow (\neg(Q_0 \wedge \neg Q_0) \rightarrow \neg\Phi).$$

По правилу вывода получаем

$$\{\Gamma\} \triangleright \neg(Q_0 \wedge \neg Q_0) \rightarrow \Phi$$

и

$$\{\Gamma\} \triangleright \neg(Q_0 \wedge \neg Q_0) \rightarrow \neg\Phi.$$

Из аксиом 9 и 10 тогда получаем выводимость $\{\Gamma\} \triangleright Q_0 \wedge \neg Q_0$. Сохранение выводимости правилами 11 и 12 следует непосредственно из определения вывода в ИВ₁. \square

Упражнения

- Доказать независимость ИВ₁. (указание. Использовать тот же метод, что и для ИВ. Для доказательства независимости схем 1 и 2 логические связки определяются на множестве {0, 1, 2}, а схем 3–10 — на множестве {0, 1}. Для схемы 1 связки определяются так: $n \wedge m = \min\{n, m\}$, $n \vee m = \max\{n, m\}$, $\neg 0 = \neg 1 = 2$, $\neg 2 = 0$, $(n \rightarrow m) = 2$, если $n \leq m$, и $(n \rightarrow m) = 0$, если $n > m$. Для схемы 2 имеем $(0 \wedge m) = (m \wedge 0) = 1$, $(0 \vee 0) = 1$, $\neg 2 = 1$, $(0 \rightarrow 0) = (2 \rightarrow 0) = (2 \rightarrow 1) = 1$, $(1 \rightarrow 0) = 2$, а остальные значения связок — как для схемы 1. Характеристическое свойство формул при доказательстве независимости схем 1 и 2 — тождественное равенство 2.)
- Рассмотрим исчисление ИВ₂, отличающееся от ИВ₁ тем, что в его формулы может входить логическая константа \mathfrak{F} , а аксиомы 9 и 10 заменены на следующие:

$$9'. (\neg\Phi \rightarrow \mathfrak{F}) \rightarrow \Phi,$$

$$10'. \Phi \rightarrow (\neg\Phi \rightarrow \mathfrak{F}).$$

Показать, что имеет место равносильность исчислений ИВ₂ и ИВ, а именно, справедлива теорема, получающаяся из теоремы 1.8.1 заменой ИВ₁ на ИВ₂. Следует отметить, что аксиомы 9' и 10' более тесно связаны с правилами 9 и 10 ИВ, чем аксиомы 9 и 10 исчисления ИВ₁.

§ 1.9. Консервативные расширения исчислений

Пусть даны два языка: $L_0 \subseteq L_1$, и два исчисления: I_0 языка L_0 и I_1 языка L_1 . Исчисление I_1 назовем *консервативным расширением* I_0 (обозначаем $I_0 < I_1$), если выражение Φ языка L_0 доказуемо в I_0 тогда и только тогда, когда Φ доказуемо в I_1 . Очевидно, что отношение $<$ рефлексивно, транзитивно и имеет место

Предложение 1.9.1. *Если $I_0 < I_1$ и I_0 непротиворечиво, то I_1 непротиворечиво.* \square

Пусть ИВ^(→) — исчисление, полученное из ИВ удалением из алфавита символа \rightarrow и удалением правил 7 и 8.

Предложение 1.9.2. ИВ^(→) < ИВ.

Доказательство. Пусть $\alpha : F \rightarrow F$ отображение, определенное следующим образом:

- если Φ не содержит символа \rightarrow , то $\alpha(\Phi) = \Phi$;
- если $\Phi = (\Psi \rightarrow X)$, то $\alpha(\Phi) = (\neg\alpha(\Psi) \vee \alpha(X))$;
- если $\Phi = \neg\Psi$, то $\alpha(\Phi) = \neg\alpha(\Psi)$;
- если $\Phi = (\Psi \tau X)$, где $\tau \in \{\wedge, \vee\}$, то $\alpha(\Phi) = (\alpha(\Psi) \tau \alpha(X))$.

Продолжим α на последовательности формул и секвенции:

$$\alpha(\langle \Phi_1, \dots, \Phi_n \rangle) = \langle \alpha\Phi_1, \dots, \alpha\Phi_n \rangle,$$

$$\alpha(\Gamma \vdash \Phi) = \alpha(\Gamma) \vdash \alpha(\Phi).$$

Так как $\alpha(\Phi) = \Phi$ для формулы Φ , не содержащей импликации, то достаточно показать, что если секвенция S доказуема в ИВ, то секвенция $\alpha(S)$ доказуема в $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$. Если D — доказательство секвенции S в ИВ в виде дерева, то индукцией по высоте D будем строить квазивывод D^* секвенции $\alpha(S)$ в $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$. Если D — аксиома ИВ, то очевидно, что $D^* = \alpha(D)$ — аксиома $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$. Пусть

$$D = \frac{D_1; \dots; D_n}{S}.$$

Если последний переход в D осуществляется по правилам, отличным от правил 7 и 8, то очевидно, что

$$D^* = \frac{D_1^*; \dots; D_n^*}{\alpha(S)}$$

будет квазивыводом в $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$, у которого последний переход осуществляется по тому же правилу, что и у D . Если

$$D = \frac{D_1; D_2}{\Gamma \vdash \Phi},$$

где D_1, D_2 — доказательства в ИВ секвенций $\Gamma \vdash \Psi$, $\Gamma \vdash \Psi \rightarrow \Phi$ соответственно, то в качестве D^* берем следующее дерево:

$$D_1^*; \frac{\frac{\neg\alpha(\Psi) \vdash \neg\alpha(\Psi)}{\alpha(\Gamma), \neg\alpha(\Phi) \vdash \neg\alpha(\Psi)}}{\frac{\neg\alpha(\Phi), \alpha(\Phi), \neg\neg\alpha(\Psi) \vdash \mathfrak{F}}{\frac{\neg\alpha(\Phi), \alpha(\Phi) \vdash \neg\alpha(\Psi)}{D_2^*}}} \frac{\neg\alpha(\Phi), \alpha(\Phi), \neg\neg\alpha(\Psi) \vdash \mathfrak{F}}{\alpha(\Gamma), \neg\alpha(\Phi) \vdash \neg\alpha(\Psi)} \frac{\alpha(\Gamma), \neg\alpha(\Phi) \vdash \mathfrak{F}}{\alpha(\Gamma) \vdash \alpha(\Phi)}.$$

Если

$$D = \frac{D_1}{\Gamma \vdash \Psi \rightarrow \Phi},$$

где D_1 — доказательство в ИВ секвенции $\Gamma, \Psi \vdash \Phi$, то в качестве D^* берем следующее дерево:

$$\frac{D_1^*}{\alpha(\Gamma), \alpha(\Psi) \vdash \neg\alpha(\Psi) \vee \alpha(\Phi)} \quad \neg\alpha(\Psi) \vdash \neg\alpha(\Psi) \vee \alpha(\Phi) \vdash \alpha(\Psi) \vee \neg\alpha(\Psi) \\ \alpha(\Gamma) \vdash \neg\alpha(\Psi) \vee \alpha(\Phi).$$

□

Пусть $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee)}$ — исчисление, полученное из ИВ удалением из алфавита символов \rightarrow, \vee и удалением правил 4–8.

Предложение 1.9.3. $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee)} < \text{ИВ}$.

Доказательство. Обозначим через $F^{(\rightarrow)}$ множество формул ИВ, не содержащих символа \rightarrow . Определим отображение $\beta : F^{(\rightarrow)} \rightarrow \rightarrow F^{(\rightarrow)}$ следующим образом:

- а) если Φ не содержит символа \vee , то $\beta(\Phi) = \Phi$;
- б) если $\Phi = (\Psi \vee X)$, то $\beta(\Phi) = \neg(\neg\beta(\Psi) \wedge \neg\beta(X))$;
- в) если $\Phi = \neg\Phi$, то $\beta(\Phi) = \neg\beta(\Psi)$;
- г) если $\Phi = (\Psi \wedge X)$, то $\beta(\Phi) = (\beta(\Psi) \wedge \beta(X))$.

Продолжим β на последовательности формул и секвенции:

$$\beta(\langle \Phi_1, \dots, \Phi_n \rangle) = \langle \beta\Phi_1, \dots, \beta\Phi_n \rangle,$$

$$\beta(\Gamma \vdash \Phi) = \beta(\Gamma) \vdash \beta(\Phi).$$

В силу а) определения β и предыдущего предложения достаточно показать, что если секвенция S доказуема в исчислении $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$, то $\beta(S)$ доказуема в $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee)}$.

Индукцией по высоте для любого доказательства D секвенции S в $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$ в виде дерева будем строить квазивывод D^* секвенции $\beta(S)$ в $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee)}$. Если D — аксиома ИВ $^{(\rightarrow)}$, то очевидно, что $D^* = \beta(D)$ — аксиома ИВ $^{(\rightarrow, \vee)}$. Пусть

$$D = \frac{D_0; \dots; D_n}{S}.$$

Если последний переход в D осуществляется по правилам, отличным от правил 4–6 ИВ, то очевидно, что

$$D^* = \frac{D_0^*; \dots; D_n^*}{\beta(S)}$$

будет квазивыводом в ИВ $^{(\rightarrow, \vee)}$.

Прежде чем рассмотреть случаи применения правил 4–6, докажем допустимость в ИВ^(→, ∨) следующих правил:

$$a) \frac{\Gamma, \Phi, \Gamma_1 \vdash \Psi}{\Gamma, \neg\neg\Phi, \Gamma_1 \vdash \Psi}; \quad b) \frac{\Gamma, \Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \neg\Phi}; \quad c) \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \neg\Psi \vdash \neg\Phi}.$$

Допустимость в ИВ^(→, ∨) правила а) будем показывать индукцией по высоте доказательства D в ИВ^(→, ∨) секвенций $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$. Если D — аксиома $X \vdash X$, то квазивыводом в ИВ^(→, ∨) секвенции $\neg\neg X \vdash X$ будет следующее дерево:

$$\frac{\neg X \vdash \neg X; \quad \neg\neg X \vdash \neg\neg X}{\frac{\neg\neg X, \neg X \vdash \mathfrak{F}}{\neg\neg X \vdash X}}.$$

Если последний переход в дереве D является применением правил 1–3 или 10, то доказуемость секвенции $\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \Psi$ сразу следует из индукционного предположения. Если последний переход в дереве D является применением правил 9, 11 или 12, то доказуемость секвенции $\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \Psi$ следует из индукционного предположения и применений правил 11 и 12.

Пусть секвенция $\Gamma, \Phi \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИВ^(→, ∨). Тогда по правилу а) получаем доказуемость $\Gamma, \neg\neg\Phi \vdash \mathfrak{F}$ и по правилу 9 получаем доказуемость в ИВ^(→, ∨) секвенции $\Gamma \vdash \neg\Phi$. Покажем теперь допустимость в ИВ^(→, ∨) правила в). Из доказуемой в ИВ^(→, ∨) секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$ и аксиомы $\neg\Psi \vdash \neg\Psi$ с помощью правил 10–12 получаем секвенцию $\Gamma, \neg\Psi, \Phi \vdash \mathfrak{F}$. Из допустимости в ИВ^(→, ∨) правила б) получаем доказуемость в ИВ^(→, ∨) секвенции $\Gamma, \neg\Psi \vdash \neg\Phi$.

Пусть

$$D = \frac{D_1}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$$

и последний переход в D осуществляется по правилу 4 исчисления ИВ. Тогда D_1^* будет квазивыводом секвенции $\beta(\Gamma) \vdash \beta(\Phi)$ и в силу допустимости правила б) в качестве D^* можно взять следующее дерево:

$$\frac{D_1^*; \neg\beta(\Phi) \wedge \neg\beta(\Psi) \vdash \neg\beta(\Phi)}{\frac{\beta(\Gamma), \neg\beta(\Phi) \wedge \neg\beta(\Psi) \vdash \mathfrak{F}}{\beta(\Gamma) \vdash \neg(\neg\beta(\Phi) \wedge \neg\beta(\Psi))}}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда последний переход в D осуществляется по правилу 5.

Пусть теперь

$$D = \frac{D_1; D_2; D_3}{\Gamma \vdash \Psi}$$

— доказательство в ИВ^(→, ∨), последний переход в котором осуществляется по правилу 6. По индукционному предположению существует

ют квазивыводы D_1^* , D_2^* и D_3^* в исчислении ИВ (\rightarrow, \vee) секвенций $\beta(\Gamma), \beta(\Phi) \vdash \beta(\Psi)$; $\beta(\Gamma), \beta(X) \vdash \beta(\Psi)$ и $\beta(\Gamma) \vdash \neg(\neg\beta(\Phi) \wedge \neg\beta(X))$ соответственно. В силу допустимости в ИВ (\rightarrow, \vee) правила в) следующее дерево будет квазивыводом в ИВ (\rightarrow, \vee) секвенции $\beta(\Gamma) \vdash \beta(\Psi)$:

$$\frac{\frac{D_1^*}{\beta(\Gamma), \neg\beta(\Psi) \vdash \neg\beta(\Phi)} \quad \frac{D_2^*}{\beta(\Gamma), \neg\beta(\Psi) \vdash \neg\beta(X)}}{\beta(\Gamma), \neg\beta(\Psi) \vdash \neg\beta(\Phi) \wedge \neg\beta(X)} \quad D_3^*$$

$$\frac{\beta(\Gamma), \neg\beta(\Psi) \vdash \mathfrak{F}}{\beta(\Gamma) \vdash \beta(\Psi)}.$$

□

До этого мы рассматривали расширения языков исчислений лишь путем расширения алфавитов. Рассмотрим теперь расширение LG языка исчисления ИВ (\rightarrow, \vee) , у которого алфавит и формулы те же самые, что у ИВ (\rightarrow, \vee) , а секвенции определяются так: если Γ и Θ — конечные последовательности формул исчисления ИВ (\rightarrow, \vee) , то $\Gamma \vdash \Theta$ является секвенцией языка LG .

Определим теперь *исчисление* G_0 языка LG . Аксиомами G_0 будут секвенции вида $P, \Gamma \vdash \Theta, P$, где P — атомарная формула, а Γ, Θ — последовательности атомарных формул. Правилами вывода исчисления G_0 будут следующие:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi; \Gamma \vdash \Theta, \Psi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi},$ | 5) $\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Phi, \Psi, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, \Psi, \Phi, \Theta},$ |
| 2) $\frac{\Phi, \Psi, \Gamma \vdash \Theta}{\Phi \wedge \Psi, \Gamma \vdash \Theta},$ | 6) $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Delta \vdash \Theta},$ |
| 3) $\frac{\Phi, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg\Phi},$ | 7) $\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Phi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi},$ |
| 4) $\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi}{\neg\Phi, \Gamma \vdash \Theta},$ | 8) $\frac{\Phi, \Phi, \Gamma \vdash \Theta}{\Phi, \Gamma \vdash \Theta},$ |

где Φ, Ψ — переменные для формул G_0 , а Γ, Θ, Δ — переменные для последовательностей формул G_0 .

В оставшейся части параграфа формулами и секвенциями, если не оговорено противное, мы называем формулы и секвенции исчисления G_0 .

Лемма 1.9.4. *Пусть секвенция $\Gamma \vdash \Theta$ доказуема в G_0 , а последовательности Γ_1 и Θ_1 содержат среди своих членов все члены последовательностей Γ и Θ соответственно. Тогда секвенция $\Gamma_1 \vdash \Theta_1$ доказуема в G_0 .*

Доказательство. Индукцией по длине Φ покажем, что для любых последовательностей формул Γ, Θ из доказуемости в G_0 секвенции

$\Gamma \vdash \Theta$ следует доказуемость в G_0 секвенций $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$. Утверждение леммы отсюда получим, используя правила 5)–8).

Если Φ — атомарная формула, а D — доказательство в G_0 секвенции $\Gamma \vdash \Theta$, то очевидно, что, заменив в D каждую секвенцию $\Gamma' \vdash \Theta'$ на $\Gamma', \Phi \vdash \Theta'$ (на $\Gamma' \vdash \Phi, \Theta'$), получим доказательство в G_0 секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Theta$ (секвенции $\Gamma \vdash \Phi, \Theta$). Применяя правила 5), 6), получим доказуемость секвенций $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$.

Пусть $\Phi = \Psi \wedge X$ и секвенции $X, \Gamma \vdash \Theta; \Gamma \vdash \Theta, \Psi; \Gamma \vdash \Theta, X$ доказуемы в G_0 . Из индукционного предположения получаем доказуемость $\Psi, X, \Gamma \vdash \Theta$, а с помощью правила 1) получаем доказуемость $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$. С помощью правила 2) получаем также $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$.

Если $\Phi = \neg \Psi$ и секвенции $\Psi, \Gamma \vdash \Theta; \Gamma \vdash \Theta, \Psi$ доказуемы в G_0 , то доказуемость в G_0 секвенций $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ получаем с помощью правил 3) и 4). \square

Лемма 1.9.5. а). *Если в G_0 доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi$, то доказуемы также секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Psi$.*

б). *Если в G_0 доказуема секвенция $\Phi \wedge \Psi, \Gamma \vdash \Theta$, то доказуема также секвенция $\Phi, \Psi, \Gamma \vdash \Theta$.*

в). *Если в G_0 доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \neg \Phi$, то доказуема также секвенция $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$.*

г). *Если в G_0 доказуема секвенция $\neg \Phi, \Gamma \vdash \Theta$, то доказуема также секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$.*

Доказательство. Докажем утверждение б). Доказательства остальных утверждений проводятся аналогично, и мы их оставляем читателю в качестве упражнения.

Переход в доказательстве D будем называть *существенным*, если он осуществляется по правилам, отличным от правил перестановки 5), 6). Если D — доказательство в G_0 в виде дерева, то через D^* обозначим дерево, полученное из D удалением всех секвенций, расположенных ниже секвенции, являющейся заключением при последнем существенном переходе в D .

Индукцией по числу существенных переходов в дереве D будем доказывать следующее утверждение: если D — доказательство в G_0 секвенции $\Gamma_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$, то существует доказательство D_1 секвенции $\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$, причем число существенных переходов в D_1 меньше числа существенных переходов в D . Пусть D^* имеет следующий вид:

$$\frac{D'}{\Phi, \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'}$$

$$\frac{}{\Phi \wedge \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'}.$$

Тогда в качестве требуемого D_1 можно взять некоторое дерево D_1 , для которого

$$D_1^* = \left(\frac{D'}{\Phi, \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'} \right)^*.$$

Пусть D^* имеет следующий вид:

$$\frac{D'}{\frac{\Phi \wedge \Psi, \Phi \wedge \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'}{\Phi \wedge \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'}}.$$

Обозначим через n_0 число существенных переходов в D . По индукционному предположению существует доказательство D_2 секвенции $\Phi, \Psi, \Phi \wedge \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'$ с числом существенных переходов $< n_0 - 1$. Опять по индукционному предположению существует доказательство D_3 секвенции $\Phi, \Psi, \Phi, \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'$ с числом существенных переходов $< n_0 - 2$. Тогда в качестве D_1 можно взять такое доказательство секвенции $\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$, что D_1^* есть

$$\frac{D_3}{\frac{\Phi, \Phi, \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'}{\frac{\Phi, \Psi, \Gamma' \vdash \Theta'}{\frac{\Psi, \Phi, \Gamma' \vdash \Theta'}{\frac{\Psi, \Psi, \Phi, \Gamma' \vdash \Theta'}{\Psi, \Phi, \Gamma' \vdash \Theta'}}}}}.$$

Ясно, что число существенных переходов в D_1 меньше $n_0 - 2 + 2 = n_0$.

Пусть D^* имеет следующий вид:

$$\frac{\frac{D'}{\Gamma'_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_1} \quad \frac{D''}{\Gamma'_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_2}}{\Gamma'_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_1 \wedge X_2}.$$

По индукционному предположению существуют доказательства D'_1 и D''_1 секвенций $\Gamma'_1, \Phi, \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_1$ и $\Gamma'_1, \Phi, \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_2$ соответственно, и число существенных переходов в D'_1, D''_1 меньше числа существенных переходов в деревьях

$$\frac{D'}{\Gamma'_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_1}, \quad \frac{D''}{\Gamma'_1, \Phi \wedge \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_2}$$

соответственно. Тогда в качестве требуемого D_1 берем такое доказательство секвенции $\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash \Theta$ для которого

$$D_1^* = \frac{D'_1; D''_1}{\Gamma'_1, \Phi, \Psi, \Gamma'_2 \vdash \Theta', X_1 \wedge X_2}.$$

Оставшиеся виды последнего существенного перехода в D рассматриваются аналогично. \square

Лемма 1.9.6. *Если секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Phi, \Gamma' \vdash \Theta'$ доказуемы в G_0 , то секвенция $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$ доказуема в G_0 .*

Доказательство. Существенным переходом в доказательстве D в виде дерева называется переход по правилам, отличным от правил перестановки 5) и 6).

Пусть Φ — атомарная формула. Будем доказывать лемму в этом случае индукцией по числу существенных переходов в доказательстве D секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$.

Если D не имеет существенных переходов, то $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ отличается от аксиом только перестановкой формул. Тогда либо $\Phi \in \Gamma$, либо $\Psi \in \Gamma$, $\Psi \in \Theta$ для некоторой атомарной формулы Ψ . В первом случае доказуемость $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$ следует из доказуемости $\Phi, \Gamma' \vdash \Theta$ и леммы 1.9.4. Во втором случае доказуемость $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$ следует из аксиомы $\Psi \vdash \Psi$ с помощью леммы 1.9.4.

Пусть доказательство D секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ имеет $n > 0$ существенных переходов. Пусть последний существенный переход является применением правила 1):

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi, \Theta_2, \Psi; \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi, \Theta_2, X}{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi, \Theta_2, \Psi \wedge X},$$

где последовательности Γ_1 и $\langle \Theta_1, \Phi, \Theta_2, \Psi \wedge X \rangle$ являются перестановками последовательностей Γ и $\langle \Theta, \Phi \rangle$. Из индукционного предположения, используя правила перестановки, получаем доказуемость секвенций $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta_1, \Theta_2, \Theta', \Psi$ и $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta_1, \Theta_2, \Theta', X$. Применяя правило 1) и правила перестановки, получаем доказуемость секвенции $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$. Случай применения других правил в последнем существенном переходе для атомарной формулы Φ рассматриваются аналогично.

Продолжим доказательство леммы, применяя индукцию по длине формулы Φ . Пусть $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Phi, \Gamma' \vdash \Theta'$ доказуемы в G_0 .

Если $\Phi = \Psi \wedge X$, то по лемме 1.9.5 доказуемы секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Psi$; $\Gamma \vdash \Theta, X$ и $\Psi, X, \Gamma' \vdash \Theta'$. Из индукционного предположения получаем сначала доказуемость секвенции $\Gamma, X, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$, а затем секвенции $\Gamma, \Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta, \Theta'$. Доказуемость секвенции $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$ получаем теперь с помощью структурных правил 5)–8).

Если $\Phi = \neg \Psi$, то по лемме 1.9.5 доказуемы секвенции $\Psi, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma' \vdash \Theta', \Psi$. По индукционному предположению получаем доказуемость $\Gamma', \Gamma \vdash \Theta', \Theta$, а значит, и $\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'$. \square

Если Θ — последовательность Φ_1, \dots, Φ_n формул исчисления G_0 , то через $\neg \Theta$ будем обозначать последовательность $\neg \Phi_1, \dots, \neg \Phi_n$.

Лемма 1.9.7. Если секвенция $\Gamma \vdash \Theta$ доказуема в G_0 , то секвенция $\neg\Theta, \Gamma \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИВ.

Доказательство. Индукция по высоте доказательства D секвенции $\Gamma \vdash \Theta$ в G_0 . Предлагаем читателю применить свой опыт по доказательствам в исчислении ИВ, полученный при чтении предыдущих параграфов. \square

Предложение 1.9.8. ИВ $(\rightarrow, \vee) < G_0$.

Доказательство. Если в G_0 доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta$, где Θ содержит один член, то из леммы 1.9.7 и предложения 1.9.3 следует доказуемость $\Gamma \vdash \Theta$ в ИВ (\rightarrow, \vee) .

Рассмотрим секвенцию S , доказуемую в ИВ (\rightarrow, \vee) . Индукцией по высоте доказательства D секвенции S в ИВ (\rightarrow, \vee) покажем доказуемость S в G_0 .

Пусть D — аксиома $\Phi \vdash \Phi$ исчисления ИВ (\rightarrow, \vee) . Если Φ — атомарная формула, то $\Phi \vdash \Phi$ — аксиома G_0 . Если $\Phi = \Psi \wedge X$ и секвенции $\Psi \vdash \Psi$, $X \vdash X$ доказуемы в G_0 , то по лемме 1.9.4 и правилам 1) и 2) получаем доказуемость $\Phi \vdash \Phi$ в G_0 . Если $\Phi = \neg\Psi$ и секвенция $\Psi \vdash \Psi$ доказуема в G_0 , то по правилам 3), 4) и 6) получаем доказуемость в G_0 секвенции $\Phi \vdash \Phi$.

Пусть высота D равна $n > 0$ и для всех секвенций S' , имеющих доказательство в ИВ (\rightarrow, \vee) с высотой $< n$, доказуемость S' в G_0 установлена. Если последний переход в D осуществляется по правилам 1) или 11) исчисления ИВ, то доказуемость S в G_0 следует из индукционного предположения с помощью правил 1) и 6) исчисления G_0 .

Если D имеет один из следующих видов:

$$\frac{D'}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}, \quad \frac{D'}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}, \quad \frac{D'}{\Gamma, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}},$$

то доказуемость S в G_0 следует из индукционного предположения, леммы 1.9.5 и правила 6).

Если последний переход в D осуществляется по правилу 12 ИВ, то доказуемость S в G_0 следует из индукционного предположения и леммы 1.9.4.

Рассмотрим последний из возможных случаев, когда D имеет вид

$$\frac{D'; \quad D''}{\Gamma \vdash \Phi; \quad \Gamma \vdash \neg\Phi} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \mathfrak{F}}.$$

Из индукционного предположения и леммы 1.9.5 следует доказуемость в G_0 секвенций $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Phi, \Gamma \vdash \mathfrak{F}$. Применяя лемму 1.9.6 и правила 6), 8), получаем доказуемость в G_0 секвенции $\Gamma \vdash \mathfrak{F}$. \square

Исчисление G_0 является частью исчисления G , предложенного Генценом. Исчисления генценовского типа по сравнению с изученными нами исчислениями являются более удобными при анализе и поиске формальных доказательств. Это объясняется основной особенностью этих исчислений, которая, грубо говоря, состоит в том, что сложность формул при применении правил может только возрастать. Исчисление G будет подробно изучаться в гл. 6. Здесь мы лишь применим отмеченное выше свойство исчисления G_0 для получения непротиворечивости ИВ, не прибегая к понятию интерпретации исчисления.

В самом деле, рассмотрим секвенцию $\vdash Q_0$. Индукцией по высоте легко заметить, что если D — доказательство секвенции S в исчислении G_0 и существует вхождение формулы в D , содержащее логическую связку \wedge или \neg , то эта логическая связка обязана входить в S . Поэтому если секвенция $\vdash Q_0$ доказуема в G_0 , то она может быть получена из аксиомы с помощью только правил 5)–8), что очевидным образом невозможно. Следовательно, исчисление G_0 непротиворечиво. Применяя предложения 1.9.1, 1.9.3, 1.9.8, получаем непротиворечивость ИВ.

Упражнения

1. Показать, что $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \wedge)} < \text{ИВ}$, где $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \wedge)}$ получено из $\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$ удалением из алфавита символа \wedge и соответствующих правил.
2. Используя теорему полноты для ИВ, показать, что $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee, \neg)} < \text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee, \neg)}$, где $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee, \neg)}$ получается из $\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee)}$ удалением из алфавита символа \neg и соответствующих правил.

Глава 2

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

§ 2.1. Предикаты и отображения

Все изучаемые в этой книге объекты являются множествами, хотя называются они по-разному: слова, символы, совокупности, числа, функции, формулы и др.

С интуитивной точки зрения, конечно, не все математические объекты суть множества, например, трудно думать о скобке или пропозициональной переменной как о множествах. Однако посредством подходящих соглашений (кодирования) их можно отождествить с множествами. В частности, скобку можно отождествить с множеством $\{\{\emptyset\}\}$. Этот метод является плодотворным, и в этой книге принимается такое соглашение¹⁾. В качестве аксиомы теории множеств мы принимаем *аксиому экстенсиональности*, которая утверждает, что два множества, имеющих одинаковые элементы, равны, — другими словами, любое множество определяется своими элементами.

Если a_1, \dots, a_n — все элементы множества A , то в силу аксиомы экстенсиональности множество A можно обозначать через $\{a_1, \dots, a_n\}$. При этом не предполагается, что a_1, \dots, a_n попарно различны. Ясно, что одно и то же множество A может иметь много таких обозначений, например,

$$\{a, b, a\} = \{a, b, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}.$$

Множества \emptyset , $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ и т. д. (каждое последующее состоит из всех предыдущих) называются *натуральными числами* и обозначаются соответственно через 0, 1, 2 и т. д. Множество всех натуральных чисел обозначаем через ω . Слова $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ и конечные последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ будут отождествляться с *упорядоченным набором*.

¹⁾ Для некоторых объектов, с интуитивной точки зрения не являющихся множествами, мы фиксируем их кодировку через множества (например, для натуральных чисел), для других мы кодировку не уточняем, так как в наших рассуждениях она не участвует — важно лишь выделение этих объектов среди других множеств, встречающихся в книге.

$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, который сейчас определим индукцией по n .

Определение. Упорядоченный набор $\langle \rangle$ пустого множества элементов равен \emptyset . Упорядоченный набор $\langle a \rangle$ одного элемента a равен a . Упорядоченный набор $\langle a, b \rangle$ двух элементов a и b называется *упорядоченной парой* и равен $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Если $n > 2$, то упорядоченный набор $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ элементов a_1, \dots, a_n равен упорядоченной паре $\langle \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$.

Упорядоченный набор $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ иногда будем называть *кортежем*, а число n — *длиной кортежа* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$; при этом длина пустого кортежа $\langle \rangle$ равна нулю. Кортеж длины $n > 2$ будем называть *упорядоченной n-кой* или просто *n-кой* (тройкой, четверкой и т. д.). Отождествление слов и последовательностей с упорядоченными наборами возможно в силу следующего предложения.

Предложение 2.1.1. *Если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, то $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.*

Доказательство. Из определения упорядоченного набора следует, что достаточно доказать предложение для $n = 2$. Из условия $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ и определения упорядоченной пары имеем $\{a_1\} \in \langle b_1, b_2 \rangle$. Так как $\langle b_1, b_2 \rangle = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$, то $\{a_1\} = \{b_1\}$ или $\{a_1\} = \{b_1, b_2\}$, поэтому $b_1 \in \{a_1\}$, т. е. $b_1 = a_1$. Легко заметить, что если $\{x, y\} = \{x, z\}$, то $y = z$. Тогда из установленного равенства $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{a_1\}, \{a_1, b_2\}\}$ получаем сначала $\{a_1, a_2\} = \{a_1, b_2\}$, а затем $a_2 = b_2$. \square

Определение. а). Множество $\{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ называется *декартовым произведением* множеств A_1, \dots, A_n и обозначается через $A_1 \times \dots \times A_n$. Если $X \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$, то множество всех $a \in A_i$, для которых существуют такие $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, что $\langle a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle \in X$, называется *проекцией* X и обозначается через $\pi_i^n X$.

б). Если $A_1 = \dots = A_n = A$, то $A_1 \times \dots \times A_n$ называется *декартовой n-степенью* множества A и обозначается через A^n . Если $n = 0$, то по определению полагаем $A^0 = \{\emptyset\}$.

в). Подмножества $B \subseteq A^n$ будут называться *n-местными отношениями* или *предикатами на A*. Будем говорить, что B — *n-местное отношение* или *предикат*, если B является *n-местным отношением* на A для некоторого множества A .

г). Если B — двухместное отношение, то двухместное отношение $\{\langle a, b \rangle \mid \langle b, a \rangle \in B\}$ будем называть *обратным* к B и обозначать через B^{-1} .

д). Если B, C — два двухместных отношения, то двухместное отношение

$$\{\langle a, c \rangle \mid \langle a, b \rangle \in B \text{ и } \langle b, c \rangle \in C \text{ для некоторого } b\}$$

будем называть *композицией* или *произведением* двухместных отношений B, C и обозначать через (BC) или $B \cdot C$.

Так как $\langle a \rangle = a$, то $A^1 = A$, поэтому подмножества A будут одноместными предикатами на A .

Заметим, что 0-местных предикатов только два: \emptyset и $\{\emptyset\}$. Из определения B^{-1} сразу следует равенство $B = (B^{-1})^{-1}$.

Предложение 2.1.2. *Если B, C и D — двухместные предикаты, то*

- а) $((BC)D) = (B(CD))$.
- б) $(BC)^{-1} = (C^{-1}B^{-1})$.

Доказательство. а). Пусть $\langle x, y \rangle \in ((BC)D)$. Тогда для некоторых u и v имеем $\langle x, u \rangle \in B$, $\langle u, v \rangle \in C$ и $\langle v, y \rangle \in D$. Таким образом, $\langle u, y \rangle \in (CD)$ и $\langle x, y \rangle \in (B(CD))$. Включение $B(CD) \subseteq ((BC)D)$ доказывается аналогично. Доказательство б) оставляется читателю. \square

Ассоциативность композиции, доказанная в предложении 2.1.2, позволяет обозначать композицию $((BC)D) = (B(CD))$ через (BCD) . По этой же причине однозначно определена композиция n предикатов $(B_1 \dots B_n)$. Отметим, что коммутативность $(BC) = (CB)$ для произведения предикатов не имеет места (приведите пример).

Определение. Двухместное отношение U на множестве A называется

- а) *диагональю* A^2 и обозначается через id_A , если $U = \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$;
- б) *рефлексивным* на A , если $\text{id}_A \subseteq U$;
- в) *симметричным*, если $U = U^{-1}$;
- г) *транзитивным*, если $(UU) \subseteq U$;
- д) *эквивалентностью* на A , если U рефлексивно, симметрично и транзитивно;
- е) *антисимметричным*, если $U \cap U^{-1} \subseteq \text{id}_A$.

Например, предикат

$$\{\langle m, n \rangle \mid m \text{ и } n — взаимно простые натуральные числа\}$$

является симметричным, но не рефлексивным и не транзитивным на ω , а предикат $\{\langle m, n \rangle \mid (n - m) > 0, n, m \in \omega\}$ является транзитивным на ω , но не симметричным и не рефлексивным на ω .

Если U — n -местное отношение на A и $B \subseteq A$, то отношение $U \cap B^n$ на множестве B будем называть *ограничением* отношения U на множество B . Очевидно, что ограничения отношений типов а)–е) из предыдущего определения на любое $B \subseteq A$ будут также отношениями соответствующих типов а)–е).

Пример 2.1.3. Говорим, что $R = \{A_i \mid i \in I\}$ является *разбиением* множества A , если $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ и для любых $i, j \in I$ либо $A_i = A_j$, либо $A_i \cap A_j = \emptyset$. Пусть $R = \{A_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества A . Определим следующее двухместное отношение на A :

$$E_R = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A_i \text{ для некоторого } i \in I\}.$$

Очевидно, что E_R будет эквивалентностью на A .

Если E — эквивалентность на множестве A , то множества $E_x = \{a \mid \langle a, x \rangle \in E\}$ для $x \in A$ будем называть *классами эквивалентности* по отношению E .

Легко показать, что любую эквивалентность на множестве A можно получить способом, указанным в примере 2.1.3. В самом деле, пусть E — эквивалентность на A и $R_E = \{E_x \mid x \in A\}$. Из рефлексивности E получаем $x \in E_x$, следовательно, $\bigcup_{x \in A} E_x = A$. Из симметричности и транзитивности E следует, что если $\langle x, y \rangle \in E$, то $E_x = E_y$, а если $\langle x, y \rangle \notin E$, то $E_x \cap E_y = \emptyset$. Таким образом, множество R_E классов эквивалентности по E является разбиением A и $E_{R_E} = E$.

Определение. а). Двухместное отношение f называется *отображением* или *функцией*, если для любых a, b, c из $\langle a, b \rangle \in f$ и $\langle a, c \rangle \in f$ следует $b = c$. Если f — отображение, то множество $\pi_1^2 f$ называется *областью определения* f и обозначается $\text{dom } f$, а множество $\pi_2^2 f$ называется *областью значений* f и обозначается $\text{rang } f$.

б). Отображение f называется *инъективным* (или *разнозначным*), если f^{-1} также является отображением.

в). Отображение f называется *отображением* A в B , если $\text{dom } f = A$ и $\text{rang } f \subseteq B$.

г). Отображение f называется *сюръективным отображением* A в B (или *отображением* A на B), если $\text{dom } f = A$ и $\text{rang } f = B$.

д). Отображение f называется *биективным отображением* A в B (или *взаимно однозначным отображением* A на B), если оно является одновременно инъективным и сюръективным отображением A в B .

е). Отображение f множества A^n в A называется *n-местной операцией* на A .

Очевидно, что диагональ id_A множества A^2 будет биективной одноместной операцией на A . Диагональ id_A множества A^2 в дальнейшем будем называть также *тождественной операцией на A*.

Запись $f : A \rightarrow B$ будет в дальнейшем обозначать, что f — отображение A в B , запись $f : A \rightarrowtail B$ будет обозначать, что f — инъективное отображение A в B , а запись $f : A \twoheadrightarrow B$ будет обозначать, что f — сюръективное отображение A в B .

Предложение 2.1.4. а). Если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$, то $(fg) : A \rightarrow C$.

б). Если $f : A \twoheadrightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$, то $(fg) : A \twoheadrightarrow C$.

в). Если f — биективное отображение A в B , то f^{-1} — биективное отображение B в A , $f \cdot f^{-1} = \text{id}_A$ и $f^{-1} \cdot f = \text{id}_B$.

г). Если f и g — инъективные отображения, то $f \cdot g$ также инъективно и $(fg)^{-1} = (g^{-1}f^{-1})$.

Доказательство этого предложения оставляется читателю в качестве упражнения. \square

Если f — отображение и $\langle a, b \rangle \in f$, то b называется *значением f на элементе a* и обозначается через $f(a)$ или fa .

Если f — отображение и $A \subseteq \text{dom } f$, то множество $\{fa \mid a \in A\}$ называется *образом множества A при отображении f* и обозначается через $f[A]$, а отображение $f \cap (A \times \text{rang } f)$ называется *ограничением f на A* и обозначается через $f \upharpoonright A$.

Ясно, что n -местная операция является $(n+1)$ -местным отношением, а 0-местная операция $f : A^0 \rightarrow A$ есть $\{\langle \emptyset, a \rangle\}$ для некоторого $a \in A$. Часто 0-местную операцию $\{\langle \emptyset, a \rangle\}$ на A будем называть *константой на A* и отождествлять с элементом a .

Если f — n -местная операция на A , то условие $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \in f$ будем записывать так: $f(a_1, \dots, a_n) = b$. Для $n = 0$ это будет $f() = b$, т. е. $f = b$, что согласуется с принятым нами отождествлением константы с ее значением.

Пусть f — n -местная операция на A и $B \subseteq A$. Множество B называется *замкнутым относительно операции f*, если из $a_1, \dots, a_n \in B$ следует $f(a_1, \dots, a_n) \in B$.

Упражнения

- Пусть U — транзитивное двухместное отношение на множестве A , $\langle a, a \rangle \notin U$ для любого a и для любого $a \in A$ существует такое b , что $\langle a, b \rangle \in U$. Показать, что A бесконечно.
- Доказать предложение 2.1.4.
- Если $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrowtail A$ и $(gf) = \text{id}_B$, то f биективно и $g = f^{-1}$.

§ 2.2. Частично упорядоченные множества

Среди различных типов отношений некоторые имеют фундаментальное значение не только для математической логики, но и для всей математики. В предыдущем параграфе мы уже рассматривали одно из таких отношений — эквивалентность. Определим еще два очень важных типа отношений.

Определение. а). Отношение U на множестве A называется *частичным порядком на A* , если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

б). Частичный порядок U на A называется *линейным порядком на A* , если для любых $a, b \in A$ выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: $\langle a, b \rangle \in U$, $\langle b, a \rangle \in U$.

Очевидно, что ограничение частичного (линейного) порядка на A на любое подмножество $B \subseteq A$ будет частичным (линейным) порядком на B .

Важным примером частичного порядка на множестве A является отношение $\{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A, a \subseteq b\}$, а примером линейного порядка — отношение $\{\langle a, b \rangle \mid a, b \in X, a \leqslant b\}$, где X — некоторое подмножество множества действительных чисел.

Определение. а). Если U — частичный порядок на A , то пару $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ назовем *частично упорядоченным множеством* (сокращенно ч. у. м.).

б). Если U — линейный порядок на A , то пару $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ назовем *линейно упорядоченным множеством*.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — частично упорядоченное множество. Элемент $a_0 \in A$ называется *верхней (нижней) гранью* в \mathfrak{A} подмножества $A_0 \subseteq A$, если $\langle b, a_0 \rangle \in U$ ($\langle a_0, b \rangle \in U$) для всех $b \in A_0$. Верхняя (нижняя) в \mathfrak{A} грань A называется *наибольшим (наименьшим)* в \mathfrak{A} элементом. Элемент $a \in A$ называется *максимальным (минимальным)* в \mathfrak{A} , если из $\langle a, x \rangle \in U$ (соответственно из $\langle x, a \rangle \in U$) следует $x = a$. Ясно, что наибольший (наименьший) элемент является максимальным (минимальным), и если U — линейный порядок, то максимальный (минимальный) в \mathfrak{A} элемент является также наибольшим (наименьшим) в \mathfrak{A} . Очевидно, что если наибольший (наименьший) в \mathfrak{A} элемент существует, то все максимальные (минимальные) элементы равны между собой.

Если B — множество верхних граней в $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ множества $A_1 \subseteq A$, то наименьший в $\langle B, U \cap B^2 \rangle$ элемент называется *наименьшей верхней гранью* (сокращенно н. в. г.) в \mathfrak{A} множества A_1 и обозначается через $\sup(A_1, \mathfrak{A})$. Заменив в предыдущем определении слова «верх-

них» и «наименьший» соответственно на слова «нижних» и «наибольший», получим определение *наибольшей нижней грани* (сокращенно н. н. г.) A_1 в \mathfrak{A} , которую будем обозначать через $\inf(A_1, \mathfrak{A})$. Ясно, что $\sup(A_1, \mathfrak{A})$ и $\inf(A_1, \mathfrak{A})$ определяются по A_1 и \mathfrak{A} однозначно, если они существуют.

Определение. Частично упорядоченное множество $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ называется *решеткой*, если для любых $a, b \in A$ в \mathfrak{A} существуют $\sup(\{a, b\}, \mathfrak{A})$ и $\inf(\{a, b\}, \mathfrak{A})$, которые будут обозначаться через $a \cup^{\mathfrak{A}} b$ и $a \cap^{\mathfrak{A}} b$. Решетка $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ называется *дистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in A$ операции $\cup^{\mathfrak{A}}$ и $\cap^{\mathfrak{A}}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$D) \quad a \cup^{\mathfrak{A}} (b \cap^{\mathfrak{A}} c) = (a \cup^{\mathfrak{A}} b) \cap^{\mathfrak{A}} (a \cup^{\mathfrak{A}} c);$$

$$D') \quad a \cap^{\mathfrak{A}} (b \cup^{\mathfrak{A}} c) = (a \cap^{\mathfrak{A}} b) \cup^{\mathfrak{A}} (a \cap^{\mathfrak{A}} c).$$

Решетка $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ называется *булевой решеткой*, если \mathfrak{A} дистрибутивна, имеет наибольший элемент $1^{\mathfrak{A}}$, наименьший элемент $0^{\mathfrak{A}}$ и для любого $a \in A$ существует такой элемент $\bar{a} \in A$, что $\bar{a} \cup^{\mathfrak{A}} a = 1^{\mathfrak{A}}$ и $\bar{a} \cap^{\mathfrak{A}} a = 0^{\mathfrak{A}}$. Элемент \bar{a} , удовлетворяющий в решетке \mathfrak{A} с наибольшим элементом $1^{\mathfrak{A}}$ и наименьшим элементом $0^{\mathfrak{A}}$ указанным условиям, называется *дополнением элемента a в \mathfrak{A}* .

Предложение 2.2.1. а). *Если дополнение \bar{a} элемента a в дистрибутивной решетке \mathfrak{A} с наибольшим и наименьшим элементами существует, то оно единствено.*

б). *Если $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ – булева решетка, то для любых $a, b, c \in A$ операции $\cup^{\mathfrak{A}}$, $\cap^{\mathfrak{A}}$, определенные выше, удовлетворяют следующим условиям (для простоты индекс \mathfrak{A} у $\cup^{\mathfrak{A}}$ и $\cap^{\mathfrak{A}}$ опущен):*

аксиомы булевой алгебры

- | | |
|---|--|
| 1) $a \cup b = b \cup a,$ | 6) $(a \cup b) \cap b = b,$ |
| 2) $a \cap b = b \cap a,$ | 7) $a \cap (b \cup c) = (c \cap b) \cup (a \cap c),$ |
| 3) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c,$ | 8) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$ |
| 4) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c,$ | 9) $(a \cap \bar{a}) \cup b = b,$ |
| 5) $(a \cap b) \cup b = b,$ | 10) $(a \cup \bar{a}) \cap b = b.$ |

в). *Если на множестве A заданы три операции: \cup , \cap и $\bar{ }$, удовлетворяющие для любых $a, b, c \in A$ условиям 1)–10) утверждения б) (где $\cup(a, b)$, $\cap(a, b)$ и $\bar{(a)}$ пишутся как $a \cup b$, $a \cap b$ и \bar{a}), то пара $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ для $U = \{ \langle a, b \rangle \mid a \cap b = a \}$ является булевой решеткой, причем $a \cup b = \sup(\{a, b\}, \mathfrak{A})$, $a \cap b = \inf(\{a, b\}, \mathfrak{A})$, $\bar{a} \cup a = 1^{\mathfrak{A}}$, $\bar{a} \cap a = 0^{\mathfrak{A}}$.*

Доказательство. а). Для простоты будем опускать индекс \mathfrak{A} у $U^{\mathfrak{A}}$, $\cap^{\mathfrak{A}}$, $1^{\mathfrak{A}}$ и $0^{\mathfrak{A}}$. Если $a \cup a_1 = 1$ и $a \cap a_2 = 0$, то

$$a_1 = a_1 \cup 0 = a_1 \cup (a \cap a_2) = (a_1 \cup a) \cap (a_1 \cup a_2) = 1 \cap (a_1 \cup a_2) = a_1 \cup a_2.$$

Аналогично из $a \cap a_1 = 0$ и $a \cup a_2 = 1$ получаем $a_2 = a_2 \cup a_1$, следовательно, $a_1 = a_2$.

б). Свойства 1) и 2) очевидны. Так как $a \cap \bar{a} = 0^{\mathfrak{A}}$ и $a \cup \bar{a} = 1^{\mathfrak{A}}$, то выполняются 9) и 10). Так как \mathfrak{A} дистрибутивна, то выполняются 7) и 8). В дальнейшем условие $\langle a, b \rangle \in U$ будем обозначать через $a \leqslant b$. Из определения операций $U^{\mathfrak{A}}$ и $\cap^{\mathfrak{A}}$ получаем, что для любых $d, m_1, m_2 \in A$ выполняются следующие соотношения:

- (1) $d \leqslant m_1 \cap m_2 \iff (d \leqslant m_1 \text{ и } d \leqslant m_2)$,
- (2) $m_1 \cup m_2 \leqslant d \iff (m_1 \leqslant d \text{ и } m_2 \leqslant d)$,
- (3) $m_1, m_2 \leqslant m_1 \cup m_2$,
- (4) $m_1 \cap m_2 \leqslant m_1, m_2$.

Пользуясь этими фактами, легко установить свойства 3)–6). Проверим, например, свойство 6), оставляя проверку 3)–5) читателю. Из (4) получаем $(a \cup b) \cap b \leqslant b$, а из (3) и (1) получаем $b \leqslant (a \cup b) \cap b$, следовательно, из антисимметричности U получаем 6).

в). Из условий 5), 6), 1) и 2) получаем

$$a \cap b = a \iff a \cup b = b. \quad (2.1)$$

Покажем сначала, что $U = \{\langle a, b \rangle \mid a \cap b = a\}$ — частичный порядок. Подставив в 7) вместо b элемент a , а вместо c — элемент \bar{a} и воспользовавшись условиями 2), 1), 6) и 9), получаем $a = a \cap a$, значит, U рефлексивно. Пусть $a \cap b = a$ и $b \cap c = b$. Из (2.1), 7), 5), 1) и 2) получаем

$$a \cap c = a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) = a \cup (a \cap c) = a,$$

следовательно, U транзитивно. Пусть $a \cap b = a$ и $b \cap a = b$, тогда из 2) получаем $a = b$, т. е. U антисимметрично. Для завершения доказательства нужно показать, что $a \cup b = \sup(\{a, b\}, \mathfrak{A})$ и $a \cap b = \inf(\{a, b\}, \mathfrak{A})$. Докажем первое из этих равенств, оставляя проверку второго читателю. Из

$$a \cap (a \cup b) = (a \cap a) \cup (a \cap b) = a \cup (a \cap b) = a$$

и $a \cup b = b \cup a$ получаем, что $a \cup b$ — верхняя грань множества $\{a, b\}$. Пусть c — верхняя грань $\{a, b\}$, т. е. $a \cap c = a$ и $b \cap c = b$. Тогда

$$(a \cup b) \cap c = c \cap (a \cup b) = (c \cap a) \cup (c \cap b) = a \cup b,$$

т. е. $\langle a \cup b, c \rangle \in U$. □

Условия 1)–10) из предложения 2.2.1 называются *аксиомами булевых алгебр*, а множество A вместе с определенными на нем операциями \cap , \cup , \neg , удовлетворяющими аксиомам 1)–10), называется *булевой алгеброй*. Если $\mathfrak{A} = \langle A, \cup, \cap, \neg \rangle$ — булева алгебра, то через \leqslant будет обозначаться частичный порядок на A , определенный условием

$$a \leqslant b \iff a \cap b = a.$$

Из предложения 2.2.1 следует, что булева алгебра \mathfrak{A} определяется отношением \leqslant однозначно.

Пример 2.2.2. Если $A \subseteq P(B)$ и множество A замкнуто относительно операций объединения и пересечения, то легко проверить, что $\mathfrak{A} = \langle A, \subseteq \rangle$, где \subseteq — отношение включения на A , является дистрибутивной решеткой, причем $\cup^{\mathfrak{A}}$ и $\cap^{\mathfrak{A}}$ являются операциями объединения и пересечения на A .

Пример 2.2.3. Если в примере 2.2.2 множество A замкнуто относительно операции взятия дополнения в B (т. е. операции $\bar{a} = B \setminus a$), то $\mathfrak{A} = \langle A, \subseteq \rangle$ является булевой решеткой, а $\langle A, \cup, \cap, \neg \rangle$ — булевой алгеброй, где \cup, \cap, \neg — операции объединения, пересечения и дополнения в B . В частности, если $A = P(B)$, то $\langle P(B), \cup, \cap, \neg \rangle$ будет называться *булевой алгеброй всех подмножеств B* и для простоты будет иметь то же обозначение $P(B)$, что и множество всех подмножеств B .

Определение. Частично упорядоченное множество (ч. у. м.) $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ называется *фундированым*, если для любого непустого подмножества $A_1 \subseteq A$ ч. у. м. $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1, U \cap A_1^2 \rangle$ имеет минимальный элемент.

Если $\langle A, U \rangle$ — фундированное частично упорядоченное множество, то очевидно, что $\langle B, U \cap B^2 \rangle$ также будет фундированным частично упорядоченным множеством для любого $B \subseteq A$.

На фундированное частично упорядоченное множество можно обобщить метод математической индукции.

Предложение 2.2.4 (принцип трансфинитной индукции). Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — фундированное частично упорядоченное множество и $B \subseteq A$. Если для любого $a \in A$ из $\{b \in A \mid \langle b, a \rangle \in U, b \neq a\} \subseteq B$ следует $a \in B$, то $B = A$.

Доказательство. Предположим, что $B \neq A$, и пусть a_0 — минимальный элемент ч. у. м. $\langle A \setminus B, U \cap (A \setminus B)^2 \rangle$. Тогда $\{b \in A \setminus B \mid \langle b, a_0 \rangle \in U, b \neq a_0\} \subseteq B$ и по условию имеем $a_0 \in B$, что невозможно. \square

Определение. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — линейно упорядоченное множество. Множество $X \subseteq A$ будем называть

- начальным отрезком \mathfrak{A} , если для любых $a, b \in A$ из $a \in X$ и $\langle b, a \rangle \in U$ следует $b \in X$ (если $X \neq A$, то начальный отрезок X называется собственным начальным отрезком \mathfrak{A});
- замкнутым начальным отрезком, если для некоторого $a_0 \in A$ множество X равно множеству $O[a_0, \mathfrak{A}] = \{b \mid \langle b, a_0 \rangle \in U\}$;
- открытым начальным отрезком, если X равно множеству $O(a_0, \mathfrak{A}) = (O[a_0, \mathfrak{A}] \setminus \{a_0\})$ для некоторого $a_0 \in A$.

Часто, когда ясно, о каком \mathfrak{A} идет речь, мы будем писать $O[a_0]$ и $O(a_0)$ вместо $O[a_0, \mathfrak{A}]$ и $O(a_0, \mathfrak{A})$ соответственно. Заметим, что пустое множество \emptyset является начальным отрезком любого линейно упорядоченного множества. Очевидно, что элемент a_0 в б) и в) предыдущего определения определен по X однозначно.

Примеры. Пусть G — отношение «меньше или равно» на действительных числах (т. е. $\langle a, b \rangle \in G \iff a \leq b$).

- В линейно упорядоченном множестве $\langle \omega, G \cap \omega^2 \rangle$ любой отличный от ω начальный отрезок является одновременно и открытым, и замкнутым.
- В $\langle R, G \rangle$, где R — множество всех действительных чисел, любой отличный от R начальный отрезок является открытым или замкнутым, но никакой начальный отрезок $\langle R, G \rangle$ не является одновременно открытым и замкнутым.
- В $\langle Q, G \cap Q^2 \rangle$, где Q — множество всех рациональных чисел, начальный отрезок $\{r \mid r < \sqrt{2}\}$ не является ни открытым, ни замкнутым.

Предложение 2.2.5 (свойства начальных отрезков). Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — линейное упорядоченное множество.

- Если X — начальный отрезок \mathfrak{A} и $B \subseteq A$, то $X \cap B$ — начальный отрезок в $\langle B, U \cap B^2 \rangle$.
- Если X_1, X_2 — начальные отрезки \mathfrak{A} , то либо $X_1 \subseteq X_2$, либо $X_2 \subseteq X_1$.
- Если U — множество начальных отрезков \mathfrak{A} , то $\bigcup U$ и $\bigcap U$ — начальные отрезки \mathfrak{A} .
- Если X — начальный отрезок \mathfrak{A} , $a \in A \setminus X$, то множество $X \cup \{a\}$ тогда и только тогда является начальным отрезком \mathfrak{A} , когда элемент a является наименьшим элементом в линейно упорядоченном множестве $\langle A \setminus X, U \cap (A \setminus X)^2 \rangle$.
- Открытый начальный отрезок $O(a_0, \mathfrak{A})$ равен \emptyset тогда и только тогда, когда a_0 — наименьший элемент.

Доказательство. Утверждения пп. 1), 3), 5) сразу следуют из определений.

Для доказательства п. 2) предположим, что существуют элементы $a_i \in (X_i \setminus X_{3-i})$, $i \in \{1, 2\}$. Так как \mathfrak{A} — линейно упорядоченное множество, то для некоторого $i \in \{1, 2\}$ мы имеем $\langle a_i, a_{3-i} \rangle \in U$. Так как X_{3-i} — начальный отрезок и $a_{3-i} \in X_{3-i}$, то $a_i \in X_{3-i}$, что противоречит условию $a_i \notin X_{3-i}$.

4). Пусть X — начальный отрезок \mathfrak{A} . Если для некоторых $b, a \notin X$ выполнено $\langle b, a \rangle \in U$ и $b \neq a$, то $(X \cup \{a\})$ не является начальным отрезком. Пусть элемент a является наименьшим элементом в линейно упорядоченном множестве $\langle A \setminus X, U \cap (A \setminus X)^2 \rangle$. Тогда любой элемент b с условиями $\langle b, a \rangle \in U$ и $b \neq a$ принадлежит X . Учитывая то, что X — начальный отрезок \mathfrak{A} , получаем, что $X \cup \{a\}$ — начальный отрезок \mathfrak{A} . \square

Определение. Если $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — ч. у. м., $X \subseteq A$ и $U \cap X^2$ — линейный порядок на X , то X называется *цепью в \mathfrak{A}* . В частности, пустое множество является цепью в любом ч. у. м.

В § 2.1 была сформулирована одна аксиома теории множеств, которой мы уже пользовались, — это аксиома экстенсиональности. Впредь мы будем использовать также *аксиому выбора*, утверждающую, что для любого непустого множества A существует такое отображение (функция выбора) $h: (P(A) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow A$, что $h(B) \in B$ для любого непустого $B \subseteq A$. Из этой аксиомы вытекают следующие два важных принципа.

Теорема 2.2.6 (принцип максимума). *Если в частично упорядоченном множестве $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ каждая цепь $X \subseteq A$ имеет верхнюю грань, то существует максимальный в \mathfrak{A} элемент.*

Доказательство. Рассмотрим множество $Y = \{X \subseteq A \mid X \text{ — цепь в } \mathfrak{A}\}$ и множества $B(X) = \{a \in A \mid a \text{ — верхняя грань } X \text{ в } \mathfrak{A}\}$ для $X \in Y$. По условию $B(X) \neq \emptyset$ для любого $X \in Y$. Предположим, что \mathfrak{A} не имеет максимальных элементов. Тогда семейство $S = \{B(X) \setminus X \mid X \in Y\}$ состоит из непустых множеств. Действительно, если $B(X) \subseteq X$ для некоторой цепи $X \in Y$, то $x \in B(X)$ — максимальный элемент в A , поскольку из $\langle x, y \rangle \in U$ следует $y \in B(X) \subseteq X$, откуда $\langle y, x \rangle \in U$, так как $x \in B(X)$. Из аксиомы выбора получаем, что существует такое отображение h множества Y в A , что $h(X) \in B(X) \setminus X$ для всех $X \in Y$. В дальнейшем начальный отрезок (наименьший элемент) линейно упорядоченного множества $\langle X, U \cap X^2 \rangle$ будем называть *начальным отрезком (наименьшим элементом) X* .

Цепь X назовем отмеченной, если для любого собственного начального отрезка X_1 цепи X элемент $h(X_1)$ является наименьшим

элементом в $X \setminus X_1$. Множество всех отмеченных цепей обозначим через Z .

Так как цепь \emptyset не имеет собственных начальных отрезков, то $\emptyset \in Z$. Ясно, что если $X \in Z$, то $X \cup \{h(X)\} \in Z$. Пусть $X_1, X_2 \in Z$ и C — объединение всех общих начальных отрезков X_1 и X_2 . По п. 3) предыдущего предложения C — общий начальный отрезок X_1 и X_2 . Тогда $C = X_1$ или $C = X_2$, так как в противном случае по п. 4) предыдущего предложения и условия $X_1, X_2 \in Z$ множество $C \cup \{h(C)\}$ было бы общим начальным отрезком X_1 и X_2 , что противоречит определению C и условию $h(C) \notin C$. Таким образом, для любых отмеченных цепей X_1, X_2 одна из них является начальным отрезком другой. Следовательно, $C^* = \bigcup_{X \in Z} X$ будет цепью в \mathfrak{A} и любая отмеченная цепь X будет начальным отрезком цепи C^* .

Покажем, что C^* является отмеченной цепью. Пусть A — собственный начальный отрезок цепи C^* . В силу пп. 2) и 1) предыдущего предложения для любой отмеченной цепи X либо выполняется включение $X \subseteq A$, либо A является собственным начальным отрезком X , следовательно, $h(A)$ будет наименьшим элементом в $X \setminus A$. Так как C^* является объединением отмеченных цепей, то $h(A)$ будет наименьшим элементом в $C^* \setminus A$. Мы показали, что $C^* \in Z$, следовательно, $C^* \cup \{h(C^*)\} \in Z$, а это противоречит определению C^* и условию $h(C^*) \notin C^*$. \square

Определение. Если $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — фундированное линейное упорядоченное множество, то \mathfrak{A} называется *вполне упорядоченным множеством*.

Теорема 2.2.7 (принцип полного упорядочения). *Каждое множество A может быть вполне упорядочено, т. е. для каждого множества A существует $U \subseteq A^2$, для которого $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — вполне упорядоченное множество.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$W = \{\langle X, U \rangle \mid \langle X, U \rangle \text{ — вполне упорядоченное множество}, X \subseteq A\}.$$

Определим на множестве W бинарное отношение \preccurlyeq :

$$\langle X_1, U_1 \rangle \preccurlyeq \langle X_2, U_2 \rangle \iff U_1 \subseteq U_2 \text{ и } X_1 \text{ — начальный отрезок } \langle X_2, U_2 \rangle.$$

Ясно, что это отношение будет частичным порядком на W .

Пусть $\{\langle X_i, U_i \rangle \mid i \in I\}$ — цепь в $\langle W, \preccurlyeq \rangle$. Очевидно, что $\mathfrak{A} = \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ является линейно упорядоченным множеством и по свойствам начальных отрезков каждое X_i является начальным отрез-

ком \mathfrak{A} . Пусть $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ и $Y \neq \emptyset$. Тогда $Y \cap X_{i_0} \neq \emptyset$ для некоторого $i_0 \in I$. Так как $\langle X_{i_0}, U_{i_0} \rangle$ — вполне упорядоченное множество, то $\langle Y \cap X_{i_0}, U_{i_0} \cap Y^2 \rangle$ имеет минимальный элемент y_0 . Так как X_{i_0} — начальный отрезок \mathfrak{A} , то y_0 — минимальный элемент $\left\langle Y, \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y^2 \right\rangle$.

Таким образом, $\mathfrak{A} \in W$. Ясно, что \mathfrak{A} является верхней гранью для цепи $\{\langle X_i, U_i \rangle \mid i \in I\}$ в $\langle W, \preccurlyeq \rangle$. Поэтому по принципу максимума $\langle W, \preccurlyeq \rangle$ имеет максимальный элемент $\langle A^*, U^* \rangle$. Если существует $a_0 \in A \setminus A^*$, то $\langle A_0 \cup \{a_0\}, U_1 \rangle \in W$, где $U_1 = U^* \cup \{\langle a, a_0 \rangle \mid a \in A^*\} \cup \{\langle a_0, a_0 \rangle\}$, что противоречит максимальности $\langle A^*, U^* \rangle$ в $\langle W, \preccurlyeq \rangle$. Таким образом, $\langle A, U^* \rangle$ — вполне упорядоченное множество. \square

Предложение 2.2.8 (характеризация вполне упорядоченных множеств). *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — линейно упорядоченное множество. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) \mathfrak{A} — вполне упорядоченное множество;
- 2) любой собственный начальный отрезок \mathfrak{A} открыт;
- 3) $\langle I, \subseteq \rangle$ — вполне упорядоченное множество, где I множество всех начальных отрезков \mathfrak{A} .

Доказательство. Ясно, что для любых элементов $a, b \in A$ условие $\langle a, b \rangle \in U$ равносильно условию $O(a, \mathfrak{A}) \subseteq O(b, \mathfrak{A})$.

1) \Rightarrow 2). Если \mathfrak{A} — вполне упорядоченное множество и X — собственный начальный отрезок \mathfrak{A} , то $X = O(a_0, \mathfrak{A})$, где a_0 — наименьший элемент множества $\langle A \setminus X, (A \setminus X) \cap U^2 \rangle$.

2) \Rightarrow 3). Предположим, что непустое подмножество $J \subseteq I$ не имеет наименьшего (по включению) элемента. В силу 2) любой собственный начальный отрезок $X \in I$ имеет вид $X = O(a_X, \mathfrak{A})$. В силу замечания в начале доказательства, множество $\{a_X \mid X \in J\}$ не имеет наименьшего (по отношению U) элемента. С другой стороны $\bigcap J$ является собственным начальным отрезком и по 2) имеет вид $O(a^*, \mathfrak{A})$. Так как a^* не принадлежит этому пересечению, то a^* не принадлежит какому-то X^* из J . По 2) имеет место $X^* = O(a_0, \mathfrak{A})$ для некоторого элемента a_0 , тогда $\langle a_0, a^* \rangle \in U$. Так как a_0 не принадлежит $\bigcap J$, то $a^* = a_0$. Следовательно, X^* — наименьший элемент в J , а это невозможно по предположению.

3) \Rightarrow 1). Предположим, что множество $Y \subseteq A$ не имеет наименьшего (по отношению U) элемента. Тогда множество $\{O(a, \mathfrak{A}) \mid a \in Y\}$ не имеет наименьшего (по отношению \subseteq) элемента. \square

Определение. Вполне упорядоченное множество $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ называется *кардинально упорядоченным множеством*, если не существует инъективного отображения f ни в какой собственный начальный отрезок \mathfrak{A} .

Теорема 2.2.9 (принцип кардинального упорядочения). Каждое множество A может быть кардинально упорядочено, т. е. для каждого множества A существует $U \subseteq A^2$, для которого $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — кардинально упорядоченное множество.

Доказательство. По принципу полного упорядочения существует $U_0 \subseteq A^2$, для которого $\mathfrak{A}_0 = \langle A, U_0 \rangle$ — вполне упорядоченное множество. По предыдущему предложению существует $X_0 \subseteq A$, являющийся наименьшим (по включению) начальным отрезком \mathfrak{A} , для которого существует инъективное отображение $f: A \rightarrow X_0$. Возьмем следующее бинарное отношение на A :

$$U = \{\langle a, b \rangle \mid \langle fa, fb \rangle \in U_0\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — кардинально упорядоченное множество. Рефлексивность, антисимметричность и транзитивность и линейность отношения U сразу следуют из этих свойств отношения U_0 . Если непустое множество $Y \subseteq A$ не имело бы наименьшего элемента по отношению U , то множество $f(Y)$ не имело бы наименьшего элемента по отношению U_0 . Таким образом, \mathfrak{A} — вполне упорядоченное множество.

Предположим, что существует инъективное отображение $g: A \rightarrow X_1$, где X_1 — собственный начальный отрезок \mathfrak{A} . По предыдущему предложению $X_1 = O(a_1, \mathfrak{A})$ для некоторого элемента $a_1 \in A \setminus X_1$. Ясно, что $g \cdot f$ будет инъективным отображением A в $O(f(a_1), \mathfrak{A}_0)$. Так как $O(f(a_1), \mathfrak{A}_0)$ — собственное подмножество X_0 , то это противоречит минимальности X_0 . \square

Определение. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, V \rangle$ — два линейно упорядоченных множества. Отображение $f: A \rightarrow B$ назовем *изоморфизмом* \mathfrak{A} на \mathfrak{B} , если

$$\langle a, b \rangle \in U \iff \langle fa, fb \rangle \in V. \quad (2.2)$$

Будем говорить, что \mathfrak{A} и \mathfrak{B} *изоморфны*, если существует изоморфизм одного из них на другое.

Заметим, что изоморфизм $f: A \rightarrow B$ является инъективным отображением. В самом деле, если $fa = fb$, то из рефлексивности V и (2.2) получаем $\langle a, b \rangle \in U$ и $\langle b, a \rangle \in U$, следовательно, из антисимметричности U получаем $a = b$. Если f — изоморфизм \mathfrak{A} на \mathfrak{B} , то очевидно, что f^{-1} — изоморфизм \mathfrak{B} на \mathfrak{A} .

Предложение 2.2.10. Если f — изоморфизм линейно упорядоченного множества \mathfrak{A} на линейно упорядоченное множество \mathfrak{B} и X — (открытый, замкнутый) начальный отрезок \mathfrak{A} , то $f(X)$ — (открытый, замкнутый) начальный отрезок \mathfrak{B} .

Доказательство. оставляется читателю в качестве легкого упражнения. \square

В оставшейся части параграфа мы докажем важные свойства вполне упорядоченных множеств.

Если X и Y — начальные отрезки линейно упорядоченных множеств $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, V \rangle$ соответственно и $\langle X, U \cap X^2 \rangle$ изоморфно $\langle Y, V \cap Y^2 \rangle$, то в дальнейшем будем говорить просто, что X изоморфно Y .

Предложение 2.2.11. *Если $f: A \rightarrow B$ и $g: A \rightarrow B$ — два изоморфизма вполне упорядоченного множества $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ на некоторые начальные отрезки линейно упорядоченного множества $\mathfrak{B} = \langle B, V \rangle$, то $f = g$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $Q = \{a \in A \mid fa = ga\}$. Если $O(b, \mathfrak{A}) \subseteq Q$, то $fb = \inf(B \setminus g[O(b, \mathfrak{A})], \mathfrak{B})$, следовательно, $fb = gb$. По предложению 2.2.4 имеем $Q = A$, и предложение 2.2.11 доказано. \square

Предложение 2.2.12. *Никакие два различных начальных отрезка вполне упорядоченного множества \mathfrak{A} не изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть f — изоморфизм начального отрезка X на начальный отрезок Y . Так как id_X является изоморфизмом X на X , то по предложению 2.2.11 имеем $f = \text{id}_X$, следовательно, $X = Y$. \square

Теорема 2.2.13 (об изоморфизме вполне упорядоченных множеств). *Если $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, V \rangle$ — вполне упорядоченные множества, то выполняется ровно одно из следующих условий:*

- 1) \mathfrak{A} изоморфно \mathfrak{B} ;
- 2) \mathfrak{A} изоморфно собственному начальному отрезку \mathfrak{B} ;
- 3) \mathfrak{B} изоморфно собственному начальному отрезку \mathfrak{A} .

При этом соответствующие изоморфизмы единственны.

Доказательство. Единственность следует из предложения 2.2.11.

Рассмотрим множество $P = \{f \mid f \text{ — изоморфизм некоторого начального отрезка } \mathfrak{A} \text{ на начальный отрезок } \mathfrak{B}\}$. В силу предложений 2.2.10 и 2.2.11 для любых $f, g \in P$ либо $f \subseteq g$, либо $g \subseteq f$. Поэтому $F = \bigcup_{f \in P} f$ будет изоморфизмом начального отрезка X вполне упорядоченного множества \mathfrak{A} на начальный отрезок Y вполне упорядоченного множества \mathfrak{B} . Если $X = A$ или $Y = B$, то все доказано. Предположим, что это не так. Тогда по предложению 2.2.8 имеем $X = O(a_0, \mathfrak{A})$ и $Y = O(b_0, \mathfrak{B})$. Очевидно, что $F \cup \{\langle a_0, b_0 \rangle\}$ будет тогда изоморфизмом

начального отрезка $O[a_0, \mathfrak{A}]$ на начальный отрезок $O[b_0, \mathfrak{B}]$, следовательно, $F \cup \{\langle a_0, b_0 \rangle\} \subseteq F$, что невозможно. \square

Упражнения

- Показать, что если $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ — ч. у. м. с наименьшим элементом, A конечно и для любых $a, b \in A$ существует $\sup(\{a, b\}, \mathfrak{A})$, то \mathfrak{A} — решетка.
- Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \cup, \cap, \neg \rangle$ — булева алгебра и A содержит более одного элемента. Отображение γ множества F формул ИВ в A , обладающее свойствами:
 - 1) $\gamma(\Phi \vee \Psi) = \gamma(\Phi) \cup \gamma(\Psi)$,
 - 2) $\gamma(\Phi \wedge \Psi) = \gamma(\Phi) \cap \gamma(\Psi)$,
 - 3) $\gamma(\Phi \rightarrow \Psi) = \overline{\gamma(\Phi)} \cup \gamma(\Psi)$,
 - 4) $\gamma(\neg \Phi) = \overline{\gamma(\Phi)}$,

называется *интерпретацией* ИВ в \mathfrak{A} . Показать, что доказуемые ИВ формулы — это в точности такие Φ , что $\gamma(\Phi) = 1^{\mathfrak{A}}$ для любой интерпретации γ ИВ в \mathfrak{A} . (Указание. В одну сторону установить $\gamma(\Phi) = 1^{\mathfrak{A}}$ для аксиом ИВ₁ и проверить, что правило ИВ₁ сохраняет это свойство, в другую сторону воспользоваться тем, на множестве $\{1^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{B}}\}$ операции \cup, \cap и \neg определяются так же, как на множестве $\{1, 0\}$ определяются операции \vee, \wedge и \neg .)

- Показать, что ч. у. м. $\langle A, U \rangle$ тогда и только тогда не является фундированным, когда существует последовательность a_0, \dots, a_n, \dots попарно различных элементов A , для которой $\langle a_{n+1}, a_n \rangle \in U$, $n \in \omega$.

§ 2.3. Фильтры булевой алгебры

Пусть на протяжении этого параграфа $\mathfrak{B} = \langle B, \cap, \cup, \neg \rangle$ — булева алгебра. Как показано в предложении 2.2.1, $\mathfrak{B}^* = \langle B, \leqslant \rangle$, где отношение $a \leqslant b$ определяется равенством $a \cap b = a$, является булевой решеткой и для любых $a, b \in B$ выполняются условия:

- (1) $a \cup b = \sup(\{a, b\}, \mathfrak{B}^*)$, $a \cap b = \inf(\{a, b\}, \mathfrak{B}^*)$;
- (2) $a \cup \bar{a} = 1$ — наибольший элемент \mathfrak{B}^* ;
- (3) $a \cap \bar{a} = 0$ — наименьший элемент \mathfrak{B}^* ;
- (4) \bar{a} является единственным элементом B , для которого выполняются условия $a \cup \bar{a} = 1$ и $a \cap \bar{a} = 0$.

Отметим еще некоторые свойства булевых операций.

Лемма 2.3.1. *Булевы алгебры обладают следующими свойствами:*

- а) $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$;
- б) $0 \cap a = 0$, $0 \cup a = a$;
- в) $1 \cap a = a$, $1 \cup a = 1$;
- ж) $a \cap b = a \iff a \cup b = b$.
- г) $a = \bar{\bar{a}}$;
- д) $\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$;
- е) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$;

Доказательство. Свойство а) непосредственно вытекает из (1)–(4). Свойства б), в) следуют из (1)–(3), а г) следует из (4), так как $\bar{a} \cup a = a \cup \bar{a} = 1$ и $\bar{a} \cap a = a \cap \bar{a} = 0$. Свойство ж) следует из (1), так как $a \cap b = a \iff a \leq b$. Для доказательства д) в силу (4) достаточно показать, что

$$(a \cap b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = 1 \quad \text{и} \quad (a \cap b) \cap (\bar{a} \cup \bar{b}) = 0.$$

Эти равенства следуют из аксиом 1)–6) булевых алгебр, например,

$$(a \cap b) \cap (\bar{a} \cup \bar{b}) = ((a \cap b) \cap \bar{a}) \cup ((a \cap b) \cap \bar{b}) = (0 \cap b) \cup (0 \cap a) = 0.$$

Проверка другого равенства, а также доказательство свойства е), проводятся аналогично. \square

Часто для простоты обозначений мы будем отождествлять \mathfrak{B}^* с \mathfrak{B} . Пусть далее B неодноэлементно.

Определение. Множество $D \subseteq B$ называется *фильтром булевой алгебры \mathfrak{B}* , если выполняются следующие условия:

- 1) $0 \notin D$;
- 2) если $a, b \in D$, то $a \cap b \in D$;
- 3) если $a \in D$ и $a \leq b$, то $b \in D$.

Множество $D \subseteq P(X)$ называется *фильтром на множестве X* , если D является фильтром булевой алгебры $\langle P(X), \cup, \cap, \neg \rangle$ и $D \neq \emptyset$.

Примеры. 1. Множество $\{1\}$ является фильтром булевой алгебры \mathfrak{B} . С другой стороны, из условия 3) вытекает, что $1 \in D$ для любого непустого фильтра D в булевой алгебре \mathfrak{B} .

2. Если $a_0 \in B$, $a_0 \neq 0$, то множество $\{b \mid b \in B, a_0 \leq b\}$ будет фильтром алгебры \mathfrak{B} .

3. Множество $\{Y \subseteq X \mid X \setminus Y \text{ — конечное множество}\}$ является фильтром на бесконечном множестве X , который иногда называют *фильтром Фреше на X* .

Так как операции \cup и \cap булевой алгебры \mathfrak{B} удовлетворяют аксиомам коммутативности 1), 2) и аксиомам ассоциативности 3), 4), то можно говорить об объединении (пересечении) в \mathfrak{B} конечного множества элементов $a_1, \dots, a_n \in B$ и обозначать его так: $a_1 \cup \dots \cup a_n$ ($a_1 \cap \dots \cap a_n$). Индукцией по n легко устанавливаются следующие обобщенные законы дистрибутивности:

$$b \cup (a_1 \cap \dots \cap a_n) = (b \cup a_1) \cap \dots \cap (b \cup a_n),$$

$$b \cap (a_1 \cup \dots \cup a_n) = (b \cap a_1) \cup \dots \cup (b \cap a_n),$$

а также обобщения свойств д), е) леммы 2.3.1:

$$\overline{a_1 \cap \dots \cap a_n} = \bar{a}_1 \cup \dots \cup \bar{a}_n,$$

$$\overline{a_1 \cup \dots \cup a_n} = \bar{a}_1 \cap \dots \cap \bar{a}_n.$$

Определение. а). Множество $Y \subseteq B$ называется *центрированным* в булевой алгебре \mathfrak{B} , если пересечение в \mathfrak{B} любого конечного множества элементов из Y не равно 0. Центрированное в $\langle P(X), \cup, \cap, \neg \rangle$ множество (т. е. такое множество $Y \subseteq P(X)$, у которого любое конечное подмножество имеет непустое пересечение) будем просто называть *центрированным*.

б). Фильтр булевой алгебры \mathfrak{B} , не содержащийся ни в каком отличном от него фильтре алгебры \mathfrak{B} , называется *ультрафильтром*.

Ясно, что любой фильтр булевой алгебры \mathfrak{B} будет центрированным в \mathfrak{B} множеством.

Предложение 2.3.2. Каждое центрированное в булевой алгебре \mathfrak{B} множество Y содержится в некотором ультрафильтре алгебры \mathfrak{B} .

Доказательство. Рассмотрим множество $U = \{X \mid X \text{ — центрированное в } \mathfrak{B} \text{ множество и } Y \subseteq X\}$. Так как $Y \in U$, то $U \neq \emptyset$. Очевидно, что в ч. у. м. $\langle U, \subseteq \rangle$ объединение любой цепи является элементом U . По теореме 2.2.6 в $\langle U, \subseteq \rangle$ имеется максимальный элемент X_0 . Достаточно показать, что X_0 является фильтром. Условие 1) для X_0 trivialно выполнено. Для проверки условия 2) и 3) в силу максимальности X_0 достаточно показать, что если $a, b \in X_0$ и $a \leq c$, то $X_0 \cup \{a \cap b\}$ и $X_0 \cup \{c\}$ центрированы в \mathfrak{B} . Центрированность $X_0 \cup \{a \cap b\}$ очевидна. Предположим, что $a_1 \cap \dots \cap a_n \cap c = 0$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in X_0$. Тогда из равенства $c \cap a = a$ получаем

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cap a &= (a_1 \cap \dots \cap a_n \cap c) \cap a = \\ &= (a_1 \cap \dots \cap a_n) \cap (c \cap a) = a_1 \cap \dots \cap a_n \cap a, \end{aligned}$$

что противоречит центрированности X_0 . \square

Предложение 2.3.3. Для того чтобы фильтр D булевой алгебры \mathfrak{B} был ультрафильтром, необходимо и достаточно, чтобы для любого $b \in B$ было либо $b \in D$, либо $\bar{b} \in D$.

Доказательство. В силу предложения 2.3.2 для доказательства необходимости нужно лишь показать, что для любого $b \in B$ либо $D \cup \{b\}$, либо $D \cup \{\bar{b}\}$ является центрированным в \mathfrak{B} множеством. Предположим, что это не так. Тогда $b_1 \cap \dots \cap b_n \cap b = 0$

и $b_{n+1} \cap \dots \cap b_{n+m} \cap \bar{b} = 0$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n+m} \in D$. В силу свойства 2) фильтра D можно считать $n = m = 1$. Из свойств операций \cup, \cap, \neg в булевой алгебре \mathfrak{B} получаем

$$\begin{aligned} b_1 \cap b_2 &= b_1 \cap b_2 \cap (b \cup \bar{b}) = (b_1 \cap b_2 \cap b) \cup (b_1 \cap b_2 \cap \bar{b}) = \\ &= (0 \cap b_2) \cup (b_1 \cap 0) = 0 \cup 0 = 0, \end{aligned}$$

что противоречит свойствам 1), 2) фильтра D .

Достаточность. Если существует фильтр $D^* \supseteq D$ и элемент $b \in D^* \setminus D$, то $\bar{b} \notin D$, так как в противном случае $0 = b \cap \bar{b} \in D^*$, что невозможно. \square

Определение. Фильтр D булевой алгебры \mathfrak{B} называется *главным*, если существует такой $a_0 \in D$, что

$$D = \{b \in B \mid a_0 \leqslant b\}.$$

Элемент $a \in B$ называется *атомом булевой алгебры \mathfrak{B}* , если $a \neq 0$ и

$$b \leqslant a \implies (b = a \text{ или } b = 0).$$

Ясно, что если a — атом \mathfrak{B} , то $b \cap a$ равно a или 0 для любого $b \in B$.

Лемма 2.3.4. *Если D — главный ультрафильтр алгебры \mathfrak{B} , то $D = \{b \in B \mid a_0 \leqslant b\}$ для некоторого атома a_0 алгебры \mathfrak{B} .*

Доказательство. Пусть $D = \{b \in B \mid b_0 \leqslant b\}$ для некоторого $b_0 \neq 0$. Предположим, что b_0 — не атом. Тогда существует $b_1 \leqslant b_0$, $b_1 \neq b_0$, $b_1 \neq 0$. Так как $b_1 \notin D$, то по предложению 2.3.3 выполняется $\bar{b}_1 \in D$, откуда $b_0 \leqslant \bar{b}_1$, т. е. $b_0 \cap \bar{b}_1 = b_0$. Следовательно,

$$b_1 = b_1 \cap b_0 = b_1 \cap (b_0 \cap \bar{b}_1) = b_0 \cap (b_1 \cap \bar{b}_1) = 0,$$

получили противоречие. \square

Предложение 2.3.5. *Следующие условия для булевой алгебры \mathfrak{B} эквивалентны:*

- 1) B — конечное множество;
- 2) все непустые фильтры \mathfrak{B} главные;
- 3) все ультрафильтры \mathfrak{B} главные.

Доказательство. 1) \implies 2). Если B — конечное множество и $D = \{b_1, \dots, b_n\}$ — фильтр алгебры \mathfrak{B} , то пересечение $a_0 = b_1 \cap \dots \cap b_n$ принадлежит D и $a_0 \leqslant b_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Утверждение 2) \implies 3) тривиально.

Докажем 3) \Rightarrow 1). Пусть выполняется 3). Пусть $A_0 \subseteq B$ — множество всех атомов алгебры \mathfrak{B} . Рассмотрим множество $A_1 = \{\bar{a} \mid a \in A_0\}$. Покажем, что A_1 не центрированное. В самом деле, если A_1 центрированное, то по предложению 2.3.2 имеем $A_1 \subseteq D$ для некоторого ультрафильтра D . Из условия 3) и леммы 2.3.4 получаем, что существует такой $a_0 \in A_0$, что $a_0 \leq b$ для всех $b \in D$. В частности, $a_0 \leq \bar{a}_0$, т. е. $a_0 = a_0 \cap \bar{a}_0 = 0$, что противоречит условию $a \neq 0$ для атомов $a \in A_0$. Так как A_1 не центрированное, то $\bar{a}_1 \cap \dots \cap \bar{a}_n = 0$ для некоторых $a_1, \dots, a_n \in A_0$. Из леммы 2.3.1 тогда получаем

$$1 = \bar{0} = \overline{\bar{a}_1 \cap \dots \cap \bar{a}_n} = \overline{\bar{a}_1} \cup \dots \cup \overline{\bar{a}_n} = a_1 \cup \dots \cup a_n.$$

Пусть b — произвольный элемент B . Тогда

$$b = b \cap 1 = b \cap (a_1 \cup \dots \cup a_n) = (b \cap a_1) \cup \dots \cup (b \cap a_n).$$

Так как $b \cap a_i$, равно a_i или 0, то b равно 0 или объединению некоторых элементов множества $\{a_1, \dots, a_n\}$. Следовательно, B — конечное множество. \square

Предложение 2.3.6. *Если D — главный ультрафильтр на множестве I , то $D = \{X \subseteq I \mid i_0 \in X\}$ для некоторого $i_0 \in I$.*

Доказательство. Следует из леммы 2.3.4, так как очевидно, что в $P(I)$ атомами являются одноэлементные множества. \square

Упражнения

1. Пусть D — непустой фильтр булевой алгебры $\mathfrak{B} = \langle B, \cup, \cap, \neg \rangle$. На множестве B определим отношение \tilde{D} следующим образом:

$$a \tilde{D} b \iff (a \cap \bar{b}) \cup (b \cap \bar{a}) \in \overline{D},$$

где \overline{D} равно $\{\bar{d} \mid d \in D\}$. Показать, что \tilde{D} — эквивалентность на B и D — ультрафильтр тогда и только тогда, когда B разбивается отношением \tilde{D} на два класса эквивалентности.

2. Фильтр D на множестве I называется *счетно полным*, если для любых $a_i \in D$, $i \in \omega$, множество $\bigcap_{i \in \omega} a_i$ принадлежит D . Ясно, что любой главный фильтр D на I является счетно полным. Показать, что на множестве ω не существует неглавного счетно полного ультрафильтра.
3. Пусть \tilde{D} — отношение эквивалентности на B из упражнения 1. Пусть $B(D) = \{\tilde{D}_b \mid b \in B\}$ (множество \tilde{D}_b определено в § 2.1 и равно $\{a \mid a \tilde{D} b, a \in B\}$). Определим на $B(D)$ операции \cup, \cap, \neg следующим образом:

$$\text{а) } m_1 \cup m_2 = \tilde{D}_{a_1 \cup a_2}, \quad \text{б) } m_1 \cap m_2 = \tilde{D}_{a_1 \cap a_2}, \quad \text{в) } \overline{m}_1 = \tilde{D}_{\bar{a}_1},$$

где $a_i \in m_i$, $i = 1, 2$. Показать, что такое определение не зависит от выбора элементов $a_i \in m_i$ и $\langle B(D), \cup, \cap, \neg \rangle$ является булевой алгеброй.

§ 2.4. Мощность множества

Для бесконечных множеств обобщением понятия числа элементов может служить понятие мощности.

Определение. Будем говорить, что *мощность множества A меньше или равна мощности множества B* (и обозначать $|A| \leq |B|$), если существует инъективное отображение $f: A \rightarrow B$. Говорим, что *мощности множеств A и B равны* или что *A и B равномощны* (обозначаем $|A| = |B|$), если существует биективное отображение A на B .

Заметим, что мы пока не определили, что такое мощность множества A , а определили только два двухместных отношения на множествах. Именно эти отношения и являются основными понятиями этого параграфа, а введенная ниже мощность появляется лишь для удобства изложения.

Отметим некоторые свойства введенных отношений, вытекающие непосредственно из определения:

- $|A| \leq |A|$;
- $(|A| \leq |B| \text{ и } |B| \leq |C|) \implies |A| \leq |C|$;
- $|A| = |B| \implies (|A| \leq |B| \text{ и } |B| \leq |A|)$.

Следующая теорема показывает, что в свойстве в) можно заменить \implies на \iff .

Теорема 2.4.1 (Кантора–Бернштейна). *Если для множеств A и B выполнено $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.*

Доказательство. Пусть $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ — инъективные отображения. По принципу кардинального упорядочения существуют отношения $U \subseteq A^2$ и $V \subseteq B^2$, для которых $\langle A, U \rangle$ и $\langle B, V \rangle$ — кардинально упорядоченные множества. По теореме об изоморфизме вполне упорядоченных множеств и симметричности условий теоремы для A и B можно считать, что существует биективное отображение h множества A на начальный отрезок X вполне упорядоченного множества $\langle B, V \rangle$. Отображение $g \cdot h$ будет инъективно отображать B в X . Из кардинальной упорядоченности $\langle B, V \rangle$ получаем $X = B$. Таким образом, h — биективное отображение A на B . \square

Теорема 2.4.2 (Кантора). *Для любого множества A условие $|P(A)| \leq |A|$ не имеет места.*

Доказательство. Предположим, что существует инъективное отображение $f: P(A) \rightarrow A$. Рассмотрим множество

$$K = \{f(X) \mid f(X) \notin X, X \subseteq A\}.$$

Если $f(K) \in K$, то из определения K получаем $f(K) \notin K$. Если $f(K) \notin K$, то по определению множества K получаем $f(K) \in K$. Полученное противоречие показывает, что такое f не существует. \square

Теорема 2.4.3 (о сравнении множеств по мощности). Для любых множеств A и B либо $|A| \leq |B|$, либо $|B| \leq |A|$.

Доказательство. По теореме 2.2.7 существуют такие $U \subseteq A^2$ и $V \subseteq B^2$, что $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, V \rangle$ — вполне упорядоченные множества. Утверждение теоремы теперь следует из теоремы 2.2.13. \square

§ 2.5. Ординалы и кардиналы

В дальнейшем мы будем использовать аксиому регулярности, утверждающую, что в любом множестве X есть элемент $a \in X$, не имеющий общих с X элементов, т. е. $a \cap X = \emptyset$.

Определение. Множество X называется *транзитивным*, если для любого $b \in X$ выполнено $b \subseteq X$.

Из аксиомы регулярности вытекает, что любое транзитивное множество содержит в качестве своего элемента пустое множество \emptyset . Из этой аксиомы также следует, что не существует множества $\{a_n \mid n \in \omega\}$ с условием $a_{n+1} \in a_n$. В частности, не существует множества X с условием $X \in X$.

Для множества X определим двухместное отношение $\varepsilon(X)$, состоящее из таких пар $\langle a, b \rangle \in X^2$, что $a \in b$ или $a = b$.

Из аксиомы регулярности получаем, что если отношение $\varepsilon(X)$ транзитивно, то $\langle X, \varepsilon(X) \rangle$ — фундированное частично упорядоченное множество. В частности, если $\langle X, \varepsilon(X) \rangle$ — линейно упорядоченное множество, то $\langle X, \varepsilon(X) \rangle$ — вполне упорядоченное множество.

Определение. Множество α называется *ординалом*, если оно транзитивно и $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ — линейно упорядоченное множество.

Предложение 2.5.1 (свойства ординалов).

- 1). Элементы ординала являются ординалами.
- 2). Если α — ординал и $\beta \in \alpha$, то $\beta = O(\beta, \langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle)$.
- 3). Если α — ординал и X — собственный начальный отрезок $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$, то $X \in \alpha$.

4). Если α, β — ординалы и $\alpha \neq \beta$, то $\alpha \in \beta$ или $\beta \in \alpha$.

5). Если X — множество ординалов, то $\bigcup X$ — ординал и $\langle X, \varepsilon(X) \rangle$ — вполне упорядоченное множество.

Доказательство. 1). Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Из транзитивности α следует $\beta \subseteq \alpha$, поэтому $\langle \beta, \varepsilon(\beta) \rangle$ — линейно упорядоченное множество. Для доказательства транзитивности β возьмем произвольные $\gamma \in \beta$ и $\delta \in \gamma$. Предположим, что $\delta \notin \beta$. Так как $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ — линейно упорядоченное множество, то $\beta \in \delta$, т. е. $\beta \in \delta$ или $\beta = \delta$. В обоих случаях множество $\{\beta, \gamma, \delta\}$ будет противоречить аксиоме регулярности.

2). Из определения отношения $\varepsilon(\beta)$ получаем $\beta \subseteq O(\beta, \langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle)$. Обратное включение следует из определений начального отрезка $O(\beta, \langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle)$ и отношения $\varepsilon(\beta)$.

3). Так как $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ — вполне упорядоченное множество, то существует наименьший элемент a_0 в $\langle (\alpha \setminus X), \varepsilon(\alpha \setminus X) \rangle$. Покажем, что $X = a_0$. Условие $a_0 \subseteq X$ следует из транзитивности α и минимальности элемента a_0 . Для доказательства включения $X \subseteq a_0$ возьмем произвольный $a \in X$. Предположим, что $a \notin a_0$. По определению отношения $\varepsilon(\alpha)$ и линейной упорядоченности $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ мы имеем $a_0 \varepsilon a$. Так как X — начальный отрезок $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$, то $a_0 \in X$, что противоречит выбору a_0 .

4). Предположим, что $\alpha \neq \beta$, $\alpha \notin \beta$ и $\beta \notin \alpha$. Пусть X — объединение всех общих начальных отрезков $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ и $\langle \beta, \varepsilon(\beta) \rangle$. Тогда X — собственный общий начальный отрезок $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ и $\langle \beta, \varepsilon(\beta) \rangle$. Из свойств 2) и 3) получаем, что $X \cup \{X\}$ — также общий начальный отрезок $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ и $\langle \beta, \varepsilon(\beta) \rangle$. Получаем противоречие с выбором X и условием $X \notin X$.

5). Транзитивность множества $\bigcup X$ следует из транзитивности элементов X . Линейная упорядоченность $\langle \bigcup X, \varepsilon(\bigcup X) \rangle$ получается из свойств 1) и 4). Вполне упорядоченность $\langle X, \varepsilon(X) \rangle$ вытекает из свойства 4) и аксиомы регулярности. \square

Если α — ординал, то ясно, что множество $\alpha \cup \{\alpha\}$ также является ординалом, который будем обозначать через $\alpha + 1$.

Ординал, отличный от \emptyset и не имеющий вид $\alpha + 1$, называется *пределальным*. Ясно, что ординал $\delta \neq \emptyset$ тогда и только тогда является предельным, когда $\bigcup \delta = \delta$.

Ординал называется *конечным* или *натуральным числом*, если он не является предельным и каждый его элемент также не является предельным.

Очевидно, что множества:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

(каждый последующий содержит все предыдущие) будут натуральными числами, которые мы будем обозначать как обычно через $0, 1, 2, 3, \dots$.

Из свойств ординалов 1) и 2) вытекает, что элементы натуральных чисел являются натуральными числами. Таким образом, множество ω всех натуральных чисел транзитивно. Из свойства 5) получаем, что ω — ординал. Множество натуральных чисел ω можно также определить как такой ординал, все элементы которого не предельны.

Теорема 2.5.2 (о представлении вполне упорядоченных множеств). Для любого вполне упорядоченного множества $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ существует единственный ординал $\alpha(\mathfrak{A})$ такой, что $\langle \alpha(\mathfrak{A}), \varepsilon(\alpha(\mathfrak{A})) \rangle$ изоморфно \mathfrak{A} .

Доказательство. Единственность следует из предложения 2.2.11, так как в силу предложения 2.5.1 из любых двух различных ординалов α, β один является начальным отрезком другого. Рассмотрим множество $X \subseteq A$ всех таких $a \in A$, что существует ординал $\alpha(a)$ и изоморфизм f_a вполне упорядоченного множества $\langle \alpha(a), \varepsilon(\alpha(a)) \rangle$ на $\langle O[a], U \cap (O[a])^2 \rangle$, где $O[a] = O[a, \mathfrak{A}]$. По предложению 2.2.11 изоморфизм f_a определен по $a \in X$ однозначно. Пусть $c \in X$ и $\langle b, c \rangle \in U$. Очевидно, что $\alpha_0 = \{f_c^{-1}a \mid a \in O[b]\}$ — ординал. Так как $f_c \upharpoonright \alpha_0$ — изоморфизм $\langle \alpha_0, \varepsilon(\alpha_0) \rangle$ на $\langle O[b], U \cap (O[b])^2 \rangle$, то $b \in X$ и $f_b = f_c \upharpoonright \alpha_0$, следовательно, $f_b \subseteq f_c$. Таким образом, отображение $f_0 = \bigcup\{f_a \mid a \in X\}$ будет изоморфизмом $\langle \beta_0, \varepsilon(\beta_0) \rangle$ на $\langle X, U \cap X^2 \rangle$, где β_0 — ординал, равный $\bigcup\{\alpha(a) \mid a \in X\}$. Если $X = A$, то все доказано. Предположим, что $X \neq A$. Так как X — начальный отрезок \mathfrak{A} и так как \mathfrak{A} — вполне упорядоченное множество, то существует такое $a_0 \in A$, что $X = O(a_0)$. Очевидно, что $f_0 \cup \{\langle \beta_0, \alpha_0 \rangle\}$ является изоморфизмом ординала $\beta_0 \cup \{\beta_0\}$ на $X \cup \{a_0\} = O[a_0]$, поэтому $a_0 \in X$, что противоречит выбору a_0 . \square

Ординал $\alpha(\mathfrak{A})$ из предыдущей теоремы назовем *типом вполне упорядоченного множества \mathfrak{A}* .

Будем говорить, что ординал β *меньше* ординала α (обозначать $\beta < \alpha$), если $\beta \in \alpha$. Если $\beta < \alpha$ или $\beta = \alpha$, то будем писать $\beta \leqslant \alpha$. В силу предложения 2.5.1 любое множество ординалов вполне упорядочено отношением \leqslant . Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — ординалы, то наибольший по отношению \leqslant элемент множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ будем обозначать через $\max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Определение. Ординал κ называется *кардиналом*, если он не является равномощным никакому меньшему ординалу.

Заметим, что ординал α является кардиналом тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \varepsilon(\alpha) \rangle$ — кардинально упорядоченное множество.

Предложение 2.5.3. *Натуральные числа и множество ω всех натуральных чисел являются кардиналами.*

Доказательство. Так как \emptyset не имеет подмножеств, отличных от \emptyset , то \emptyset — кардинал. Предположим, что утверждение не верно и пусть $n + 1$ — наименьшее натуральное число, не являющееся кардиналом. Пусть $f: n + 1 \rightarrow n + 1$ — инъективное отображение и $n \notin \text{rang } f$. Если $n - 1 \notin \text{rang } f$ или $f(n) = n - 1$, то $f|_n$ отображает n в подмножество $w \subseteq n$, $n - 1 \notin w$, что невозможно по минимальности $n + 1$. (Напомним, что $n + 1 = \{0, 1, \dots, n\}$.) Если $f(k_0) = n - 1$, $k_0 < n$, то определим отображение $g: n \rightarrow n$, для которого $g(i) = f(i)$ для $i < n$, $i \neq k_0$, и $g(k_0) = f(n)$. Ясно, что g инъективно отображает n в $v \subseteq n$, $n - 1 \notin v$, что опять противоречит минимальности $n + 1$. Если бы ω не был кардиналом, то $|\omega| \leq |n|$ для некоторого натурального числа n . Тогда было бы $|n + 1| \leq |\omega| \leq |n|$, т. е. $n + 1$ — не кардинал, что противоречит предыдущему. \square

Следующая теорема позволяет выделить среди равномощных множеств канонического представителя — кардинал.

Теорема 2.5.4. *Для любого множества X существует единственный кардинал $|X|$, равномощный X .*

Доказательство. Единственность X следует из определения кардинала, так как по свойствам ординалов из двух неравных ординалов один из них является собственным начальным отрезком другого.

По принципу полного упорядочения и теореме о представлении вполне упорядоченных множеств существует ординал α_0 , равномощный X . В качестве $|X|$ берем ординал $\beta \leq \alpha_0$, равномощный α_0 , все элементы которого не равномощны α_0 . Такой ординал существует по вполне упорядоченности $\langle \alpha_0, \varepsilon(\alpha_0) \rangle$. \square

Определение. Для множества X кардинал $|X|$ из теоремы 2.5.4 называется *мощностью множества X* .

Очевидно, что $|\alpha| \leq \alpha$ для ординала α и α тогда и только тогда является кардиналом, когда $|\alpha| = \alpha$. Заметим, что определенное в начале параграфа отношение $|X| \leq |Y|$ на множествах X и Y соответствует отношению \leq на кардиналах $|X|$ и $|Y|$, введенному выше так: $\kappa_1 \leq \kappa_2 \iff (\kappa_1 \in \kappa_2 \text{ или } \kappa_1 = \kappa_2)$. Дадим точное определение свойства быть конечным множеством, которым ранее мы пользовались интуитивно.

Определение. Множество X называется *конечным*, если $|X| \in \omega$, и *счетным*, если $|X| = \omega$.

Если X — не конечное множество, то говорим, что X бесконечно. Заметим, что существуют бесконечные несчетные множества, более того, в силу теоремы Кантора мощность любого множества X меньше мощности множества $P(X)$. Так как ω — наименьший бесконечный кардинал, то счетные множества имеют наименьшую мощность среди бесконечных множеств. Очевидно, что конечное или счетное множество X можно представить в виде $X = \{a_n \mid n \in \omega\}$, при этом последовательность

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, n \in \omega,$$

будем называть *нумерацией множества X* . Ясно, что если $Y \subseteq X$, то $|Y| \leq |X|$.

Заметим, что бесконечный кардинал κ не может иметь вид $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. В самом деле, предположим, что $\kappa = \alpha + 1$. Так как κ бесконечен, то $\kappa \notin \omega$ и, по свойствам ординалов, ω — начальный отрезок $\langle \alpha + 1, \varepsilon(\alpha + 1) \rangle$, поэтому отображение $f: \alpha + 1 \rightarrow \alpha$, для которого

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta, & \text{если } \beta \notin \omega \cup \{\alpha\}, \\ \emptyset, & \text{если } \beta = \alpha, \\ \beta + 1, & \text{если } \beta \in \omega, \end{cases}$$

будет инъективно отображать $|\alpha + 1|$ на α . Это противоречит тому, что $\alpha + 1$ — кардинал. \square

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 2.5.5. *Если множество A бесконечно, то $|A| = |A^2|$.*

Доказательство. Отображение $f: A \rightarrow A^2$, для которого $f(a) = \langle a, a \rangle$, будет инъективным, следовательно, $|A| \leq |A^2|$. Предположим, что $|A^2| \leq |A|$ не выполняется. Тогда множество

$$X = \{\alpha \mid \alpha \text{ — бесконечный кардинал, } \alpha \leq |A| \text{ и } \alpha < |\alpha^2|\}$$

не пусто, и пусть α_0 — наименьший элемент множества X . Определим на множестве α_0^2 отношение \preccurlyeq :

$$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle \preccurlyeq \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \iff \begin{cases} \max\{\beta_1, \beta_2\} < \max\{\gamma_1, \gamma_2\} \text{ или} \\ \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}, \beta_1 < \gamma_1, \text{ или} \\ \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}, \beta_1 = \gamma_1, \beta_2 \leq \gamma_2. \end{cases}$$

Очевидно, что \preccurlyeq — линейный порядок на α_0^2 . Кроме того $\langle \alpha_0^2, \preccurlyeq \rangle$ — вполне упорядоченное множество, так как для любого непустого подмножества $Y \subseteq \alpha_0^2$ существуют непустые подмножества

$$Y_1 = \{\langle \beta, \gamma \rangle \in Y \mid \max\{\beta, \gamma\} \leq \max\{\beta', \gamma'\} \text{ для любого } \langle \beta', \gamma' \rangle \in Y\},$$

$$Y_2 = \{\langle \beta, \gamma \rangle \in Y_1 \mid \beta \leq \beta' \text{ для любого } \langle \beta', \gamma' \rangle \in Y_1\},$$

$$Y_3 = \{\langle \beta, \gamma \rangle \in Y_2 \mid \gamma \leq \gamma' \text{ для любого } \langle \beta', \gamma' \rangle \in Y_2\},$$

и очевидно, что Y_3 содержит ровно один элемент и он является наименьшим по отношению \preccurlyeq элементом Y .

Так как $\alpha_0 < |\alpha_0^2|$, то по теореме об изоморфизме вполне упорядоченных множеств и свойствам начальных отрезков вполне упорядоченных множеств $\langle \alpha_0, \varepsilon(\alpha_0) \rangle$ изоморфно $\langle Z, \varepsilon(Z) \rangle$ для собственного начального отрезка Z вполне упорядоченного множества $\langle \alpha_0^2, \preccurlyeq \rangle$. Пусть $\langle \beta_0, \gamma_0 \rangle \in \alpha_0^2 \setminus Z$ и $\delta_0 = \max\{\beta_0, \gamma_0\}$. Очевидно, что $Z \subseteq (\delta_0 + 1)^2$. Так как α_0 бесконечно, то Z и δ_0 также бесконечны и $|\delta_0 + 1| = |\delta_0| < \alpha_0$. Тогда по минимальности кардинала α_0 мы имеем

$$\alpha_0 = |Z| \leq |(\delta_0 + 1)^2| \leq |\delta_0 + 1| < \alpha_0.$$

Получили противоречие. \square

Следствие 2.5.6. Пусть A, B — множества и хотя бы одно из них бесконечно, тогда

- Если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$;
- $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$.

Доказательство. Пусть $|A| = \max\{|A|, |B|\}$.

a). Пусть $b_0 \in B$. Тогда отображение $f: A \rightarrow A \times B$, для которого $f(a) = \langle a, b_0 \rangle$, инъективно, поэтому $|A| \leq |A \times B|$. Из $|B| \leq |A|$ и предыдущей теоремы получаем

$$|A \times B| \leq |A|^2 = |A|.$$

б). Очевидно, что $|A| \leq |A \cup B|$. Пусть $f: B \rightarrow A$ — инъективное отображение, тогда отображение $g: A \cup B \rightarrow A \times \{0, 1\}$, для которого

$$g(a) = \begin{cases} \langle a, 0 \rangle, & \text{если } a \in A, \\ \langle fa, 1 \rangle, & \text{если } a \in B \setminus A, \end{cases}$$

будет инъективным, поэтому из утверждения а) получаем

$$|A \cup B| \leq |A \times \{0, 1\}| = |A|. \quad \square$$

Следствие 2.5.7. а). Если множество A бесконечно, то $|A^k| = |A|$ для любого натурального $k > 0$.

б). Если A бесконечно и $A^* = \bigcup\{A^k \mid k \in \omega\}$, то $|A^*| = |A|$.

в). Если W — множество слов алфавита $A \neq \emptyset$, то $|W| = \max\{|A|, \omega\}$.

Доказательство. а) выводится из следствия 2.5.6, а), индукцией по k .

б). Пусть $a_0 \in A$ и $f_k: A^k \rightarrow A$, $0 < k < \omega$, — инъективные отображения, существующие в силу утверждения а). Тогда отображение $f: A^* \rightarrow \omega \times A$, для которого

$$fa = \begin{cases} \langle 0, a_0 \rangle, & \text{если } a = \emptyset \in A^0, \\ \langle k, f_k a \rangle, & \text{если } a \in A^k \setminus (A^0 \cup \dots \cup A^{k-1}), k > 0, \end{cases}$$

будет инъективным, поэтому в силу следствия 2.5.6, а), получаем $|A^*| \leq |\omega \times A| = |A|$. Обратное неравенство $|A| \leq |A^*|$ очевидно.

б). Так как для $a \in A$ слова a , aa , aaa , ... попарно различны, то $\omega \leq |W|$. Если A бесконечно, то утверждение в) следует из утверждения б). Если $|A| = n \in \omega$, то очевидно, что $|W| \leq |\omega^*|$, и снова по б) получаем $|W| \leq \omega$. \square

Упражнения

- Показать, что множества целых, рациональных и алгебраических чисел счетны.
- Показать, что множества действительных и комплексных чисел равномощны, а множества действительных и натуральных чисел не равномощны. (Указание. Заметить, что мощность множества действительных чисел равна $|P(\omega)|$, и применить теорему Кантора.)

§ 2.6. Аксиоматическая теория множеств ZF и аксиома выбора

Определим множества V_α , где α — ординал, следующим образом:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_\alpha = P(V_\beta)$, если $\alpha = \beta + 1$;
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, если α — предельный ординал.

Множество X , для которого существует ординал α с условием $X \in V_\alpha$, назовем *регулярным*. Регулярному множеству X можно сопоставить ординал $\rho(X)$, который называется *рангом* X и определяется как наименьший ординал, для которого $X \in V_{\rho(X)}$. Очевидно, что если $X \in Y$, то $\rho(X) < \rho(Y)$, и если все элементы множества Y регулярны, то само множество Y регулярно и $\rho(Y) = (\bigcup \{\rho(X) \mid X \in Y\}) + 1$. Отсюда получаем, что если множество Y_0 не регулярно, то оно имеет некоторый нерегулярный элемент Y_1 . Продолжая этот процесс, получаем последовательность $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$, для которой $Y_{n+1} \in Y_n$, $n \in \omega$.

Напомним, что аксиома регулярности утверждает, что в любом непустом множестве X существует элемент $a \in X$, для которого выполнено $X \cap a = \emptyset$. Если бы указанная выше последовательность существовала, то множество $\{Y_n \mid n \in \omega\}$ противоречило бы аксиоме регулярности. Таким образом, в силу аксиомы регулярности все множества регулярны, т. е. каждое множество получается на некотором шаге «регулярного процесса», при котором, исходя из пустого множества, на каждом шаге получаются все множества, элементы которых уже получены на предыдущих шагах. Это вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями об образовании множеств.

Аксиомы экстенсиональности и регулярности налагают определенные условия на отношение \in (принадлежности) и $=$ (равенства), т. е. в определенном смысле ограничивают «универсум», состоящий из множеств. Аксиома выбора, наоборот, утверждает, что в этом «универсуме» должны существовать определенные множества, если некоторые уже существуют. Однако в доказательствах мы свободно пользовались и другими условиями существования множеств, например, мы обозывали объединение $A \cup B$ двух множеств A и B , рассматривали множество-степень $P(A)$, считали, что в нашем распоряжении «имеются» натуральные числа $n \in \omega$.

Все условия существования множеств, которые мы использовали (кроме аксиомы выбора), вытекают из следующих аксиом «существования»:

- 1). Существует пустое множество \emptyset .
- 2). Если существуют множества a и b , то существует множество $\{a, b\}$.
- 3). Если существует множество X , то существует множество $\bigcup X = \{t \mid t \in x \text{ для некоторого } x \in X\}$.
- 4). Существует множество $\omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$, где $0 = \emptyset$ и $n + 1 = = n \cup \{n\}$.
- 5). Если существует множество A , то существует множество $P(A) = = \{B \mid B \subseteq A\}$.
- 6). Если $\Phi(x, y)$ — некоторое условие на множества x, y такое, что для любого множества x существует не более одного множества y , удовлетворяющего условию $\Phi(x, y)$, то для любого множества a существует множество

$$\{b \mid \Phi(c, b) \text{ для некоторого } c \in a\}.$$

Пример 2.6.1. Покажем, что из аксиом 2), 5) и 6) следует существование множества $A^2 = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A\}$ для любого множества A .

Так как $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, то $A^2 \subseteq P(P(A))$. Пусть

$\Phi_0(x, y) \iff$ (существуют такие $a, b \in A$,

что $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ и $y = x$).

Ясно, что для любого множества x существует не более одного множества y , удовлетворяющего условию $\Phi(x, y)$, поэтому по аксиомам 5) и 6) множество $\{b \mid \Phi_0(c, b), c \in P(P(A))\}$ существует и по аксиоме 2) оно совпадает с множеством A^2 .

Систему аксиом 1)–6) вместе с аксиомами экстенсиональности и регулярности называют *системой аксиом Цермело–Френкеля* и обозначают через ZF. Систему ZF вместе с аксиомой выбора обозначают через ZFC.¹⁾

В рамках теории ZFC можно изложить все общепринятые в современной математике способы рассуждений. Можно даже сказать, что на современном этапе развития математики такая «переводимость» в ZFC является мерилом математической строгости. (Правда, это оспаривается интуиционистами и конструктивистами, но их воззрений мы в этой книге не касаемся.) Таким образом, формальный вывод из аксиом ZFC можно принять в качестве разумного уточнения понятия математического доказательства²⁾. Точная формулировка этого понятия имеет большое значение и составляет одну из центральных задач математической логики. Только при наличии соответствующих точных определений можно установить недоказуемость и независимость некоторых утверждений. Так, было доказано, что множеству действительных чисел можно без противоречия приписать практически любую мощность. То обстоятельство, что правильность формального доказательства легко проверить на машине, явилось отправным пунктом для перспективных исследований по машинному поиску доказательств. Исторически главную роль в создании ZFC сыграли противоречия «навивной» теории множеств. Как же обстоят дела с непротиворечивостью ZFC? В рамках ZFC никаких противоречий до сих пор не обнаружено. С другой стороны, было доказано, что если ZFC непротиворечива, этот факт нельзя установить средствами этой теории. Таким образом, непротиворечивость ZFC можно только принять на веру, что мы и будем делать.

1) Для точного определения понятия условия $\Phi(x, y)$ в аксиоме 6) мы отсылаем читателя к понятию формулы сигнатуры Σ_0 , содержащей лишь один двухместный предикатный символ \in (см. гл. 3). Заметим, что все аксиомы ZFC можно записать в виде предложений сигнатуры Σ_0 .

2) Под формальным выводом понимается вывод в исчислении предикатов (см. § 4.5).

В ZFC имеется семь аксиом, утверждающих существование некоторых множеств. Аксиома выбора среди них занимает особое место. Она, по-видимому, является наименее «очевидной». Дело в том, что множества, существование которых утверждается в аксиомах 1)–6), определяются однозначно (например, сумма множества $\bigcup X$ однозначно определена по X), функция же выбора для непустых подмножеств X определена неоднозначно. Более того, если существует условие, определяющее однозначно функцию выбора для непустых подмножеств X , то тогда существование функции выбора для $P(X) \setminus \{\emptyset\}$ можно вывести без аксиомы выбора (т. е. в ZF). Наличие такой неопределенности объекта, существование которого утверждает эта аксиома, а также некоторые ее следствия, не согласующиеся с «наивной» интуицией, вызвало многочисленные споры вокруг аксиомы выбора среди математиков в начале XX в. Некоторые даже считали, что она наверняка должна привести к противоречию. Однако после результата К. Гёделя о равненпротиворечивости ZF и ZFC эти споры, в основном, утихли. Тем не менее, до сих пор иногда стараются приводить, если это возможно, доказательства, не использующие аксиому выбора, считая такое доказательство более «конструктивным». Отметим также доказанную П. Коэном равненпротиворечивость ZF и ZF+ (отрицание аксиомы выбора).

Оставшуюся часть параграфа мы посвятим теореме, показывающей, что аксиома выбора эквивалентна (в ZF) некоторым своим следствиям, доказанным в предыдущих параграфах.

Теорема 2.6.2. *Из аксиом ZF можно вывести эквивалентность следующих утверждений:*

а) *аксиома выбора: для любого непустого множества A существует такое отображение $h: (P(A) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow A$, что $h(B) \in B$ для всех $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$;*

б) *принцип максимума: если в частично упорядоченном множестве $\mathfrak{A} = \langle A, U \rangle$ каждая цепь имеет верхнюю грань, то \mathfrak{A} имеет максимальный элемент;*

в) *принцип полного упорядочения: для любого множества A существует отношение $U \subseteq A^2$, для которого $\langle A, U \rangle$ — вполне упорядоченное множество;*

г) *если множество A бесконечно, то $|A^2| = |A|$.*

д) *сравнимость множеств по мощности: для любых множеств A и B выполнено $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$.*

Доказательство. В силу доказанных выше теорем, из аксиомы выбора следуют утверждения б)–д). В доказательстве принципа полно-

го упорядочения сама аксиома выбора не используется, а используется только принцип максимума, поэтому мы имеем б) \Rightarrow в).

в) \Rightarrow а). Пусть $\langle A, U \rangle$ — вполне упорядоченное множество. В качестве значения $h(X)$ функции выбора h берем наименьший по отношению U элемент множества $\langle X, X \cap U \rangle$. Эта функция существует в силу аксиомы 6).

г) \Rightarrow в). Предположим, что утверждение г) выполнено. Так как для любого вполне упорядоченного множества $\langle B, V \rangle$ и любого $C \subseteq B$ пара $\langle C, C^2 \cap V \rangle$ — вполне упорядоченное множество, то для доказательства в) достаточно найти инъективное отображение $g : A \rightarrow B$ для некоторого вполне упорядоченного множества $\langle B, V \rangle$. Предположим, что это не так. В частности, не существует инъективного отображения множества A ни в какой ординал.

Так как, по определению, конечные множества биективно отображаются на ординалы, которые вполне упорядочены отношением ϵ , то множество A бесконечно.

Из аксиомы 6) вытекает существование множества

$$W = \{U \subseteq A^2 \mid \langle D(U), U \rangle \text{ — вполне упорядоченное множество}\},$$

где $D(U) = \{a \in A \mid \langle a, b \rangle \in U \text{ или } \langle b, a \rangle \in U \text{ для некоторого } b \in A\}$. Доказательство теоремы о представлении вполне упорядоченных множеств не зависит от аксиомы выбора, поэтому по аксиоме 6) существует множество

$$V = \{\alpha(U) \mid U \in W, \alpha(U) \text{ — тип множества } \langle D(U), U \rangle\}.$$

Ясно, что V равно множеству $\{\alpha \mid \alpha \text{ — ординал и } |\alpha| \leq |A|\}$. По свойствам ординалов $\alpha_0 = \bigcup V$ является ординалом. Установим, что $|\alpha_0| \leq |A|$. Индукцией по натуральным числам легко устанавливается, что $|n| \leq |A|$, поэтому ординал α_0 бесконечен. Тогда $|\alpha_0 + 1| = |\alpha_0|$ и если $|\alpha_0| \leq |A|$, то $|\alpha_0 + 1| \leq |A|$, $\alpha_0 + 1 \in V$ и $\alpha_0 \in \bigcup V = \alpha_0$, что противоречит аксиоме регулярности.

Очевидно, что $\alpha_0 \times A \subseteq (\alpha_0 \cup A)^2$. Из условия г) мы имеем $|(\alpha_0 \cup A)^2| = |(\alpha_0 \cup A)|$, следовательно, существует инъективное отображение $f : \alpha_0 \times A \rightarrow (\alpha_0 \cup A)$. Так как $|\alpha_0| \leq |A|$, то для любого $a \in A$ мы имеем $(f[\alpha_0 \times \{a\}] \cap \alpha_0) \neq \emptyset$. Определим отображение $g : A \rightarrow \alpha_0$ следующим образом: для $a \in A$ элемент $g(a)$ является наименьшим во вполне упорядоченном множестве $\langle (f[\alpha_0 \times \{a\}] \cap \alpha_0), \epsilon \rangle$. Из инъективности отображения f следует инъективность отображения g . Это противоречит предположению о том, что A нельзя инъективно отобразить ни в какой ординал.

д) \Rightarrow в). Пусть α_0 — ординал, определенный в доказательстве г) \Rightarrow в). Так как $|\alpha_0| \leq |A|$, то по условию д) мы имеем $|A| \leq |\alpha_0|$. Как

уже отмечалось в начале доказательства утверждения $\text{г) } \Rightarrow \text{в)}$ из этого факта следует условие в). \square

Заметим, что доказательство теоремы Кантора не зависит от аксиомы выбора. В доказательстве теоремы Кантора–Бернштейна мы использовали следствие аксиомы выбора — принцип кардинального упорядочения. Однако при предположении непротиворечивости ZF список а)–д) из предыдущей теоремы нельзя расширить, добавив теорему Кантора–Бернштейна. Это следует из отмеченной выше равнонепротиворечивости ZF и ZF+ (отрицание аксиомы выбора) и того, что существует доказательство этой теоремы, не зависящее от аксиомы выбора.

Доказательство теоремы Кантора–Бернштейна, не зависящее от аксиомы выбора. Пусть $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ — инъективные отображения, $A_0 = A$, $A_1 = g[B]$ и $A_{n+2} = (fg)[A_n]$. Индукцией по n легко установить, что $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n \in \omega$. Пусть $D = \bigcap_{k \in \omega} A_k$ и $M_i = A_i \setminus A_{i+1}$. Очевидно, что $\left(\bigcup_{k \leq i \in \omega} M_i \right) \cup D = A_k$ и $M_i \cap M_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Так как $f \cdot g$ инъективно отображает M_i на M_{i+2} для любого $i \in \omega$, то отображение $h: A \rightarrow A$, определенное следующим образом:

$$ha = \begin{cases} a, & \text{если } a \in \left(\bigcup_{i \in \omega} M_{2i+1} \right) \cup D, \\ (fg)(a), & \text{если } a \in \bigcup_{i \in \omega} M_{2i}, \end{cases}$$

является инъективным отображением A на

$$\left(\bigcup_{1 \leq i \in \omega} M_i \right) \cup D = A_1.$$

Так как $|B| = |A_1|$, то получаем $|B| = |A|$. \square

Упражнение

- Показать, что аксиома выбора эквивалентна в ZF следующему утверждению: если M — разбиение множества A (см. пример 2.1.3), то существует отображение $g: M \rightarrow A$, для которого $g(m) \in m$, $m \in M$, $m \neq \emptyset$. (Указание. Рассмотреть разбиение $\{m(B) \mid B \in P(A) \setminus \{\emptyset\}\}$, где $m(B) = \{\langle B, a \rangle \mid a \in B\}$.)

Г л а в а 3

ИСТИННОСТЬ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

§ 3.1. Алгебраические системы

Часто объектом изучения в математике служит множество вместе с определенной на нем структурой, например, множество треугольников с отношением подобия, множество действительных чисел с операциями сложения и умножения, множество вещественных функций со свойством дифференцируемости и операцией дифференцирования и другие. В этом параграфе мы дадим одно из уточнений этого понятия, введя определение алгебраической системы.

Определение. Упорядоченная тройка $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ называется *сигнатурой*, если выполняются следующие условия:

- множества R и F не имеют общих элементов;
- μ является отображением множества $R \cup F$ в ω .

Элементы множества R называются *символами отношений* или *предикатов*. Элементы множества F называются *символами операций* или *функций*. Отображение μ называется *отображением местности* или *арности* для Σ . Если $\mu(q) = n$, то q называется *n-местным предикатным символом* при $q \in R$ и *n-местным функциональным символом* при $q \in F$, 0-местный функциональный символ называется *символом константы* или просто *константой*.

Часто для удобства будем представлять конечную или счетную сигнатуру $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ в виде

$$\Sigma = \langle r_1^{\mu(r_1)}, \dots, r_n^{\mu(r_n)}, \dots; f_1^{\mu(f_1)}, \dots, f_k^{\mu(f_k)}, \dots; c_1, \dots, c_m, \dots \rangle$$

или просто

$$\Sigma = \langle r_1, \dots, r_n, \dots; f_1, \dots, f_k, \dots; c_1, \dots, c_m, \dots \rangle,$$

где r_i , f_i — символы отношений и функций, не являющихся константами, c_k — константы сигнатуры Σ . Все сигнатуры в дальнейшем будут обозначаться буквой Σ (возможно, с индексами), множество их символов отношений — через R , множество символов операций — через F ,

а отображение арности — через μ (с соответствующими индексами). Будем говорить, что сигнатура Σ содержится в сигнатуре Σ_1 (обозначаем $\Sigma \subseteq \Sigma_1$), если $R \subseteq R_1$, $F \subseteq F_1$ и $\mu \subseteq \mu_1$. Если $X \subseteq R \cup F$, то сигнитуру $\Sigma_1 = \langle R \cap X, F \cap X, \mu \upharpoonright X \rangle$ назовем *ограничением сигнитуры Σ на множество X* (обозначаем $\Sigma_1 = \Sigma \upharpoonright X$). Мощность множества $R \cup F$ называется мощностью сигнитуры $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ и обозначается через $|\Sigma|$. Если $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ $n \in \omega$, то через $\bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$ обозначаем сигнитуру $\langle \bigcup_{n \in \omega} R_n, \bigcup_{n \in \omega} F_n, \bigcup_{n \in \omega} \mu_n \rangle$.

Если $R \cup F \neq \emptyset$ и $F = \emptyset$ ($R = \emptyset$), то сигнитура Σ называется *предикатной* (функциональной). Если $R \cup F = \emptyset$, то сигнитура Σ называется *пустой*.

Определение. Упорядоченная пара $\mathfrak{A} = \langle A, \nu^{\mathfrak{A}} \rangle$ называется *алгебраической системой сигнитуры Σ* , если выполняются следующие условия:

- A — непустое множество;
- $\nu^{\mathfrak{A}}$ — отображение множества $R \cup F$ в множество отношений и операций на множестве A ;
- $r \in R \implies \nu^{\mathfrak{A}}(r)$ является $\mu(r)$ -местным отношением на A ;
- $f \in F \implies \nu^{\mathfrak{A}} - \mu(f)$ -местная операция на A .

Множество A называется *носителем \mathfrak{A}* , $\nu^{\mathfrak{A}}$ — интерпретацией сигнитуры Σ в A . В дальнейшем вместо $\nu^{\mathfrak{A}}(r)$ будем часто писать просто $r^{\mathfrak{A}}$ или даже r , если ясно, о какой \mathfrak{A} идет речь.

Алгебраические системы в дальнейшем будут обозначаться готическими буквами $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ (возможно, с индексами), а их носители — соответствующими латинскими буквами A, B, \dots (с соответствующими индексами). *Мощностью алгебраической системы \mathfrak{A}* будем называть мощность ее носителя A . Для краткости будем часто опускать слово «алгебраическая» и называть \mathfrak{A} просто *системой*.

Определение. Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *гомоморфизмом* алгебраической системы \mathfrak{A} сигнитуры Σ в систему \mathfrak{B} той же сигнитуры Σ , если выполняются следующие условия:

- если $q \in R$ и $\mu(q) = n$, то для всех $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in q^{\mathfrak{A}} \implies \langle fa_1, \dots, fa_n \rangle \in q^{\mathfrak{B}};$$

- если $q \in F$ и $\mu(q) = n$, то для всех $a_1, \dots, a_n \in A$

$$f(q^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = q^{\mathfrak{B}}(fa_1, \dots, fa_n).$$

Если f — гомоморфизм \mathfrak{A} и \mathfrak{B} и $f[A] = B$, то f называется *гомоморфизмом \mathfrak{A} на \mathfrak{B}* , а \mathfrak{B} — *гомоморфным образом \mathfrak{A}* .

Инъективный гомоморфизм $f: \mathfrak{A}$ на \mathfrak{B} , для которого f^{-1} — также гомоморфизм, называется *изоморфизмом \mathfrak{A} на \mathfrak{B}* и обозначается через $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$. Если существует изоморфизм $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$, то системы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} называются *изоморфными* и обозначается это так: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Изоморфизм f системы \mathfrak{A} на \mathfrak{A} называется *автоморфизмом* системы \mathfrak{A} .

Предложение 3.1.1. а). *Если $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$, то $f^{-1}: \mathfrak{B} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.*

б). *Если $f: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_1$ и $g: \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_2$, то $(fg): \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_2$.*

в). $\text{id}_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

Доказательство получается непосредственно из определения изоморфизма. \square

Определение. Система \mathfrak{A} называется *подсистемой* системы \mathfrak{B} (обозначаем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если выполняются следующие условия:

- а) \mathfrak{A} и \mathfrak{B} имеют одну и ту же сигнатуру;
- б) $A \subseteq B$;
- в) множество A замкнуто относительно операций $\nu^{\mathfrak{B}}(f)$, $f \in F$;
- г) отношения и операции $\nu^{\mathfrak{A}}(q)$, $q \in R \cup F$, в \mathfrak{A} являются ограничением на A соответствующих отношений и операций $\nu^{\mathfrak{B}}(q)$, $q \in R \cup F$, в \mathfrak{B} .

Если $A \neq B$, то $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ называется *собственной подсистемой* \mathfrak{B} . Если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то \mathfrak{B} называется *надсистемой* \mathfrak{A} .

Ясно, что в определении подсистемы в) следует из г). Для удобства ссылок мы выписали в) отдельно.

Из определения подсистемы следует, что две подсистемы \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 системы \mathfrak{B} с одинаковыми носителями совпадают. С другой стороны, если непустое подмножество $B_1 \subseteq B$ замкнуто относительно операций системы \mathfrak{B} , то B_1 является носителем некоторой подсистемы $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$. Таким образом, существует инъективное отображение множества непустых замкнутых относительно операций \mathfrak{B} подмножеств носителя B на множество подсистем \mathfrak{B} . Это отображение можно продолжить на все непустые подмножества B . А именно, имеет место

Предложение 3.1.2. *Если \mathfrak{B} — алгебраическая система, $X \subseteq B$, $X \neq \emptyset$, то существует такая единственная подсистема $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{B}$ с носителем $B(X)$, что $X \subseteq B(X)$ и $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}$ для любой подсистемы $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, для которой $X \subseteq A$.*

Доказательство. В качестве $B(X)$ берем пересечение носителей A всех подсистем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, содержащих X . Так как $X \subseteq B(X)$, то $B(X) \neq \emptyset$. Как уже отмечалось выше, $B(X)$ является носителем единственной подсистемы $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{B}$. \square

Определение. Подсистема $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{B}$ из предложения 3.1.2 называется *подсистемой, порожденной множеством X в \mathfrak{B}* . Если

$X = \{a_1, \dots, a_n\}$, то $\mathfrak{B}(X)$ обозначаем также через $\mathfrak{B}(a_1, \dots, a_n)$. Если $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}$, то говорим, что система \mathfrak{B} порождается множеством X .

Множество алгебраических систем $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ называется *направленным множеством алгебраических систем*, если $I \neq \emptyset$ и для любых $i, j \in I$ существует $k \in I$, для которого $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_j \subseteq \mathfrak{A}_k$. Из определения следует, что все системы направленного множества систем имеют одну сигнатуру.

Предложение 3.1.3. *Если $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ — направленное множество алгебраических систем сигнатуры Σ , то существует единственная система \mathfrak{A} такая, что $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$ для всех $i \in I$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ для любой системы \mathfrak{B} , для которой $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{B}$, $i \in I$.*

Доказательство. Носителем \mathfrak{A} будет множество $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Пусть $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$. Тогда из определения направленного множества следует, что существует такое $i \in I$, что $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A_i$. Пусть $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ принадлежит $\nu^{\mathfrak{A}}(s)$, $s \in R \cup F$, когда $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ принадлежит $\nu^{\mathfrak{A}_i}(s)$. Такое определение не зависит от выбора $i \in I$, так как если $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A_j$, то существует такая \mathfrak{A}_k , что $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_j \subseteq \mathfrak{A}_k$. Следовательно, $\nu^{\mathfrak{A}_r}(r) \cap \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle\}$, $r \in R$, и $\nu^{\mathfrak{A}_r}(f)(a_1, \dots, a_n)$, $f \in F$, для $r \in \{i, j\}$ совпадают с соответствующими $\nu^{\mathfrak{A}_k}(r) \cap \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle\}$, $r \in R$, и $\nu^{\mathfrak{A}_k}(f)(a_1, \dots, a_n)$, $f \in F$. Остальные утверждения предложения 3.1 \mathfrak{A} очевидны. \square

Система \mathfrak{A} из предложения 3.1 называется *объединением систем* \mathfrak{A}_i , $i \in I$, и обозначается так: $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Определение. Алгебраическая система \mathfrak{A} сигнатуры Σ называется *обогащением системы* \mathfrak{A}_1 сигнатуры Σ_1 , если выполняются следующие условия:

- $A = A_1$;
- $\Sigma_1 = \Sigma \upharpoonright (R_1 \cup F_1)$;
- $\nu^{\mathfrak{A}_1} = \nu^{\mathfrak{A}} \upharpoonright (R_1 \cup F_1)$.

Если система \mathfrak{A} сигнатуры Σ является обогащением системы \mathfrak{A}_1 сигнатуры Σ_1 , то \mathfrak{A}_1 называется *обеднением системы* \mathfrak{A} до сигнатуры Σ_1 и обозначается через $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma_1$.

Если $\Sigma = \langle r_1, \dots, r_n, \dots; f_1, \dots, f_k, \dots; c_1, \dots, c_m, \dots \rangle$, то алгебраическую систему \mathfrak{A} сигнатуры Σ часто будем обозначать так: $\mathfrak{A} = \langle A, \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n, \dots; \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k, \dots; \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m, \dots \rangle$, где \underline{r}_n , \underline{f}_k , \underline{c}_m обозначают соответственно отношение $\nu^{\mathfrak{A}}(r_n)$, операцию $\nu^{\mathfrak{A}}(f_k)$ и значение константы $\nu^{\mathfrak{A}}(c_m)$ на множестве A .

Пример 3.1.4. Алгебраическая система $\mathfrak{N} = \langle N, +, \cdot; \underline{0}, \underline{1} \rangle$, где $N = \omega$ — множество натуральных чисел, $\underline{+}$ и \cdot — операции сложения

и умножения, $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1$, называется *арифметикой натуральных чисел* или просто *арифметикой*. Заметим, что \mathfrak{N} не имеет подсистем отличных от нее самой. Функциональная сигнатура $\Sigma_1 = \langle +^2, \cdot^2; 0, 1 \rangle$ называется *сигнатурой кольца с единицей*. Однако не все алгебраические системы сигнатуры Σ , будут кольцами. Для этого необходимо, чтобы операции удовлетворяли определенным условиям (аксиомам кольца). Арифметика \mathfrak{N} не является кольцом, а система $\mathfrak{Z} = \langle Z, \pm, \cdot; \underline{0}, \underline{1} \rangle$, где Z — множество всех целых чисел ($Z = \{0, 1, 2, \dots; -1, -2, \dots\}$), \pm, \cdot — операции сложения и умножения, $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1$, будет кольцом. Заметим, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{Z}$. Система \mathfrak{Z} называется *кольцом целых чисел*. Система $\mathfrak{R} = \langle R, \pm, \cdot; \underline{0}, \underline{1} \rangle$, где R — множество действительных чисел, \pm, \cdot — операции сложения и умножения, $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1$, также является кольцом. Система \mathfrak{Z} является подсистемой \mathfrak{R} .

Пример 3.1.5. Функциональная сигнатура $\Sigma_2 = \langle \cdot^2, (\underline{-1})^1; e \rangle$ называется *групповой*. Группой подстановок множества X называется система $\langle S(X), \cdot, (\underline{-1}); e \rangle$ сигнатуры Σ_2 , где $S(X)$ обозначает множество всех биективных отображений непустого множества X на себя, \cdot — композицию отображений, $(\underline{-1})$ — обращение отображения, e — тождественное отображение. Вообще, система $\mathfrak{A} = \langle A, \cdot, (\underline{-1}); e \rangle$ сигнатуры Σ_2 называется *группой*, если для любых $a, a_1, a_2 \in A$ в \mathfrak{A} выполняются следующие равенства:

$$1) a \cdot (a_1 \cdot a_2) = (a \cdot a_1) \cdot a_2,$$

$$2) a \cdot e = e \cdot a = a,$$

3) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$, где $\cdot(a, a_1)$, $(\underline{-1})(a)$ записаны более кратко как $a \cdot a_1$ и a^{-1} . Если для любых $a, a_1 \in A$ в \mathfrak{A} выполняется еще равенство

$$a \cdot a_1 = a_1 \cdot a,$$

то группа \mathfrak{A} называется *абелевой*. Часто, чтобы подчеркнуть, что группа \mathfrak{A} абелева, символы \cdot , $(\underline{-1})$ и e обозначаются через $+$, $(-)$ и 0 соответственно. Примером абелевой группы может служить группа целых чисел $\langle Z, \pm, (\underline{-}); 0 \rangle$, где \pm — сложение, $(\underline{-})$ — операция, переводящая m в $-m$, и $\underline{0} = 0$.

Пример 3.1.6. Если предикатная сигнатура $\Sigma = \langle Q^2 \rangle$ системы \mathfrak{A} состоит из одного символа двухместного отношения Q , то $\mathfrak{A} = \langle A, Q \rangle$ называется *графом*. Если Q — частичный (линейный) порядок на A , то \mathfrak{A} называется *частично (линейно) упорядоченным множеством* или просто *частичным (линейным) порядком*¹⁾. В этом случае $\langle a, b \rangle \in Q$

¹⁾ Это определение не совсем совпадает с определением ч. у. м. в § 2.2 (ч. у. м. в § 2.2 — пара, у которой первый член может быть пустым множеством, а носители алгебраических систем всегда непустые).

обозначается через $a \leq^{\mathfrak{A}} b$ или просто через $a \leq b$. Частичный порядок \mathfrak{A} называется **плотным**, если из $a \leq b$ и $a \neq b$ следует существование такого $c \in A$, что $c \neq a$, $c \neq b$, $a \leq c$ и $c \leq b$. Будем говорить, что два линейных порядка \mathfrak{A} и \mathfrak{B} имеют одинаковые концы, если существует в \mathfrak{A} наименьшего и наибольшего элемента эквивалентно существованию соответствующего элемента в \mathfrak{B} . Заметим, что подсистема частичного (линейного) порядка будет частичным (линейным) порядком, однако подсистема плотного линейного порядка не обязана быть плотным линейным порядком.

Предложение 3.1.7. *Если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} – два счетных плотных линейных порядка с одинаковыми концами, то $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$, $B = \{b_n \mid n \in \omega\}$. Рассмотрим множество G , состоящее из отображений $g: A_1 \rightarrow B_1$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) A_1 и B_1 – конечные подмножества A и B соответственно;
- 2) $g: \mathfrak{A}(A_1) \cong \mathfrak{B}(B_1)$, если $A_1 \neq \emptyset$;
- 3) если $|A_1| = 2n > 0$, то $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq A_1$ и $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq B_1$;
- 4) если $|A_1| = 2n + 1$, то $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq A_1$ и при $n > 0$ выполняется $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq B_1$;
- 5) если $a \in A_1$ – наименьший (наибольший) элемент \mathfrak{A} , то ga – наименьший (наибольший) элемент \mathfrak{B} .

Так как $\emptyset \in G$, то $G \neq \emptyset$. Пусть $g: A_1 \rightarrow B_1$ принадлежит G и $|A_1| = 2n$. Из условия 3) получаем, что можно выбрать $a \in A \setminus A_1$, для которого $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq A_1 \cup \{a\}$. Возьмем такой элемент $b \in B \setminus B_1$, что $b \leq gc \iff a \leq c$ для всех $c \in A_1$ и b – наименьший (наибольший) элемент в \mathfrak{B} тогда и только тогда, когда a – наименьший (наибольший) элемент в \mathfrak{A} . Такой элемент существует в силу плотности \mathfrak{B} и условий 2), 5) для g . Ясно, что $g \cup \{(a, b)\} \in G$. Если $|A_1| = 2n + 1$, то, поменяв местами \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , точно так же можно найти пару $\langle a, b \rangle \notin g$, для которой $g \cup \{(a, b)\} \in G$. Следовательно, в частичном порядке $\langle G, \subseteq \rangle$, где \subseteq – отношение включения, нет максимальных элементов. Тогда в G существует бесконечная цепь $X \subseteq G$. Из условий 2)–4) следует, что объединение элементов X будет изоморфизмом \mathfrak{A} на \mathfrak{B} . \square

Упражнения

1. Показать, что любая алгебраическая система \mathfrak{A} счетной сигнатуры Σ имеет счетную или конечную подсистему $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ (**Указание**. Определим не более чем счетные множества B_n , $n \in \omega$, следующим образом: $B_0 = \{a\}$, где $a \in A$, $B_{n+1} = B_n \cup \{b \mid b$ является значением операции системы \mathfrak{A} на элементах множе-

ства $B_n\}$. Тогда в качестве носителя \mathfrak{B} можно взять множество $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$.

2. Пусть сигнатура Σ системы \mathfrak{A} содержит хотя бы один символ константы, и $S(\mathfrak{A})$ обозначает множество подсистем системы \mathfrak{A} . Тогда система $\langle S(\mathfrak{A}); \subseteq \rangle$, где $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \rangle \in \subseteq \iff \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$, является решеткой (см. § 2.2).
3. Пусть система \mathfrak{A} имеет собственную изоморфную себе подсистему. Тогда \mathfrak{A} имеет собственную изоморфную себе надсистему.
4. Показать, что система $\langle N; \perp \rangle$ имеет счетное число подсистем, а система $\langle N; : \rangle$ — несчетное.
5. Показать, что если $|\Sigma| < \omega$, то для любого $n \in \omega$ существует такое конечное множество X систем сигнатуры Σ , что любая система сигнатуры Σ , имеющая мощность n , изоморфна одной из систем множества X .
6. Чему равна минимальная мощность множества X из упражнения 5, если Σ содержит лишь $k \in \omega$ одноместных предикатов?
7. Показать, что биективный гомоморфизм: $h: A \rightarrow B$ системы \mathfrak{A} на систему \mathfrak{B} функциональной сигнатуры Σ является изоморфизмом \mathfrak{A} на \mathfrak{B} . Построить пример, показывающий, что условие $R = \emptyset$ на сигнатуру Σ в этом утверждении опустить нельзя.

§ 3.2. Формулы сигнатуры Σ

Зафиксируем некоторое счетное множество $V = \{v_i \mid i \in \omega\}$, элементы которого будем называть *символами переменных* или просто *переменными* и обозначать буквами x, y и z , возможно, с индексами. Если в тексте встречается последовательность x_0, \dots, x_n переменных, то всегда предполагается, что $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$.

Определение. Множество $T(\Sigma)$ термов сигнатуры $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ определяется по индукции:

- 1) переменные $x \in V$ являются термами сигнатуры Σ ;
- 2) если t_1, \dots, t_n — термы сигнатуры Σ , $f \in F$ и $\mu(f) = n$, то $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм сигнатуры Σ .

Напомним, что запись $\Theta(\tau_1, \dots, \tau_n)$ при $n = 0$ обозначает Θ ; в частности, из 2) получаем, что символ с константы сигнатуры Σ является термом сигнатуры Σ .

Таким образом, термы — это слова (конечно, не все слова) алфавита $V \cup F \cup \{(,\)} \cup \{\{\}\}$. Множество переменных, входящих в терм t , обозначаем через $FV(t)$. Если $FV(t) = \emptyset$, то терм t называется *константным* или *замкнутым*. Если t — терм сигнатуры Σ , то запись

$t(x_1, \dots, x_n)$ будет обозначать, что $FV(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Этую запись также будем называть *термом*¹⁾.

Определение. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ . Отображение γ множества $X \subseteq V$ в A называется *интерпретацией переменных* множества X в A . Если $FV(t) \subseteq X$ для терма t сигнатуры Σ , то индукцией по длине t определяем значение $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \in A$ терма t в \mathfrak{A} при интерпретации γ :

- 1) если $t = x$, $x \in X$, то $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = \gamma x$;
- 2) если $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $f \in F$, то $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = \nu^{\mathfrak{A}}(f)(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma])$.

Ясно, что если $\gamma_1: X_1 \rightarrow A$, $\gamma_2: X_2 \rightarrow A$ — две интерпретации, $t \in T(\Sigma)$, $FV(t) \subseteq X_1 \cap X_2$ и $\gamma_1 \upharpoonright FV(t) = \gamma_2 \upharpoonright FV(t)$, то $t^{\mathfrak{A}}[\gamma_1] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma_2]$. Часто для краткости вместо $t^{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_n)[\gamma]$, мы будем писать $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$, где $a_1 = \gamma(x_1), \dots, a_n = \gamma(x_n)$. Если в тексте встречается запись $t(x_1, \dots, x_n)$, то следующая за этим запись $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$ будет обозначать $t^{\mathfrak{A}}(x_1, \dots, x_n)[\gamma]$, где γ определяется так: $\gamma x_i = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

Предложение 3.2.1. а). *Если \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ , $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, то носитель $A(X)$ подсистемы $\mathfrak{A}(X)$ равен множеству $\{t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \mid t \in T(\Sigma), \gamma: FV(t) \rightarrow X\}$.*

б). *Если h — гомоморфизм алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ в систему \mathfrak{B} , $t(x_1, \dots, x_n) \in T(\Sigma)$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, то $h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = t^{\mathfrak{B}}(ha_1, \dots, ha_n)$.*

Доказательство. а). Пусть $Y = \{t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \mid t \in T(\Sigma), \gamma: FV(t) \rightarrow X\}$. Индукцией по длине терма t получаем, что если $t(x_1, \dots, x_n) \in T(\Sigma)$ и $a_1, \dots, a_n \in X$, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \in Y$ для любой подсистемы $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, для которой $X \subseteq B$. Поэтому достаточно показать, что Y замкнуто относительно операций системы \mathfrak{A} . Пусть $f \in F$, $\mu(f) = m$, $t_1, \dots, t_m \in T(\Sigma)$ и $\gamma: (FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_m)) \rightarrow X$. Тогда $\nu^{\mathfrak{A}}(f)(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_m^{\mathfrak{A}}[\gamma]) = t_0^{\mathfrak{A}}[\gamma] \in Y$, где $t_0 = f(t_1, \dots, t_m)$.

б). Легко доказывается индукцией по длине t . □

Определение. Множество $F(\Sigma)$ формул сигнатуры $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ определяется по индукции.

- 0). Логическая константа \mathfrak{F} является формулой.
- 1). Если $r \in R$, $\mu(r) = n$ и $t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma)$, то слово $r(t_1, \dots, t_n)$ является формулой сигнатуры Σ .
- 2). Если $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, то слово $t_1 \approx t_2$ является формулой сигнатуры Σ .

¹⁾ Эта запись, конечно, как и буква t , не является термом, а представляет собой обозначение («имя») терма.

- 3). Если Φ, Ψ — формулы сигнатуры Σ , то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \rightarrow \Psi)$ и $\neg \Phi$ — формулы сигнатуры Σ .
- 4). Если Φ — формула сигнатуры Σ , $x \in V$, то $\forall x \Phi$ и $\exists x \Phi$ — формулы сигнатуры Σ .

Таким образом, множество $F(\Sigma)$ формул сигнатуры Σ состоит из некоторых слов алфавита $V \cup R \cup F \cup \{\exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \approx\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{(,),\}, \{,\}$. Например, если $r \in R$, $f, g, c \in F$, $\mu(r) = \mu(g) = 2$, $\mu(f) = 1$, $\mu(c) = 0$, то слово

$$(\forall v_1 \exists v_2 r(v_2, f(v_3)) \vee \neg v_4 \approx g(v_1, c))$$

является формулой сигнатуры Σ , в то время как слова

$$v_1 \approx v_2 \forall v_1, c \approx v_1 \vee v_2 \approx c, (\forall v_1 r(f(v_3), v_2)), (\exists v_1 r(v_1, v_2, v_3) \vee c \approx v_3)$$

формулами сигнатуры Σ не являются (почему?). При этом последнее слово является формулой, только другой сигнатуры.

Последовательность Φ некоторых символов будем называть просто *формулой*, если она является формулой некоторой сигнатуры. Если Φ — формула, то через $\Sigma(\Phi)$ будем обозначать сигнатуру, все символы которой входят в Φ , и Φ является формулой сигнатуры $\Sigma(\Phi)$. Ясно, что $\Sigma(\Phi)$ определяется по Φ однозначно.

Под слово формулы Φ , которое само является формулой, называется *подформулой* формулы Φ . Формулы вида \exists , $r(t_1, \dots, t_n)$ и $t_1 \approx t_2$, где r — предикатный символ, t_1, t_2, \dots — термы, называются *атомарными*. Атомарные формулы, содержащие не более одного сигнатурного символа, называются *атомными*. Таким образом, атомная формула сигнатуры Σ имеет один из следующих видов:

$$\exists, v_i \approx v_j, c \approx v_i, v_i \approx c, v_j \approx f(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}),$$

$$f(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) \approx v_j, r(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}), r,$$

где c — константа, f — функциональный символ, а r — предикатный символ сигнатуры Σ . Символ \approx называется *символом равенства* или просто *равенством*. Символы \forall и \exists называются соответственно *кванторами всеобщности и существования*. Запись $\forall x$ (запись $\exists x$) читается «для всех x » («существует x »). Формулу, не содержащую кванторов, будем называть *бескванторной*.

Доказательство следующих трех предложений является по существу повторением доказательств предложений 1.2.1, 1.2.4 и следствия 1.2.3 соответственно. (Рассмотрение случаев, когда формула начинается с кванторов, не отличается по существу от рассмотрения в указанных предложениях случая, когда формула начинается с отрицания.)

Предложение 3.2.2. Всякая неатомарная формула сигнатуры Σ представима в одном и только одном следующих видов:

$$(\Psi \wedge X), (\Psi \vee X), (\Psi \rightarrow X), \forall x\Psi, \exists x\Psi, \neg \Psi$$

для однозначно определенных формул Ψ и X сигнатуры Σ . \square

Предложение 3.2.3. Если Φ — формула сигнатуры Σ а η и θ — вхождения в Φ подформул Ψ и X соответственно, то либо η и θ не имеют общих вхождений символов, либо одно из них целиком содержится в другом. \square

Предложение 3.2.4. С каждым вхождением в формулу Φ сигнатуры Σ символов \neg , \forall или \exists , а также символа $($, не входящего в атомарную подформулу, однозначно связано некоторое вхождение подформулы формулы Φ , первым символом которого является рассматриваемое вхождение соответствующего символа. \square

Определение. Подформула формулы Φ сигнатуры Σ , связанная по предложению 3.2 с вхождением квантора \forall (квантора \exists), называется *областью действия* этого вхождения квантора \forall (квантора \exists).

Мы будем в дальнейшем пользоваться соглашением об опускании внешних скобок, принятом в § 1.2 гл. 1. Заметим, что формулу исчисления высказываний можно рассматривать как формулу некоторой сигнатуры, если считать, что символы пропозициональных переменных являются нульместными предикатными символами.

Определение. Для каждой формулы Φ сигнатуры Σ определим множество $FV(\Phi)$ свободных переменных формулы Φ следующим образом:

- 1). Если Φ — атомарная формула вида $\mathfrak{F}, r, r(t_1, \dots, t_n)$ или $t_1 \approx t_2$, то множество $FV(\Phi)$ равно \emptyset , \emptyset , $FV(t_1), \cup \dots \cup FV(t_n)$ или $FV(t_1) \cup FV(t_2)$ соответственно.
- 2). Если $\Phi = \neg \Psi$, то $FV(\Phi) = FV(\Psi)$.
- 3). Если $\Phi = \Phi_1 \tau \Phi_2$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то $FV(\Phi) = FV(\Phi_1) \cup FV(\Phi_2)$.
- 4). Если $\Phi = Qx\Psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $FV(\Phi) = FV(\Psi) \setminus \{x\}$.

Ясно, что для любой формулы Φ через конечное число шагов можно найти все элементы $FV(\Phi)$. Вхождение η переменной x в формулу Φ сигнатуры Σ будем называть *связанным*, если η лежит в области действия некоторого вхождения квантора \forall или \exists , за которым сразу следует символ x . Если вхождение η переменной x в формулу Φ не является связанным, то будем его называть *свободным*. Если формула Φ содержит свободные (связанные) вхождения переменной x , будем говорить, что x *входит свободно (связанно)* в формулу Φ .

Предложение 3.2.5. Если Φ — формула сигнатуры Σ , то переменная x тогда и только тогда принадлежит $FV(\Phi)$, когда существует свободное вхождение x в Φ .

Доказательство легко проводится индукцией по длине Φ , и мы оставляем его читателю. \square

Если Φ — формула, то запись $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ в дальнейшем будет обозначать формулу Φ , а также то, что $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Определим главное понятие этой главы.

Определение. Для алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ , интерпретации переменных $\gamma: X \rightarrow A$ и формулы $\Phi \in F(\Sigma)$, для которой $FV(\Phi) \subseteq X$, определим отношение $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ (читается «в \mathfrak{A} истинна формула Φ при интерпретации γ ») индукцией по длине Φ .

- 0). Если $\Phi = \mathfrak{F}$, то отношение $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ не имеет места.
- 1). Если $\Phi = r$, $r \in R$, $\mu(r) = 0$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ эквивалентно $\nu^{\mathfrak{A}}(r) \neq \emptyset$.
- 2). Если $\Phi = r(t_1, \dots, t_n)$, $r \in R$, $\mu(r) = n$, $t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ эквивалентно $\langle t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(r)$.¹⁾
- 3). Если Φ равна $t_1 \approx t_2$, $t_1, t_2 \in T(\Sigma)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ эквивалентно $t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_2^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.
- 4). Если $\Phi = \neg \Psi$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$.
- 5). Если $\Phi = (\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \iff (\mathfrak{A} \models \Phi_1[\gamma] \text{ и } \mathfrak{A} \models \Phi_2[\gamma])$.
- 6). Если $\Phi = (\Phi_1 \vee \Phi_2)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \iff (\mathfrak{A} \models \Phi_1[\gamma] \text{ или } \mathfrak{A} \models \Phi_2[\gamma])$.
- 7). Если $\Phi = (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \iff$ (если имеет место $\mathfrak{A} \models \Phi_1[\gamma]$, то имеет место и $\mathfrak{A} \models \Phi_2[\gamma]$).
- 8). Если $\Phi = \exists x \Psi$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая интерпретация $\gamma_1: X_1 \rightarrow A$ для которой $x \in X_1$, $\gamma_1 \upharpoonright FV(\Phi) = \gamma \upharpoonright FV(\Phi)$ и $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma_1]$.
- 9). Если $\Phi = \forall x \Psi$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ имеет место тогда только тогда, когда для любой интерпретации $\gamma_1: X_1 \rightarrow A$, для которой $x \in X_1$, и $\gamma_1 \upharpoonright FV(\Phi) = \gamma \upharpoonright FV(\Phi)$, имеет место $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma_1]$.

Если формула Φ не является истинной в алгебраической системе \mathfrak{A} при интерпретации γ , то говорим, что *формула Φ ложна в алгебраической системе \mathfrak{A} при интерпретации γ* . В частности, формула \mathfrak{F} ложна в любой алгебраической системе при любой интерпретации.

¹⁾ Конечно, 2) включает 1), так как мы договорились считать $r(t_1, \dots, t_n)$ равным r при $n = 0$. Мы здесь включили 1), чтобы подчеркнуть специфику нульместных предикатов.

Из этого определения видно, что при установлении истинности формулы Φ сигнатуры Σ свободные и связанные вхождения переменных в формулу Φ играют совершенно различные роли. А именно, свободным вхождениям переменной x «приписывается» постоянное значение $\gamma(x)$, в то время как связанным вхождениям переменных никакие постоянные значения не «приписываются», а рассматриваются всевозможные их значения.

Предложение 3.2.6. *Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и $\Phi \in F(\Sigma)$. Если $\gamma_1: X_1 \rightarrow A$, $\gamma_2: X_2 \rightarrow A$ — две интерпретации, для которых $FV(\Phi) \subseteq X_1 \cap X_2$ и $\gamma_1 \upharpoonright FV(\Phi) = \gamma_2 \upharpoonright FV(\Phi)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_1] \iff \mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_2]$.*

Доказательство легко проводится индукцией по длине Φ . \square

Мы часто будем использовать вместо $\mathfrak{A} \models \Phi(x_1, \dots, x_n)[\gamma]$ более удобную запись $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$, где $a_1 = \gamma(x_1), \dots, a_n = \gamma(x_n)$. А именно, если в тексте встречается запись $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, то следующая за этим запись $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$, $a_1, \dots, a_n \in A$, будет обозначать, $\mathfrak{A} \models \Phi(x_1, \dots, x_n)[\gamma]$, где γ определяется так: $\gamma x_i = a_i$, $i = 1, \dots, n$. В силу предложения 3.2.6 такое сокращение возможно.

Определение. Если Φ — формула сигнатуры Σ и $FV(\Phi) = \emptyset$, то Φ называется *замкнутой формулой* или *предложением*.

Если Φ — предложение сигнатуры Σ , \mathfrak{A} — система сигнатуры Σ , то отношение $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ не зависит от интерпретации γ , и мы его будем обозначать просто $\mathfrak{A} \models \Phi$. Ясно также, что если для формулы Φ , системы \mathfrak{A} и интерпретации γ определено отношение $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ равносильно $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma(\Phi) \models \Phi[\gamma]$.

Определение. Формула Φ называется *тождественно истинной* или *общезначимой*, если $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ для любой системы \mathfrak{A} сигнатуры $\Sigma(\Phi)$ и любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$. Ясно, что сигнатуру $\Sigma(\Phi)$ в этом определении можно заменить на любую $\Sigma \supseteq \Sigma(\Phi)$. Множество формул $Y \subseteq F(\Sigma)$ называется *выполнимым в системе \mathfrak{A}* сигнатуры Σ , если существует такая интерпретация $\gamma: \bigcup_{\Phi \in Y} FV(\Phi) \rightarrow A$, что $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ для всех $\Phi \in Y$. Формула Φ называется *выполнимой в системе \mathfrak{A}* , если множество $\{\Phi\}$ выполнимо в \mathfrak{A} .

Понятие истинности формулы в системе наряду с понятием выводимости принадлежит к основным понятиям математической логики. Важность этого понятия объясняется тем, что многие теоремы математики можно выразить как утверждения об истинности некоторых формул в алгебраических системах из некоторого класса. В отличие от свойств «быть формулой» и «быть тождественно истинной формулой

ИВ», в общем случае не существует эффективного способа, позволяющего для предложения Φ за конечное число шагов установить, верно ли $\mathfrak{A} \models \Phi$. Это связано с тем, что при бесконечном A пункты 8) и 9) требуют проверки бесконечного числа условий¹⁾. Пункты 2) и 3) в общем случае также не «эффективны», так как предикаты и функции бесконечной системы \mathfrak{A} могут быть заданы не «эффективно».

Установим теперь достаточно простой, но важный факт.

Предложение 3.2.7. *Пусть f — изоморфизм системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ на систему \mathfrak{B} . Если $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — формула сигнатуры Σ , то для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ свойство $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$ равносильно свойству $\mathfrak{B} \models f\Phi(fa_1, \dots, fa_n)$. В частности, если Φ — предложение, то $\mathfrak{A} \models \Phi$ равносильно $\mathfrak{B} \models \Phi$.*

Доказательство легко проводится индукцией по длине терма t и формулы длине Φ . Если Φ — атомарная формула, то утверждение следует из определения изоморфизма и предложения 3.2.1 б). Индукционный шаг оставляется читателю в качестве упражнения. \square

В отличие от бесконечных систем, проверку истинности формулы Φ на конечной системе \mathfrak{A} сигнатуры $\Sigma(\Phi)$ можно осуществить за конечное число шагов. Это легко показать индукцией по длине Φ .

Определение. Пусть $n \in \omega$, $n > 0$. Предложение Φ называется *n-общезначимым*, если $\mathfrak{A} \models \Phi$ для любой алгебраической системы \mathfrak{A} мощности n и сигнатуры $\Sigma(\Phi)$.

Предложение 3.2.8. *Существует эффективная процедура (алгоритм), позволяющая для любого $n \in \omega$, $n > 0$, и любого предложения Φ за конечное число шагов установить, является ли Φ n-общезначимым или нет.*

Доказательство. Очевидно, что для конечного множества X множества $P(X)$ и X^n , $n \in \omega$, конечны. Поэтому для любой конечной сигнатуры Σ имеется лишь конечное число систем сигнатуры Σ с конечным носителем X . Тогда процедура проверки n -общезначимости сводится к выписыванию всех систем сигнатуры $\Sigma(\Phi)$ с носителем $\{1, 2, \dots, n\}$ и проверке истинности Φ на каждой из выписанных систем. Такая проверка, как отмечалось выше, осуществляется за конечное число шагов. \square

Можно определить аналогично n -общезначимости, $0 < n < \omega$, понятие κ -общезначимости формулы Φ для бесконечного кардинала κ . Как будет показано в 5.1, эти понятия для всех бесконечных кардиналов κ

¹⁾ В главе 7 будет показано, что эту трудность нельзя обойти.

совпадают. Какие еще зависимости существуют между этими понятиями? Как будет показано в следующем параграфе, если предложение Φ бесконечно общезначимо, то существует такое число $n_0 \in \omega$, что Φ является k -общезначимым для любого $k > n_0$. Из n -общезначимости предложения Φ для любого $n \in \omega$, $n \neq 0$, в общем случае не следует (упражнение 4) общезначимость Φ . Отметим простой факт.

Предложение 3.2.9. Для любого $n \in \omega$, $n \geq 1$, существует такое предложение Φ_n пустой сигнатуры Σ_0 (т. е. $\Sigma_0 = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$), для которого Φ_n является n -общезначимым, а $\neg\Phi_n$ является k -общезначимым для любого $k \neq n$, $k \geq 1$.

Доказательство. В качестве Φ_n можно взять предложение

$$\exists v_1 \dots \exists v_n ((\neg v_1 \approx v_2 \wedge (\neg v_1 \approx v_3 \wedge (\dots \wedge \neg v_{n-1} \approx v_n) \dots)) \wedge$$

$$\wedge \forall v_0 (v_0 \approx v_1 \vee (\dots \vee v_0 \approx v_n) \dots)). \quad \square$$

Формула $\forall v_1 \forall v_2 (P(v_1) \rightarrow P(v_2))$ не содержит символов равенства и функций, является 1-общезначимой и не является n -общезначимой для $n > 1$. Легко строятся (упражнение 3) также формула Ψ_n , без равенства и функций, являющаяся k -общезначимой для $0 < k \leq n$ и не являющаяся m -общезначимой для $m > n$. Построить формулу Φ_n из предложения 3.2.9 без равенства и функций нельзя в силу следующего факта (упражнение 5): если предложение Φ не содержит символов равенства и функций, то из n -общезначимости Φ следует k -общезначимость Φ для любого $k \leq n$, $k \neq 0$.

Упражнения

- Показать, что для любой конечной сигнатуры Σ существует процедура, позволяющая по любой конечной последовательности символов определить, является ли она формулой сигнатуры Σ или нет.
- Пусть h — гомоморфизм системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ в систему \mathfrak{B} . Тогда для любой атомарной формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n) \in F(\Sigma)$ и любых $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n) \implies \mathfrak{B} \models \Phi(ha_1, \dots, ha_n)$.
- Показать, что следующая формула Ψ_n является k -общезначимой тогда и только тогда, когда $1 \leq k \leq n$:

$$\exists v_2 \dots \exists v_{n+1} \forall v_0 (\forall v_1 (r(v_2, v_1) \rightarrow r(v_0, v_1)) \vee$$

$$\vee (\dots \vee \forall v_1 (r(v_{n+1}, v_1) \rightarrow r(v_0, v_1)) \dots)).$$

- Показать, что следующая формула является n -общезначимой для любого $n \in \omega$, $n \neq 0$, и не является общезначимой:

$$\exists v_0 \forall v_1 \neg f(v_1) \approx v_0 \rightarrow \exists v_0 \exists v_1 (f(v_0) \approx f(v_1) \wedge \neg v_0 \approx v_1).$$

5. Пусть $0 < k < n < \omega$, предложение Φ n -общезначимо, не содержит символов равенства и функций. Тогда Φ k -общезначимо.
(Указание. Пусть $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$, где \mathfrak{A} — система сигнатуры $\Sigma(\Phi)$ с носителем $\{1, 2, \dots, k\}$. Строим систему $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ мощности n , определяя на множестве $B = \{1, 2, \dots, n\}$ предикаты r сигнатуры $\Sigma(\Phi)$ следующим образом:

$$\langle i_1, \dots, i_m \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}}(r) \iff (j_1, \dots, j_m) \in \nu^{\mathfrak{A}}(r),$$

где $j_s = i_s$, если $i_s \leq k$, $j_s = k$ в противном случае. Тогда $\mathfrak{B} \models \neg\Phi$.)

§ 3.3. Теорема компактности

Теорема компактности была доказана А. И. Мальцевым в 1936 г. Он же впервые показал ее важное значение как нового метода для доказательства не только теорем математической логики, но и теорем алгебры. Мы дадим доказательство этой теоремы с помощью ультрапроизведений, введенных Е. Лосем в 1955 г.

Пусть дано семейство множеств $S = \{X_i \mid i \in I\}$. *Декартовым произведением* семейства S называется множество

$$I\text{-prod } X_i = \left\{ f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f_i \in X_i \right\}.$$

Для $j \in I$ отображение множества $I\text{-prod } X_i$ в X_j , сопоставляющее элементу f элемент $f(j)$, называется *проекцией* декартова произведения на j -ю координату и обозначается той же буквой j , т. е. $f(j) = j(f)$.

Пусть на I задан фильтр D . Определим на $I\text{-prod } X_i$ отношение \sim^D следующим образом:

$$f \sim^D g \iff \{i \mid f_i = g_i\} \in D.$$

Лемма 3.3.1. Отношение \sim^D является эквивалентностью на $I\text{-prod } X_i$.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность \sim^D очевидна. Пусть $f \sim^D g$ и $g \sim^D h$. Тогда множество $Y = \{i \mid f_i = h_i\}$ содержит пересечение множеств $\{i \mid f_i = g_i\}$ и $\{i \mid g_i = h_i\}$, являющихся элементами D . Из условий 2) и 3) определения фильтра получаем $Y \in D$. \square

Отображение, сопоставляющее элементу $f \in I\text{-prod } X_i$ класс эквивалентности по отношению \sim^D , содержащий f , будем обозначать той же буквой D , что и фильтр. Множество

$$D\text{-prod } X_i = \{Df \mid f \in I\text{-prod } X_i\}$$

называется *фильтрованным произведением* множеств X_i , $i \in I$, по фильтру D .

Определение. Фильтрованным произведением по фильтру D семейства алгебраических систем $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ сигнатуры Σ называется алгебраическая система $\mathfrak{A} = D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$, сигнатуры Σ с носителем $A = D\text{-prod } A_i$, и следующей интерпретацией $\nu^{\mathfrak{A}}$ сигнатуры Σ в \mathfrak{A} .

1). Если $c \in F$ и $\mu(c) = 0$, то для $f \in I\text{-prod } A_i$

$$Df = \nu^{\mathfrak{A}}(c) \iff \{i \mid fi = \nu^{\mathfrak{A}_i}(c)\} \in D.$$

2). Если $s \in R \cup F$, то для $f_1, \dots, f_n \in I\text{-prod } A_i$

$$\langle Df_1, \dots, Df_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s) \iff \{i \mid \langle f_1i, \dots, f_ni \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_i}(s)\} \in D,$$

где $n = \mu(s)$, если $s \in R$, и $n = \mu(s) + 1$, если $s \in F$.

Проверим, что определение корректно, т. е. множества $\nu^{\mathfrak{A}}(s)$ и $\nu^{\mathfrak{A}}(c)$ не зависят от выбора представителей f_1, \dots, f_n и f в классах Df_1, \dots, Df_n и Df . В самом деле, пусть $Y_k = \{i \mid fk_i = g_ki\} \in D$, $1 \leq k \leq n$. Множества $W_1 = \{i \mid \langle f_1i, \dots, f_ni \rangle \in \nu_i^{\mathfrak{A}}(s)\}$ и $W_2 = \{i \mid \langle g_1i, \dots, g_ni \rangle \in \nu_i^{\mathfrak{A}}(s)\}$ имеют одинаковые пересечения с элементом $Y_1 \cap \dots \cap Y_n$ фильтра D . Следовательно, $W_1 \in D \iff W_2 \in D$. Аналогично показывается корректность 1). Для того чтобы утверждать, что \mathfrak{A} является системой сигнатуры Σ , нужно еще показать, что $\nu^{\mathfrak{A}}$ — операция на A , если $s \in F$. Пусть $s \in F$ и $\nu(s) = n$. Для элементов $f_1, \dots, f_n \in I\text{-prod } A_i$, определим $f \in I\text{-prod } A_i$ так: $fi = \nu_i^{\mathfrak{A}}(s)(f_1i, \dots, f_ni)$, $i \in I$. Тогда $\langle Df_1, \dots, Df_n, Df \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s)$. Пусть для некоторой $g \in I\text{-prod } A_i$, имеет место

$$\langle Df_1, \dots, Df_n, Dg \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s).$$

Так как $\nu^{\mathfrak{A}_i}(s)$, $i \in I$, — функции, то множество $\{i \mid fi = gi\}$ содержит пересечение множеств $\{i \mid \langle f_1i, \dots, f_ni, fi \rangle \in \nu_i^{\mathfrak{A}}(s)\}$ и $\{i \mid \langle f_1i, \dots, f_ni, gi \rangle \in \nu_i^{\mathfrak{A}}(s)\}$, которые принадлежат D . Следовательно, $Df = Dg$.

Если все \mathfrak{A}_i , $i \in I$, равны одной системе \mathfrak{B} , то фильтрованное произведение $I\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ ($D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$) называется *фильтрованной степенью* \mathfrak{B} и обозначается через \mathfrak{B}^I (\mathfrak{B}^D).

Фильтрованное произведение $\{I\}\text{-prod } \mathfrak{A}_i$, называется *декартовым* или *прямым произведением* систем \mathfrak{A}_i , $i \in I$. Дадим независимое определение для этого важного частного случая. Пусть $\mathfrak{A} = I\text{-prod } \mathfrak{A}_i$, является системой сигнатуры Σ с носителем $A = I\text{-prod } A_i$ и следующей интерпретацией Σ в A .

1). Если $c \in F$ и $\mu(c) = 0$, то

$$\nu^{\mathfrak{A}}(c)(i) = \nu^{\mathfrak{A}_i}(c).$$

2). Если $s \in R \cup F$, то

$$\langle f_1, \dots, f_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s) \iff \langle f_1 i, \dots, f_n i \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_i}(s)$$

для всех $i \in I$, где $n = \mu(s)$, если $s \in R$, и $n = \mu(s) + 1$, если $s \in F$.

Ясно, что отображение, сопоставляющее элементу f элемент $\{f\}$ будет изоморфизмом I -prod \mathfrak{A}_i , на $\{I\}$ -prod \mathfrak{A}_i , поэтому, не опасаясь путаницы, систему I -prod \mathfrak{A}_i , будем также называть *декартовым* или *прямым произведением*. Декартово произведение I -prod \mathfrak{A}_i часто обозначается через $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ и через $\mathfrak{A}_{i_1} \times \dots \times \mathfrak{A}_{i_n}$, если $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ — конечное множество. Укажем один простой, но полезный факт, связывающий декартовы произведения с фильтрованными.

Предложение 3.3.2. Для любого фильтра D на I и систем $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ сигнатуры Σ отображение $D: I\text{-prod } A_i \rightarrow D\text{-prod } A_i$, где $D(f) = Df$, является гомоморфизмом системы $\mathfrak{A} = I\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ на систему $\mathfrak{A}' = D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$.

Доказательство. Пусть $s \in R \cup F$ — не константа и $\langle f_1, \dots, f_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s)$. По определению декартова произведения $\{i \mid \langle f_1 i, \dots, f_n i \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_i}(s)\} = I$. Так как $I \in D$, то $\{i \mid \langle f_1 i, \dots, f_n i \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_i}(s)\} \in D$, т.е. $\langle Df_1, \dots, Df_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}'}(s)$. Случай, когда s — константа, рассматривается аналогично. \square

Под *классом* в дальнейшем мы понимаем некоторое свойство Θ множеств¹⁾. При этом множества, удовлетворяющие семейству Θ , будут называться *элементами класса* Θ . В частности, все множества образуют класс V , который, как уже отмечалось, не является множеством. Свойство «быть элементом множества X » определяет множество X , поэтому любое множество можно считать классом. Конечно, с классами нельзя поступать, как с множествами, например, нельзя рассматривать класс всех подклассов данного класса K . Однако если K_1, K_2 — классы, то очевидным образом определены классы $K_1 \cap K_2$, $K_1 \cup K_2$ и $K_1 \setminus K_2$. Если a — элемент класса K , то так же, как и в случае множеств, мы будем говорить, что a принадлежит K , и обозначать $a \in K$.

¹⁾ Так как мы взяли за основу ZFC, то под свойством Θ мы понимаем свойство, записанное формулой $\Phi(x, y_1, \dots, y_n)$ сигнатуры $\langle \in^2 \rangle$, где переменные y_1, \dots, y_n играют роль параметров. В качестве «кода» класса K , определенного с помощью параметров a_1, \dots, a_n , можно взять множество $\langle \langle y_1, a_1 \rangle, \dots, \langle y_n, a_n \rangle, \Phi(x, y_1, \dots, y_n) \rangle$, где $\Phi(x, y_1, \dots, y_n)$ — формула сигнатуры $\langle \in^2 \rangle$, для которой $\Phi(b, a_1, \dots, a_n) \iff (b \text{ — элемент } K)$.

Пусть даны некоторый класс K алгебраических систем сигнатуры Σ и фильтр D на I . Говорим, что класс K замкнут относительно фильтрованных произведений по фильтру D , если для любого множества $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ систем из класса K выполнено $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \in K$. Если для $\Phi(x_1, \dots, x_n) \in F(\Sigma)$ определить $K(\Phi)$ как класс таких систем \mathfrak{A} сигнатуры Σ , что для всех $a_1, \dots, a_n \in A$ в \mathfrak{A} истинно $\Phi(a_1, \dots, a_n)$, то легко проверить, что для атомарной формулы Φ класс $K(\Phi)$ замкнут относительно любых декартовых произведений. В силу предложения 3.3.2 и упражнения 2 к §3.2 класс $K(\Phi)$ для атомарной формулы Φ замкнут также относительно всех фильтрованных произведений. Как будет показано в дальнейшем, это верно не только для атомарных формул. Если же D — ультрафильтр, то для любой формулы $\Phi \in F(\Sigma)$ класс $K(\Phi)$ замкнут относительно фильтрованных произведений по D (теорема 3.3.5 ниже).

Определение. Формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ называется *фильтрующейся по фильтру D* (на множестве I), если для любого множества $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ алгебраических систем сигнатуры $\Sigma(\Phi)$ и любых $Df_1, \dots, Df_n \in D\text{-prod } A_i$

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi(Df_1, \dots, Df_n) \iff \{i \mid \mathfrak{A}_i \models (f_1, \dots, f_n)\} \in D.$$

Если в этом определении вместо эквивалентности \iff выполняется \Leftarrow , то формула Φ называется *условно фильтрующейся по D* . Формула Φ называется *(условно) фильтрующейся*, если она (условно) фильтруется по любому фильтру D .

Если γ — интерпретация некоторого множества переменных в $I\text{-prod } A_i$, то через $D(\gamma)$ обозначаем композицию отображений γ и D . Через $i(\gamma)$ обозначаем композицию отображений γ и проекции на i -ю координату.

Лемма 3.3.3. *Если Φ и Ψ (условно) фильтруются по фильтру D , то формулы $\forall x\Phi$, $\exists x\Phi$ и $\Phi \wedge \Psi$ (условно) фильтруются по фильтру D .*

Доказательство. Зафиксируем некоторую интерпретацию γ свободных переменных формулы $\forall x\Phi$ в множестве $I\text{-prod } A_i$.

Пусть $\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \forall x\Phi[i(\gamma)]\} = X \in D$. Тогда для любой $f \in I\text{-prod } A_i$, если рассмотреть $\gamma' \supseteq \gamma$, для которой $\gamma'(x) = f$, имеем

$$X \subseteq \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[i(\gamma')]\},$$

следовательно,

$$\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[i(\gamma')]\} \in D.$$

Если Φ условно фильтруется, то $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi[D(\gamma')]$ для любого $\gamma': FV(\Phi) \rightarrow I\text{-prod } A_i$, $\gamma \subseteq \gamma'$, т. е. $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \forall x\Phi[D(\gamma)]$.

Пусть $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \forall x\Phi[D(\gamma)]$ и Φ фильтруется. Рассмотрим множество $X = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \forall x\Phi[i(\gamma)]\}$. Возьмем такую функцию $f \in I\text{-prod } A_i$, что для $i \in I \setminus X$ имеет место $\mathfrak{A}_i \models \neg\Phi[i(\gamma')]$, где $\gamma' \supseteq \gamma$, $\gamma'(x) = f$. Тогда из фильтруемости Φ и того, что $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi[D(\gamma')]$, следует, что $X = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[i(\gamma')]\} \in D$.

Случай $\exists x\Phi$ и $\Phi \wedge \Psi$ рассматриваются аналогично, и мы оставляем их читателю в качестве упражнения. \square

Лемма 3.3.4. Атомарные формулы фильтруются по любому фильтру D .

Доказательство. Пусть $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — атомарная формула вида $s(t_1, \dots, t_m)$, где $s \in R$, $\mu(s) = m$, t_1, \dots, t_m — термы; пусть $\gamma: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow I\text{-prod } A_i$ — интерпретация переменных и $\gamma(x_i) = f_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда по определению истинности для $\mathfrak{A} = D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ мы имеем

$$\mathfrak{A} \models \Phi(Df_1, \dots, Df_n) \iff \langle t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma D], \dots, t_m^{\mathfrak{A}}[\gamma D] \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s).$$

По предложению 3.3.2 и 3.2.1 б) выполнено $t_j^{\mathfrak{A}}[\gamma D] = Dt_j^{\mathfrak{B}}[\gamma]$, $1 \leq j \leq m$, где $\mathfrak{B} = I\text{-prod } \mathfrak{A}_i$, поэтому

$$\begin{aligned} \langle t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma D], \dots, t_m^{\mathfrak{A}}[\gamma D] \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s) &\iff \langle Dt_1^{\mathfrak{B}}[\gamma], \dots, Dt_m^{\mathfrak{B}}[\gamma] \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s) \iff \\ &\iff \{i \mid \langle t_1^{\mathfrak{B}}[\gamma](i), \dots, t_m^{\mathfrak{B}}[\gamma](i) \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_i}(s)\} \in D. \end{aligned}$$

Так как $t_j^{\mathfrak{B}}[\gamma](i) = [t_j^{\mathfrak{B}}(f_1, \dots, f_n)](i) = t_j^{\mathfrak{A}_i}(f_1 i, \dots, f_n i)$, то

$$\langle t_1^{\mathfrak{B}}[\gamma](i), \dots, t_m^{\mathfrak{B}}[\gamma](i) \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_i}(s) \iff \mathfrak{A}_i \models \Phi(f_1 i, \dots, f_n i).$$

Таким образом,

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi(Df_1, \dots, Df_n) \iff \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi(f_1 i, \dots, f_n i)\} \in D.$$

Случай, когда Φ имеет вид $t_1 \approx t_2$, разбирается аналогично. \square

Теорема 3.3.5 (Е. Лось). Любая формула Φ фильтруется по любому ультрафильтру D .

Доказательство проведем индукцией по длине Φ . Так как истинность формул $\Phi \rightarrow \Psi$ и $\Phi \vee \Psi$ эквивалентна истинности формул $\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$ и $\neg(\neg\Phi \wedge \Psi)$ соответственно, то в силу лемм 3.3.3 и 3.3.4 достаточно показать фильтруемость по D формулы $\neg\Phi$ для фильтру-

ющейся по D формулы Φ . Из свойства $\emptyset \notin D$ и предложения 2.3.3 следует $X \notin D \iff I \setminus X \in D$. Поэтому из фильтруемости Φ получаем

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \neg \Phi[\gamma] \iff \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[\gamma i]\} \notin D.$$

Из определения ультрафильтра заключаем

$$\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[\gamma i]\} \notin D \iff \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \neg \Phi[\gamma i]\} \in D. \quad \square$$

Определение. Алгебраическая система \mathfrak{A} сигнатуры Σ называется *моделью множества формул* Γ сигнатуры Σ , если существует такая интерпретация γ в A переменных, входящих свободно в элементы Γ , что $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ для всех $\Phi \in \Gamma$. Множество Γ называется *выполнимым*, если Γ имеет модель. Множество называется *локально выполнимым*, если каждое конечное подмножество Γ имеет модель.

В качестве следствия теоремы 3.3.5 получаем следующую очень важную теорему, которая называется *теоремой компактности*.

Теорема 3.3.6 (А. И. Мальцев). *Каждое локально выполнимое множество Γ формул сигнатуры Σ выполнимо.*

Доказательство. Рассмотрим множество I конечных подмножеств Γ . Для $i \in I$ выберем такие системы \mathfrak{A}_i сигнатуры Σ и интерпретации γ_i в A_i свободных переменных, входящих в формулы из i , что $\mathfrak{A}_i \models \Phi[\gamma_i]$ для всех $\Phi \in i$. Для $i \in I$ рассмотрим множества $X_i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Система множеств $\{X_i \mid i \in I\}$ является центрированной. Действительно, если $i_0, \dots, i_k \in I$ и $j = i_0 \cup \dots \cup i_k$, то $j \in X_{i_0} \cap \dots \cap X_{i_k}$. По предложению 2.3.2 существует такой ультрафильтр D , что $X_i \in D$ для всех $i \in I$. Для переменной x , входящей свободно в какой-нибудь элемент Γ определим $\gamma(x) \in I\text{-prod } A_i$, следующим образом:

$$\gamma(x)(i) = \begin{cases} \gamma_i(x), & \text{если } x \in \text{dom } \gamma_i, \\ \text{произвольный } a \in A_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\Phi \in \Gamma$. Ясно, что

$$X_{\{\Phi\}} \subseteq \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[\gamma i]\}.$$

Так как $X_{\{\Phi\}} \in D$, то $\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi[\gamma i]\} \in D$. По теореме 3.3.5 получаем $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi[\gamma D]$. \square

Теорема 3.3.6 будет широко использоваться в следующих главах, особенно в гл. 5. Здесь мы дадим простое, но довольно типичное применение этой теоремы (см. также упражнение 6).

Следствие 3.3.7. Если для любого $n \in \omega$ множество формул Γ сигнатуры Σ имеет модель мощности $\geq n$, то для любого $\kappa \geq |\Sigma|$ множество Γ имеет модель мощности $\geq \kappa$.

Доказательство. Возьмем множество символов C мощности κ , для которого $C \cap (R \cup F) = \emptyset$, и пусть $\Sigma_1 = \langle R, F \cup C, \mu_1 \rangle$, где $\mu_1 \restriction (R \cup F) = \mu$ и $\mu_1(c) = 0$ для $c \in C$. Рассмотрим множество $X = \Gamma \cup \{\neg c \approx d \mid c, d \in C, c \neq d\}$ предложений сигнатуры Σ_1 . Если $Y = \Gamma_1 \cup \{\neg c_1 \approx d_1, \dots, \neg c_n \approx d_n\}$, где $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, — конечное подмножество X , то Y выполнимо в подходящем обогащении модели \mathfrak{A} множества Γ , имеющей мощность $\geq n$. По теореме компактности X имеет модель \mathfrak{A} . Так как $\nu^{\mathfrak{A}}(c) \neq \nu^{\mathfrak{A}}(d)$ для $d, c \in C, c \neq d$, то \mathfrak{A} имеет мощность $\geq \kappa$. \square

Упражнения

- Показать, что фильтрованное произведение частично упорядоченных множеств является частично упорядоченным множеством.
- Показать, что декартово произведение $K_1 \times K_2$ двух полей K_1 и K_2 не может быть полем. (Указание. В $K_1 \times K_2$ имеются делители нуля.)
- Найти неизоморфные алгебраические системы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , для которых система $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$. (Указание.. Пусть $\Sigma = \langle r^1 \rangle$, $A = B = \omega$, $\nu^{\mathfrak{A}}(r) = \omega \setminus \{0\}$, $\nu^{\mathfrak{B}}(r) = \omega \setminus \{0, 1\}$.)
- Если $D_1 \subseteq D_2$ — два фильтра на множестве I , то существует гомоморфизм системы $D_1\text{-prod } \mathfrak{B}_i$ на $D_2\text{-prod } \mathfrak{B}_i$. (Указание. Рассмотреть отображение, сопоставляющее элементу D_1f элемент D_2f .)
- Пусть D — главный ультрафильтр на I и $\bigcap D = \{i_0\}$. Тогда система $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ изоморфна системе \mathfrak{A}_{i_0} .
- Пусть Γ — такое множество предложений сигнатуры Σ , что для любой алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ существует предложение $\Phi \in \Gamma$, истинное на \mathfrak{A} . Показать, что существует такое конечное множество $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \subseteq \Gamma$, что предложение $(\Phi_1 \vee (\Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n) \dots)$ — тождественно истинная формула.

Г л а в а 4

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 4.1. Аксиомы и правила вывода

Зафиксируем некоторую произвольную сигнатуру Σ . В этом параграфе мы определим *исчисление предикатов сигнатуры Σ* (сокращенно ИП $^\Sigma$).

Формулами ИП $^\Sigma$ будут формулы сигнатуры Σ . *Секвенциями ИП $^\Sigma$* называются последовательности вида

$$\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi,$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi$ — формулы сигнатуры Σ . Напомним, что при $n = 0$ мы получаем секвенцию вида $\vdash \Psi$.

Примем следующие соглашения. Пусть x_1, \dots, x_n — переменные, t_1, \dots, t_n — термы сигнатуры Σ и Φ — формула сигнатуры Σ . Запись $(\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$ будет обозначать результат подстановки термов t_1, \dots, t_n вместо всех свободных вхождений в Φ переменных x_1, \dots, x_n соответственно, причем если в тексте встречается запись $(\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$, то предполагается, что при этой замене не увеличивается число связанных вхождений переменных. Это означает, что для всех $i = 1, \dots, n$ ни одно свободное вхождение в Φ переменной x_i не входит в подформулу Φ вида $\forall y \Phi_1$ или $\exists y \Phi_1$ для $y \in FV(t_i)$. Запись $[\Phi]_y^x$ будет обозначать формулу $(\Phi)_y^x$, и при ее появлении предполагается, что кроме условия на запись $(\Phi)_y^x$ еще выполняется условие $y \notin FV(\Phi)$. Когда в тексте уже встречалась запись $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, вместо громоздкой записи $(\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$ часто будем писать просто $\Phi(t_1, \dots, t_n)$. Заметим, что по соглашению в начале § 3.2 переменные x_1, \dots, x_n попарно различны, в то время как среди t_1, \dots, t_n могут быть равные термы.

Определение. Аксиомами ИП $^\Sigma$ являются следующие секвенции:

- 1) $\Phi \vdash \Phi$, Φ — формула сигнатуры Σ ;
- 2) $\vdash t \approx t$, t — терм сигнатуры Σ ;
- 3) $t \approx q$, $(\Phi)_t^x \vdash (\Phi)_q^x$, x — переменная, t, q — термы, Φ — формула сигнатуры Σ , удовлетворяющая условию на запись $(\Phi)_t^x$ и $(\Phi)_q^x$.

Определение. Правила вывода ИП $^\Sigma$ таковы:

1. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi};$
2. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi};$
3. $\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
4. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
5. $\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi};$
6. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash X; \Gamma, \Psi \vdash X; \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash X};$
7. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi};$
8. $\frac{\Gamma \vdash \Psi; \Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi}{\Gamma \vdash \Psi};$
9. $\frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma \vdash \Phi};$
10. $\frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \mathfrak{F}};$
11. $\frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Gamma_1 \vdash X}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Gamma_1 \vdash X};$
12. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \Psi \vdash \Phi};$
13. $\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \forall x \Phi},$ где x не входит
в члены Γ
свободно;
14. $\frac{\Gamma, (\Phi)_t^x \vdash \Psi}{\Gamma, \forall x \Phi \vdash \Psi};$
15. $\frac{\Gamma \vdash (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash \exists x \Phi},$
16. $\frac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma, \exists x \Phi \vdash \Psi},$ где x не входит
в Ψ и члены Γ
свободно;

Как и в ИВ, в правилах вывода Φ, Ψ, X — формулы ИП $^\Sigma$, а Γ, Γ_1 — последовательности таких формул. При этом в правилах 13–16 формулы Φ, Ψ и последовательности Γ должны удовлетворять указанным условиям, а также условиям на запись $(\Phi)_t^x$. Так же как и в ИВ, если в правилах вывода вместо Φ, Ψ, X и Γ, Γ_1 берутся конкретные формулы и конкретные последовательности формул, то получаются частные случаи (или применения) правил вывода. Если Θ — частный случай правила вывода α , то будем говорить, что секвенция, стоящая в Θ под чертой, получается из секвенций, стоящих в Θ над чертой, при помощи правила α . Следующее определение является почти дословным повторением соответствующего определения ИВ.

Определение. Линейным доказательством в ИП $^\Sigma$ называется конечная последовательность C_0, \dots, C_n секвенций ИП $^\Sigma$, которая удовлетворяет следующему условию: каждая секвенция C_i , $i \leq n$, либо является аксиомой, либо получается из некоторых предыдущих при помощи одного из правил вывода 1–16. Линейное доказательство C_0, \dots, C_n

называется линейным доказательством своей последней секвенции C_n . Если существует линейное доказательство в ИП $^\Sigma$ секвенции C , то C называется *доказуемой* в ИП $^\Sigma$ или *теоремой* ИП $^\Sigma$. Формула Φ ИП $^\Sigma$ называется *доказуемой* в ИП $^\Sigma$ или *теоремой* ИП $^\Sigma$, если в ИП $^\Sigma$ доказуема секвенция $\vdash \Phi$. Дерево D называется *доказательством* в виде дерева или деревом доказательства секвенции C в ИП $^\Sigma$, если все его начальные секвенции — аксиомы ИП $^\Sigma$, переходы — применения правил 1–16, а заключительная секвенция равна C .

Определения допустимого правила и квазивывода совпадают с соответствующими определениями из § 1.3 с заменой ИВ на ИП $^\Sigma$.

Предложение 4.1.1. Секвенция C является теоремой ИП $^\Sigma$ тогда и только тогда, когда существует ее доказательство в виде дерева в ИП $^\Sigma$.

Доказательство. Почти дословное повторение доказательства предложения 1.3.1. \square

Формула Ψ ИП $^\Sigma$ называется *тавтологией*; если она получается из формулы Φ исчисления высказываний, доказуемой в ИВ, путем замены всех ее пропозициональных переменных P_1, \dots, P_n на некоторые формулы ИП $^\Sigma$ Ψ_1, \dots, Ψ_n соответственно. Формулу Φ при этом назовем *основой тавтологии*.

Предложение 4.1.2. Любая тавтология Ψ сигнатуры Σ доказуема в ИП $^\Sigma$.

Доказательство. Пусть Ψ получена из основы Φ заменой переменных P_1, \dots, P_n на формулы Ψ_1, \dots, Ψ_n соответственно.

Пусть дерево D_1 получено из дерева доказательства D в ИВ секвенции $\vdash \Phi$ заменой переменных P_1, \dots, P_n соответственно на Ψ_1, \dots, Ψ_n и заменой остальных пропозициональных переменных на произвольную формулу Ψ_{n+1} сигнатуры Σ . Очевидно, что дерево D_1 является деревом доказательства секвенции $\vdash \Psi$ в ИП $^\Sigma$. \square

Предложение 4.1.3. Пусть Φ — формула ИП $^\Sigma$, x_1, \dots, x_n — переменные, t_1, \dots, t_n — термы сигнатуры Σ и выполняются условия на запись $(\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$. Тогда в ИП $^\Sigma$ доказуемы следующие секвенции:

- а) $\forall x_1 \dots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$;
- б) $(\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \Phi$.

Доказательство. Пусть y_1, \dots, y_n — попарно различные переменные, не входящие в формулу Φ , в термы t_1, \dots, t_n и отличные от x_1, \dots, x_n .

а). Для всех $1 < k < n$ имеет место равенство

$$(\forall x_{k+1} \dots \forall x_n (\Phi)_{y_1, \dots, y_{k-1}}^{x_1, \dots, x_{k-1}})^{x_k}_{y_k} = \forall x_{k+1} \dots \forall x_n (\Phi)_{y_1, \dots, y_k}^{x_1, \dots, x_k},$$

и выполнены все условия на такую запись. Поэтому следующее дерево будет доказательством в ИП $^\Sigma$:

$$\begin{array}{c} (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \\ \hline \forall x_n (\Phi)_{y_1, \dots, y_{n-1}}^{x_1, \dots, x_{n-1}} \vdash (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \\ \hline \forall x_{n-1} \forall x_n (\Phi)_{y_1, \dots, y_{n-2}}^{x_1, \dots, x_{n-2}} \vdash (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \hline \forall x_1 \dots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \end{array}.$$

Применяя теперь n раз правило 13, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \dots \forall y_n (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n}.$$

Обозначим формулу $(\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n}$ через Ψ . Тогда для Ψ выполнено условие на запись $(\Psi)_{t_1, \dots, t_n}^{y_1, \dots, y_n}$. Для всех $1 < k < n$ имеем

$$(\forall y_{k+1} \dots \forall y_n (\Psi)_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{y_1, \dots, y_{k-1}})^{y_k}_{t_k} = \forall y_{k+1} \dots \forall y_n (\Psi)_{t_1, \dots, t_k}^{y_1, \dots, y_k}$$

и условия на такую запись. Снова применяя n раз правило 14, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \Psi \vdash (\Psi)_{t_1, \dots, t_n}^{y_1, \dots, y_n}.$$

Так как $(\Psi)_{t_1, \dots, t_n}^{y_1, \dots, y_n} = (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n}$, то следующее дерево будет квазивыводом в ИП $^\Sigma$:

$$\begin{array}{c} \forall y_1 \dots \forall y_n \Psi \vdash (\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \\ \hline \vdash \forall y_1 \dots \forall y_n \Psi \rightarrow (\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}; \quad \forall x_1 \dots \forall x_n \Phi \vdash \forall y_1 \dots \forall y_n \Psi \\ \hline \forall x_1 \dots \forall x_n \Phi \vdash (\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \end{array}.$$

б). Доказательство аналогично а). Сначала, применяя несколько раз правило 15, получаем теорему

$$(\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \Phi.$$

Затем, применяя несколько раз правило 16, получаем теорему ИП $^\Sigma$:

$$\exists y_1 \dots \exists y_n (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \Phi. \quad (4.1)$$

Опять, применяя несколько раз правило 15, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$(\Psi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \exists y_1 \dots \exists y_n \Psi, \quad (4.2)$$

где $\Psi = (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n}$. Из (4.1) и (4.2) так же, как в а), следует доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции б). \square

Предложение 4.1.4. В ИП $^\Sigma$ допустимы правила а)–д) из предложения 1.3.3 и упражнения 2 к § 1.3, а также правило

$$\text{i). } \frac{\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash \Psi}{(\Phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \dots, (\Phi_k)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Psi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}}.$$

Доказательство. Для правил а)–д) доказательство по существу совпадает с доказательством допустимости соответствующих правил из § 1.3.

и). Пусть секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash \Psi$ доказуема в ИП $^\Sigma$. Применяя несколько раз правило 7, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$\vdash \Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots (\Phi_k \rightarrow \Psi) \dots).$$

Применяя несколько раз правило 13, получаем доказуемость секвенции

$$\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots (\Phi_k \rightarrow \Psi) \dots)).$$

Из предложения 4.1.3, а), и допустимого правила в) получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$\vdash (\Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots (\Phi_k \rightarrow \Psi) \dots))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) и аксиомы $(\Phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$ по правилам 8 и 12 получаем секвенцию

$$(\Phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Phi_2 \rightarrow (\dots (\Phi_k \rightarrow \Psi) \dots))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}.$$

Аналогично применяя еще несколько раз правило 8, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$(\Phi_1)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}, \dots, (\Phi_k)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Psi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}. \quad \square$$

Если C — секвенция ИП $^\Sigma$, то объединение всех множеств $FV(\Phi)$, где Φ — формула из C , называется *множеством свободных переменных секвенции C* и обозначается через $FV(C)$.

Определение. Пусть $C = \Gamma \vdash \Psi$ — секвенция ИП $^\Sigma$, \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и γ — интерпретация переменных из $FV(C)$ в множестве A . Секвенция C называется *истинной в \mathfrak{A} при*

интерпретации γ (обозначаем $\mathfrak{A} \models C[\gamma]$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$ или $\mathfrak{A} \models \neg\Phi[\gamma]$ для некоторой формулы Φ из Γ .

Если секвенция C не истинна в \mathfrak{A} при γ , то говорим что C *ложна в \mathfrak{A} при γ* . Из определения получаем, что секвенция $\vdash \mathcal{F}$ ложна в любой алгебраической системе \mathfrak{A} .

Определение. Секвенция C исчисления ИП $^\Sigma$ называется *тождественно истинной*, если $\mathfrak{A} \models C[\gamma]$ для любой алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ и любой интерпретации $\gamma: FV(C) \rightarrow A$.

Ясно, что свойство секвенции C быть тождественно истинной не зависит от того, в каком исчислении ИП $^\Sigma$ она рассматривается (т. е. от сигнатуры Σ).

Основной целью для нас в этой главе будет доказательство следующего замечательного результата К. Гёделя: класс доказуемых в ИП $^\Sigma$ секвенций совпадает с классом тождественно истинных секвенций ИП $^\Sigma$. Это утверждение называется *теоремой полноты исчисления предикатов*. Одна часть этого утверждения доказывается легко.

Теорема 4.1.5. *Все доказуемые в ИП $^\Sigma$ секвенции C являются тождественно истинными. В частности, исчисление ИП $^\Sigma$ непротиворечиво, т. е. не все формулы ИП $^\Sigma$ доказуемы в ИП $^\Sigma$.*

Доказательство проведем индукцией по высоте доказательства секвенции C в виде дерева. Очевидно, что аксиомы ИП $^\Sigma$ являются тождественно истинными. Проверку того, что правила вывода 1–16 сохраняют тождественную истинность, мы оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только, что для проверки правил 14 и 15 нужно сначала установить следующий факт. Пусть Φ — формула, t — терм и выполняются условия на запись $(\Phi)_t^x$, $X = FV(\Phi)$, $Y = FV((\Phi)_t^x)$, $\gamma: X \rightarrow A$, $\gamma^*: Y \rightarrow A$. Тогда если $\gamma \upharpoonright (X \setminus \{x\}) = \gamma^* \upharpoonright (X \setminus \{x\})$ и $\gamma(x) = t^{\mathfrak{A}}[\gamma^*]$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models (\Phi)_t^x[\gamma^*].$$

Этот факт легко устанавливается индукцией по длине Φ . \square

Вторую часть теоремы полноты мы докажем в § 4.4. Для этого нам нужно сначала получить достаточное количество доказуемых в ИП $^\Sigma$ секвенций. Следующее предложение показывает, что обычные свойства равенства доказуемы в ИП $^\Sigma$. Если t_1, \dots, t_n, t — термы сигнатуры Σ , x_1, \dots, x_n — переменные, то через $(t)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$ обозначаем результат подстановки вместо x_1, \dots, x_n термов t_1, \dots, t_n соответственно.

Предложение 4.1.6. *Пусть $t, q, s; q_1, \dots, q_n; s_1, \dots, s_n$ — термы сигнатуры Σ , Φ — формула ИП $^\Sigma$, удовлетворяющая условию на*

запись $(\Phi)_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n}$ и на запись $(\Phi)_{s_1, \dots, s_n}^{x_1, \dots, x_n}$. Тогда в ИП $^\Sigma$ доказуемы следующие секвенции:

- a) $\vdash t \approx t$,
- б) $t \approx q \vdash q \approx t$,
- в) $t \approx q, q \approx s \vdash t \approx s$;
- г) $q_1 \approx s_1, \dots, q_n \approx s_n \vdash (t)_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n} \approx (t)_{s_1, \dots, s_n}^{x_1, \dots, x_n}$;
- д) $q_1 \approx s_1, \dots, q_n \approx s_n, (\Phi)_{q_1, \dots, q_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Phi)_{s_1, \dots, s_n}^{x_1, \dots, x_n}$.

Доказательство. а). Секвенция $\vdash t \approx t$ является аксиомой.

Пусть x, x_1, y, z — попарно различные переменные. Рассмотрим дерево

$$\frac{\vdash x \approx x; x \approx y, (z \approx x)_x^z \vdash (z \approx x)_y^z}{\frac{x \approx y \vdash y \approx x}{t \approx q \vdash q \approx t}}.$$

Так как начальные секвенции у него — аксиомы, а переходы — применения правила из предложения 4.1.4, то рассматриваемое дерево является квазивыводом секвенции б). Доказуемость в) получаем аналогично из квазивывода

$$\frac{y \approx z, (x \approx x_1)_y^x \vdash (x \approx x_1)_z^x}{\frac{x \approx y, y \approx z \vdash x \approx z}{t \approx q, q \approx s \vdash t \approx s}}.$$

г). Пусть $y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n$ — попарно различные переменные, отличные от x_1, \dots, x_n , не входящие в термы $q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n, t$ и в формулу Φ . Из а), предложения 4.1.4, в), и из того, что термы $(t)_{y_1}^{x_1}$ и $((t)_{z_1}^{x_1})_{y_1}^{z_1}$ равны, получаем, что дерево

$$\frac{\vdash (t)_{y_1}^{x_1} \approx (t)_{y_1}^{x_1}; y_1 \approx z_1, (t)_{y_1}^{x_1} \approx ((t)_{z_1}^{x_1})_{y_1}^{z_1} \vdash (t)_{y_1}^{x_1} \approx (t)_{z_1}^{x_1}}{y_1 \approx z_1 \vdash (t)_{y_1}^{x_1} \approx (t)_{z_1}^{x_1}}$$

является квазивыводом в ИП $^\Sigma$. Если $n > 1$, то в силу предложения 4.1.4, и), в ИП $^\Sigma$ доказуема секвенция $y_1 \approx z_1 \vdash (t)_{y_1, y_2}^{x_1, x_2} \approx (t)_{z_1, y_2}^{x_1, x_2}$. Применяя к этой секвенции и аксиоме

$$y_2 \approx z_2, (t)_{y_1, y_2}^{x_1, x_2} \approx ((t)_{z_1, z_2}^{x_1, x_2})_{y_2}^{z_2} \vdash (t)_{y_1, y_2}^{x_1, x_2} \approx (t)_{z_1, z_2}^{x_1, x_2}$$

правила а) и б) из предложения 4.1.4, получаем секвенцию

$$y_1 \approx z_1; y_2 \approx z_2 \vdash (t)_{y_1, y_2}^{x_1, x_2} \approx (t)_{z_1, z_2}^{x_1, x_2}.$$

Проделав несколько таких шагов, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$y_1 \approx z_1, \dots, y_n \approx z_n \vdash (t)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \approx (t)_{z_1, \dots, z_n}^{x_1, \dots, x_n}.$$

Из этой секвенции с помощью правила и) из предложения 4.1.4 получаем секвенцию г).

д). Так как справедливо равенство $((\Phi)_{y_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n})_{z_1}^{y_1} = (\Phi)_{z_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}$, то секвенция

$$y_1 \approx z_1, (\Phi)_{y_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} \vdash (\Phi)_{z_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

является аксиомой. Если $n > 1$, то из этой аксиомы и аксиомы

$$y_2 \approx z_2, (\Phi)_{z_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} \vdash ((\Phi)_{z_1, y_2, \dots, y_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n})_{z_2}^{y_2}$$

по правилам а) и в) из предложения 4.1.4 получаем

$$y_1 \approx z_1, y_2 \approx z_2, (\Phi)_{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n}^{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n} \vdash (\Phi)_{z_1, z_2, y_3, \dots, y_n}^{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}.$$

Проделав несколько таких шагов, получаем доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции

$$y_1 \approx z_1, \dots, y_n \approx z_n, (\Phi)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash (\Phi)_{z_1, \dots, z_n}^{x_1, \dots, x_n}.$$

Отсюда в силу правила и) из предложения 4.1.4 следует доказуемость в ИП $^\Sigma$ секвенции д). \square

Следующая теорема является, конечно, следствием упомянутой выше теоремы Гёделя, однако ее легко доказать и непосредственно.

Теорема 4.1.7. *Если $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, то исчисление ИП $^\Sigma$ является консервативным расширением исчисления ИП $^{\Sigma_1}$.*

Доказательство. Пусть D — дерево доказательства в ИП $^\Sigma$ секвенции C , являющейся также секвенцией ИП $^{\Sigma_1}$. Пусть y — переменная, не входящая ни в одну формулу из D . Определим отображение $\sigma: T(\Sigma) \rightarrow T(\Sigma_1)$ индукцией по длине терма $t \in T(\Sigma)$:

- а) если t — переменная, то $\sigma t = t$;
- б) если $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где f — символ из Σ_1 , то $\sigma t = f(\sigma t_1, \dots, \sigma t_n)$;
- в) если $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где f — символ не из Σ_1 , то $\sigma t = y$.

Если Φ — атомарная формула сигнатуры Σ , то пусть $\sigma\Phi$ равняется:

- 1) формуле $r(\sigma t_1, \dots, \sigma t_n)$, если $\Phi = r(t_1, \dots, t_n)$ и r — символ сигнатуры Σ_1 ;
- 2) формуле $\sigma t_1 \approx \sigma t_2$, если $\Phi = t_1 \approx t_2$;
- 3) формуле $\forall y(y \approx y)$, если $\Phi = r(t_1, \dots, t_n)$, где r — символ не из Σ_1 .

Для любой формулы Φ сигнатуры Σ определим формулу $\sigma\Phi$ сигнатуры Σ_1 как результат замены в формуле Φ всех атомарных подформул Ψ на $\sigma\Psi$. Пусть σD получается из D заменой всех секвенций $\Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi$ на $\sigma\Psi_1, \dots, \sigma\Psi_n \vdash \sigma\Phi$. Очевидно, что начальные секвенции σD будут аксиомами ИП $^{\Sigma_1}$. Легко проверяется, что все переходы

в σD будут применениями тех же правил, что и соответствующие переходы в D . В самом деле, проверка для правил 1–13 и 16 тривиальна, а для правил 14 и 15 нужно сначала индукцией по длине формулы Φ заметить (учитывая $x \neq y$), что $\sigma(\Phi)_t^x = (\sigma\Phi)_{\sigma t}^x$, для чего в свою очередь индукцией по длине терма t_1 нужно для любого терма t_2 установить равенство $\sigma(t_1)_{t_2}^x = (\sigma t_1)_{\sigma t_2}^x$. Так как $\sigma\Phi = \Phi$ для всех формул Φ из секвенции C , то дерево σD будет доказательством C в ИП $^{\Sigma_1}$. \square

В дальнейшем мы свободно будем пользоваться теоремой 4.1.7, чтобы не упоминать исчисление ИП $^{\Sigma}$, когда речь идет о доказуемости некоторой секвенции C . В частности, мы будем говорить, что секвенция C доказуема в исчислении предикатов или просто доказуема, если C доказуема в некотором ИП $^{\Sigma}$.

Упражнения

1. Пусть сигнатура Σ содержит все пропозициональные переменные исчисления ИВ в качестве нульместных предикатных символов. Показать, что ИП $^{\Sigma}$ является консервативным расширением ИВ. (указание. Воспользоваться теоремой полноты для ИВ и теоремой 4.1.5.)
2. Показать, что если в одном из правил 13–16 убрать ограничение на применения этого правила (в частности, для правил 14 и 15 снять условие на запись $(\Phi)_t^x$), то в полученном исчислении будет доказуема не тождественно истинная формула.
3. Показать, что если в правилах 13 и 16 убрать все ограничения на применения этих правил, то все теоремы полученного исчисления J будут 1-общезначимыми, в частности, J будет непротиворечивым.

§ 4.2. Эквивалентность формул

Все изучаемые нами свойства алгебраических систем инвариантны относительно изоморфизма, многие же интересующие нас свойства формул инвариантны относительно определенного ниже отношения эквивалентности.

Зафиксируем на дальнейшее произвольную сигнатуру Σ . Все формулы и алгебраические системы в этом параграфе имеют сигнатуру Σ , а доказательства рассматриваются в исчислении ИП $^{\Sigma}$.

Определение. Формулы Φ и Ψ называются *эквивалентными* (обозначается $\Phi \equiv \Psi$), если доказуемы две секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$.

Очевидно, что отношение \equiv является эквивалентностью на множестве $F(\Sigma)$ и все доказуемые формулы из $F(\Sigma)$ образуют один класс эквивалентности. В силу теоремы 4.1.5 для любых формул $\Phi \equiv \Psi$, любой системы \mathfrak{A} и любой интерпретации γ : $(FV(\Phi) \cup FV(\Psi)) \rightarrow A$ свойство $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ равносильно свойству $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$.

Заметим, что в силу теоремы 4.1.7 отношение $\Phi \equiv \Psi$ не зависит от сигнатуры Σ .

Определение. Формулы Φ и Ψ называются *пропозиционально эквивалентными* (обозначается $\Phi \stackrel{s}{\equiv} \Psi$), если $\Phi \rightarrow \Psi$ и $\Psi \rightarrow \Phi$ — тавтологии.

Из предложения 4.1.2 и правила 8 получаем

Предложение 4.2.1. Пропозиционально эквивалентные формулы Φ и Ψ эквивалентны. \square

Предложение 4.2.2. Пусть Φ, Ψ — формулы и x не входит свободно в Ψ . Тогда имеют место следующие эквивалентности:

- | | |
|---|---|
| a) $\neg \exists x \Phi \equiv \forall x \neg \Phi$; | b) $\neg \forall x \Phi \equiv \exists x \neg \Phi$; |
| в) $\exists x \Phi \wedge \Psi \equiv \exists x (\Phi \wedge \Psi)$; | г) $\forall x \Phi \wedge \Psi \equiv \forall x (\Phi \wedge \Psi)$; |
| д) $\exists x \Phi \vee \Psi \equiv \exists x (\Phi \vee \Psi)$; | е) $\forall x \Phi \vee \Psi \equiv \forall x (\Phi \vee \Psi)$; |
| ж) $\forall x \Phi \equiv \forall y [\Phi]_y^x$; | з) $\exists x \Phi \equiv \exists y [\Phi]_y^x$. |

Доказательство. Приведем квазивыводы для эквивалентностей а), в), д) и ж), оставляя проверку остальных читателю.

$$\text{а)} \quad \frac{\begin{array}{c} \neg \Phi \vdash \neg \Phi \\ \forall x \neg \Phi \vdash \neg \Phi \end{array}}{\Phi \vdash \neg \forall x \neg \Phi} \quad \frac{\begin{array}{c} \Phi \vdash \Phi \\ \neg \exists x \Phi \vdash \neg \Phi \end{array}}{\neg \exists x \Phi \vdash \neg \forall x \neg \Phi}.$$

$$\frac{\neg \forall x \neg \Phi \vdash \neg \exists x \Phi}{\forall x \neg \Phi \vdash \neg \exists x \Phi};$$

$$\text{в)} \quad \frac{\begin{array}{c} \Psi, \Phi \vdash \Phi \wedge \Psi \\ \Psi, \Phi \vdash \exists x (\Phi \wedge \Psi) \end{array}}{\Psi, \exists x \Phi \vdash \exists x (\Phi \wedge \Psi)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \exists x \Phi \vdash \Psi \rightarrow \exists x (\Phi \wedge \Psi) \\ \vdash \exists x \Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \exists x (\Phi \wedge \Psi)) \quad \exists x \Phi \wedge \Psi \vdash \exists x \Phi \end{array}}{\frac{\begin{array}{c} \exists x \Phi \wedge \Psi \vdash \Psi \rightarrow \exists x (\Phi \wedge \Psi) \\ \exists x \Phi \wedge \Psi \vdash \exists x (\Phi \wedge \Psi) \end{array}}{\exists x \Phi \wedge \Psi \vdash \exists x (\Phi \wedge \Psi)}};$$

$$\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \exists x\Phi \quad \Phi \wedge \Psi \vdash \Psi} \frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \exists x\Phi \wedge \Psi}{\exists x(\Phi \wedge \Psi) \vdash \exists x\Phi \wedge \Psi}.$$

д)

$$\frac{\Phi \vdash \Phi \vee \Psi}{\Phi \vdash \exists x(\Phi \vee \Psi)} \quad \frac{\Psi \vdash \Phi \vee \Psi}{\Psi \vdash \exists x(\Phi \vee \Psi)} \\ \frac{\exists x\Phi \vee \Psi \vdash \exists x\Phi \vee \Psi \quad \exists x\Phi \vdash \exists x(\Phi \vee \Psi) \quad \Psi \vdash \exists x(\Phi \vee \Psi)}{\exists x\Phi \vee \Psi \vdash \exists x(\Phi \vee \Psi)};$$

$$\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \exists x\Phi} \\ \frac{\Phi \vee \Psi \vdash \Phi \vee \Psi \quad \Phi \vdash \exists x\Phi \vee \Psi \quad \Psi \vdash \exists x\Phi \vee \Psi}{\Phi \vee \Psi \vdash \exists x\Phi \vee \Psi} \\ \frac{\exists x(\Phi \vee \Psi) \vdash \exists x\Phi \vee \Psi}{\exists x(\Phi \vee \Psi) \vdash \exists x\Phi \vee \Psi}.$$

ж) $\frac{[\Phi]_y^x \vdash [\Phi]_y^x}{\forall x\Phi \vdash [\Phi]_y^x} \frac{\forall x\Phi \vdash [\Phi]_y^x}{\forall x\Phi \vdash \forall y[\Phi]_y^x}.$

Заметим, что $[[\Phi]_y^x]_x^y = \Phi$. Это равенство следует из условий на запись $[\Phi]_y^x$.

$$\frac{[[\Phi]_y^x]_x^y \vdash \Phi}{\forall y[\Phi]_y^x \vdash \Phi} \\ \frac{\forall y[\Phi]_y^x \vdash \Phi}{\forall y[\Phi]_y^x \vdash \forall x\Phi}.$$

□

Предложение 4.2.3. Имеют место все эквивалентности из § 1.4 и 1.5, если Φ , Ψ и X считать формулами сигнатуры Σ .

Доказательство очевидно, так как при замене пропозициональных переменных на формулы ИП^Σ доказательства в ИВ перейдут в доказательства в ИП^Σ . □

Теорема 4.2.4 (о замене для ИП^Σ). Если формула Φ получается из формулы Ψ заменой некоторого вхождения подформулы Ψ' на формулу Φ' и $\Phi' \equiv \Psi'$, то $\Phi \equiv \Psi$.

Доказательство проводим индукцией по длине Ψ . Если $\Psi' = \Psi$, то утверждение тривиально. Если $\Psi = \neg \Psi_1$ или $\Psi = \Psi_1 \tau \Psi_2$, где

$\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то доказательство индукционного шага не отличается от соответствующих случаев теоремы о замене для ИВ (§ 1.4). Таким образом, для завершения доказательства в силу индукционного предположения осталось рассмотреть случаи, когда Ψ имеет вид $\forall x\Psi'$ или $\exists x\Psi'$. По условию секвенции $\Phi' \vdash \Psi'$ и $\Psi' \vdash \Phi'$ доказуемы. В силу симметричности Φ' и Ψ' достаточно доказать секвенции $\forall x\Psi' \vdash \forall x\Phi'$ и $\exists x\Psi' \vdash \exists x\Phi'$. Приведем их квазивыводы:

$$\frac{\Psi' \vdash \Phi'}{\forall x\Psi' \vdash \Phi'}, \quad \frac{\Psi' \vdash \Phi'}{\exists x\Psi' \vdash \exists x\Phi'}. \quad \square$$

В определении истинности формул на системах связанные вхождения переменных играют совершенно другую роль, чем свободные. В частности, проверка истинности формул $\forall x\Phi$ и $\forall y[\Phi]_y^x$ одна и та же. В оставшейся части этого параграфа будет показано, что замена связанных переменных преобразует формулу в эквивалентную ей, если при этом новое вхождение переменной связывается тем же вхождением квантора и никакое свободное вхождение переменной не становится при такой замене связанным. Перейдем к точной формулировке такого преобразования.

Определение. Говорим, что формула Φ получается из формулы Ψ *заменой связанной переменной*, если Φ получается из Ψ заменой некоторого вхождения подформулы $Qx\Psi_1$ на формулу $Qy[\Psi_1]_y^x$ (здесь $Q \in \{\forall, \exists\}$ и выполняются условия на запись $[\Psi_1]_y^x$). Формулы Φ и Ψ называются *конгруэнтными* (обозначается $\Phi \sim \Psi$), если существует такая последовательность формул Φ_0, \dots, Φ_n , что $\Phi_0 = \Phi$, $\Phi_n = \Psi$, а Φ_{k+1} , $k < n$, получается из Φ_k заменой связанной переменной.

Пример 4.2.5. Рассмотрим формулы $\Phi = \forall v_2 \exists v_3 r(v_2, v_3)$ и $\Psi = \forall v_3 \exists v_2 r(v_3, v_2)$. Последовательность

$$\forall v_2 \exists v_3 r(v_2, v_3), \forall v_2 \exists v_0 r(v_2, v_0), \forall v_3 \exists v_0 r(v_3, v_0), \forall v_3 \exists v_2 r(v_3, v_2)$$

показывает, что $\Phi \sim \Psi$.

Предложение 4.2.6. а). Отношение \sim является эквивалентностью на множестве формул сигнатуры Σ .

б). Если $\Phi \sim \Psi$, то $\Phi \equiv \Psi$.

Доказательство. а). Из свойства $[[\Psi_1]_y^x]_x^y = \Psi_1$ для любой формулы Ψ_1 , для которой выполняются условия на запись $[\Psi_1]_y^x$, следует, что если Ψ получается из Φ заменой связанной переменной, то Φ также получается из Ψ заменой связанной переменной. Отсюда полу-

чаем симметричность отношения \sim . Рефлексивность и транзитивность отношения \sim очевидна.

б). В силу теоремы о замене достаточно показать, что $\mathbf{Q}x\Psi_1 \equiv \equiv \mathbf{Q}y[\Psi_1]_y^x$, $\mathbf{Q} \in \{\forall, \exists\}$. Но это уже доказано в предложении 4.2.2 ж), з).

□

Как уже отмечалось, нас будут интересовать формулы в основном «с точностью» до эквивалентности, поэтому будут допускаться записи вида $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n$, $\bigvee_{k \leq n} \Phi_k$ и др., по которым формулы восстанавливаются неоднозначно, но при любых расстановках скобок получаются эквивалентные формулы.

Упражнения

1. Показать, что отношение \equiv является эквивалентностью на $F(\Sigma)$.
2. Доказать утверждения б), г), е) и з) предложения 4.2.2.
3. Показать, что для любой формулы Φ и любых переменных x_1, \dots, x_n существует такая формула Ψ , что $\Psi \equiv \Phi$ и $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq FV(\Psi)$.

§ 4.3. Нормальные формы

Так как нас, в основном, будут интересовать формулы «с точностью» до эквивалентности, то полезно выбирать такие подмножества $P \subseteq F(\Sigma)$ формул, устроенных по возможности более просто по сравнению с произвольными формулами и чтобы для любой $\Phi \in F(\Sigma)$ существовала $\Psi \in P$, для которой $\Phi \equiv \Psi$. Некоторые из таких подмножеств будут определены в настоящем параграфе.

Будем говорить, что формула Φ сигнатуры Σ находится в *дизъюнктивной нормальной форме* (сокращенно *д. н. ф.*), если она получается из формулы Ψ исчисления высказываний заменой всех входящих в Ψ пропозициональных переменных P_1, \dots, P_n на некоторые атомарные формулы Φ_1, \dots, Φ_n сигнатуры Σ соответственно.

Определение. Будем говорить, что формула Φ сигнатуры Σ находится в *пренексной нормальной форме*, если она имеет вид

$$\mathbf{Q}_1 x_1 \dots \mathbf{Q}_n x_n \Phi_1,$$

где \mathbf{Q}_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, — кванторы, а Φ_1 находится в д. н. ф. Формулу Φ_1 в этом случае назовем *матрицей*, а слово $\mathbf{Q}_1 x_1 \dots \mathbf{Q}_n x_n$ — *кванторной приставкой* формулы Φ .

Теорема 4.3.1. Для любой формулы Φ сигнатуры Σ существует формула Ψ сигнатуры Σ , находящаяся в пренексной нормальной форме и эквивалентная Φ .

Доказательство. В силу предложения 4.2 формулы $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ и $\neg\Phi_1 \vee \Phi_2$ эквивалентны для любых $\Phi_1, \Phi_2 \in F(\Sigma)$. Следовательно, для любой $\Phi \in F(\Sigma)$, применяя несколько раз теорему 4.2.4, можно получить формулу $\Psi_1 \equiv \Phi$, не содержащую знака \rightarrow . Индукцией по длине формулы Ψ_1 , не содержащей \rightarrow , покажем, что существует $\Psi_2 \equiv \Psi_1$ имеющая вид

$$\mathbf{Q}_1 y_1 \dots \mathbf{Q}_k y_k \Psi_3,$$

где Ψ_3 — бескванторная формула, и длина Ψ_2 равна длине Ψ_1 . Если Ψ_1 бескванторная, то в качестве Ψ_2 берем Ψ_1 . Если $\Psi_1 = \mathbf{Q}x\Psi'$, то нужная Ψ_2 существует по предположению индукции и теореме 4.2.4. Таким образом, осталось рассмотреть 2 случая: 1) $\Psi_1 = \neg\Psi'$ и 2) $\Psi_1 = (\Psi'\tau\Psi'')$, $\tau \in \{\wedge, \vee\}$, где Ψ' имеет кванторы и находится в виде $\mathbf{Q}_0 x_0 \dots \mathbf{Q}_n x_n X$, где X — бескванторная формула. (Здесь мы воспользовались эквивалентностью $(\Psi'\tau\Psi'') \equiv (\Psi''\tau\Psi')$ для того, чтобы утверждать, что Ψ' имеет кванторы). Пусть $\Psi' = \exists x\Psi_4$. Случай с другим квантором рассматривается совершенно аналогично. Из предложения 4.2.2, а), получаем для случая 1) эквивалентность $\Psi_1 \equiv \forall x \neg \Psi_4$. Нужная Ψ_2 для случая 1) существует тогда по индукционному предположению и теореме 4.2.4. Рассмотрим случай 2). Пусть y — переменная, не входящая в Ψ_1 . Из предложения 4.2.2, з), и теоремы 4.2.4 получаем $\Psi_1 \equiv (\exists y[\Psi_4]_y^x \tau \Psi'')$. Из эквивалентностей в) и д) того же предложения имеем $\Psi_1 \equiv \exists y([\Psi_4]_y^x \tau \Psi'')$. Требуемая Ψ_2 найдется теперь по индукционному предположению и теореме 4.2.4.

Для завершения доказательства теоремы в силу теоремы 4.2.4 нужно для бескванторной Ψ_3 найти $\Phi' \equiv \Psi_3$, находящуюся в д. н. ф. Для этого заменим все атомарные подформулы Φ_0, \dots, Φ_n формулы Ψ_3 на пропозициональные переменные P_0, \dots, P_n соответственно, получим формулу X исчисления высказываний. Пусть X_1 — формула ИВ, находящаяся в д. н. ф. с теми же переменными, что и X , для которой $X_1 \vdash X$ и $X \vdash X_1$ — теоремы ИВ. Пусть Φ' получается из X_1 заменой P_0, \dots, P_n на Φ_0, \dots, Φ_n соответственно, тогда $\Phi' \stackrel{s}{\equiv} \Psi_3$, следовательно, по предложению 4.2.1 $\Phi' \equiv \Psi_3$. \square

Определение. Говорим, что формула Φ сигнатуры Σ находится в *приведенной нормальной форме*, если все ее атомарные подформулы являются атомными. (См. § 3.2 для определения атомной формулы.)

Предложение 4.3.2. Для любой формулы Φ сигнатуры Σ существует формула Ψ сигнатуры Σ , находящаяся в *приведенной нормальной форме*.

Доказательство. В силу теоремы 4.2.4 достаточно доказать предложение для атомарной формулы Φ . Проведем индукцию по числу

$n(\Phi)$ вхождений сигнатурных символов в Φ . Если $n(\Phi) \leq 1$, то Φ — атомная формула и доказывать нечего. Если $n(\Phi) > 1$, то в Φ существует вхождение терма t , имеющего вид $f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$. Тогда $\Phi = (\Phi')_t^y$, где Φ' получается из Φ заменой этого вхождения на переменную y , не входящую в Φ .

Следующие квазивыводы:

$$\frac{\Phi \vdash \Phi; \vdash t \approx t}{\Phi \vdash (\Phi' \wedge y \approx t)_t^y}, \quad \frac{y \approx t, \Phi' \vdash \Phi}{\Phi' \wedge y \approx t \vdash \Phi},$$

$$\Phi \vdash \exists y(\Phi' \wedge y \approx t), \quad \exists y(\Phi' \wedge y \approx t) \vdash \Phi,$$

показывают, что $\Phi \equiv \exists y(\Phi' \wedge y \approx t)$. Теперь применяем индукционное предположение к Φ' и теорему 4.2.4. \square

Заметим, что в теореме 4.3.1 без изменения доказательства можно потребовать, чтобы формула Ψ находилась в приведенной нормальной форме, если Φ находится в приведенной нормальной форме. Поэтому имеет место

Следствие 4.3.3. Для любой формулы Φ сигнатуры Σ существует формула Ψ сигнатуры Σ , находящаяся в пренексной приведенной нормальной форме и эквивалентная Φ . \square

В дальнейшем для краткости вместо «пренексная (приведенная) нормальная форма» будем писать «пренексная (приведенная) н.ф.».

Упражнения

- Показать, что в теореме 4.3.1 можно потребовать, чтобы у формул Φ и Ψ было одно и то же число вхождений кванторов.
- Показать, что в теореме 4.3.1 можно потребовать, чтобы формула Ψ имела вид $\exists x_0 \forall x_1 \dots \exists x_{n-1} \forall x_n \Psi'$.
- Проверить, что в теореме 4.3.1 и предложении 4.3 можно потребовать, чтобы $FV(\Phi) = FV(\Psi)$.

§ 4.4. Теорема о существовании модели

Определение. Множество формул X сигнатуры Σ называется *противоречивым* или *несовместным*, если в исчислении предикатов доказуема секвенция $\Gamma \vdash \mathfrak{F}$, где все члены Γ принадлежат X . В противном случае X называется *непротиворечивым* или *совместным*.

Отметим некоторые свойства введенного понятия.

Предложение 4.4.1. а). Пустое множество непротиворечиво.

б). Если X — непротиворечивое множество формул сигнатуры Σ и в исчислении предикатов доказуема секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Phi$, где $\Phi \in F(\Sigma)$, $\Phi_1 \in X, \dots, \Phi_n \in X$, то $X \cup \{\Phi\}$ непротиворечиво.

в). Если $X \cup \{\exists x \Phi\}$ непротиворечиво, то $X \cup \{[\Phi]_y^x\}$ непротиворечиво при условии, что y не входит свободно в формулы из X .

г). Если X_n , $n \in \omega$, — непротиворечивые множества, и $X_n \subseteq X_{n+1}$, $n \in \omega$, то $X = \bigcup_{i \in \omega} X_n$ непротиворечиво.

д). Если X — непротиворечивое множество формул сигнатуры Σ , то для любой $\Phi \in F(\Sigma)$ либо $X \cup \{\Phi\}$, либо $X \cup \{\neg \Phi\}$ непротиворечиво.

Доказательство. Утверждение а) следует из теоремы 4.1.5. Утверждение г) очевидно. Если секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Phi$ доказуема, то из доказуемости секвенции $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \Phi \vdash \mathfrak{F}$ следует доказуемость $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \mathfrak{F}$, так что имеет место б). Если секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n, [\Phi]_y^x \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в исчислении предикатов и y не входит свободно ни в одну из формул Φ_1, \dots, Φ_n , то по правилу предложения 4.1.4, г), и правилу 13 получаем доказуемость $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \forall y \neg [\Phi]_y^x$. Тогда из предложения 4.2.2, г), следует доказуемость секвенции $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \forall x \neg \Phi$. Из предложения 4.2.2, а), тогда следует доказуемость $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \neg \exists x \Phi$. Используя теперь правило 10 и аксиому $\exists x \Phi \vdash \exists x \Phi$, получаем, что $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \exists x \Phi \vdash \mathfrak{F}$ является теоремой исчисления предикатов, откуда получаем в). Если $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi \vdash \mathfrak{F}$ и $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \neg \Phi \vdash \mathfrak{F}$ — теоремы исчисления предикатов, то по правилу 9, предложению 4.1.4, г), и правилу 10 получаем доказуемость секвенции $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Psi_1, \dots, \Psi_k \vdash \mathfrak{F}$, т. е. справедливо д). \square

Приступим теперь к доказательству одной из важнейших теорем математической логики.

Теорема 4.4.2 (о существовании модели). Любое непротиворечивое множество X формул сигнатуры Σ имеет модель.

Доказательство. В силу теоремы компактности (§ 3.3) можно считать, что множество X конечно. Пусть x_1, \dots, x_n — все переменные, входящие свободно в элементы $X = \{\Psi_1, \dots, \Psi_k\}$. Так как выполнимость X равносильна выполнимости $X' = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_k)\}$, то можно считать, что X состоит из одного предложения. Наконец, сигнатуру $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ можно считать конечной. (Если Σ бесконечна, то нужно взять ограничение Σ на множество символов, входящих в формулы из X .)

Пусть $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ — множество символов, $c_n \neq c_k$ для $n \neq k$ и $C \cap (R \cup F) = \emptyset$. Пусть Σ_1 получается добавлением к Σ элементов множества C в качестве символов новых констант. Так как формулы

сигнатуры Σ_1 являются словами некоторого счетного алфавита, то множество всех формул сигнатуры Σ_1 имеет счетную мощность. Пусть $\{\Phi_n \mid n \in \omega\}$ — множество всех предложений сигнатуры Σ_1 .

Строим последовательность

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots, \quad n \in \omega,$$

конечных множеств предложений сигнатуры Σ_1 следующим образом:

1. $X_0 = X$.
2. Если $X_n \cup \{\Phi_n\}$ противоречиво, то $X_{n+1} = X_n \cup \{\neg \Phi_n\}$.
3. Если $X_n \cup \{\Phi_n\}$ непротиворечиво и Φ_n не начинается с квантора существования, то $X_{n+1} = X_n \cup \{\Phi_n\}$.
4. Если $X_n \cup \{\Phi_n\}$ непротиворечиво и $\Phi_n = \exists x \Phi'$, то $X_{n+1} = X_n \cup \cup \{\Phi_n, (\Phi')_{c_k}^x\}$, где $c_k \in C$ — константа с наименьшим k , не входящая в Φ_n и элементы X_n .

Положим $X_\omega = \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Установим некоторые свойства множества X_ω . Пусть Φ и Ψ — произвольные предложения сигнатуры Σ_1 :

- а) X_ω непротиворечиво;
- б) либо $\Phi \in X_\omega$, либо $\neg \Phi \in X_\omega$;
- в) если $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in X_\omega$ и $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Phi$ доказуема, то $\Phi \in X_\omega$;
- г) $\Phi \wedge \Psi \in X_\omega \iff (\Phi \in X_\omega \text{ и } \Psi \in X_\omega)$;
- д) $\Phi \vee \Psi \in X_\omega \iff (\Phi \in X_\omega \text{ или } \Psi \in X_\omega)$;
- е) $\neg \Phi \in \omega \iff \Phi \notin X_\omega$;
- ж) $\Phi \rightarrow \Psi \in X_\omega \iff (\Phi \notin X_\omega \text{ или } \Psi \in X_\omega)$;
- з) $\exists x \Phi \in X_\omega \iff ((\Phi)_{c_k}^x \in X_\omega \text{ для некоторой } c_k \in C)$;
- и) $\forall x \Phi \in X_\omega \iff ((\Phi)_{c_k}^x \in X_\omega \text{ для любой } c_k \in C)$;
- к) если t — замкнутый терм сигнатуры Σ_1 , то $c_k \approx t \in X_\omega$ для некоторой константы $c_k \in C$.

Для доказательства а) в силу предложения 4.4.1, г), достаточно установить, что X_n , $n \in \omega$, непротиворечивы. Рассуждение проводим индукцией по n . По условию $X_0 = X$ непротиворечиво. Пусть X_n непротиворечиво. Если для Φ_n имеет место случай 2, то X_{n+1} непротиворечиво по предложению 4.4.1, д). В случае 3 множество X_{n+1} непротиворечиво по условию. Пусть $X_n \cup \{\exists x \Phi'\}$ непротиворечиво и дерево D — доказательство в ИП $^{\Sigma_1}$ секвенции $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \exists x \Phi', (\Phi')_{c_k}^x \vdash \mathfrak{F}$, где $c_k \in C$ не входит в формулы $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \exists x \Phi'$. Пусть y — переменная, не входящая в дерево D , и D' получается из D заменой всех вхождений c_k на y . Очевидно, что D' будет доказательством в ИП $^{\Sigma_1}$ секвенции $\Psi_1, \dots, \Psi_k, \exists x \Phi', [\Phi']_y^x \vdash \mathfrak{F}$, что противоречит предложению 4.4.1, в), если $\Psi_i \in X_n$, $1 \leq i < k$.

Свойство б) вытекает непосредственно из построения X_ω , так как $\Phi = \Phi_n$ для некоторого $n \in \omega$. Свойство в) легко следует из свойств а)

и б). Свойства г)–ж) имеют место в силу свойств а), б) и в). Докажем свойство з). Пусть $\Phi_n = \exists x\Phi$. Если $\exists x\Phi \in X_\omega$, то по свойству а) $X_n \cup \{\Phi_n\}$ непротиворечиво, тогда $(\Phi)_{c_k}^x \in X_{n+1}$ для некоторой константы $c_k \in C$. С другой стороны, так как $(\Phi)_{c_k}^x \vdash \exists x\Phi$ — теорема исчисления предикатов, то из $(\Phi)_{c_k}^x \in X_{n+1}$ и свойства в) получаем $\exists x\Phi \in X_\omega$.

Докажем свойство и). Если $\forall x\Phi \in X_\omega$ и $c_k \in C$, то из аксиомы $(\Phi)_{c_k}^x \vdash (\Phi)_{c_k}^x$ по правилу 14 получаем теорему $\forall x\Phi \vdash (\Phi)_{c_k}^x$. Отсюда по свойству в) получаем $(\Phi)_{c_k}^x \in X_\omega$. Если $\forall x\Phi \notin X_\omega$, то по свойству е) имеем $\neg \forall x\Phi \in X_\omega$. Из эквивалентности $\neg \forall x\Phi \equiv \exists x \neg \Phi$ и в) получаем $\exists x \neg \Phi \in X_\omega$. По свойству з) получаем $(\neg \Phi)_{c_k}^x \in X_\omega$ для некоторой $c_k \in C$. Тогда по свойству е) имеет место $(\Phi)_{c_k}^x \notin X_\omega$.

Докажем теперь последнее свойство к). Секвенция $\vdash (x \approx t)_t^x$ является аксиомой исчисления предикатов. По правилу 15 получаем, что $\vdash \exists x(x \approx t)$ — теорема ИП $^{\Sigma_1}$. Теперь к) следует из в) и з).

В дальнейшем элементы множества C будем обозначать через c, d и d_i, e_i , $i \in \omega$. На множестве C определим отношение \sim так:

$$c \sim d \iff c \approx d \in X_\omega.$$

Из свойства в) и предложения 4.1.6, а)–в) следует, что \sim есть эквивалентность на C . Если $c \in C$, то обозначим через \tilde{c} класс эквивалентности по отношению \sim , содержащий c .

Переходим к определению алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A, \nu^\mathfrak{A} \rangle$. Пусть $A = \{\tilde{c} \mid c \in C\}$. Сигнатура системы \mathfrak{A} равна $\Sigma_1 = \langle R, F \cup C, \mu_1 \rangle$. Определим интерпретацию $\nu^\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ_1 в \mathfrak{A} . Пусть $c, d_1, \dots, d_n \in C$. Тогда

- 1) $\nu^\mathfrak{A}(c) = \tilde{c}$;
- 2) $\langle \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n \rangle \in \nu^\mathfrak{A}(r) \iff r(d_1, \dots, d_n) \in X_\omega$ где $r \in R$, $\mu(r) = n$;
- 3) если $f \in F$, $\mu(f) = n$, то $\nu^\mathfrak{A}(f)(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n) = \tilde{c} \iff c \approx f(d_1, \dots, d_n) \in X_\omega$.

Корректность определения предикатов системы \mathfrak{A} по 2) следует из свойства в) и предложения 4.1.6, д). Проверим, что если $f \in F$, то 3) действительно является определением операции на A . Пусть $c \approx f(d_1, \dots, d_n) \in X_\omega$, $c' \approx f(e_1, \dots, e_n) \in X_\omega$ и $d_1 = \tilde{e}_1, \dots, d_n = \tilde{e}_n$. Тогда $d_1 \approx e_1 \in X_\omega, \dots, d_n \approx e_n \in X_\omega$, откуда по свойству в) и предложению 4.1.6, г) получаем $f(d_1, \dots, d_n) \approx f(e_1, \dots, e_n) \in X_\omega$, следовательно, по свойству в) и предложению 4.1.6, б)–г), имеем $c \approx c' \in X_\omega$, т. е. $\tilde{c} = \tilde{c}'$. С другой стороны, для любых $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n \in A$ по свойству к) имеем $c \approx f(d_1, \dots, d_n) \in X_\omega$ для некоторого $c \in C$, т. е. $\nu^\mathfrak{A}(f)$ определена на любых $a_1, \dots, a_n \in A$.

Индукцией по длине замкнутого терма t сигнатуры Σ_1 покажем, что

$$t^\mathfrak{A} = \tilde{c} \iff c \approx t \in X_\omega. \quad (4.4)$$

Если t — константа из C , то (4.4) следует из определения отношения \sim и из 1) определения $\nu^{\mathfrak{A}}$. Для термов t вида $f(d_1, \dots, d_n)$, где $d_1, \dots, d_n \in C$ и $f \in F$ (в частности, когда t — константа из Σ), эквивалентность (4.4) следует из определения $\nu^{\mathfrak{A}}(f)$. Пусть $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $f \in F$, $\mu(f) = n \geq 1$ и $t_1^{\mathfrak{A}} = d_1, \dots, t_n^{\mathfrak{A}} = d_n$. По индукционному предположению $d_1 \approx t_1 \in X_{\omega}, \dots, d_n \approx t_n \in X_{\omega}$, поэтому из предложения 4.1.6, г), и свойства в) получаем

$$f(t_1, \dots, t_n) \approx f(d_1, \dots, d_n) \in X_{\omega}. \quad (4.5)$$

По определению $\nu^{\mathfrak{A}}(f)$ имеем

$$t^{\mathfrak{A}} = \tilde{c} \iff c \approx f(d_1, \dots, d_n) \in X_{\omega}. \quad (4.6)$$

Из (4.5), (4.6), предложения 4.1.6 б), в) и свойства в) получаем (4.4).

Индукцией по длине предложения Φ сигнатуры Σ_1 покажем

$$\mathfrak{A} \models \Phi \iff \Phi \in X_{\omega}. \quad (4.7)$$

Если $\Phi = t_1 \approx t_2$, то по (4.4) имеем

$$\mathfrak{A} \models \Phi \iff (c \approx t_1 \in X_{\omega}, c \approx t_2 \in X_{\omega} \text{ для некоторого } c \in C).$$

Отсюда в силу предложения 4.1.6, б)-г), и свойств в), к) множества X_{ω} получаем (4.7) для этого случая. Пусть $\Phi = r(t_1, \dots, t_n)$, $r \in R$, и $t_1^{\mathfrak{A}} = \tilde{d}_1, \dots, t_n^{\mathfrak{A}} = \tilde{d}_n$. Используя определение $\nu^{\mathfrak{A}}(r)$, (4.4), предложение 4.1.6 и свойство в), получаем (4.7) для такого Φ . Для остальных Φ эквивалентность (4.7) сразу получается из индукционного предположения и соответствующих свойств в)-и).

Так как $X \subseteq X_{\omega}$, то из (4.7) получаем, что \mathfrak{A} является моделью для множества X . \square

Следствием доказанной теоремы является

Теорема 4.4.3 (теорема Гёделя о полноте). *Если C — тождественно истинная секвенция исчисления предикатов, то C доказуема в исчислении предикатов.*

Доказательство. Пусть C равна $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$. Из тождественной истинности C получаем, что множество $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n, \neg\Psi\}$ не имеет модели. Из теоремы 4.4.2 следует, что оно противоречиво, т. е. $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \neg\Psi \vdash \mathfrak{F}$ — теорема исчисления предикатов. По правилу 9 получаем, что C доказуема. \square

Доказательство теоремы 4.4.2 дает нам следующий факт: конечное непротиворечивое множество X формул сигнатуры Σ имеет конечную

или счетную модель \mathfrak{A} . К сожалению, теорема компактности, которую мы применили для произвольного множества X , ничего не говорит нам о мощности модели для X . Однако сила метода доказательства теоремы 4.4.2 позволяет обойтись без теоремы компактности и заодно получить информацию о мощности полученной модели. Сначала введем одно понятие.

Определение. Множество предложений X сигнатуры Σ называется полным в Σ , если X непротиворечиво и для любого предложения Φ сигнатуры Σ либо $\Phi \in X$, либо $\neg\Phi \in X$.

Предложение 4.4.4. *Любое непротиворечивое множество X предложений сигнатуры Σ содержится в некотором полном в Σ множестве предложений Y .*

Доказательство. Рассмотрим семейство P всех непротиворечивых множеств предложений сигнатуры Σ , содержащих X . Отношение включения \subseteq частично упорядочивает множество P . Очевидно, что объединение любой цепи из $\langle P, \subseteq \rangle$ принадлежит P . По принципу максимума $\langle P, \subseteq \rangle$ имеет максимальный элемент Y . Из предложения 4.4.1, д) получаем, что Y — полное в Σ множество. \square

Теорема 4.4.5. *Если бесконечное множество X формул сигнатуры Σ непротиворечиво, то X имеет модель \mathfrak{A} мощности, не превосходящей мощность X .*

Доказательство. Пусть $FV(X)$ — все переменные, входящие хотя бы в одну формулу из X свободно. Рассмотрим такое множество $C' = \{c_x \mid x \in FV(X)\}$ символов, что $c_x \neq c_y$ для $x \neq y$ и $C' \cap (R \cup F) = \emptyset$. Пусть $\Sigma(X)$ — сигнатура, все символы которой входят хотя бы в одну формулу из X . Пусть Σ_0 получается из $\Sigma(X)$ добавлением элементов множества C' в качестве символов новых констант. В силу следствия 2.5.7, $|\Sigma_0| \leq |X|$. Заменим во всех формулах из X все свободные вхождения переменных $x \in FV(X)$ на константы $c_x \in C'$ соответственно. Ясно, что полученное множество X' предложений сигнатуры Σ_0 имеет модель тогда и только тогда, когда X имеет модель. Множество X' непротиворечиво¹⁾. В самом деле, предположим, что дерево D — доказательство секвенции $(\Phi_1)_{c_{x_1}, \dots, c_{x_n}}^{x_1, \dots, x_n}, \dots, (\Phi_k)_{c_{x_1}, \dots, c_{x_n}}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \mathfrak{F}$, где $\Phi_1, \dots, \Phi_k \in X$ и c_{x_1}, \dots, c_{x_n} — все константы из C' , входящие в D . Заменив константы c_{x_1}, \dots, c_{x_n} на переменные y_1, \dots, y_n , не входящие в D , получим доказательство D' секвенции $(\Phi_1)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n}, \dots, (\Phi_k)_{y_1, \dots, y_n}^{x_1, \dots, x_n} \vdash \mathfrak{F}$. Применяя предложение

¹⁾ По причинам, которые выясняются в конце данного параграфа, мы даем здесь доказательство, не опирающееся на теорему 4.4.2.

4.1.4, и), получим доказуемость $\Phi_1, \dots, \Phi_k \vdash \mathfrak{F}$, что невозможно в силу непротиворечивости X .

Переходим к построению множеств предложений X_n , $n \in \omega$, и сигнатур Σ_n , $n \in \omega$. При этом будут выполняться следующие условия:

- 1) $X_n \subseteq X_{n+1}$, $n \in \omega$, $X' \subseteq X_0$;
- 2) X_n — полное в Σ_n множество предложений;
- 3) сигнатура Σ_{n+1} получается из Σ_n добавлением новых символов констант;
- 4) $|\Sigma_n| \leq |X_n| = |X|$, $n \in \omega$.

В качестве X_0 берем полное в Σ_0 множество предложений, содержащее X' . Если X_n уже построено, то Σ_{n+1} получается из Σ_n добавлением множества $\{c_\Phi^n \mid \Phi \in X_n\}$ новых символов констант. Рассмотрим множество предложений

$$X'_n = X_n \cup \{(\Phi)_{c_{\Psi}^n}^{x_n} \mid \Psi = \exists x \Phi, \Psi \in X_n\}$$

сигнатуры Σ_{n+1} . Множество X'_n непротиворечиво. В самом деле, предположим, что для $\{\Psi'_1, \dots, \Psi'_k, \Psi_1, \dots, \Psi_m\} \subseteq X_n$, $\Psi_1 = \exists z_1 \Phi_1, \dots, \Psi_m = \exists z_m \Phi_m$, секвенция

$$\Psi'_1, \dots, \Psi'_k, (\Phi_1)_{c_{\Psi_1}^n}^{z_1}, \dots, (\Phi_m)_{c_{\Psi_m}^n}^{z_m} \vdash \mathfrak{F}$$

доказуема и m — минимальное такое число. Заменяя в доказательстве D этой секвенции константу $c_{\Psi_1}^n$ на переменную y , не входящую в D , получим доказательство D' секвенции

$$\Psi'_1, \dots, \Psi'_k, [\Phi_1]_y^{z_1}, (\Phi_2)_{c_{\Psi_2}^n}^{z_2}, \dots, (\Phi_m)_{c_{\Psi_m}^n}^{z_m} \vdash \mathfrak{F}.$$

Из предложения 4.4.1 в) получаем, что секвенция

$$\Psi'_1, \dots, \Psi'_k, \exists z_1 \Phi_1, (\Phi_2)_{c_{\Psi_2}^n}^{z_2}, \dots, (\Phi_m)_{c_{\Psi_m}^n}^{z_m} \vdash \mathfrak{F}$$

доказуема, а это противоречит минимальности m . В качестве X_{n+1} берем теперь полное в Σ_{n+1} множество предложений, содержащее X'_n . Пусть $X_\omega = \bigcup_{n \in \omega} X_n$ и C есть множество всех констант из всех Σ_n , $n \in \omega$. Так как каждое X_n непротиворечиво, то и X_ω непротиворечиво: Очевидно также, что X_ω — полное в Σ_ω множество, где $\Sigma_\omega = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$ получается из Σ добавлением элементов C в качестве символов констант. Следовательно, X_ω , имеет свойства а) и б) из доказательства теоремы 4.4.2, где вместо сигнатуры Σ_1 рассматривается сигнатуря Σ_ω . Из свойств а) и б) следуют свойства в)–ж). Свойство з) следует из построения множеств X'_n , $n \in \omega$. Наконец, свойства и), к) следуют

из свойства з) так же, как в теореме 4.4.2. Далее нужно в точности повторить конец доказательства теоремы 4.4.2, начиная с определения отношения \sim на множестве C .

Осталось только заметить, что мощность модели \mathfrak{A} не превосходит мощности множества C , которое в свою очередь является объединением счетного числа множеств, имеющих мощность, не превосходящую мощность X , и, следовательно, имеет мощность, не превосходящую мощность $\omega \times X$. По следствию 2.5.6, а) имеем $|\omega \times X| = |X|$. \square

Теорема 4.4.5 вместе с теоремой 4.1.5 дает также новое доказательство теоремы компактности. (См. подстрочное примечание на с. 133.)

Упражнения

1. Привести пример формулы Φ исчисления предикатов, для которой множества $\{\Phi\}$ и $\{\neg\Phi\}$ непротиворечивы.
2. Вывести теорему компактности из теорем 4.1.5 и 4.4.5.

§ 4.5. Исчисление предикатов гильбертовского типа

Зафиксируем произвольную сигнатуру Σ . Все зависящие от сигнатуры понятия этого параграфа будут относиться к сигнатуре Σ .

В этом параграфе мы рассмотрим исчисление ИП_1^Σ , которое называется *исчислением предикатов гильбертовского типа*, и покажем его равносильность (теорема 4.5.6) исчислению ИП^Σ подобно тому, как в § 1.8 была показана равносильность ИВ и ИВ_1 .

Формулами ИП_1^Σ будут формулы сигнатуры Σ за исключением того, что в алфавите ИП_1^Σ нет символа логической константы \mathfrak{F} и, соответственно, в определении формулы отсутствует п. 0). Секвенций в ИП_1^Σ нет.

Аксиомы ИП_1^Σ получаются из следующих 14 схем заменой переменных Φ, Ψ, X конкретными формулами сигнатуры Σ ; t, q — термами сигнатуры Σ :

1. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$,
2. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow X)) \rightarrow (\Phi \rightarrow X))$,
3. $(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Phi$,
4. $(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Psi$,
5. $\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow (\Phi \wedge \Psi))$,
6. $\Phi \rightarrow (\Phi \vee \Psi)$,
7. $\Phi \rightarrow (\Psi \vee \Phi)$,
8. $(\Phi \rightarrow X) \rightarrow ((\Psi \rightarrow X) \rightarrow ((\Phi \vee \Psi) \rightarrow X))$,
9. $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow \neg\Psi) \rightarrow \neg\Phi)$,
10. $\neg\neg\Phi \rightarrow \Phi$,
11. $\forall x\Phi \rightarrow (\Phi)_t^x$,

12. $(\Phi)_t^x \rightarrow \exists x \Phi$,
13. $t \approx t$,
14. $t \approx q \rightarrow ((\Phi)_t^x \rightarrow (\Phi)_q^x)$.

Правила вывода ИП₁^Σ:

$$1. \frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}, \quad 2. \frac{\Psi \rightarrow \Phi}{\Psi \rightarrow \forall x \Phi}, \quad 3. \frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\exists x \Phi \rightarrow \Psi},$$

где в правилах 2 и 3 переменная x не входит свободно в Ψ .

Доказательством в ИП^σ формулы Φ называется такая последовательность Φ_0, \dots, Φ_n формул ИП₁^Σ, что $\Phi_n = \Phi$ и для каждого $i \leq n$ формула Φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) Φ_i — аксиома ИП₁^Σ,
- 2) Φ_i получается из некоторых Φ_j , $j < i$, по одному из правил 1–3.

Если существует доказательство в ИП₁^Σ формулы Φ , то Φ называется *доказуемой* в ИП₁^Σ или *теоремой* ИП₁^Σ (обозначаем $\triangleright \Phi$).

Выводом в ИП₁^Σ формулы Φ из множества формул G называется такая последовательность Φ_0, \dots, Φ_n формул ИП₁^Σ, что $\Phi_n = \Phi$ и для каждого $i \leq n$ формула Φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) Φ_i доказуема в ИП₁^Σ,
- 2) Φ_i принадлежит G ,
- 3) Φ_i получается из некоторых Φ_j , $j < i$, по одному из правил 1–3, причем при применении правил 2 и 3 переменная x не должна входить ни в одну формулу из G свободно.

Если существует вывод в ИП₁^Σ формулы Φ из множества G , то Φ называется *выводимой* в ИП₁^Σ из G . При этом G называется *множеством гипотез*. Очевидно, что доказуемость формулы эквивалентна ее выводимости из пустого множества гипотез. Поэтому выводимость Φ из G можно обозначать через $G \triangleright \Phi$. В этом параграфе, если не оговорено противное, под доказательством и выводом понимаются доказательство и вывод в ИП₁^Σ.

Правило вывода

$$\frac{\Psi_1, \dots, \Psi_k}{\Phi}$$

называется *допустимым* в ИП₁^Σ, если его добавление к исчислению ИП₁^Σ не изменяет множества доказуемых формул.

Предложение 4.5.1. Следующие правила допустимы в ИП₁^Σ:

$$a) \frac{\Phi}{\forall x \Phi}; \quad b) \frac{(\Phi)_t^x}{\exists x \Phi}; \quad c) \frac{(\Phi)_t^x \rightarrow \Psi}{\forall x \Phi \rightarrow \Psi}; \quad d) \frac{\Psi \rightarrow (\Phi)_t^x}{\Psi \rightarrow \exists x \Phi}.$$

Доказательство. а). Пусть Ψ — некоторое доказуемое предложение, тогда в силу аксиомы 1, доказуемости Φ и правила 1 имеем

$\triangleright \Psi \rightarrow \Phi$. По правилу 2 получаем $\triangleright \Psi \rightarrow \forall x\Phi$. Отсюда доказуемость $\forall x\Phi$ следует по правилу 1.

в). Формулу $\forall x\Phi \rightarrow \Psi$ получаем из аксиомы $\forall x\Phi \rightarrow (\Phi)_t^x$ и теоремы $(\Phi)_t^x \rightarrow \Psi$ с помощью аксиом 1, 2 и правила 1.

Доказательство утверждений б) и г) мы оставляем читателю (упражнение 1). \square

Формулы Φ и Ψ называются эквивалентными в ИП $^\Sigma_1$, если в ИП $^\Sigma_1$ доказуемы формулы $\Phi \rightarrow \Psi$ и $\Psi \rightarrow \Phi$ (обозначаем это через $\Phi \equiv^\perp \Psi$). В силу правила 1 из $\Phi \equiv^\perp \Psi$ вытекает, что доказуемость Φ в ИП $^\Sigma_1$ равносильна доказуемости Ψ в ИП $^\Sigma_1$.

Предложение 4.5.2. *Любая тавтология Φ , не содержащая символа логической константы, доказуема в ИП $^\Sigma_1$.*

Доказательство. Пусть Ψ — основа Φ . В силу теоремы 1.8.1 формула Ψ доказуема в ИВ $_1$. Ясно, что, заменив пропозициональные переменные в доказательстве в ИВ $_1$ формулы Ψ на соответствующие формулы ИП $^\Sigma_1$, получим доказательство Φ в ИП $^\Sigma_1$. \square

Следствие 4.5.3. *Если Φ и Ψ — пропозиционально эквивалентные формулы ИП $^\Sigma_1$, то доказуемость Φ в ИП $^\Sigma_1$ равносильна доказуемости Ψ в ИП $^\Sigma_1$.* \square

Теорема 4.5.4 (о дедукции для ИП $^\Sigma_1$). *Если $G \cup \{\Phi, \Psi\}$ — множество формул ИП $^\Sigma_1$, то из $G \cup \{\Phi\} \triangleright \Psi$ следует $G \triangleright \Phi \rightarrow \Psi$.*

Доказательство проведем индукцией по длине n минимального вывода Ψ_1, \dots, Ψ_n формулы Ψ из $G \cup \{\Phi\}$. Случай, когда $n = 1$ (т. е. Ψ доказуема в ИП $^\Sigma_1$ или принадлежит $G \cup \{\Phi\}$), а также случай, когда Ψ_n получается по правилу 1, ничем не отличаются от соответствующих случаев для ИВ $_1$ и уже рассмотрены в доказательстве теоремы 1.8.3. В силу минимальности вывода осталось рассмотреть случаи, когда Ψ получается из Ψ_{n-1} по правилам 2 или 3. По предположению индукции мы уже имеем $G \triangleright \Phi \rightarrow \Psi_{n-1}$.

Пусть $\Psi_{n-1} = (\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$ и $\Psi = (\Theta_1 \rightarrow \forall x\Theta_2)$. При этом в силу определения вывода x не входит свободно в Φ , элементы G и Θ_1 . Так как $\Phi \rightarrow (X_1 \rightarrow X_2)$ и $(\Phi \wedge X_1) \rightarrow X_2$ пропозиционально эквивалентны для любых формул X_1, X_2 , то в силу следствия 4.5.3 последовательность

$$\Phi \rightarrow \Psi_{n-1}, (\Phi \wedge \Theta_1) \rightarrow \Theta_2, (\Phi \wedge \Theta_1) \rightarrow \forall x\Theta_2, \Phi \rightarrow (\Theta_1 \rightarrow \forall x\Theta_2)$$

можно дополнить до вывода $\Phi \rightarrow \Psi$ из G .

Пусть теперь Ψ получается по правилу 3. Тогда $\Psi_{n-1} = (\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$ и $\Psi = (\exists x\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$, где x не входит свободно в Φ , Θ_2 и элементы G .

В силу пропозициональных эквивалентностей $\Phi \rightarrow \Psi_{n-1} \stackrel{s}{\equiv} \Theta_1 \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta_2)$ и $\exists x\Theta_1 \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta_2) \stackrel{s}{\equiv} \Phi \rightarrow (\exists x\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$ следующую последовательность:

$$\Phi \rightarrow \Psi_{n-1}, \Theta_1 \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta_2), \exists x\Theta_1 \rightarrow (\Phi \rightarrow \Theta_2), \Phi \rightarrow (\exists x\Theta_1 \rightarrow \Theta_2)$$

можно дополнить до вывода $\Phi \rightarrow \Psi$ из G . \square

Следствие 4.5.5. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$ — формулы ИП $^\Sigma_1$. Тогда $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \triangleright \Phi$ равносильно $\triangleright \Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots (\Phi_n \rightarrow \Phi) \dots)$, что в свою очередь равносильно $\triangleright (\Phi_1 \wedge (\dots (\Phi_{n-1} \wedge \Phi_n) \dots)) \rightarrow \Phi$.

Доказательство. Для первой эквивалентности n раз применяется теорема 4.5.4 и правило 1. Для второй эквивалентности — те же рассуждения, что и в следствии 1.8.4. \square

Теорема 4.5.6. Пусть Φ — формула, Γ — конечная последовательность формул исчисления ИП $^\Sigma_1$. Для того чтобы формула Φ была выводима в ИП $^\Sigma_1$ из множества всех членов Γ , необходимо и достаточно, чтобы секвенция $\Gamma \vdash \Phi$ была доказуема в ИП $^\Sigma$. В частности, для формул ИП $^\Sigma_1$ их доказуемость в ИП $^\Sigma_1$ равносильна их доказуемости в ИП $^\Sigma$.

Доказательство. В силу правил 7 и 8 ИП $^\Sigma$ секвенция $\Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi$ доказуема в ИП $^\Sigma$ тогда и только тогда, когда доказуема $\vdash \Psi_1 \rightarrow (\Psi_2 \rightarrow \dots (\Psi_n \rightarrow \Phi) \dots)$. Тогда из следствия 4.5.5 получаем, что для доказательства необходимости можно ограничиться случаем $\Gamma = \emptyset$. Легко проверить, что аксиомы ИП $^\Sigma_1$ тождественно истинны, а правила вывода ИП $^\Sigma_1$ сохраняют тождественную истинность. Поэтому необходимость следует из теоремы Гёделя о полноте.

Достаточность. Пусть дерево D — доказательство в ИП $^\Sigma$ секвенции $\Gamma \vdash \Phi$. Если $\Gamma \vdash \Phi$ — аксиома ИП $^\Sigma$, то в силу аксиом 13 и 14 исчисления ИП $^\Sigma_1$ мы имеем $\Gamma \triangleright \Phi$. (Здесь и далее мы допускаем некоторую вольность в обозначениях: следовало бы писать $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} \triangleright \Phi$, если $\Gamma = \Psi_1, \dots, \Psi_n$.) Пусть Φ_0 — какое-нибудь предложение сигнатуры Σ , не содержащее логической константы \exists . Пусть D_1 получается из D заменой логической константы \exists на формулу $\Phi_0 \wedge \neg \Phi_0$. Ясно, что начальные секвенции в D останутся аксиомами ИП $^\Sigma$, а переходы по правилам, отличным от 9 и 10, останутся переходами по тем же правилам. Переходы по правилам 9 и 10 станут переходами по правилам

$$9'. \frac{\Gamma, \neg \Phi \vdash \Phi_0 \wedge \neg \Phi_0}{\Gamma \vdash \Phi}, \quad 10'. \frac{\Gamma \vdash \Phi; \Gamma \vdash \neg \Phi}{\Gamma \vdash \Phi_0 \wedge \neg \Phi_0}.$$

Поэтому осталось показать, что если в правилах вывода 1–8 и 11–16 исчисления ИП $^\Sigma$ и правилах 9' и 10' заменить знак \vdash на \triangleright , то из истинности утверждений над чертой будет следовать утверждение под

чертой. Для правил 1–8 и 11, 12 исчисления ИП $^\Sigma$ и правил 9' и 10' проверка — та же самая, что и в теореме 1.8.1. Для правил 13 и 15 при $\Gamma = \emptyset$ это верно в силу предложения 4.5.1, а), б). Для остальных случаев это следует из следствия 4.5.5, правил 2, 3 исчисления ИП $^\Sigma_1$ и предложения 4.5.1, в), г). \square

Из этой теоремы и теоремы 4.1.7 получаем

Следствие 4.5.7. *Если $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, то исчисление ИП $^\Sigma_1$ является консервативным расширением исчисления ИП $^{\Sigma_1}_1$.* \square

Из теоремы 4.5.6 следует также, что для формул Φ и Ψ исчисления ИП $^{\Sigma_1}_1$ эквивалентности $\Phi \stackrel{1}{\equiv} \Psi$ и $\Phi \equiv \Psi$ равносильны.

Следствие 4.5.8. *Пусть $X \cup \{\Phi\}$ — множество формул исчисления ИП $^{\Sigma_1}_1$, а Y — множество всех переменных, входящих свободно хотя бы в одну формулу из $X \cup \{\Phi\}$. Для того чтобы имело место $X \triangleright \Phi$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: для любой алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ и интерпретации $\gamma: Y \rightarrow A$, если имеет место $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$ при любом $\Psi \in X$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$.*

Доказательство. Так как вывод содержит лишь конечное множество формул, то $X \triangleright \Phi$ равносильно тому, что $X_1 \triangleright \Phi$ для некоторого конечного $X_1 \subseteq X$. Необходимость тогда следует из теорем 4.5.6 и 4.1.5. Если из $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$, $\Psi \in X$, следует $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ для любых систем \mathfrak{A} сигнатуры Σ и $\gamma: Y \rightarrow A$, то множество $X \cup \{\neg\Phi\}$ не имеет модели. Тогда по теореме 4.4.2 для некоторых $\Psi_1, \dots, \Psi_n \in X$ секвенция $\Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi$ доказуема и из теоремы 4.5.6 получаем достаточность. \square

Упражнения

1. Доказать утверждения б) и г) предложения 4.5.1.
2. Доказать, что $G \triangleright \Phi$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность Φ_0, \dots, Φ_n формул ИП $^\Sigma_1$, что $\Phi_n = \Phi$ и для каждого $i \leq n$ формула Φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:
 - 1) Φ_i доказуема в ИП $^\Sigma_1$,
 - 2) Φ_i принадлежит G ,
 - 3) Φ_i получается из некоторых Φ_j , $j < i$, по правилу 1.

§ 4.6. Чистое исчисление предикатов

В этом параграфе будет определено исчисление ИПЧ, которое называется *чистым исчислением предикатов*, и будет доказана некоторая «универсальность» этого исчисления (теорема 4.6.2).

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma^* = \langle R^*, F^*, \mu^* \rangle$ со следующими свойствами:

- 1) $F^* = \emptyset$, $R^* = \{r_m^k \mid k, m \in \omega\}$;
- 2) $\mu^*(r_m^k) = k$ для любого $m \in \omega$ и $k \in \omega$.

Формулами ИПЧ будут формулы сигнатуры Σ^* , не содержащие символа равенства. *Секвенции* ИПЧ — это секвенции ИП $^{\Sigma^*}$, все формулы в которых являются формулами ИПЧ.

Аксиомами ИПЧ будут только секвенции вида $\Phi \vdash \Phi$; *правила вывода* те же, что у ИП $^{\Sigma^*}$. *Доказательство* в ИПЧ определяется так же, как в ИП $^{\Sigma^*}$ — конечно, под формулами, секвенциями и аксиомами теперь понимаются формулы, секвенции и аксиомы ИПЧ. Легко проверить, что все результаты в § 4.1–4.3, относящиеся к ИП $^{\Sigma^*}$, за исключением предложения 4.1.6, предложения 4.3.2 и теоремы 4.1.7, справедливы также для ИПЧ, так как в их доказательствах не используются аксиомы 2), 3). Сейчас мы покажем, что результаты § 4.4 также распространяются на ИПЧ. На самом деле имеет место

Теорема 4.6.1. *Исчисление ИП $^{\Sigma^*}$ является консервативным расширением исчисления ИПЧ.*

Доказательство. Множество X предложений ИПЧ называется *совместным* в ИПЧ, если для любых $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in X$ секвенция $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \mathfrak{F}$ не доказуема в ИПЧ. Покажем, что любое совместное в ИПЧ множество формул ИПЧ имеет модель. Доказательство этого утверждения мало чем отличается от доказательства теоремы 4.4.2. Построение множества X_ω — то же самое. (При этом под формулами и доказательствами, конечно, понимаются формулы и доказательства в ИПЧ). Доказательства свойств а)–и) для X_ω те же самые. Свойство к) в данном случае не требуется. Отношение \sim на C не определяется и носителем системы \mathfrak{A} является само множество C . Доказательство эквивалентности

$$\mathfrak{A} \models \Phi(d_1, \dots, d_n) \iff \Phi(d_1, \dots, d_n) \in X_\omega$$

из свойств а)–и) проводится еще проще, чем в теореме 4.4.2, так как отпадает необходимость переходить к представителям классов эквивалентности по отношению \sim и нет атомарных формул вида $t_1 \approx t_2$.

Если теперь $S = \Psi_1, \dots, \Psi_n \vdash \Phi$ — теорема ИП $^{\Sigma^*}$, являющаяся секвенцией ИПЧ, то по теореме 4.1.5 секвенция S тождественно истинна. Тогда по указанному выше $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n, \neg\Phi\}$ — не совместное в ИПЧ множество, следовательно, секвенция $\Psi_1, \dots, \Psi_n, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИПЧ. По правилу 9 получаем доказуемость S в ИПЧ. \square

Ясно, что из результатов § 4.4 и теоремы 4.6.1 следует справедливость всех теорем, полученных из теорем § 4.4 заменой ИП $^{\Sigma}$ на ИПЧ.

Конец этого параграфа мы посвятим одному факту, который показывает, что вопросы о доказуемости в различных ИП $^\Sigma$ «сводятся» к вопросам о доказуемости в ИПЧ. Переходим к точным формулировкам.

Зафиксируем предикатный символ $r_0 \in R^*$, для которого $\mu(r_0) = 2$.

Определение. Пусть $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ — конечная или счетная сигнатура. Инъективное отображение $\alpha: R \cup F \rightarrow R^*$ называется *интерпретацией* Σ в Σ^* , если выполняются следующие условия:

- a) $r_0 \notin \alpha(R \cup F)$;
- б) если $s \in R$, то $\mu^*(\alpha s) = \mu(s)$;
- в) если $f \in F$, то $\mu^*(\alpha f) = \mu(f) + 1$.

Для интерпретации α сигнатуры Σ в Σ^* определим отображение α^* множества формул сигнатуры Σ , находящихся в приведенной нормальной форме, в множество формул ИПЧ по индукции. Если Φ — атомная формула вида $x \approx y$, то $\alpha^*(\Phi) = r_0(x, y)$; если Φ — атомная формула вида $s(x_1, \dots, x_n)$, то $\alpha^*\Phi = \alpha s(x_1, \dots, x_n)$; если Φ — атомная формула вида $y \approx f(x_1, \dots, x_n)$ или $f(x_1, \dots, x_n) \approx y$, то $\alpha^*\Phi = \alpha f(x_1, \dots, x_n, y)$; если $\Phi = \neg\Psi$, $\Phi = Qx\Psi$ или $\Phi = \Psi_1\tau\Psi_2$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то $\alpha^*\Phi$ равна $\neg\alpha^*\Psi$, $Qx\alpha^*\Psi$ или $\alpha^*\Psi_1\tau\alpha^*\Psi_2$ соответственно.

Если α — интерпретация Σ в Σ^* , $\Phi \in F(\Sigma)$ находится в приведенной н. ф. и $\Sigma(\Phi) = \langle \{s_0, \dots, s_k\}, \{f_0, \dots, f_m\}, \mu' \rangle$, то через $\alpha_0\Phi$ обозначим конъюнкцию следующих предложений сигнатуры Σ^* , где $n_j = \mu'(s_j)$, $l_i = \mu'(f_i)$, $x, y, z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ — попарно различные переменные¹⁾:

- 1) $\forall x_1 \dots \forall x_{n_j} \forall y_1 \dots \forall y_{n_j} ((r_0(x_1, y_1) \wedge \dots \wedge r_0(x_{n_j}, y_{n_j})) \wedge \alpha s_j(x_1, \dots, x_{n_j})) \rightarrow \alpha s_j(y_1, \dots, y_{n_j}), j \leq k;$
- 2) $\forall x_0 \dots \forall x_{l_i} \forall y_0 \dots \forall y_{l_i} ((r_0(x_0, y_0) \wedge \dots \wedge r_0(x_{l_i}, y_{l_i})) \wedge \alpha f_i(x_0, \dots, x_{l_i})) \rightarrow \alpha f_i(y_0, \dots, y_{l_i}), i \leq m;$
- 3) $\forall x_1 \dots \forall x_{l_i} \exists y \alpha f_i(x_1, \dots, x_{l_i}, y), i \leq m;$
- 4) $\forall x_1 \dots \forall x_{l_i} \forall y \forall z ((\alpha f_i(x_1, \dots, x_{l_i}, y) \wedge \alpha f_i(x_1, \dots, x_{l_i}, z)) \rightarrow r_0(y, z)), i \leq m;$
- 5) $\forall x r_0(x, x);$
- 6) $\forall x \forall y (r_0(x, y) \rightarrow r_0(y, x));$
- 7) $\forall x \forall y \forall z ((r_0(x, y) \wedge r_0(y, z)) \rightarrow r_0(x, z)).$

Ясно, что из условия 2) на сигнатуру Σ^* следует, что для любой конечной или счетной сигнатуры Σ существует интерпретация Σ в Σ^* .

1) Предложение $\alpha_0\Phi$ зависит только от сигнатуры $\Sigma(\Phi)$, а его истинность на алгебраической системе \mathfrak{A} равносильна тому, что $\nu^{\mathfrak{A}}(r_0)$ является эквивалентностью, предикаты $\nu^{\mathfrak{A}}(\alpha s_j)$ и $\nu^{\mathfrak{A}}(\alpha f_i)$ не «различают» $\nu^{\mathfrak{A}}(r_0)$ -эквивалентные элементы, а отношения $\nu^{\mathfrak{A}}(\alpha f_i)$ определяют на классах $\nu^{\mathfrak{A}}(r_0)$ -эквивалентных элементов l_i -местные операции.

Теорема 4.6.2. Пусть Φ — формула исчисления предикатов, $\Phi' \equiv \Phi$, Φ' находится в приведенной н. ф. и α — интерпретация сигнатуры $\Sigma(\Phi')$ в Σ^* . Тогда Φ доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда $\alpha_0\Phi' \rightarrow \alpha^*\Phi'$ доказуема в ИПЧ.

Доказательство. В силу теорем 4.1.5, 4.4.3 и 4.6.10 достаточно проверить, что тождественная истинность Φ' равносильна тождественной истинности $\alpha_0\Phi' \rightarrow \alpha^*\Phi'$. Для любой системы \mathfrak{A} сигнатуры $\Sigma(\Phi') = \langle \{s_0, \dots, s_k\}, \{f_0, \dots, f_m\}, \mu \rangle$ определим систему $\alpha\mathfrak{A}$ сигнатуры $\alpha\Sigma = \langle \{r_0, \alpha s_0, \dots, \alpha s_k, \alpha f_0, \dots, \alpha f_m\}, \emptyset, \alpha\mu \rangle \subseteq \Sigma^*$ следующим образом:

- а) $\alpha A = A$;
- б) $\langle a, b \rangle \in \nu^{\alpha\mathfrak{A}}(r_0) \iff a = b$;
- в) $\nu^{\alpha\mathfrak{A}}(\alpha s_j) = \nu^{\mathfrak{A}}(s_j)$, $j \leq k$;
- г) $\nu^{\alpha\mathfrak{A}}(\alpha f_i) = \nu^{\mathfrak{A}}(f_i)$, $i \leq m$, $\mu(f_i) > 0$;
- д) $\nu^{\alpha\mathfrak{A}}(\alpha f_i) = \{\nu^{\mathfrak{A}}(f_i)\}$, $i \leq m$, $\mu(f_i) = 0$.

Индукцией по длине формулы Ψ сигнатуры $\Sigma(\Phi')$, находящейся в приведенной н. ф., легко проверить, что для любой интерпретации γ в A свободных переменных Ψ имеет место

$$\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma] \iff \alpha\mathfrak{A} \models \alpha^*\Psi[\gamma].$$

В частности, для любой $\gamma: FV(\Phi') \rightarrow A$ имеем

$$\mathfrak{A} \models \neg\Phi'[\gamma] \implies \alpha\mathfrak{A} \models \neg\alpha^*\Phi'[\gamma]. \quad (4.8)$$

Очевидно, что в $\alpha\mathfrak{A}$ истинно $\alpha_0\Phi'$, поэтому из (4.8) получаем, что из тождественной истинности $\alpha_0\Phi' \rightarrow \alpha^*\Phi'$ следует тождественная истинность Φ' .

Пусть $\alpha_0\Phi' \rightarrow \alpha^*\Phi'$ не тождественно истинна, тогда для некоторой системы \mathfrak{A}_0 сигнатуры $\alpha\Sigma$ и интерпретации γ_0 в A_0 свободных переменных Φ' имеем $\mathfrak{A}_0 \models \alpha_0\Phi'$ и $\mathfrak{A}_0 \models \neg\alpha^*\Phi'[\gamma_0]$. Из истинности в \mathfrak{A}_0 предложений 5)–7) и из определения $\alpha_0\Phi'$ получаем, что отношение $\nu^{\mathfrak{A}_0}(r_0)$ определяет на A_0 эквивалентность. Класс эквивалентности по отношению $\nu^{\mathfrak{A}_0}(r_0)$, содержащий $a \in A_0$, будем обозначать через \tilde{a} . Определим систему \mathfrak{B}_0 сигнатуры $\Sigma(\Phi')$ следующим образом:

- а) $B_0 = \{\tilde{a} \mid a \in A_0\}$;
- б) $\langle \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}_0}(s_j) \iff \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_0}(\alpha s_j)$, $j \leq k$;
- в) $\langle \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n+1} \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}_0}(f_i) \iff \langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}_0}(\alpha f_i)$, $i \leq m$, $\mu(f_i) = n > 0$;
- г) $\tilde{a} = \nu^{\mathfrak{B}_0}(f_i) \iff a \in \nu^{\mathfrak{A}_0}(\alpha f_i)$, $i \leq m$, $\mu(f_i) = 0$.

Из истинности на \mathfrak{A}_0 конъюнктивных членов 1) и 2) предложения $\alpha_0\Phi'$ следует корректность этих определений. Из истинности предложений

3) и 4) следует, что $\nu^{\mathfrak{B}_0}(f_i)$, $i \leq m$, — операции на B_0 . Индукцией по длине формулы $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры $\Sigma(\Phi')$, находящейся в приведенной н. ф., легко проверить, что для любых $a_1, \dots, a_n \in A_0$ справедливо

$$\mathfrak{B}_0 \models \Psi(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) \iff \mathfrak{A}_0 \models \alpha^*\Psi(a_1, \dots, a_n).$$

Отсюда получаем, что $\mathfrak{B}_0 \models \neg\Phi'[\tilde{\gamma}_0]$ где $\tilde{\gamma}_0(x) = \widetilde{\gamma_0(x)}$, $x \in FV(\Phi')$, т. е. Φ' — не тождественно истинная формула. \square

Как будет показано в § 7.5, существуют эффективно заданные множества формул, для которых нет эффективной процедуры (алгоритма), позволяющей для любой формулы данного множества за конечное число шагов устанавливать, является ли она тождественно истинной формулой или нет. Однако теорема Гёделя о полноте дает нам возможность по любой эффективно заданной сигнатуре Σ построить эффективный процесс (машину) M^Σ , который перечисляет все тождественно истинные формулы сигнатуры Σ , т. е. M^Σ в процессе работы выдает такие слова $\Phi_0, \dots, \Phi_n, \dots$, что $\{\Phi_0, \dots, \Phi_n, \dots\}$ есть множество всех тождественно истинных формул сигнатуры Σ . Этот процесс состоит в выписывании конечных последовательностей секвенций ИП $^\Sigma$ и выдает слово Φ тогда, когда выписанная последовательность есть линейное доказательство секвенции $\vdash \Phi$ в ИП $^\Sigma$. Так как для любого эффективно заданного множества формул X переход от формулы $\Phi \in X$ к формуле $\Phi' \equiv \Phi$ в приведенной н. ф., а затем к формуле $\alpha_0\Phi' \rightarrow \alpha^*\Phi'$ можно сделать эффективным, то теорема 4.6.2 показывает, что для того, чтобы уметь перечислять все тождественно истинные формулы из любого эффективно заданного множества формул, достаточно построить машину M , перечисляющую теоремы ИПЧ.

Упражнение

1. Пусть J — исчисление, полученное добавлением к ИПЧ символа равенства и следующих аксиом:
 - a) $\vdash x \approx x$;
 - б) $x \approx y, (P)_x^z \vdash (P)_y^z$, где P — атомная формула сигнатуры Σ^* .
 Показать, что в J доказуемы все теоремы ИП $^{\Sigma^*}$.

Г л а в а 5

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ

§ 5.1. Элементарная эквивалентность

В § 3.2 было показано, что на изоморфных системах истинны одни и те же предложения. Обратное неверно для бесконечных систем. В этом параграфе мы покажем (теорема 5.1.1), что истинность на \mathfrak{A} и \mathfrak{B} одних и тех же предложений равносильна существованию «достаточно большого» запаса конечных частичных изоморфизмов \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . В частности, если на конечных системах \mathfrak{A} и \mathfrak{B} истинны одни и те же предложения, то \mathfrak{A} изоморфна \mathfrak{B} .

Определение. Две алгебраические системы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} сигнатуры Σ называются *элементарно эквивалентными* (обозначаем $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если для любого предложения Φ сигнатуры Σ имеет место

$$\mathfrak{A} \models \Phi \iff \mathfrak{B} \models \Phi.$$

Множество предложений $\{\Phi \mid \mathfrak{A} \models \Phi\}$ сигнатуры Σ называется *элементарной теорией* системы \mathfrak{A} или просто *теорией* \mathfrak{A} и обозначается через $\text{Th}(\mathfrak{A})$.

Ясно, что отношение $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ равносильно равенству $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$.

Определение. Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — алгебраические системы сигнатуры $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$. Инъективное отображение $f: X \rightarrow B$, где $X \subseteq A$, называется *частичным изоморфизмом* \mathfrak{A} в \mathfrak{B} , если для любых $a_1, \dots, a_n \in X$ выполняются следующие условия:

1) если $s \in R \cup F$ — не константа, то

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(s) \iff \langle fa_1, \dots, fa_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}}(s);$$

2) если $s \in F$ — константа, то

$$\nu^{\mathfrak{A}}(s) = a_1 \iff \nu^{\mathfrak{B}}(s) = fa_1.$$

(Напомним, что если $n = 0$, то $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle \rangle = \Lambda = \emptyset$.) Если X — конечное множество, то f называется *конечным частичным*

изоморфизмом. Множество конечных частичных изоморфизмов \mathfrak{A} в \mathfrak{B} обозначаем через $P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Теорема 5.1.1. Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — системы сигнатуры Σ . Для того чтобы системы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \omega$ и любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ существовали непустые множества $F_1(\Sigma_1, n), \dots, F_n(\Sigma_1, n)$ конечных частичных изоморфизмов $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma_1$ в $\mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma_1$ со следующим свойством:

(*) если $f \in F_i(\Sigma_1, n)$, $1 \leq i < n$, то для любых $a \in A$, $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{i+1}(\Sigma_1, n)$, для которых $a \in \text{dom } g_1$, $b \in \text{rang } g_2$, $f \subseteq g_1$ и $f \subseteq g_2$.

Доказательство. Достаточность. Индукцией по m докажем, что если длина формулы $\Phi(x_1, \dots, x_k)$, находящейся в приведенной н. ф., не больше m , множества $F_i(\Sigma(\Phi), n) \subseteq P(\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma(\Phi), \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma(\Phi))$, $1 \leq i \leq n$, удовлетворяют условию (*) и $i + m \leq n$, то для любого $f \in F_1(\Sigma(\Phi), n)$ и любых $a_1, \dots, a_k \in \text{dom } f$ имеет место

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \dots, fa_k).$$

Если Φ — атомная формула, то это утверждение следует из определения частичного изоморфизма. Если $\Phi = \neg\Psi$ или $\Phi = \Psi_1 \tau \Psi_2$, $t \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то утверждение следует из индукционного предположения. Так как $\forall x \Psi \equiv \exists x \neg \Psi$ для любой формулы Ψ , то достаточно рассмотреть лишь случай, когда Φ не содержит квантора всеобщности. Пусть $\Phi(x_1, \dots, x_k) = \exists y \Psi(y, x_1, \dots, x_k)$ и $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_k)$. Тогда $\mathfrak{A} \models \Phi(a_0, a_1, \dots, a_k)$ для некоторого $a_0 \in A$. Возьмем такое $g \in F_{i+1}(\Sigma(\Phi), n)$, что $f \subseteq g$ и $a_0 \in \text{dom } g$. Так как длина Ψ меньше длины Φ , то по индукционному предположению $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \dots, fa_k)$, следовательно, $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \dots, fa_k)$. Пусть $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \dots, fa_k)$. Тогда $\mathfrak{B} \models \Psi(b_0, fa_1, \dots, fa_k)$ для $b_0 \in B$. Возьмем $g \in F_{n+1}(\Sigma(\Phi), n)$, для которого $f \subseteq g$ и $b_0 \in \text{rang } g$. Тогда по индукционному предположению имеем $\mathfrak{A} \models \Psi(g^{-1}b_0, a_1, \dots, a_k)$, следовательно, $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_k)$.

Необходимость. Пусть $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ — конечная сигнатура и $X(n, m)$ для $n, m \in \omega$ — максимальное множество попарно не эквивалентных формул Φ сигнатуры Σ_1 , находящихся в приведенной н. ф., содержащих $\leq n$ кванторов и $FV(\Phi) \subseteq \{v_1, \dots, v_m\}$. Так как имеется лишь конечное число атомных формул с переменными из множества $\{v_1, \dots, v_k\}$, то индукцией по n легко показать, что для любых n и m множество $X(n, m)$ конечно. Очевидно, что функция $|X(n, m)|$ неубывающая по каждой из переменных n и m . Пусть $a_1, \dots, a_k \in A$ попарно различны.

Отображение $f: \{a_1, \dots, a_k\} \rightarrow B$ назовем (n, m) -изоморфизмом, если $k \leq m$ и для любой формулы $\Phi(x_1, \dots, x_k) \in X(n, m)$ имеет место

$$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \dots, fa_k).$$

Ясно, что любой частичный изоморфизм $f \in P(\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma_1, \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma_1)$, для которого $|\text{dom } f| \leq m$, является $(0, m)$ -изоморфизмом. Для $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ будем определять неубывающие функции $g_i: \omega \rightarrow \omega$ так, чтобы множества $F_i(\Sigma_1, n) = \{f \mid f \text{ является } (g_i(m), m)\text{-изоморфизмом}$ для некоторого $m \in \omega\}$ удовлетворяли условию (*).

В качестве g_n берем тождественный нуль. Если $1 < i \leq n$, $m \in \omega$, то полагаем

$$g_{i-1}(m) = g_i(m+1) \cdot |X(g_i(m+1), m+1)| + 1.$$

Если g_i — неубывающая, то очевидно, что g_{i+1} также неубывающая. Из $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ следует, что $f = \emptyset$ является $(n, 0)$ -изоморфизмом для любого $n \in \omega$. Следовательно, классы $F_1(\Sigma_1, n), \dots, F_n(\Sigma_1, n)$ непустые. Пусть $f \in F_{i+1}(\Sigma_1, n)$ является $(g_{i+1}(m), m)$ -изоморфизмом, $1 < i \leq n$, $\text{dom } f = \{a_1, \dots, a_k\}$, $k \leq m$, и $a \in A$. Обозначим через $\Phi(v_1, \dots, v_{k+1})$ конъюнкцию всех $\Psi(v_1, \dots, v_{k+1}) \in X(g_i(k+1), k+1)$, для которых $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \dots, a_k, a)$. Число кванторов у Φ не превосходит $g_i(k+1) \times |X(g_i(k+1), k+1)|$, поэтому существует формула $X(v_1, \dots, v_k) \in X(g_{i+1}(k), k)$, эквивалентная формуле $\exists v_{k+1} \Phi(v_1, \dots, v_{k+1})$. Так как $g_{i-1}(k) \leq g_{i-1}(m)$, $\mathfrak{A} \models X(a_1, \dots, a_k)$ и f — $(g_{i-1}(m), m)$ -изоморфизм, то $\mathfrak{B} \models X(fa_1, \dots, fa_k)$. Тогда $\mathfrak{B} \models \Phi(fa_1, \dots, fa_k, b)$ для некоторого $b \in B$. Из построения Φ вытекает, что для любой $\Psi \in X(g_i(k+1), k+1)$ либо $\Phi \rightarrow \Psi$, либо $\Phi \rightarrow \neg\Psi$ является тождественно истинной формулой, следовательно, $g = f \cup \{\langle a, b \rangle\}$, будет $g_i(k+1)$ -изоморфизмом, т. е. принадлежит $F_i(\Sigma_1, n)$. Заменив в предыдущем рассуждении \mathfrak{A} на \mathfrak{B} и f на f^{-1} , получим, что для любого $b' \in B$ существует $a' \in A_k$ такое, что $f \cup \{\langle a', b' \rangle\}$ принадлежит $f_i(\Sigma_1, n)$. \square

Следствие 5.1.2. *Если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — алгебраические системы конечной сигнатуры Σ , то для того, чтобы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \omega$ существовали непустые множества $F_i(n) \subseteq P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \dots, F_n(n) \subseteq P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ со следующим свойством:*

() если $f \in F_i(n)$, $1 \leq i < n$, $a \in A$ и $b \in B$, то существует $g_1, g_2 \in F_{i+1}(n)$, для которых $f \subseteq g_1$, $f \subseteq g_2$, $a \in \text{dom } g_1$ и $b \in \text{rang } g_2$.*

Доказательство. В качестве множеств $F_1(n), \dots, F_n(n)$ берем множества $F_1(\Sigma, n), \dots, F_n(\Sigma, n)$ из теоремы 5.1.1. \square

Следствие 5.1.3. *Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ и \mathfrak{A} конечна, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.*

Доказательство. В предложении 3.2.7 доказано, что для любых \mathfrak{A} и \mathfrak{B} из $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ и $|A| = m_0 \in \omega$. Так как в \mathfrak{B} истинна формула Φ_{m_0} из предложения 3.2.9, то $|B| = m_0$. Для каждого $n \in \omega$ имеется лишь конечное число попарно различных n -местных предикатов и функций на конечном множестве, поэтому имеется такая конечная или счетная $\Sigma' \subseteq \Sigma$, что если $s \in R \cup F$, то $\nu^{\mathfrak{A}}(s) = \nu^{\mathfrak{A}'}(s')$ для некоторого $s' \in R' \cup F'$. Поэтому достаточно показать, что $\mathfrak{A} \restriction \Sigma' \simeq \mathfrak{B} \restriction \Sigma'$. Пусть $\Sigma' = \bigcup_{i \in \omega} \Sigma_i$, где Σ_i конечна и $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$.

Рассмотрим множества частичных изоморфизмов $F_j(\Sigma_i, n)$, где $n, i \in \omega$ и $1 \leq j \leq n$, из теоремы 5.1.1. Из условия (*) теоремы 5.1.1 следует, что для любых $n, i \in \omega$, любого $k < n$ и любых $a_1, \dots, a_k \in A$ существует отображение $f \in F_{k+1}(\Sigma_1, n)$, для которого $a_1, \dots, a_k \in \text{dom } f$. Следовательно, для любого $n > m_0$ существует $f_n \in F_{m_0+1}(\Sigma_n, n)$, являющийся изоморфизмом $\mathfrak{A} \restriction \Sigma_n$ на $\mathfrak{B}_1 \restriction \Sigma_n$, где $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$. Так как $|B_1| = |A| = |B|$, то $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$. Существует лишь конечное число отображений $f: A \rightarrow B$, поэтому существует такое число $n_0 \in \omega$, что $f_{n_0}: \mathfrak{A} \restriction \Sigma_n \simeq \mathfrak{B} \restriction \Sigma_n$ для всех $n \in \omega$, следовательно, $f_{n_0}: \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. \square

Понятие элементарной эквивалентности с некоторой точки зрения может быть даже более важным, чем понятие изоморфизма. Дело в том, что изоморфизм определяется через существование некоторой бесконечной функции, в то время как элементарная эквивалентность определяется через конечные функции. Рассмотрим алгебраические системы \mathfrak{A}_0 и \mathfrak{B}_0 пустой сигнатуры, у которых A_0 состоит из всех счетных ординалов, а B_0 состоит из всех подмножеств натуральных чисел. Из результатов П. Коэна о независимости в ZFC следует, что $\mathfrak{A}_0 \simeq \mathfrak{B}_0$ нельзя ни доказать, ни опровергнуть в ZFC. В силу же «финитарности» понятия элементарной эквивалентности для «хорошо заданных» систем \mathfrak{A} и \mathfrak{B} отношение $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ можно доказать или опровергнуть в ZFC. В частности, легко показать, что $\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{B}_0$. Конечно, не надо забывать, что понятие изоморфизма играет исключительную роль, например, в алгебре, так как является «пределом» для различных классификаций алгебраических систем.

Если элементарная эквивалентность является ослаблением понятия изоморфизма, то следующее понятие является усилением понятия подсистемы.

Определение. Подсистема $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ называется *элементарной подсистемой* (обозначаем $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$), если для любой формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $b_1, \dots, b_n \in B$ имеет место

$$\mathfrak{B} \models \Phi(b_1, \dots, b_n) \iff \mathfrak{A} \models \Phi(b_1, \dots, b_n). \quad (5.1)$$

Предложение 5.1.4. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Для того чтобы имело место $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы $\Phi(x_0, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $b_1, \dots, b_n \in B$ имело место $\mathfrak{A} \models \exists x_0 \Phi(x_0, b_1, \dots, b_n) \Rightarrow (\mathfrak{A} \models \Phi(b_0, b_1, \dots, b_n) \text{ для некоторого } b_0 \in B)$.

Доказательство. Индукцией по длине формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ покажем, что для любых $b_1, \dots, b_n \in B$ истинно (5.1). Если Φ — атомарная, то (5.1) следует из определения подсистемы. Если $\Phi = \neg\Psi$ или $\Phi = \Psi_1 \tau \Psi_2$ для $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то (5.1) следует из индукционного предположения. Так как $\forall x \Psi \equiv \neg \exists x \neg \Psi$, то достаточно рассмотреть лишь случай $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \exists x_0 \Psi(x_0, \dots, x_n)$, но в этом случае (5.1) следует из условия предложения и индукционного предположения. \square

Предложение 5.1.5. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Если для любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, любых $b_1, \dots, b_n \in B$ и любого $a \in A$ существует автоморфизм f системы $\mathfrak{A} \restriction \Sigma_1$, для которого $fb_1 = b_1, \dots, fb_n = b_n$ и $fa \in B$, то $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 5.1.4. Пусть $\mathfrak{A} \models \exists x_0 \Phi(x_0, b_1, \dots, b_n)$. Тогда $\mathfrak{A} \models \Phi(a, b_1, \dots, b_n)$ для некоторого $a \in A$. Пусть f — автоморфизм системы $\mathfrak{A} \restriction \Sigma(\Phi)$, оставляющий b_1, \dots, b_n на месте, и $fa \in B$. Из предложения 3.2.7 получаем $\mathfrak{A} \models \Phi(fa, b_1, \dots, b_n)$. \square

Ясно, что из $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ следует $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Обратное в общем случае неверно. Например, рассмотрим системы $\langle Q^{(1)}, \leq \rangle$ и $\langle Q^{(2)}, \leq \rangle$, где $Q^{(1)}, Q^{(2)}$ — множества рациональных чисел, не меньших 1 и не меньших 2 соответственно, а \leq есть обычное отношение «меньше или равно» на числах. По предложению 3.1.7 системы $\langle Q^{(1)}, \leq \rangle$ и $\langle Q^{(2)}, \leq \rangle$ изоморфны, следовательно, элементарно эквивалентны. Однако в подсистеме $\langle Q^{(2)}, \leq \rangle$ системы $\langle Q^{(1)}, \leq \rangle$ формула $\Phi(v_1) = \forall v_0 (v_0 \leq v_1 \rightarrow v_0 \approx v_1)$ истинна на элементе 2, а в системе $\langle Q^{(1)}, \leq \rangle$ эта формула ложна на том же элементе 2. Таким образом, $\langle Q^{(2)}, \leq \rangle \prec \langle Q^{(1)}, \leq \rangle$ не имеет места.

Пример 5.1.6. Пусть \mathfrak{A} — счетный плотный линейный порядок, а \mathfrak{B} — плотный в \mathfrak{A} порядок (т. е. $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ и для любых $a < b$ из A существует $c \in B$, для которого $a < c < b$), тогда (\mathfrak{B} содержит концевые элементы $\mathfrak{A}) \iff (B \prec \mathfrak{A})$.

Для доказательства \Leftarrow замечаем, что так как $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то \mathfrak{A} и \mathfrak{B} имеют одинаковые концы. Теперь пусть, например, b_0 — первый элемент \mathfrak{B} . Тогда $\mathfrak{B} \models \forall v_0 (v_0 \leq b_0 \rightarrow v_0 \approx b_0)$. В силу $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ имеем $\mathfrak{A} \models \forall v_0 (v_0 \leq b_0 \rightarrow v_0 \approx b_0)$ и, значит, b_0 — первый элемент \mathfrak{A} . Для доказательства \Rightarrow нужно воспользоваться предложением 5.1.5. Требуемый изоморфизм f строится так же, как в предложении 3.1.7.

Пример 5.1.7. Пусть \mathfrak{A} — свободная группа со свободными образующими $\{a_i \mid i \in I\}$ и $I' \subseteq I$ — бесконечное множество. Тогда группа $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, порожденная в \mathfrak{A} множеством $\{a_i \mid i \in I'\}$, является элементарной подгруппой \mathfrak{A} .

Для доказательства воспользуемся предложением 5.1.5. Пусть $b_1, \dots, b_n \in B$ и $a \in A$. Тогда существуют конечные множества $X \subseteq \{a_i \mid i \in I'\}$ и $Y \subseteq \{a_i \mid i \in I\} \setminus X$, для которых $b_1, \dots, b_n \in A(X)$ и $a \in A(X \cup Y)$. Рассмотрим разнозначное отображение f множества $\{a_i \mid i \in I\}$ на себя, оставляющее элементы X на месте и отображающее Y в $\{a_i \mid i \in I'\}$. Тогда f однозначно продолжается до автоморфизма группы \mathfrak{A} , который удовлетворяет условию из предложения 5.1.5.

Хотя во многих случаях признак из предложения 5.1.5 легко применяется, он не является необходимым (см. упражнение 4).

Аналог предложения 3.1.2 для отношения \prec не имеет места (см. упражнение 4), в то время как для предложения 3.1.3 соответствующее утверждение справедливо.

Множество $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ алгебраических систем назовем **элементарно направленным**, если для любых $i, j \in I$ существует такое $k \in I$, что $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}_k$.

Предложение 5.1.8. Если $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ — элементарно направленное множество алгебраических систем сигнатуры Σ , то $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, $j \in I$.

Доказательство. Эквивалентность (5.1) для $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_j$, докажем индукцией по длине Φ . Как и в доказательстве предложения 5.1.4, достаточно рассмотреть случай $\Phi = \exists x \Psi$. Пусть $\mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x, a_1, \dots, a_n)$, где $a_1, \dots, a_n \in A_j$. Тогда $\mathfrak{A} \models \Psi(a, a_1, \dots, a_n)$ для некоторого $a \in A_i$. Возьмем $k \in I$, для которого $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}_k$. По индукционному предположению $\mathfrak{A} \models \Psi(a, a_1, \dots, a_n)$, следовательно, $\mathfrak{A}_k \models \exists x \Psi(x, a_1, \dots, a_n)$. Так как $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}_k$, то $\mathfrak{A}_j \models \exists x \Psi(x, a_1, \dots, a_n)$. Обратно, пусть имеет место $\mathfrak{A}_j \models \exists x \Psi(x, a_1, \dots, a_n)$. Тогда $\mathfrak{A}_j \models \Psi(a, a_1, \dots, a_n)$ для некоторого $a \in A_j$ и по индукционному предположению $\mathfrak{A} \models \Psi(a, a_1, \dots, a_n)$, следовательно, имеет место $\mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x, a_1, \dots, a_n)$. \square

Хотя аналог предложения 3.1.2 для \prec не имеет места, более слабый вариант соответствующего утверждения является очень важным.

Теорема 5.1.9. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и $X \subseteq A$. Тогда существует такая элементарная подсистема $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, что $X \subseteq B$ и $|B| \leq \max(|X|, |\Sigma|, \omega)$.

Доказательство. Полагаем $X_0 = X$. Пусть X_n уже определено. Для любой формулы $\Psi = \exists x \Phi(x, x_1, \dots, x_k)$ сигнатуры Σ и любой ин-

терпретации $\gamma: \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow A$ выбираем такой элемент $a(\Psi, \gamma) \in A$, что если $\mathfrak{A} \models \exists x \Phi(x, \gamma x_1, \dots, \gamma x_k)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi(a(\Psi, \gamma), \gamma x_1, \dots, \gamma x_k)$. Полагаем $X_{n+1} = X_n \cup \{a(\Psi, \gamma) \mid \Psi = \exists x \Phi \in F(\Sigma), \gamma: FV(\Psi) \rightarrow X_n\}$. Ясно, что подсистема $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ с носителем $\bigcup_{n \in \omega} X_n$ удовлетворяет условию предложения 5.1.4, следовательно, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. Если $\lambda = \max(|X|, |\Sigma|, \omega)$, то $|F(\Sigma)| \leq \lambda$ и $|X_0| \leq \lambda$. Если $|X_n| \leq \lambda$, то мощность множества Y_n интерпретаций γ переменных в X_n с конечной областью определения не превосходит $\left| \bigcup_{m \in \omega} X_n^m \right|$. Так как $|X_n^m| \leq \max(|X_n|, \omega)$, то $|Y_n| \leq \lambda \cdot \omega = \lambda$, поэтому $|X_{n+1}| \leq |F(\Sigma)| \times |Y_n| \leq \lambda^2 = \lambda$. Следовательно, $|B| \leq \lambda \cdot \omega = \lambda$. \square

Определение. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и $X \subseteq A$. Возьмем множество $C_X = \{c_a \mid a \in X\}$, не пересекающееся с $R \cup F$ и $c_a \neq c_b$ для $a \neq b$. Определим сигнатуру Σ_X как полученную из Σ добавлением элементов множества C_X в качестве новых констант. Обозначим через \mathfrak{A}_X обогащение системы \mathfrak{A} до сигнатуры Σ_X , в котором константа c_a , $a \in X$, интерпретируется элементом a . Множество $D(\mathfrak{A}, X)$ атомарных предложений сигнатуры Σ_X или их отрицаний, истинных в системе \mathfrak{A}_X , называется *диаграммой множества X в A*. Если в определении $D(\mathfrak{A}, X)$ заменить «атомарные предложения или их отрицания» на «предложения», то получим определение *полной диаграммы* $D^*(\mathfrak{A}, X)$. Диаграмма (полная диаграмма) A в \mathfrak{A} называется *диаграммой (полной диаграммой) A* и обозначается через $D(\mathfrak{A})$ (соответственно $D^*(\mathfrak{A})$).

Предложение 5.1.10. а). *Если \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и \mathfrak{B} — модель диаграммы $D(\mathfrak{A})$ (полной диаграммы, $D^*(\mathfrak{A})$) сигнатуры Σ_A , то $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}_1 \restriction \Sigma$ для некоторой $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$ (некоторой $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}$).*

б). *Если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ , то*

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A}_A \equiv \mathfrak{B}_A.$$

Доказательство. а). Очевидно, что отображение, сопоставляющее элементу $a \in \mathfrak{A}$ элемент $\nu^{\mathfrak{B}}(c_a)$, будет требуемым изоморфизмом. б) вытекает непосредственно из определений. \square

Теорема 5.1.9 позволяет «спускаться» по мощностям, сохраняя элементарные свойства. Следующая теорема позволяет «подниматься».

Теорема 5.1.11. *Пусть \mathfrak{A} — бесконечная система сигнатуры Σ , λ — кардинал, не меньший $\max\{|A|, |\Sigma|\}$. Тогда существует такая система \mathfrak{B} , что $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ и $|B| = \lambda$.*

Доказательство. Возьмем множество C символов констант мощности X , не пересекающееся с множеством $R \cup F$. Рассмотрим множество

$$Y = D^*(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c_1 \approx c_2 \mid c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2\}.$$

Так как система \mathfrak{A} бесконечна, то для любого конечного подмножества $X \subseteq Y$ систему \mathfrak{A} можно обогатить до модели X . По теореме компактности существует модель \mathfrak{B}_1 множества Y сигнатуры $\Sigma_{A \cup C}$. Очевидно, что $|B_1| \geq \lambda$. По теореме 5.1.9 существует $\mathfrak{B}_2 \prec \mathfrak{B}_1$, $|B_2| = \lambda$. По предложению 5.1.10, а) существует $\mathfrak{B}_3 \prec \mathfrak{B}_2$ и изоморфизм $f_1 : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_3 \upharpoonright \Sigma$. Теперь нужно лишь переименовать в системе $\mathfrak{B}_2 \upharpoonright \Sigma$ элементы $b \in B_3$ на $f_1^{-1}b$, чтобы получить требуемую \mathfrak{B} . Чтобы избежать коллизии при таком переобозначении, поступаем следующим образом. Возьмем множество Z , для которого $Z \cap A = \emptyset$ и $|Z| = |B_2 \setminus B_3|$. Пусть f — разнозначное отображение множества $B = A \cup Z$ на множество B_2 и $f_1 \subseteq f$. Определим систему $\mathfrak{B} = \langle B, \nu^{\mathfrak{B}} \rangle$ сигнатуры Σ следующим образом:

а) если $s \in R \cup F$ — не константа, то

$$\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}}(s) \iff \langle fb_1, \dots, fb_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}_2}(s);$$

б) если $s \in F$ — константа, то

$$\nu^{\mathfrak{B}}(s) = f^{-1}(\nu^{\mathfrak{B}_2}(s)).$$

Ясно, что f — изоморфизм \mathfrak{B} на $\mathfrak{B}_2 \upharpoonright \Sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Пусть $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_n) \in F(\Sigma)$; $b_1, \dots, b_n \in A$ и

$$\mathfrak{B} \models \exists x_0 \Phi(x_0, b_1, \dots, b_n).$$

Тогда $\mathfrak{B}_2 \models \exists x_0 \Phi(x_0, fb_1, \dots, fb_n)$. Так как $fb_1, \dots, fb_n \in B_3$ и $\mathfrak{B}_3 \prec \mathfrak{B}_2$, то существует такой $b_0 \in B_3$, что $\mathfrak{B}_2 \models \Phi(b_0, fb_1, \dots, fb_n)$. Отображение f^{-1} является изоморфизмом $\mathfrak{B}_2 \upharpoonright \Sigma$ на \mathfrak{B} , поэтому $\mathfrak{B} \models \Phi(f^{-1}b_0, b_1, \dots, b_n)$. Так как $f^{-1}b_0 \in A$, то по предложению 5.1.4 имеем $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Из $|B_2| = \lambda$ и $\mathfrak{B}_2 \cong \mathfrak{B}$ следует $|B| = \lambda$. \square

Упражнения

- Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — системы сигнатуры Σ . Покажите, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ если и только если $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma_1 \equiv \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma_1$ для любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$.
- Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — системы конечной сигнатуры Σ . Определим по индукции множества F_n , $n \in \omega$. Положим $F_0 = P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, где $P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — множество всех конечных частичных изоморфизмов \mathfrak{A}

в \mathfrak{B} . Если множество F_n ($\subseteq P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$) определено, то F_{n+1} — это множество всех частичных изоморфизмов f из F_n таких, что для любых $a \in A$, $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_n$ с условиями $f \subseteq g_1$, $f \subseteq g_2$, $a \in \text{dom } g_1$ и $b \in \text{rang } g_2$. По определению, $F_n \supseteq F_{n+1}$, $n \in \omega$. Доказать, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, если для любого $n \in \omega$ множество F_n непусто. (Указание. Проверить, что если множества $F_i(\Sigma, n)$, $0 \leq i \leq n$, удовлетворяют условию (*) из теоремы 5.1.1, то $F_{n-i}(\Sigma, n) \subseteq F_i$, $0 \leq i < n$.)

3. Покажите, что для систем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ сигнатуры Σ имеет место $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, если выполняется одно из следующих условий:
 - а). Сигнатура Σ содержит лишь бесконечное множество констант. Значения констант в \mathfrak{B} образуют бесконечное множество.
 - б). Сигнатура Σ содержит лишь символы одноместных предикатов r_k , $k \in \omega$. Рассмотрим множество $2^\omega = \{\nu \mid \nu: \omega \rightarrow \{0, 1\}\}$. Пусть \mathfrak{B} — произвольная система сигнатуры Σ . Для любого $\nu \in 2^\omega$ определяем множество $\mathfrak{B}(\nu) = \{b \mid \text{для всех } n \in \omega \mathfrak{B} \models r_n(b), \text{ если } \nu(n) = 1, \text{ и } \mathfrak{B} \models \neg r_n(b), \text{ если } \nu(n) = 0\}$. Ясно, что для различных $\nu_1, \nu_2 \in 2^\omega$ множества $\mathfrak{B}(\nu_1)$ и $\mathfrak{B}(\nu_2)$ не пересекаются. Пусть для всех $\nu \in 2^\omega$ выполняется $\mathfrak{B}(\nu) \subseteq A$, если $\mathfrak{B}(\nu)$ — конечное множество, и $A \cap \mathfrak{B}(\nu)$ — бесконечное множество, если $\mathfrak{B}(\nu)$ бесконечно.
 - в). Сигнатура Σ содержит единственный символ \sim двухместного отношения, который интерпретируется в \mathfrak{B} как эквивалентность с бесконечным числом бесконечных классов эквивалентности. Множество A содержит бесконечное число классов эквивалентности системы \mathfrak{B} . (Указание. Воспользоваться предложением 5.1.10 б) и теоремой 5.1.1.)
4. С помощью примера из упражнения 3, в) показать, что
 - а) признак элементарности подсистем из предложения 5.1.5 не является необходимым (указание: пусть $|A| = \omega$ и все классы эквивалентности, содержащиеся в $B \setminus A$, несчетны);
 - б) для некоторой системы \mathfrak{B} и бесконечного множества $X \subseteq B$ не существует минимальной по отношению включения \subseteq элементарной подсистемы $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, содержащей X .

§ 5.2. Аксиоматизируемые классы

Определение. Класс K алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует сигнатура Σ и такое множество предложений Z сигнатуры Σ , что для любой системы \mathfrak{A} имеет место

$$\mathfrak{A} \in K \iff (\text{сигнатура } \mathfrak{A} \text{ равна } \Sigma \text{ и } \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z). \quad (5.2)$$

Если для класса K выполняется (5.2), то Σ называется *сигнатурой* K , а множество Z называется *множеством аксиом* для K (обозначаем $K = K_\Sigma(Z)$). Если все системы класса K имеют сигнатуру Σ , то множество предложений сигнатуры Σ , истинных на всех системах из K , называется *элементарной теорией* K или просто *теорией* K и обозначается через $\text{Th}(K)$.

Отметим очевидное свойство теорий: если $K_1 \subseteq K_2$ — классы алгебраических систем сигнатуры Σ , то $\text{Th}(K_2) \subseteq \text{Th}(K_1)$.

Предложение 5.2.1. *Пусть K — класс алгебраических систем сигнатуры Σ .*

а). Класс K аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = K_\Sigma(\text{Th}(K))$.

б). Существует минимальный по отношению к включению \subseteq аксиоматизируемый класс K_1 сигнатуры Σ , содержащий K .

Доказательство. а). Пусть $K = K_\Sigma(Z)$. Так как $Z \subseteq \text{Th}(K)$, то $K_\Sigma(\text{Th}(K)) \subseteq K$. Обратное включение $K \subseteq K_\Sigma(\text{Th}(K))$ очевидно.

б). В качестве K_1 нужно взять $K_\Sigma(\text{Th}(K))$. В самом деле, если K_2 — аксиоматизируемый класс сигнатуры Σ и $K \subseteq K_2$, то $\text{Th}(K_2) \subseteq \text{Th}(K)$. Следовательно, $K_\Sigma(\text{Th}(K)) \subseteq K_\Sigma(\text{Th}(K_2)) = K_2$. \square

Будем говорить, что класс K алгебраических систем *замкнут относительно элементарной эквивалентности* (изоморфизмов, подсистем, ультрапроизведений и др.), если вместе с алгебраическими системами \mathfrak{A}_i , $i \in I$, он содержит все элементарно эквивалентные им системы (все изоморфные им системы, все их подсистемы, ультрапроизведение $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ и др.). Приведем одну полезную характеристацию аксиоматизируемых классов.

Теорема 5.2.2. *Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

Доказательство. Пусть K — аксиоматизируемый класс. Очевидно, что K замкнут относительно элементарной эквивалентности. Замкнутость K относительно ультрапроизведений следует из теоремы 3.3.5. Пусть K замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений. Достаточно показать, что $K_\Sigma(\text{Th}(K)) \subseteq K$. Пусть $\mathfrak{A} \in K_\Sigma(\text{Th}(K))$. Для каждого $\Phi \in \text{Th}(\mathfrak{A})$ рассмотрим множества $u_\Phi = \{\Psi \in \text{Th}(\mathfrak{A}) \mid \triangleright \Psi \rightarrow \Phi\}$. Ясно, что семейство $X = \{u_\Phi \mid \Phi \in \text{Th}(\mathfrak{A})\}$ будет центрированным. По предложению 2.3.2 существует такой ультрафильтр D на множестве $\text{Th}(\mathfrak{A})$, что $X \subseteq D$. Для любого $\Phi \in \text{Th}(\mathfrak{A})$ существует система $\mathfrak{B}_\Phi \in K$, на которой истинно Φ , так как в противном случае $\neg\Phi \in \text{Th}(K)$, что противоречит $\mathfrak{A} \in K_\Sigma(\text{Th}(K))$.

Покажем, что $\mathfrak{A} \equiv D\text{-prod } \mathfrak{B}_\Phi$, и этим теорема будет доказана. Если $\mathfrak{A} \models \Phi_0$, то $\mathfrak{B}_\Psi \models \Phi_0$ для всех $\Psi \in u_{\Phi_0}$. Так как $u_{\Phi_0} \in D$, то по теореме 3.3.5 получаем $D\text{-prod } \mathfrak{B}_\Phi \models \Phi_0$. Если $\mathfrak{A} \models \Phi_0$ не имеет места, то $\mathfrak{A} \models \neg \Phi_0$ и по только что доказанному $D\text{-prod } \mathfrak{B}_\Phi \models \neg \Phi_0$. Следовательно, $D\text{-prod } \mathfrak{B}_\Phi \models \Phi_0$ не имеет места. \square

Предложение 5.2.3. *Пересечение любого множества аксиоматизируемых классов сигнатуры Σ и объединение конечного числа аксиоматизируемых классов сигнатуры Σ являются аксиоматизируемыми классами.*

Доказательство. Если $K_i = K_\Sigma(Z_i)$, $i \in I$, то очевидно, что $\bigcap_{i \in I} K_i = K_\Sigma \left(\bigcup_{i \in I} Z_i \right)$. Пусть $K_1 = K_\Sigma(Z_1)$ и $K_2 = K_\Sigma(Z_2)$. Рассмотрим множество $Z = \{\Phi \vee \Psi \mid \Phi \in Z_1, \Psi \in Z_2\}$. Покажем, что $K_1 \cup K_2 = K_\Sigma(Z)$. Включение $K_1 \cup K_2 \subseteq K_\Sigma(Z)$ очевидно. Пусть $\mathfrak{A} \notin K_1 \cup K_2$ и сигнатуря \mathfrak{A} равна Σ . Тогда существуют такие $\Phi_0 \in Z_1$ и $\Psi_0 \in Z_2$, что $\mathfrak{A} \models \neg \Phi_0 \wedge \neg \Psi_0$. Так как $\Phi_0 \vee \Psi_0 \in Z$, то $\mathfrak{A} \notin K_\Sigma(Z)$. \square

Определение. Если K — класс алгебраических систем и $K = K_\Sigma(Z)$ для некоторого конечного множества аксиом Z , то класс K называется *конечно аксиоматизируемым*.

Заметим, что если K конечно аксиоматизируем, то, взяв конъюнкцию конечного множества Z аксиом для K , получим множество аксиом $\{\Phi\}$ для K , состоящее из одного предложения Φ .

Если K — класс алгебраических систем сигнатуры Σ , то через \bar{K} обозначим дополнение K в классе $K_\Sigma(\emptyset)$ всех систем сигнатуры Σ .

Предложение 5.2.4. Пусть K — класс алгебраических систем сигнатуры Σ . Класс K является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда K и \bar{K} являются аксиоматизируемыми.

Доказательство. Если класс K конечно аксиоматизируем, то $K = K_\Sigma(\{\Phi\})$ для некоторого предложения Φ сигнатуры Σ . Тогда $\bar{K} = K_\Sigma(\{\neg \Phi\})$. Пусть K и \bar{K} аксиоматизируемы. Так как $\bar{K} \cap K = \emptyset$, $K = K_\Sigma(\text{Th}(K))$ и $\bar{K} = K_\Sigma(\text{Th}(\bar{K}))$, то по теореме компактности существуют такие конечные множества $X \subseteq \text{Th}(K)$ и $Y \subseteq \text{Th}(\bar{K})$, что $X \cup Y$ не имеет модели. Так как $\text{Th}(K)$ и $\text{Th}(\bar{K})$ замкнуты относительно взятия конъюнкций, то можно считать, что $X = \{\Phi\}$ и $Y = \{\Psi\}$. Так как $\Phi \wedge \Psi$ — тождественно ложная формула, то на всех моделях \mathfrak{A} множества $\{\Phi\}$ истинно предложение $\neg \Psi$, т. е. $\mathfrak{A} \notin \bar{K}$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \in K$. Значит, $K = K_\Sigma(\{\Phi\})$. \square

Определение. Формула Φ называется *\forall -формулой* (*\exists -формулой*, *$\forall \exists$ -формулой*), если $\Phi = \forall x_1 \dots \forall x_k \Psi$ ($\Phi = \exists x_1 \dots \exists x_k \Psi$, $\Phi =$

$= \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y_1 \dots \exists y_n \Psi$), где Ψ — бескванторная формула. Класс K алгебраических систем называется \forall -аксиоматизируемым (\exists -аксиоматизируемым, $\forall\exists$ -аксиоматизируемым), если $K = K_\Sigma(Z)$, где Z — множество \forall -предложений (\exists -предложений, $\forall\exists$ -предложений) сигнатуры Σ .

Предложение 5.2.5. а). Пусть $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ — \forall -формула (\exists -формула) сигнатуры Σ , $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ , $a_1, \dots, a_k \in A$. Тогда из истинности $\Phi(a_1, \dots, a_k)$ в \mathfrak{B} (в \mathfrak{A}) следует истинность $\Phi(a_1, \dots, a_k)$ в \mathfrak{A} (в \mathfrak{B}).

б). Пусть $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ — направленное семейство алгебраических систем сигнатуры Σ и $\forall\exists$ -предложение Φ сигнатуры Σ истинно во всех \mathfrak{A}_i , $i \in I$. Тогда Φ истинно в $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Доказательство. а). Так как значение $t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ терма t при интерпретации γ в A совпадает со значением $t^{\mathfrak{B}}[\gamma]$, то а) выполняется для атомарных формул Φ . Для бескванторных формул утверждение а) получается индукцией по длине Φ . Теперь остается лишь воспользоваться определением истинности формул с кванторами \forall и \exists .

б). Пусть предложение $\Phi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists y_1 \dots \exists y_n \Psi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$, где Ψ — бескванторная формула, истинно на всех \mathfrak{A}_i , $i \in I$. Возьмем произвольные $a_1, \dots, a_k \in A$. Тогда $a_1, \dots, a_k \in A$ для некоторого $i \in I$ и, следовательно, $\mathfrak{A}_i \models \exists y_1 \dots \exists y_n \Psi(a_1, \dots, a_k, y_1, \dots, y_n)$. Так как $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$, то в силу а) имеем $\mathfrak{A} \models \exists y_1 \dots \exists y_n \Psi(a_1, \dots, a_k, y_1, \dots, y_n)$. \square

Лемма 5.2.6. Пусть Γ — множество предложений сигнатуры Σ и $\Psi_0(x_1, \dots, x_k)$ — формула сигнатуры Σ . Если для любых моделей $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ множества Γ , имеющих сигнатуру Σ , и любых $a_1, \dots, a_k \in A$ из истинности $\Psi_0(a_1, \dots, a_k)$ в \mathfrak{B} (в \mathfrak{A}) следует истинность $\Psi_0(a_1, \dots, a_k)$ в \mathfrak{A} (в \mathfrak{B}), то существует \forall -формула (\exists -формула) $X_0(x_1, \dots, x_k)$ сигнатуры Σ , для которой $\Gamma \triangleright (\Psi_0 \rightarrow X_0) \wedge (X_0 \rightarrow \Psi_0)$.

Доказательство. Вместо u_1, \dots, u_k пишем \bar{u} . Пусть \bar{d} — набор новых констант, $\Psi_1 = (\Psi_0)_{\bar{d}}^{\bar{x}}$, сигнатура Σ' получается из Σ добавлением символов констант из \bar{d} и

$$Z = \{\Phi \mid \Phi \text{ — } \forall\text{-предложение сигнатуры } \Sigma' \text{ и } \Gamma \triangleright \Psi_1 \rightarrow \Phi\}.$$

Рассмотрим множество $\Gamma \cup Z \cup \{\neg \Psi_1\}$. Если оно несовместно, то существуют $\Phi_0, \dots, \Phi_n \in Z$ такие, что $\Gamma \triangleright \left(\bigwedge_{i \leq n} \Phi_i \rightarrow \Psi_1 \right)$. Тогда

$$\Gamma \triangleright \left(\bigwedge_{i \leq n} \Phi_i \rightarrow \Psi_1 \right) \wedge \left(\Psi_1 \rightarrow \bigwedge_{i \leq n} \Phi_i \right).$$

Пусть D_0 — дерево доказательства секвенции

$$\Gamma_0 \vdash \left(\bigwedge_{i \leq n} \Phi_i \rightarrow \Psi_1 \right) \wedge \left(\Psi_1 \rightarrow \bigwedge_{i \leq n} \Phi_i \right),$$

где Γ_0 — подходящая конечная последовательность элементов множества Γ . Так как эта секвенция не содержит свободных переменных, то можно считать, что x_1, \dots, x_k не встречаются в D_0 . Сделаем подстановку $(D_0)_{x_1, \dots, x_k}^{d_1, \dots, d_k}$. Это снова дерево доказательства секвенции

$$\Gamma_0 \vdash \left(\bigwedge_{i \leq n} (\Phi_i)_{\bar{x}}^{\bar{d}} \rightarrow \Psi_0 \right) \wedge \left(\Psi_0 \rightarrow \bigwedge_{i \leq n} (\Phi_i)_{\bar{x}}^{\bar{d}} \right).$$

Остается заметить, что формула $\bigwedge_{i \leq n} (\Phi_i)_{\bar{x}}^{\bar{d}}$ эквивалентна \forall -формуле.

Предположим, что $\Gamma \cup Z \cup \{\neg \Psi_1\}$ совместно и \mathfrak{A} — модель этого множества предложений. Установим, что $\Gamma \cup D(\mathfrak{A}) \triangleright \neg \Psi_1$. Действительно, если \mathfrak{B} — модель множества $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$, то существует изоморфное вложение φ модели \mathfrak{A} в $\mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma'$. Если бы в \mathfrak{B} было истинно Ψ_1 , то по условию леммы Ψ_1 было бы истинно и в подсистеме $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{B}$, а следовательно, и в \mathfrak{A} , что невозможно. Итак, для всех моделей \mathfrak{B} для $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$ имеем $\mathfrak{B} \triangleright \neg \Psi_1$. По теореме о полноте имеем $\Gamma \cup D(\mathfrak{A}) \triangleright \neg \Psi_1$. Существуют конечная последовательность Γ_0 элементов множества Γ и предложения $X_0, \dots, X_n \in D(\mathfrak{A})$ такие, что секвенция $\Gamma_0 \vdash \bigwedge_{i \leq n} X_i \rightarrow \neg \Psi_1$ доказуема. Заменяя константы вида c_a на

переменные, не входящие в формулы из Γ_0 и в Ψ_0 , и навешивая на эти переменные кванторы существования, получим доказуемую секвенцию

$$\Gamma_0 \vdash \exists \bar{y} \left(\bigwedge_{i \leq n} (X_i)_{\bar{y}}^{\bar{c}_a} \right) \rightarrow \neg \Psi_1.$$

Тогда доказуема секвенция

$$\Gamma_0 \vdash \Psi_1 \rightarrow \forall \bar{y} \neg \left(\bigwedge_{i \leq n} (X_i)_{\bar{y}}^{\bar{c}_a} \right).$$

Следовательно, $\forall \bar{y} \neg \left(\bigwedge_{i \leq n} (X_i)_{\bar{y}}^{\bar{c}_a} \right) \in Z$, $\mathfrak{A} \models \forall \bar{y} \neg \left(\bigwedge_{i \leq n} (X_i)_{\bar{y}}^{\bar{c}_a} \right)$, что противоречит тому, что $X_0, \dots, X_n \in D(\mathfrak{A})$.

Второй вариант леммы получается из первого заменой формулы Ψ_0 на $\neg \Psi_0$. \square

Теорема 5.2.7. Пусть K — аксиоматизируемый класс алгебраических систем сигнатуры Σ .

- $K \exists\text{-аксиоматизируем} \iff K$ замкнут относительно надсистем.
- $K \forall\text{-аксиоматизируем} \iff K$ замкнут относительно подсистем.

Доказательство. Утверждения \implies следуют из предложения 5.2.5.

a). Покажем сначала, что для любого предложения $\Phi \in \text{Th}(K)$ существует такое предложение $\Psi_\Phi \in \text{Th}(K)$, что $\triangleright \Psi_\Phi \rightarrow \Phi$ и для любой пары $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ алгебраических систем сигнатуры Σ из $\mathfrak{A} \models \Psi_\Phi$ следует $\mathfrak{B} \models \Phi$. Предположим, что это не так, т. е. существует такое $\Phi_0 \in \text{Th}(K)$, что для любого $\Psi \in \text{Th}(K)$ существуют системы $\mathfrak{A}_\Psi \subseteq \mathfrak{B}_\Psi$ сигнатуры Σ , для которых из $\triangleright \Psi \rightarrow \Phi_0$ следуют $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$ и $\mathfrak{B}_\Psi \models \neg \Phi_0$. Пусть D — ультрафильтр на множестве $\text{Th}(K)$, содержащий центрированное семейство $X = \{u_\Phi \mid \Phi \in \text{Th}(K)\}$, где $u_\Phi = \{\Psi \in \text{Th}(K) \mid \triangleright \Psi \rightarrow \Phi\}$. Рассмотрим системы $\mathfrak{A}_0 = D\text{-prod } \mathfrak{A}_\Psi$ и $\mathfrak{B}_0 = D\text{-prod } \mathfrak{B}_\Psi$. Так как $\mathfrak{A}_\Psi \subseteq \mathfrak{B}_\Psi$ для всех $\Psi \in \text{Th}(K)$, то существует $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{A}_0$. Из теоремы 3.3.5, включения $X \subseteq D$ и из того, что $\mathfrak{A}_0 \simeq \mathfrak{A}_1$, получаем $\mathfrak{A}_1 \in K_\Sigma(\text{Th}(K)) = K$ и $\mathfrak{B}_0 \models \neg \Phi_0$. Это противоречит замкнутости K относительно надсистем.

Для любого предложения $\Phi \in \text{Th}(K)$ по лемме 5.2.6 (полагаем $\Gamma = \{\Psi_\Phi \vee \neg \Phi\}$ и $\Psi_0 = \Phi$) существует такое \exists -предложение X_Φ , что

$$\triangleright (\Psi_\Phi \vee \neg \Phi) \rightarrow ((\Phi \rightarrow X_\Phi) \wedge (X_\Phi \rightarrow \Phi)).$$

Отсюда получаем, что $X_\Phi \rightarrow \Phi$ — тождественно истинное предложение и в силу $\{\Phi, \Psi_\Phi\} \subseteq \text{Th}(K)$ также $X_\Phi \in \text{Th}(K)$. Следовательно, множество \exists -предложений $\{X_\Phi \mid \Phi \in \text{Th}(K)\}$ будет системой аксиом для K .

Для того чтобы получить доказательство б), нужно в доказательстве а) заменить $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}_\Psi \subseteq \mathfrak{B}_\Psi$ на $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_\Psi \subseteq \mathfrak{A}_\Psi$ соответственно и применить другую часть леммы 5.2.6. \square

Определение. Предложение вида $\forall x_1 \dots \forall x_k Q$, где Q — атомарная формула, называется *тождеством*. Предложение вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_k ((Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \rightarrow Q_0), \quad (5.3)$$

где Q_0, Q_1, \dots, Q_n — атомарные формулы, называется *квазитождеством*. Аксиоматизируемый класс K называется *многообразием* (*квазимногообразием*), если существует система аксиом Z для K , состоящая из тождеств (квазитождеств).

Так как тождество $\forall x_1 \dots \forall x_k Q$ эквивалентно квазитождеству $\forall x_1 \dots \forall x_{k+1} (x_{k+1} \approx x_{k+1} \rightarrow Q)$, то многообразие является квазимногообразием.

Систему $E_\Sigma = \langle \{\emptyset\}, \nu^{E_\Sigma} \rangle$ назовем *единичной системой сигнатуры* Σ , если

$$\nu^{E_\Sigma}(s) = \{\emptyset\}^{\mu(s)} \text{ для всех } s \in R. \quad (5.4)$$

Условие (5.4) определяет систему E_Σ однозначно, так как на одноЭлементном множестве для любого $n \in \omega$ существует только одна n -местная функция.

Предложение 5.2.8. а). *Любое квазимногообразие K сигнатуры Σ замкнуто относительно фильтрованных произведений и содержит единичную систему E_Σ .*

б). *Любое многообразие замкнуто относительно гомоморфных образов.*

Доказательство. а) Так как в E_Σ истинно $Q_0(\emptyset, \dots, \emptyset)$, для любой атомарной формулы $Q_0(x_1, \dots, x_k)$ сигнатуры Σ , то в E_Σ истинно любое квазитождество (5.3). Для того чтобы показать замкнутость K относительно фильтрованных произведений, достаточно показать, что любое квазитождество (5.3) условно фильтруется по любому фильтру D на множестве I . В силу леммы 3.3.3 достаточно показать, что формула $((Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \rightarrow Q_0)(x_1, \dots, x_k)$ условно фильтруется по D . Пусть $f_1, \dots, f_k \in I\text{-prod } A_i$ и

$$X = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models ((Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \rightarrow Q_0)(f_1 i, \dots, f_k i)\} \in D.$$

Предположим, что в $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ истинно $(Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \wedge \neg Q_0)(Df_1, \dots, Df_k)$. Из лемм 3.3.4 и 3.3.3 получаем

$$Y = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models (Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n)(f_1 i, \dots, f_k i)\} \in D$$

и $Z = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models Q_0(f_1 i, \dots, f_k i)\} \notin D$. Очевидно, что $X \cap Y$ содержится в Z . Так как $X \cap Y \in D$, то $Z \in D$ — противоречие.

б). Пусть f — гомоморфизм \mathfrak{A} на \mathfrak{B} . По предложению 3.2.1 б) для любого терма t и интерпретации $\gamma: FV(t) \rightarrow A$ имеет место

$$f(t^\mathfrak{A}[\gamma]) = t^\mathfrak{B}[\gamma f].$$

Из этого равенства и определения гомоморфизма получаем, что

$$\mathfrak{A} \models Q[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models Q[\gamma f]$$

для любой атомарной формулы Q сигнатуры Σ . Поэтому в силу того, что f отображает A на B , из истинности любого тождества Φ в \mathfrak{A} следует его истинность в \mathfrak{B} . \square

Теорема 5.2.9. Для \forall -аксиоматизируемого класса K сигнатуры Σ следующие условия эквивалентны:

- 1) K — квазимногообразие,
- 2) K замкнут относительно конечных декартовых произведений и содержит единичную систему E_Σ .

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) доказано в предложении 5.2.8, а). Рассмотрим множество

$$W = \{\Phi \mid \Phi \text{ — квазитождество сигнатуры } \Sigma \text{ и } \Phi \in \text{Th}(K)\}.$$

Пусть \mathfrak{A} — модель W . Покажем, что каждое конечное подмножество $X \subseteq D(\mathfrak{A})$ имеет такую модель \mathfrak{B}_X , что $\mathfrak{B}_X \upharpoonright \Sigma \in K$. Пусть $X = Y \cup Z$, где Z состоит из атомных предложений, а Y — из отрицаний атомных. Если $Y = \emptyset$, то в качестве \mathfrak{B}_X можно взять E_{Σ_A} . Пусть $Y = \{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}$, Φ — конъюнкция элементов Z , если $Z \neq \emptyset$, и Φ равно $c_a \approx c_a$ для некоторого $a \in A$, если $Z = \emptyset$. Пусть c_{a_1}, \dots, c_{a_k} — все константы из C_A , входящие в Q_1, \dots, Q_n, Φ , и Q'_1, \dots, Q'_n, Φ' получаются из Q_1, \dots, Q_n, Φ соответственно заменой c_{a_1}, \dots, c_{a_k} на x_1, \dots, x_k . Так как квазитождества $\forall x_1 \dots \forall x_k (\Phi \rightarrow Q_i)$, $q \leq i \leq n$, ложны в \mathfrak{A} , то они не принадлежат W . Следовательно, существуют такие системы $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n \in K$, что $\mathfrak{B}_i \models (\Phi \wedge \neg Q_i)[\gamma_i]$, $1 \leq i \leq n$, для некоторых $\gamma_i : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow B_i$. Рассмотрим декартово произведение $\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_n \in K$ и интерпретацию γ переменных x_1, \dots, x_k в B , для которой проекция $i(\gamma)$ па i -ю координату равна γ_i . Из леммы 3.3.4 получаем, что $\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_n \models (\Phi \wedge \neg Q_1 \wedge \dots \wedge \neg Q_n)[\gamma]$. Следовательно, систему $\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_n$ можно обогатить до системы \mathfrak{B}_X сигнатуры Σ_A , являющейся моделью X . Из доказательства теоремы 3.3.6 получаем, что существует ультрапроизведение $\mathfrak{B} = D\text{-prod } \mathfrak{B}_X$, являющееся моделью $D(\mathfrak{A})$. В силу предложения 5.1.10, а) существует такая подсистема $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma$, что $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}_1$. Так как $\mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma = D\text{-prod } (\mathfrak{B}_X \upharpoonright \Sigma)$ и $\mathfrak{B}_X \upharpoonright \Sigma \in K$, то из теорем 5.2.2, 5.2.7 и из того, что $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}_1$, вытекает, что $\mathfrak{A} \in K$. Таким образом, получили $K = K_\Sigma(W)$. \square

Теорема 5.2.10. Для квазимногообразия K сигнатуры Σ следующие условия эквивалентны:

- 1) K — многообразие;
- 2) K замкнут относительно гомоморфных образов.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) показано в предложении 5.2.8 б). Пусть выполняется 2) и \mathfrak{A} — модель множества

$$Z = \{\Phi \mid \Phi \text{ — тождество сигнатуры } \Sigma \text{ и } \Phi \in \text{Th}(K)\}.$$

Рассмотрим множество

$$D^-(\mathfrak{A}) = \{\neg\Phi \in D(\mathfrak{A}) \mid \Phi \text{ — атомарная формула}\}.$$

Для любой формулы $\neg\Psi$ из $D^-(\mathfrak{A})$ тождество $\forall y_1 \dots \forall y_n \Psi_1$ сигнатуры Σ , где $\Psi = (\Psi_1)_{c_{a_1}, \dots, c_{a_n}}^{y_1, \dots, y_n}$, ложно \mathfrak{A} , поэтому оно не принадлежит Z . Тогда существует $\mathfrak{B}_\Psi \in K$ и интерпретация $\gamma_\Psi : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow B_\Psi$, для которых $\mathfrak{B}_\Psi \models \neg\Psi[\gamma_\Psi]$. Следовательно, \mathfrak{B}_Ψ можно обогатить до системы \mathfrak{B}'_Ψ сигнатуры Σ_A , являющейся моделью $\{\neg\Psi\}$. Рассмотрим декартово произведение $\mathfrak{B} = D^-(\mathfrak{A})\text{-prod } \mathfrak{B}_\Psi$. В силу предложения 5.2.8 а) имеем $\mathfrak{B} \restriction \Sigma \in K$. По лемме 3.3.4 имеет место $\mathfrak{B} \models \neg\Psi$ для любого $\neg\Psi \in D^-(\mathfrak{A})$. Пусть \mathfrak{B}_1 — подсистема \mathfrak{B} , порожденная в \mathfrak{B} множеством $\{\nu^\mathfrak{B}(c_a) \mid a \in A\}$. По теореме 5.2.7 б) имеем $\mathfrak{B}_1 \restriction \Sigma \in K$. Определим отображение $h : B_1 \rightarrow A$ следующим образом: если $t(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры Σ и $t^\mathfrak{B}(\nu^\mathfrak{B}(c_{a_1}), \dots, \nu^\mathfrak{B}(c_{a_m})) = b$, то $h(b) = t^\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_m)$. Корректность определения h следует из импликаций:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 \models (t_1 \approx t_2)(\nu^\mathfrak{B}(c_{a_1}), \dots, \nu^\mathfrak{B}(c_{a_m})) &\implies \\ \implies (\neg t_1 \approx t_2)_{c_{a_1}, \dots, c_{a_m}}^{x_1, \dots, x_m} \notin D^-(\mathfrak{A}) &\implies \mathfrak{A} \models (t_1 \approx t_2)(a_1, \dots, a_m), \end{aligned}$$

где $t_1(x_1, \dots, x_m)$ и $t_2(x_1, \dots, x_m)$ — любые термы сигнатуры Σ . Цель импликаций, полученная из предыдущей заменой $t_1 \approx t_2$ на любую атомную формулу $Q(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры Σ , также имеет место, следовательно, h является гомоморфизмом $\mathfrak{B}_1 \restriction \Sigma$ на \mathfrak{A} . Из 2) получаем, что $\mathfrak{A} \in K$. Таким образом, показано, что $K = K_\Sigma(Z)$. \square

Упражнения

- Пусть K — аксиоматизируемый класс, содержащий системы как угодно больших конечных мощностей. Показать, что класс K_∞ , состоящий из бесконечных систем класса K , является аксиоматизируемым, но не является конечно аксиоматизируемым.
- Показать, что в теореме 5.2.2 условие замкнутости относительно элементарной эквивалентности можно заменить на замкнутость относительно изоморфизмов и элементарных подсистем. (Указание. В доказательстве теоремы 5.2.2 вместо $\text{Th}(\mathfrak{A})$ рассмотреть $D^*(\mathfrak{A})$.)
- Показать, что любое квазитождество Φ эквивалентно квазитождеству Ψ в приведенной н. ф.
- Утверждение, аналогичное упражнению 3, для тождеств не имеет места. Найти многообразие, которое не имеет системы аксиом, состоящей из предложений вида $\forall x_1 \dots \forall x_n Q$, где Q — атомная формула. (Указание. Рассмотреть многообразие с системой аксиом $\{\forall x P(f(x))\}$.)

§ 5.3. Скулемовские функции

Определение. Множество T предложений сигнатуры Σ , замкнутое относительно выводимости (т. е. если $T \triangleright \Phi$ и Φ — предложение сигнатуры Σ , то $\Phi \in T$), называется *элементарной теорией* или просто *теорией сигнатуры Σ* . Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *полной*, если $\Phi \in T$ или $\neg\Phi \in T$ для любого предложения Φ сигнатуры Σ . Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *модельно полной*, если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \implies \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ для любых моделей $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ теории T , имеющих сигнатуру Σ . Формулы Φ и Ψ сигнатуры Σ называются *эквивалентными относительно теории T* сигнатуры Σ (обозначаем $\Phi \overset{T}{\equiv} \Psi$), если $T \triangleright (\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$. Теория T сигнатуры Σ называется *\forall -аксиоматизируемой* или *универсально аксиоматизируемой* (\exists -аксиоматизируемой, $\forall\exists$ -аксиоматизируемой), если существует такое множество $Z \subseteq T$ \forall -предложений (\exists -предложений, $\forall\exists$ -предложений), что $Z \triangleright \Phi$ для любого $\Phi \in T$. Такое множество Z называется *системой аксиом для теории T* .

Из следствия 4.5.8 вытекает, что теория T сигнатуры Σ \forall -аксиоматизируема (\exists -аксиоматизируема, $\forall\exists$ -аксиоматизируема) точно тогда, когда класс $K = K_\Sigma(T)$ \forall -аксиоматизируем (\exists -аксиоматизируем, $\forall\exists$ -аксиоматизируем), причем если Z — система аксиом для $K_\Sigma(T)$, то Z является системой аксиом для T , и наоборот.

Теория T сигнатуры Σ называется *теорией с элиминацией кванторов*, если любая формула Φ сигнатуры Σ эквивалентна относительно T некоторой бескванторной формуле Ψ . Очевидно, что непротиворечивая теория с элиминацией кванторов модельно полна. С другой стороны, модельно полная теория T является «почти» теорией с элиминацией кванторов. А именно, имеет место следующая

Теорема 5.3.1. Для того чтобы непротиворечивая теория T сигнатуры Σ была модельно полной, необходимо и достаточно, чтобы любая формула Φ сигнатуры Σ была эквивалентна относительно T некоторой \forall -формуле X_1 и некоторой \exists -формуле X_2 .

Доказательство. Достаточность следует из предложения 5.2.5, а). Необходимость получаем из леммы 5.2.6, взяв в качестве Γ теорию T . \square

Конечно, в теореме 5.3.1 требование эквивалентности Φ некоторой \exists -формуле X_2 можно опустить, так как это следует из эквивалентности $\neg\Psi$ некоторой \forall -формуле.

Работать с формулами, содержащими кванторы, гораздо трудней, чем с бескванторными. Поэтому теоремы теории моделей вида: дан-

ная теория T является теорией с элиминацией кванторов (является модельно полной) — очень важны. Сейчас мы изложим некоторую конструкцию, впервые предложенную Т. Скулемом, позволяющую любую теорию расширять до \forall -аксиоматизируемой модельно полной теории.

Определение. Если Σ — сигнатура, то сигнатура Σ^S получается из Σ добавлением новых n -местных функциональных символов f_Φ для каждой формулы $\Phi = \exists x\Psi$ сигнатуры Σ , начинающейся с квантора существования и имеющей n свободных переменных. Через S обозначим множество предложений

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(f_\Phi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n))$$

для всех формул $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \exists x\Psi(x, x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ со свободными переменными x_1, \dots, x_n , выписанными в порядке расположения их первых свободных вхождений в формулу Φ . Если T — теория сигнатуры Σ , то через T^S обозначим теорию

$$\{\Phi \mid \Phi \text{ — предложение сигнатуры } \Sigma^S \text{ и } T \cup S \triangleright \Phi\}.$$

Сигнатура Σ^S (теория T^S) называется *скулемизацией сигнатуры Σ (теории T)*. Модель \mathfrak{A}^S теории $(\text{Th}(\mathfrak{A}))^S$, имеющая сигнатуру Σ^S , называется *скулемизацией системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ* , если $\mathfrak{A}^S \upharpoonright \Sigma = \mathfrak{A}$.

В отличие от Σ^S и T^S скулемизация \mathfrak{A}^S не определяется по \mathfrak{A} однозначно, две скулемизации \mathfrak{A} могут быть даже не элементарно эквивалентными (см. упражнение 1), более того из упражнения 1 вытекает, что T^S почти всегда не полна.

Предложение 5.3.2. а). Пусть T — теория сигнатуры Σ , \mathfrak{B} — модель теории T^S и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma \prec \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma$.

б). Любая алгебраическая система \mathfrak{A} имеет некоторую скулемизацию \mathfrak{A}^S .

Доказательство. а) следует непосредственно из предложения 5.1.4. Докажем б). Если $\Phi = \exists \Psi(x, x_1, \dots, x_n)$, то для $a_1, \dots, a_n \in A$ берем в качестве значения $\nu^\mathfrak{A}(f_\Phi)(a_1, \dots, a_n)$ элемент $a_0 \in A$, для которого $\mathfrak{A} \models \Psi(a_0, a_1, \dots, a_n)$, если такой $a_0 \in A$ существует, и произвольный элемент $a \in A$, если такой a_0 не существует. \square

Из предложения 5.3.2 сразу получается теорема 5.1.9. В качестве \mathfrak{B} в этой теореме нужно взять $\mathfrak{B}_1 \upharpoonright \Sigma$, где \mathfrak{B}_1 — подсистема \mathfrak{A}^S , порожденная множеством X .

Скулемизация позволяет «убирать» кванторы у формул старой сигнатуры Σ . Однако в формулах новой сигнатуры Σ^S они «остаются». Чтобы избежать этого неудобства, «замкнем» процесс скулемизации.

Определение. Пусть Σ — сигнатура и T — теория сигнатуры Σ . Определим сигнатуры Σ^{nS} и теории T^{nS} , $n \in \omega$, по индукции: $\Sigma^{0S} = \Sigma$, $T^{0S} = T$, $\Sigma^{(n+1)S} = (\Sigma^{nS})^S$, $T^{(n+1)S} = (T^{nS})^S$. Сигнатура $\Sigma^{cS} = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma^{nS}$ (теория $T^{cS} = \bigcup_{n \in \omega} T^{nS}$) называется *полной скулемизацией сигнатуры Σ (теории T)*. Алгебраическая система \mathfrak{A}^{cS} сигнатуры Σ^{cS} называется *полной скулемизацией системы \mathfrak{A}* сигнатуры Σ , если $\mathfrak{A}^{cS} \upharpoonright \Sigma = \mathfrak{A}$ и \mathfrak{A}^{cS} — модель $(\text{Th}(\mathfrak{A}))^{cS}$.

Предложение 5.3.3. а). Любая алгебраическая система \mathfrak{A} имеет некоторую полную скулемизацию \mathfrak{A}^{cS} .

б). Пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры Σ . Тогда теория T^{cS} является универсально аксиоматизируемым модельно полным расширением T и для любой модели \mathfrak{A} теории T существует модель \mathfrak{A}_1 теории T^{cS} такая что $\mathfrak{A}_1 \upharpoonright \Sigma = \mathfrak{A}$.

Доказательство. а). В силу предложения 5.3.2, б) существуют такие системы \mathfrak{A}^{nS} , $n \in \omega$, что $\mathfrak{A}^{0S} = \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{(n+1)S}$ является скулемизацией \mathfrak{A}^{nS} . Пусть $\mathfrak{A}^{cS} = \langle A, \nu^{\mathfrak{A}^{cS}} \rangle$ — система сигнатуры Σ^{cS} , где $\nu^{\mathfrak{A}^{cS}}$ совпадает с $\nu^{\mathfrak{A}^{nS}}$ на символах из Σ^{nS} . Ясно, что \mathfrak{A}^{cS} будет полной скулемизацией \mathfrak{A} .

б). Пусть \mathfrak{A} — модель T^{cS} сигнатуры Σ^{cS} и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Из предложения 5.3.2, а) получаем, что $\mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma^{nS} \prec \mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma^{nS}$ для любого $n \in \omega$. Так как $\Sigma^{cS} = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma^{nS}$, то получаем $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. Следовательно, T^{cS} модельно полна и в силу теоремы 5.2.7 класс $K_{\Sigma^{cS}}(T^{cS})$ является \forall -аксиоматизируемым, т. е. $K_{\Sigma^{cS}}(T^{cS}) = K_{\Sigma^{cS}}(Z)$, где Z — множество \forall -предложений сигнатуры Σ^{cS} . Тогда Z — система аксиом для T^{cS} . Второе утверждение в б) следует из а). \square

Упражнение

- Показать, что для того чтобы, все скулемизации системы \mathfrak{A} были элементарно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы \mathfrak{A} было одноэлементно. (Указание. Рассмотреть различные значения $\nu^{\mathfrak{A}^S}(f_\Phi)$ для $\Phi = \exists v_0(v_0 \approx v_0 \wedge v_1 \approx v_1)$.)

§ 5.4. Механизм совместности

Механизм совместности имеет, в основном, методическое значение. Он позволяет выделить общую часть в многих теоремах, доказательство которых связано с построением моделей. В этом параграфе мы докажем несколько таких теорем. Всюду в дальнейшем предполагается, что сигнатура Σ имеет конечную или счетную мощность.

Определение. Для формулы Φ сигнатуры Σ определим формулу Φ^\neg следующим образом:

- 1) если Φ — атомарная формула, то $\Phi^\neg = \neg\Phi$,
- 2) $(\neg\Psi)^\neg = \Psi$,
- 3) $(\Psi_1 \rightarrow \Psi_2)^\neg = \Psi_1 \wedge \neg\Psi_2$,
- 4) $(\Psi_1 \wedge \Psi_2)^\neg = \neg\Psi_1 \vee \neg\Psi_2$,
- 5) $(\Psi_1 \vee \Psi_2)^\neg = \neg\Psi_1 \wedge \neg\Psi_2$,
- 6) $(\exists x\Psi)^\neg = \forall x\neg\Psi$,
- 7) $(\forall x\Psi)^\neg = \exists x\neg\Psi$.

Из определения Φ^\neg видно, что $\Phi^\neg \equiv \neg\Phi$. Обозначим через Σ^C сигнатуру, полученную из сигнатуры $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ добавлением счетного множества C новых констант. Константу сигнатуры Σ^C и терм вида $f(c_1, \dots, c_n)$, где $c_1, \dots, c_n \in C$ и $f \in F$, будем называть *базисным термом сигнатуры Σ^C* .

Определение. Множество S конечных или счетных множеств предложений сигнатуры Σ^C называется *механизмом совместности сигнатуры Σ* , если для каждого $s \in S$ выполняются следующие условия:

- (C1) включение $\{\Phi, \neg\Phi\} \subseteq s$ не имеет места ни для какого предложения Φ ;
- (C2) $\neg\Phi \in s \implies (s \cup \{\Phi^\neg\} \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S)$;
- (C3) $\Phi \rightarrow \Psi \in s \implies (s \cup \{\Psi\} \subseteq s_1$ или $s \cup \{\neg\Phi\} \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S)$;
- (C4) $\Phi \wedge \Psi \in s \implies (s \cup \{\Phi\} \subseteq s_1$ и $s \cup \{\Psi\} \subseteq s_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$);
- (C5) $\Phi \vee \Psi \in s \implies (s \cup \{\Phi\} \subseteq s_1$ или $s \cup \{\Psi\} \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S$);
- (C6) $\forall x\Phi \in s \implies$ (для любого $c \in C$ существует такое $s_1 \in S$, что $s \cup \{(\Phi)_c^x\} \subseteq s_1$);
- (C7) $\exists x\Phi \in s \implies (s \cup \{(\Phi)_c^x\} \subseteq s_1$ для некоторого $c \in C$ и некоторого $s_1 \in S$);
- (C8) $(c_1, c_2 \in C \text{ и } c_1 \approx c_2 \in s) \implies (s \cup \{c_2 \approx c_1\} \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S)$;
- (C9) если $c \in C$ и t — базисный терм сигнатуры Σ^C , то выполняются два условия:
 - а) $s \cup \{d \approx t\} \subseteq s_1$ для некоторого $d \in C$ и некоторого $s_1 \in S$,
 - б) $\{c \approx t, (\Phi)_t^x\} \subseteq s \implies (s \cup \{(\Phi)_c^x\} \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S)$.

Множество S будем называть *механизмом совместности*, если оно является механизмом совместности некоторой сигнатуры Σ .

Предложение 5.4.1. Пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры Σ . Тогда множество S таких конечных множеств s предложений сигнатуры Σ^C , что $T \cup s$ совместно, является механизмом совместности.

Доказательство. Проверим условие (С7). Проверку остальных условий оставляем читателю в качестве легкого упражнения. Пусть множество $T \cup s \cup \{(\Phi)_c^x\}$ несовместно для константы $c \in C$, не входящей в элементы $s \cup \{\Phi\}$, и D — доказательство секвенции $\Psi_1, \dots, \Psi_n, (\Phi)_c^x \vdash \mathfrak{F}$ где $\{\Psi_1, \dots, \Psi_n\} \subseteq T \cup s$. Используя обычный прием: заменяя константу c во всех секвенциях из D на переменную y , не встречающуюся в элементах D , получаем доказательство D_1 секвенции $\Psi_1, \dots, \Psi_n, (\Phi)_y^x \vdash \mathfrak{F}$. Применяя правило 16, получаем доказуемость $\Psi_1, \dots, \Psi_n, \exists y(\Phi)_y^x \vdash \mathfrak{F}$. Так как $\exists x\Phi$ и $\exists y(\Phi)_y^x$ конгруэнтны, то множество $T \cup s$ несовместно, если $\exists x\Phi \in s$. \square

Предложение 5.4.2. Пусть S — механизм совместности и $s \in S$.

- $\{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi\} \subseteq s \implies (s \cup \{\Psi\}) \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S$.
- Для любого $c \in C$ существует такое $s_1 \in S$, что $s \cup \{c \approx c\} \subseteq s_1$.
- $(c, d, e \in C \text{ и } \{c \approx d, d \approx e\} \subseteq s) \implies (s \cup \{c \approx e\}) \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S$.
- $S' = \{s' \mid s' \subseteq s \in S\}$ — механизм совместности.

Доказательство. г) очевидно, а) следует из (С3) и (С1), в) следует из (С9), б), если в качестве Φ взять $x \approx e$, а в качестве t — константу d . Докажем б). В силу (С9), а) имеем $s \cup \{d \approx c\} \subseteq s_1$ для некоторой константы $d \in C$ и $s_1 \in S$. Из (С8) получаем $s \cup \{d \approx c, c \approx d\} \subseteq s_1$ для некоторого $s_1 \in S$. Теперь применяем в) и получаем $s \cup \{d \approx c, c \approx d, c \approx c\} \subseteq s_1$, для некоторого $s_1 \in S$. \square

Алгебраическую систему \mathfrak{A} сигнатуры Σ^C назовем *канонической*, если $\nu^{\mathfrak{A}}(C) = A$, т. е. любой элемент $a \in A$ является значением некоторой константы $c \in C$.

Теорема 5.4.3. Если S — механизм совместности сигнатуры Σ и $s^* \in S$, то s^* имеет каноническую модель \mathfrak{A} сигнатуры Σ^C .

Доказательство. Рассмотрим класс $S' = \{s' \subseteq s \mid s \in S\}$, который по предложению 5.4.2, г) является механизмом совместности. Пусть

$$\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots \quad (n \in \omega)$$

— нумерация всех предложений сигнатуры Σ^C и

$$t_0, t_1, \dots, t_n, \dots \quad (n \in \omega)$$

— нумерация всех базисных термов сигнатуры Σ^C . Индукцией по $n \in \omega$ будем строить последовательность

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq \dots \subseteq s_n \subseteq \dots$$

элементов S' . Полагаем $s_0 = s^*$. Если $n = 3k$, то по (C9), а) находим такую константу $c \in C$, что $s_n \cup \{c \approx t_k\} \in S'$, и полагаем $s_{n+1} = s_n \cup \{c \approx t_k\}$. При $n = 3k + 1$ полагаем $s_{n+1} = s_n \cup \{\Phi_k\}$, если $s_n \cup \{\Phi_k\} \in S'$, и $s_{n+1} = s_n$ в противном случае. Пусть $n = 3k + 2$. Если $\Phi_k = \exists x \Psi$ и $\Phi_k \in s_n$, то полагаем $s_{n+1} = s_n \cup \{(\Psi)_c^x\} \in S'$ для некоторой $c \in C$. В противном случае полагаем $s_{n+1} = s_n$. Рассмотрим множество $s_\omega = \bigcup_{n \in \omega} s_n$. Из построения s_ω вытекает следующий факт:

(*) одноэлементное множество $\{s_\omega\}$ является механизмом совместности.

На множестве C определим отношение \sim :

$$c \sim d \iff c \approx d \in s_\omega.$$

В силу (C8) и предложения 5.4.2, б), в) отношение \sim является эквивалентностью на множестве C . На множестве $A = \{\tilde{c} \mid \tilde{c} — \text{класс эквивалентности по отношению } \sim, \text{ содержащий } c \in C\}$ определяем интерпретацию ν^A сигнатуры $\Sigma^C = \langle R, F^C, \mu^C \rangle$ следующим образом:

$$\nu^A(f)(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n) = \tilde{c} \iff c \approx f(c_1, \dots, c_n) \in s_\omega,$$

$$\langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n \rangle \in \nu^A(r) \iff r(c_1, \dots, c_n) \in s_\omega,$$

где $f \in F^C$, $r \in R$, $\mu^C(f) = \mu^C(r) = n$. Из (*) и (C9), б) следует, что эти определения корректны. Пусть, например, $c_1 \approx f(c_2, c_3)$, $c_4 \approx \approx f(c_5, c_6)$, $c_2 \approx c_5$ и $c_3 \approx c_6$ принадлежат s_ω . Применяя (*) и (C9), б), получаем $c_4 \approx f(c_2, c_6) \in s_\omega$. Еще два раза применяя (*) и (C9), б), получаем $c_4 \approx f(c_2, c_3) \in s_\omega$ и $c_4 \approx c_1 \in s_\omega$.

Так как $\nu^A(c) = \tilde{c}$ для $c \in C$, то $\mathfrak{A} = \langle A, \nu^A \rangle$ является канонической системой. Покажем теперь, что для любого предложения Φ сигнатуры Σ^C имеет место

$$\Phi \in s_\omega \implies \mathfrak{A} \models \Phi. \tag{5.5}$$

Отсюда будет вытекать, что \mathfrak{A} — модель s^* . Если $\Phi = c \approx t$ для базисного терма t , $c \in C$, $\Phi = r(c_1, \dots, c_n)$ для $r \in R$, $c_1, \dots, c_n \in C$, или Φ есть отрицание таких формул, то (5.5) следует из определения ν^A , (*) и (C1). Если $t \approx c \in s_\omega$, где t — базисный терм, $c \in C$, то из (*) и (C9), а) получаем $d \approx t \in s_\omega$ для некоторого $d \in C$. Тогда по (*) и (C9), б) имеем $d \approx c \in s_\omega$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models t \approx c$. Пусть $\neg t \approx c \in s_\omega$, где t — базисный терм, $c \in C$. Если в \mathfrak{A} можно $\neg t \approx c$,

то по определению \mathfrak{A} имеем $c \approx t \in s_\omega$. Из (*) и (C9), б) получаем $\neg c \approx c \in s_\omega$. В силу (*) и предложения 5.4.2, б) это противоречит (C1). Таким образом, мы показали истинность (5.5), если Φ — атомарное предложение или отрицание атомарного и число $n(\Phi)$ символов сигнатуры Σ , входящих в Φ , не больше 1. Пусть $\Phi \in s_\omega$ — атомарное предложение или отрицание атомарного и $n(\Phi) > 1$. Тогда существует базисный терм $t \notin C$, входящий в Φ . По свойствам (*) и (C9), а) имеем $d \approx t \in s_\omega$ для некоторого $d \in C$. Из (*) и (C9), б) следует, что формула Φ_1 , полученная из Φ заменой t на d , принадлежит s_ω . Так как $n(\Phi_1) < n(\Phi)$, то по индукционному предположению Φ истинно в \mathfrak{A} . Для остальных предложений Φ сигнатуры Σ^c утверждение (5.5) получается непосредственно из (*) и (C2)–(C7) индукцией по длине Φ . \square

Определение. Множество S конечных или счетных множеств предложений сигнатуры Σ^C называется *механизмом совместности сигнатуры Σ без равенства*, если S удовлетворяет условиям (C1)–(C7) и предложения, входящие в элементы S , не содержат равенства.

Теорема 5.4.4. Пусть сигнатура Σ не содержит символов функций и констант, S — механизм совместности сигнатуры Σ без равенства. Тогда любое $s^* \in S$ имеет каноническую модель сигнатуры Σ^C .

Доказательство. Рассмотрим множество $X = \{c \approx c \mid c \in C\}$ и класс $S' = \{s \cup X \mid s \in S\}$. Очевидно, что S' является механизмом совместности сигнатуры Σ . По теореме 5.4.3 множество $s^* \cup X$ имеет каноническую модель сигнатуры Σ^C . \square

Следующая теорема является обобщением теоремы 5.4.3, которое нам понадобится в дальнейшем.

Теорема 5.4.5. Пусть S — механизм совместности сигнатуры Σ , X_i , $i \in \omega$, — конечные или счетные множества предложений сигнатуры Σ^C и T — непротиворечивая теория сигнатуры Σ . Пусть для любых $s \in S$, $\Phi \in T$ и $i \in \omega$ существуют такие $\Psi \in X_i$ и $s_1 \in S$, что $s \cup \{\Phi, \Psi\} \subseteq s_1$. Тогда для любого $s^* \in S$ существует такое множество X предложений сигнатуры Σ , что $s^* \cup X \cup T$ имеет каноническую модель \mathfrak{A} и $X \cap X_i \neq \emptyset$ для любого $i \in \omega$.

Доказательство. Рассмотрим класс $S' = \{s \cup T \mid s \in S\}$. Легко проверяется, что S' — механизм совместности. Например, пусть $\exists x \Phi \in s \cup T$ и $s \in S$. Если $\exists x \Phi \in s$, то в силу (C7) имеем $s \cup \{(\Phi)_c^x\} \cup T \subseteq s_1 \cup T$ для некоторого $s_1 \in S$. Если $\exists x \Phi \in T$, то по условию теоремы существует такое $s_1 \in S$, что $s \cup \{\exists x \Phi\} \subseteq s_1$. Опять по (C7) имеем $s_1 \cup \{(\Phi)_c^x\} \subseteq s_2$ для некоторых $c \in C$ и $s_2 \in S$. Следовательно, $s \cup T \cup \{(\Phi)_c^x\} \subseteq s_2 \cup T$. Пусть $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots$ ($n \in \omega$) и t_0, \dots, t_n, \dots

$(n \in \omega)$ — нумерации всех предложений сигнатуры Σ^C и всех базисных термов сигнатуры Σ^C .

По S' строим множество $s_\omega = \bigcup_{n \in \omega} s_n$ следующим образом. Множество s_0 равно $s^* \cup T$, и s_{n+1} для n , равных $4k$, $4k+1$ или $4k+2$, определяем по S' так же, как по S в теореме 5.4.3 строятся s_{n+1} для n , равных $3k$, $3k+1$ или $3k+2$ соответственно. Для $n = 4k+3$ поступаем следующим образом: если $s_n = s'_n \cup T$, $s'_n \in S$ то по условию теоремы существуют такие $\Psi \in X_k$ и $s_n \in S$, что $s'_n \cup \{\Psi\} \subseteq s'$; полагаем $s_{n+1} = s' \cup T$. Построение модели \mathfrak{A} то же самое, что и в теореме 5.4.3. В качестве X берем множество s_ω . \square

Следствие (еще одно доказательство теоремы 4.4.2 о существовании модели). *Если множество Γ формул сигнатуры Σ непротиворечиво, то Γ имеет модель.*

Доказательство. В силу теоремы компактности достаточно доказать теорему для конечного множества $\Gamma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_k\}$. Выполнимость и совместность Γ равносильна соответственно выполнимости и совместности предложения $\Psi = \exists x_1 \dots \exists x_n (\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_k)$, где x_1, \dots, x_n — все свободные переменные, входящие в Φ_1, \dots, Φ_k . Если $\{\Psi\}$ непротиворечиво, то из предложения 5.4.1 получаем, что существует механизм совместности S , для которого $\{\Psi\} \in S$. Теперь применяем теорему 5.4.3 для $s^* = \{\Psi\}$. \square

Определение. Множество Z формул сигнатуры Σ , свободные переменные которых содержатся в множестве $\{v_1, \dots, v_n\}$, называется *n-типов сигнатуры Σ* . Если T — непротиворечивая теория сигнатуры Σ , то *n-тип* Z сигнатуры Σ называется *главным в T*, если существует такая формула $\Phi(v_1, \dots, v_n)$ сигнатуры Σ , что $T \cup \{\exists v_1 \dots \exists v_n \Phi\}$ совместно и $T \triangleright \Phi \rightarrow \Psi$ для любой $\Psi \in Z$. Будем говорить, что *n-тип* Z сигнатуры Σ *реализуется в алгебраической системе \mathfrak{A}* сигнатуры Σ , если существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\mathfrak{A} \models \Psi(a_1, \dots, a_n)$ для любой формулы $\Psi(v_1, \dots, v_n) \in Z$. Если *n-тип* Z сигнатуры Σ не реализуется в системе \mathfrak{A} сигнатуры Σ , то говорим, что *Z опускается в \mathfrak{A}* .

Следующая теорема называется *теоремой об опускании типов*.

Теорема 5.4.6. *Если T — непротиворечивая теория сигнатуры Σ и Z_i , $i \in \omega$, — неглавные в T n_i -типы сигнатуры Σ , то существует модель T сигнатуры Σ , опускающая все типы Z_i , $i \in \omega$.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность S таких конечных множеств s предложений сигнатуры Σ^C , что $s \cup T$ совместно. По предложению 5.4.1 множество S является механизмом совместности. Пусть f_i , $i \in \omega$, — разнозначные отображения ω на C^{n_i}

и g — разнозначное отображение ω на ω^2 . Определим множества X_k , $k \in \omega$, следующим образом: если $g(k) = \langle i, j \rangle$ и $f_i(j) = \langle c_1, \dots, c_{n_i} \rangle$, то полагаем $X_k = \{\neg(\Phi)_{c_1, \dots, c_{n_i}}^{v_1, \dots, v_{n_i}} \mid \Phi \in Z_i\}$. Предположим, что условие теоремы 5.4.5 не выполнено. Тогда существуют такие $s_0 \in S$ и $k_0 \in \omega$, что $s_0 \cup T \cup \{\Psi\}$ несовместно для любого $\Psi \in X_{k_0}$. Пусть $g(k_0) = \langle i_0, l \rangle$, $f_{i_0}(l) = \langle c_1, \dots, c_{n_{i_0}} \rangle$ и Φ_0 — конъюнкция всех элементов s_0 . Тогда $\{\Phi_0\} \cup T$ совместно и $T \triangleright \Phi_0 \rightarrow (\Phi)_{c_1, \dots, c_{n_{i_0}}}^{v_1, \dots, v_{n_{i_0}}}$ для всех $\Phi(v_1, \dots, v_{n_{i_0}}) \in Z_{i_0}$. Пусть $c_{n_{i_0}+1}, \dots, c_m$ — все элементы C , отличные от $c_1, \dots, c_{n_{i_0}}$ и содержащиеся в Φ_0 . Пусть Φ_1 — предложение, конгруэнтное предложению Φ_0 , не содержащее переменных v_1, \dots, v_m , и пусть Φ_2 — формула сигнатуры Σ , для которой $(\Phi)_c^{v_1, \dots, v_m} = \Phi_1$. Покажем, что $T \triangleright \exists v_{n_{i_0}+1} \dots \exists v_m \Phi_2 \rightarrow \Phi$ для всех $\Phi \in Z_{i_0}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{A} \models \Phi_2[\gamma]$ для некоторой модели \mathfrak{A} теории T , имеющей сигнатуру Σ , и интерпретации $\gamma: \{v_1, \dots, v_m\} \rightarrow A$. Рассмотрим такое обогащение \mathfrak{A}' системы \mathfrak{A} до сигнатуры Σ^C , что $\nu^{\mathfrak{A}'}(c_1) = \gamma(v_1), \dots, \nu^{\mathfrak{A}'}(c_m) = \gamma(v_m)$. Тогда $\mathfrak{A}' \models \Phi_1$ и из эквивалентности $\Phi_1 \equiv \Phi_0$ получаем $\mathfrak{A}' \models \Phi_0$. Так как \mathfrak{A}' — модель T и $T \triangleright \Phi_0 \rightarrow (\Phi)_{c_1, \dots, c_{n_{i_0}}}^{v_1, \dots, v_{n_{i_0}}}$, то $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$. Таким образом, $\mathfrak{A} \models (\exists v_{n_{i_0}+1} \dots \exists v_m \Phi_2 \rightarrow \Phi)[\gamma]$ для любой модели \mathfrak{A} теории T , любой формулы $\Phi \in Z_{i_0}$ и любой интерпретации $\gamma: \{v_1, \dots, v_{n_{i_0}}\} \rightarrow A$. Из следствия 4.5.8 тогда вытекает, что $T \triangleright \exists v_{n_{i_0}+1} \dots \exists v_m \Phi_2 \rightarrow \Phi$ для любого $\Phi \in Z_{i_0}$. Так как $s_0 \cup T$ совместно, то $T \cup \{\exists v_1 \dots \exists v_m \Phi_2\}$ также совместно. Это противоречит тому, что Z_{i_0} — неглавный n_{i_0} -типа. Таким образом, условия теоремы 5.4.5 выполнены, значит, существует такое множество X предложений сигнатуры Σ^C , что $X \cap X_i \neq \emptyset$, $i \in \omega$, и существует система \mathfrak{A} сигнатуры Σ^C , являющаяся моделью $T \cup X$, у которой любой элемент $a \in A$ является значением некоторой константы $c \in C$. Так как для любого $i \in \omega$ и любого кортежа $\langle c_1, \dots, c_{n_i} \rangle \in C^{n_i}$ существует такое $k \in \omega$, что $X_k = \{\neg(\Phi)_{c_1, \dots, c_{n_i}}^{v_1, \dots, v_{n_i}} \mid \Phi \in Z_i\}$, то $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma$ опускает все типы Z_i , $i \in \omega$. \square

Теорема об опускании типов является очень важным методом построения моделей. Она дополняет теорему компактности, которая применяется, в основном, тогда, когда нужно реализовывать совместные типы. Применения теоремы 5.4.6 будут даны в § 5.6.

Вхождение символа q в формулу Φ , не содержащую связки \rightarrow , назовем *положительным* (*отрицательным*), если число различных подформул формулы Φ вида $\neg\Psi$, содержащих это вхождение, является четным (нечетным). Обозначим через $\Sigma^+(\Phi)$ и $\Sigma^-(\Phi)$ множества символов отношений сигнатуры Σ , имеющих соответственно положительные и отрицательные вхождения в Φ . Например, если

$$\Phi = \forall v_1 (\neg(\exists v_2 r(t_1, v_2) \vee \neg s(v_2)) \wedge \neg(\neg r(v_3, t_2) \wedge v_1 \approx t_1)),$$

где t_1, t_2 — термы, то $\Sigma^+(\Phi) = \{r, s\}$, $\Sigma^-(\Phi) = \{r\}$.

Следующая теорема называется *интерполяционной теоремой Крейга–Линдона*.

Теорема 5.4.7. Пусть Φ, Ψ — предложения сигнатуры Σ , не содержащие связки \rightarrow , и $\Phi \triangleright \Psi$. Тогда

а) существует такое предложение X сигнатуры Σ , не содержащее связки \rightarrow , что $\Phi \triangleright X$, $X \triangleright \Psi$, $\Sigma^+(X) \subseteq \Sigma^+(\Phi) \cap \Sigma^+(\Psi)$ и $\Sigma^-(X) \subseteq \Sigma^-(\Phi) \cap \Sigma^-(\Psi)$;

б) если Σ не содержит символов функций и констант, Φ, Ψ не содержат равенства, а $\neg\Phi$ и Ψ обе недоказуемы, то в а) можно потребовать, чтобы X не содержало равенства.

Доказательство. Предложение X , удовлетворяющее условиям утверждения а), назовем *интерполирующим для пары* $\langle \Phi, \Psi \rangle$.

а). Пусть S — множество конечных множеств s предложений сигнатуры Σ^C , не содержащих символа импликации, которые удовлетвряют следующему условию: существуют такие $s_1 \neq \emptyset$ и $s_2 \neq \emptyset$, что $s = s_1 \cup s_2$ и не существует интерполирующего предложение для пары $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$. (Через $\bigwedge s$ мы обозначаем конъюнкцию элементов s .) Множество s_1 при этом будем называть *началом*, а s_2 — *концом* s . Отметим, что начало и конец s определяются по s неоднозначно. Проверим условия (C1)–(C9) механизма совместности. Так как импликация не входит в элементы $s \in S$, то (C3) тривиально выполнено. Если предложение Θ_1 сигнатуры Σ^C эквивалентно предложению $\Theta_2 \in s \in S$ и $\Sigma^\tau(\Theta_1) = \Sigma^\tau(\Theta_2)$, $\tau \in \{+, -\}$, то очевидно, что $s \cup \{\Theta_1\} \in S$. Отсюда получаем условия (C2) и (C8). Пусть $s \in S$, s_1 — начало s , а s_2 — конец s .

(C1). Пусть $\{\Theta, \neg\Theta\} \subseteq s$. Если $\{\Theta, \neg\Theta\}$ содержится в начале (конце) s , то предложение $\forall v_1 \neg v_1 \approx v_1$ (предложение $\forall v_1 v_1 \approx v_1$) будет интерполирующим для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, что противоречит условию. Если $\Theta \in s_1$ и $\neg\Theta \in s_2$ ($\neg\Theta \in s_1$ и $\Theta \in s_2$), то интерполирующим для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$ будет предложение Θ (предложение $\neg\Theta$).

(C4). Пусть $\Theta_1 \wedge \Theta_2 \in s_1$, и предположим, что существует интерполирующее предложение X для $\langle (\bigwedge s_1) \wedge \Theta_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$ или для $\langle (\bigwedge s_1) \wedge \Theta_2, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$. Тогда из $\bigwedge s_1 \triangleright \Theta_1$ и $\bigwedge s_1 \triangleright \Theta_2$ получаем, что X будет интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, что невозможно. Если $\Theta_1 \wedge \Theta_2 \in s_2$ и X — интерполирующее предложение для $\langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge \Theta_1) \rangle$ или для $\langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge \Theta_2) \rangle$, то в силу $\neg(\bigwedge s_2 \wedge \Theta_1) \triangleright \neg(\bigwedge s_2)$ и $\neg(\bigwedge s_2 \wedge \Theta_2) \triangleright \neg(\bigwedge s_2)$ формула X будет интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$. Полученные противоречия с условием показывают, что $s \cup \{\Theta_1\} \in S$ и $s \cup \{\Theta_2\} \in S$.

(C5). Пусть $\Theta_1 \vee \Theta_2 \in s_1$ и X_1, X_2 — интерполирующие предложения для $\langle (\bigwedge s_1) \wedge \Theta_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, $\langle (\bigwedge s_1) \wedge \Theta_2, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$ соответственно. Тогда

$X_1 \vee X_2$ будет интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$. Если $\Theta_1 \vee \Theta_2 \in s_2$ и X_1, X_2 — интерполирующие предложения для $\langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge \Theta_1) \rangle, \langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge \Theta_2) \rangle$ соответственно, то $X_1 \wedge X_2$ будет интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$

(C6). Пусть $\forall x \Theta \in s_2, c \in C$ и X — интерполирующее предложение для $\langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge (\Theta)_c^x) \rangle$. Так как $\neg((\bigwedge s_2) \wedge (\Theta)_c^x) \triangleright \neg(\bigwedge s_2)$, то X является интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, что невозможно. В случае $\forall x \Theta \in s_1$ аналогично получаем, что в качестве начала $s \cup \{(\Theta)_c^x\}$ можно взять $s_1 \cup \{(\Theta)_c^x\}$, а в качестве конца — s_2 .

(C7). Пусть $c_0 \in C$ не содержится в элементах s . Если $\exists x \Theta \in s_1$ и X — интерполирующее предложение для $\langle (\bigwedge s_1) \wedge (\Theta)_{c_0}^x, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, то из аксиомы 12 и правила 3 ИП $^{\Sigma^C}_1$ получаем, что $\exists y X_1$ будет интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, где X_1 не содержит константу c_0 , $(X_1)_{c_0}^y = X$ и y — переменная, не входящая в элементы $s \cup \{X\}$. В случае, когда $\exists x \Theta \in s_2$ и X — интерполирующее предложение для $\langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge (\Theta)_{c_0}^x) \rangle$, предложение $\forall y X_1$ будет интерполирующим для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$. В самом деле, $\bigwedge s_1 \triangleright \forall y X_1$ следует из $\bigwedge s_1 \triangleright X$, так как c_0 не входит в $\bigwedge s_1$. Из $X \triangleright \neg((\bigwedge s_2) \wedge (\Theta)_{c_0}^x)$ получаем $\forall y X_1 \triangleright \neg(\bigwedge s_2) \vee \forall y \neg(\Theta)_y^x$. Если $\forall y X_1 \triangleright \neg(\bigwedge s_2)$ не имеет места, то существует модель \mathfrak{A} множества $\{\forall y X_1, \bigwedge s_2\}$. Из предыдущего получаем, что в \mathfrak{A} истинно $\forall y \neg(\Theta)_y^x$. Это противоречит $\mathfrak{A} \models \bigwedge s_2$ и $\exists x \Theta \in s_2$.

(C9). Пусть $c' \in C$ не входит в элементы s . Если X является интерполирующим предложением для $\langle (\bigwedge s_1) \wedge c' \approx f(c_1, \dots, c_n), \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, то X будет интерполирующим предложением для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$. Пусть $\{c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n), (\Theta)_{f(c_1, \dots, c_n)}^x\} \subseteq s$. Если $(\Theta)_{f(c_1, \dots, c_n)}^x \in s_1$ и X — интерполирующее предложение для $\langle (\bigwedge s_1) \wedge (\Theta)_{c_0}^x, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$, то интерполирующим для $\langle (\bigwedge s_1), \neg(\bigwedge s_2) \rangle$ будет предложение X в случае $c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n) \in s_1$ и предложение $\neg c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n) \vee X$ в случае $c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n) \in s_2$. Если $(\Theta)_{f(c_1, \dots, c_n)}^x \in s_2$ и X — интерполирующее предложение для $\langle \bigwedge s_1, \neg((\bigwedge s_2) \wedge (\Theta)_{c_0}^x) \rangle$, то интерполирующим для $\langle \bigwedge s_1, \neg(\bigwedge s_2) \rangle$ будет предложение X в случае $c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n) \in s_2$ и предложение $c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n) \wedge X$ в случае $c_0 \approx f(c_1, \dots, c_n) \in s_1$.

Итак, мы показали, что S — механизм совместности. Если бы а) не имело места, то множество $\{\Phi, \neg\Psi\}$ принадлежало бы S . По теореме 5.4.3 множество $\{\Phi, \neg\Psi\}$ имело бы модель, что в силу следствия 4.5.8 противоречило бы условию $\Phi \triangleright \Psi$.

Для того чтобы доказать б), нужно в определении S заменить слова «предложение» на «предложение без равенства» и потребовать, чтобы не имело места ни $\triangleright \neg(\bigwedge s_1)$, ни $\triangleright \neg(\bigwedge s_2)$. Тогда при проверке (C1) случаи $\{\Theta, \neg\Theta\} \subseteq s_1$ и $\{\Theta, \neg\Theta\} \subseteq s_2$ невозможны. Остальная проверка условий (C1)–(C7) та же, что и в а). Следовательно, S — механизм

совместности без равенства. Затем применяем теорему 5.4.4 вместо теоремы 5.4.3. \square

Если в Φ или в Ψ входит равенство, то в теореме 5.4.7 б) потребовать, чтобы равенство входило в X только тогда, когда оно входит в Φ и Ψ , нельзя (см. упражнение 1). В оставшейся части параграфа мы применим теорему 5.4.7 для характеристизации предложений, сохраняющих свою истинность при переходе к гомоморфным образам.

Определение. Если \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ , то отношение E на множестве A назовем *конгруэнтностью* на \mathfrak{A} , если оно является эквивалентностью на A и для любых $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$, $r \in R$, $f \in F$, $\mu(r) = \mu(f) = n$ из $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(r)$ следует $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(r)$ и из $\langle a_1, b_1 \rangle \in E, \dots, \langle a_n, b_n \rangle \in E$ следует $\langle \nu^{\mathfrak{A}}(f)(a_1, \dots, a_n), \nu^{\mathfrak{A}}(f)(b_1, \dots, b_n) \rangle \in E$. Если E — конгруэнтность на системе \mathfrak{A} сигнатуры Σ , то определим новую систему \mathfrak{A}/E сигнатуры Σ , которую назовем *факторсистемой системы \mathfrak{A} по E* . Носитель системы \mathfrak{A}/E состоит из классов эквивалентности $aE = \{b \mid \langle b, a \rangle \in E\}$. Интерпретация $\nu^{\mathfrak{A}/E}$ определяется так:

$$\langle a_1 E, \dots, a_n E \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}/E}(r) \iff \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \nu^{\mathfrak{A}}(r) \quad (r \in R),$$

$$\nu^{\mathfrak{A}/E}(f)(a_1 E, \dots, a_n E) = \nu^{\mathfrak{A}}(f)(a_1, \dots, a_n) E \quad (f \in F).$$

Проверку корректности этого определения, а также доказательство следующего простого предложения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Предложение 5.4.8. а). Пусть Φ — предложение сигнатуры Σ , а Φ' получается из Φ заменой подформул $t_1 \approx t_2$ на $E(t_1, t_2)$, где E — символ отношения, не входящий в R . Если \mathfrak{A} — система сигнатуры $\Sigma' \supseteq \Sigma$, $E \in R'$ и $\nu^{\mathfrak{A}}$ — конгруэнтность на $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma$, то

$$\mathfrak{A} \models \Phi' \iff \mathfrak{A}/\nu^{\mathfrak{A}}(E) \models \Phi.$$

б). Если E — конгруэнтность на системе \mathfrak{A} , то отображение, сопоставляющее элементу $a \in A$ элемент aE , будет гомоморфизмом \mathfrak{A} на \mathfrak{A}/E . \square

Формулу Φ назовем *положительной*, если она не содержит импликаций и все вхождения в Φ символов отношений и равенства являются положительными. Будем говорить, что предложение Φ сигнатуры Σ сохраняется при гомоморфизмах относительно предложения Ψ сигнатуры Σ , если из истинности $\Phi \wedge \Psi$ на системе \mathfrak{A} сигнатуры Σ следует истинность $\Psi \rightarrow \Phi$ на любом ее гомоморфном образе.

Теорема 5.4.9. Пусть Φ и Ψ — предложения сигнатуры Σ и предложение $\Psi \rightarrow \neg\Phi$ недоказуемо. Для того чтобы Φ сохранялось при гомоморфизмах относительно предложения Ψ , необходимо и достаточно, чтобы Φ было эквивалентно относительно Ψ некоторому положительному предложению X (т. е. $\Psi \triangleright (\Phi \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow \Phi)$).

Доказательство. Необходимость. Так как Φ и Ψ содержат конечное число символов, то можно считать сигнатуру $\Sigma = \langle R, F, \mu \rangle$ конечной. Предположим сначала, что $F = \emptyset$. Обозначим через Θ конъюнкцию предложений

$$\forall v_1 \dots \forall v_n (\neg r(v_1, \dots, v_n) \vee r'(v_1, \dots, v_n)), \quad r \in R, \quad \mu(r) = n,$$

и предложения

$$\forall v_1 \forall v_2 (\neg E(v_1, v_2) \vee E'(v_1, v_2)),$$

где $r' (r \in R)$, E и E' — попарно различные символы, не принадлежащие R . Обозначим через Δ предложение сигнатуры, содержащей лишь символы из $R \cup \{E\}$ и не содержащее импликации, истинность которого на системе \mathfrak{A} равносильна тому, что $\nu^{\mathfrak{A}}(E)$ — конгруэнтность на $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma$. Пусть Φ_0 и Ψ_0 получаются соответственно из Φ и Ψ заменой всех подформул вида $x \approx y$ на $E(x, y)$. Пусть Φ'_0 , Ψ'_0 и Δ' получаются соответственно из Φ_0 , Ψ_0 и Δ заменой всех предикатных символов на штрихованные. Если на системе \mathfrak{A} истинно предложение $\Theta \wedge \Delta \wedge \Delta'$, то $\nu^{\mathfrak{A}}(r) \subseteq \nu^{\mathfrak{A}}(r')$ для $r \in R$ и $\nu^{\mathfrak{A}}(E) \subseteq \nu^{\mathfrak{A}}(E')$, поэтому отображение, сопоставляющее элементу aE элемент aE' , будет гомоморфизмом $(\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma) / \nu^{\mathfrak{A}}(E)$ на $\mathfrak{A}_1 / \nu^{\mathfrak{A}_1}(E')$, где $\mathfrak{A}_1 = \langle A, \nu^{\mathfrak{A}_1} \rangle$ — система сигнатуры Σ , для которой $\nu^{\mathfrak{A}_1}(r) = \nu^{\mathfrak{A}}(r') (r \in R)$. Отсюда, используя следствие 4.5.8, предложение 5.4.8 а) и условие теоремы, получаем, что имеет место

$$\Psi_0 \wedge \Phi_0 \wedge \Delta \triangleright \neg\Psi'_0 \vee \neg\Theta \vee \neg\Delta' \vee \Phi'_0.$$

Предположим, что $\triangleright \neg\Psi_0 \vee \neg\Theta \vee \neg\Delta' \vee \Phi'_0$. Заменив в доказательстве символы r' на r для $r \in R$ и E' на E , получаем

$$\triangleright \neg\Psi_0 \vee \neg\Theta_1 \vee \neg\Delta \vee \Phi_0,$$

где Θ_1 получается из Θ заменой r' на r для $r \in R$ и E' на E . Ясно, что $\triangleright \Theta_1$, следовательно, $\neg\Psi_0 \vee \neg\Delta \vee \Phi_0$ — тождественно истинное предложение. Отсюда, используя тот факт, что Δ истинно на системах \mathfrak{A} , у которых отношение $\nu^{\mathfrak{A}}(E)$ является равенством, получаем, что $\Psi \rightarrow \Phi$ также тождественно истинно. Поэтому в качестве X можно взять предложение $\forall v_1 v_1 \approx v_1$. Пусть теперь $\neg\Psi'_0 \vee \neg\Theta \vee \neg\Delta' \vee \Phi'_0$ не доказуемо. Предложение $\neg(\Psi_0 \wedge \Phi_0 \wedge \Delta)$ также не доказуемо, так как в противном случае в силу того, что Δ истинно на системах \mathfrak{A} , у кото-

рых $\nu^{\mathfrak{A}}(E)$ является равенством, предложение $\Psi \rightarrow \neg\Phi$ также было бы тождественно истинным, что противоречит условию о его недоказуемости. Тогда по теореме 5.4.7, б) существует интерполирующее предложение X_0 , не содержащее равенства, для которого имеют место условия $\Psi_0 \wedge \Phi_0 \wedge \Delta \triangleright X_0$, $X_0 \triangleright \neg\Psi'_0 \vee \neg\Theta \vee \neg\Delta' \vee \Phi'_0$, $\Sigma^+(X_0) \subseteq R \cup \{E\}$, а также $\Sigma^-(X_0) \subseteq \Sigma^-(\Psi_0 \wedge \Phi_0 \wedge \Delta) \cap \Sigma^-(\neg\Psi'_0 \vee \neg\Theta \vee \neg\Delta' \vee \Phi'_0) = \emptyset$. Следовательно, X_0 — положительное предложение сигнатуры Σ_1 , которая кроме символов Σ имеет лишь символ E . Заменяя в выводе символы r' на r для $r \in R$ и E' на E , получаем $X_0 \triangleright \neg\Psi_0 \vee \neg\Theta_1 \vee \neg\Delta \vee \Phi_0$. Так как $\triangleright\Theta_1$, то $X_0 \triangleright \neg\Psi_0 \vee \neg\Delta \vee \Phi_0$. Таким образом, мы получили $\Psi_0, \Delta \triangleright (\Phi_0 \rightarrow X_0) \wedge (X_0 \rightarrow \Phi_0)$. Так как Δ истинно на системах \mathfrak{A} , у которых отношение $\nu^{\mathfrak{A}}(E)$ является равенством, то $\Psi \triangleright (\Phi \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow \Phi)$ для положительного предложения X , полученного из X_0 заменой подформул вида $E(x, y)$ на $x \approx y$.

Пусть теперь $\Sigma = \langle R, \{f_1, \dots, f_m\}, \mu \rangle$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma' = \langle R \cup \{F_1, \dots, F_m\}, \emptyset, \mu' \rangle$, где F_1, \dots, F_m — попарно различные символы, не принадлежащие R , $\mu'(r) = \mu(r)$ ($r \in R$) и $\mu'(F_i) = \mu(f_i) + 1$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Пусть Ψ_0 — предложение, выражающее в системах сигнатуры Σ' , что отношения F_1, \dots, F_m являются функциями¹⁾. Пусть Φ_1, Ψ_1 — предложения сигнатуры Σ , находящиеся в приведенной н. ф., эквивалентные соответственно предложениям Φ, Ψ . Пусть Φ_2, Ψ_2 получаются соответственно из Φ_1, Ψ_1 заменой атомных подформул вида $y \approx f_i(x_1, \dots, x_n)$, $f_i(x_1, \dots, x_n) \approx y$ на $F_i(x_1, \dots, x_n, y)$. Ясно, что если Φ сохраняется при гомоморфизмах относительно Ψ , то Φ_2 сохраняется при гомоморфизмах относительно $\Psi_0 \wedge \Psi_2$. Так как Σ' не содержит символов функций, то по только что доказанному существует положительное предложение X_1 сигнатуры Σ' , для которого имеет место

$$\Psi_0 \wedge \Psi_2 \triangleright (\Phi_2 \rightarrow X_1) \wedge (X_1 \rightarrow \Phi_2).$$

Используя следствие 4.5.8, получаем, что тогда справедливо

$$\Psi \triangleright (\Phi \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow \Phi),$$

где X — положительное предложение сигнатуры Σ , полученное из X_1 заменой $F_i(x_1, \dots, x_{n+1})$ на $x_{n+1} \approx f(x_1, \dots, x_n)$.

Достаточность условия теоремы получается из следующих двух фактов, которые проверяются непосредственно индукцией по длине X .

¹⁾ То есть Ψ_0 является конъюнкцией предложений

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \dots \forall x_{n_i} \forall y \forall z ((F_i(x_1, \dots, x_{n_i}, y) \wedge F(x_1, \dots, x_{n_i}, z)) \rightarrow \\ & \rightarrow (y \approx z) \wedge \forall x_1 \dots \forall x_{n_i} \exists y F_i(x_1, \dots, x_{n_i}, y), i \in \{1, \dots, m\}, n_i = \mu(f_i)). \end{aligned}$$

1). Если h — гомоморфизм \mathfrak{A} на \mathfrak{B} и $X(x_1, \dots, x_n)$ — формула, не содержащая отрицания и импликации, то

$$\mathfrak{A} \models X(a_1, \dots, a_n) \implies \mathfrak{B} \models X(ha_1, \dots, ha_n).$$

2). Положительная формула X эквивалентна формуле X_1 , не содержащей отрицания и импликации. \square

Упражнения

- Используя теорему 5.4.6, доказать, что для любого счетного линейного порядка \mathfrak{A} без последнего элемента существует такое собственное элементарное расширение \mathfrak{B} (т. е. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ и $A \neq B$), что \mathfrak{A} является начальным отрезком \mathfrak{B} (т. е. из $\langle b, a \rangle \in \nu^{\mathfrak{B}}(\leq)$ и $a \in A$ следует $b \in A$). (Указание. Добавить в сигнатуру константы $\{c\} \cup \{c_a \mid a \in A\}$, рассмотрев теорию T с множеством аксиом $D^*(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c \approx c_a \mid a \in A\}$ и типы $Z_b = \{v_1 \leq c_b\} \cup \{\neg v_1 \approx c_a \mid a \in A\}$ и применить теорему об опускании типов.)
- Показать, что если в Φ или в Ψ входит равенство, то в теореме 5.4.7 б) нельзя потребовать чтобы равенство входило в X только тогда, когда оно входит в Φ и Ψ . (Указание. Рассмотреть примеры $c_1 \approx c_2 \triangleright r(c_1) \vee \neg r(c_2), r(c_1) \wedge \neg r(c_2) \triangleright c_1 \approx c_2$.)
- Формулу Ψ назовем *отрицательной*, если у формулы Ψ_1 , полученной из Ψ заменой всех ее подформул вида $\Psi_1 \rightarrow \Psi_2$ на $\neg \Psi_1 \vee \Psi_2$ каждое вхождение символа отношения и равенства является отрицательным. Показать, что доказуемые формулы не могут быть отрицательными. (Указание. Отрицательная формула ложна в E_{Σ} .)
- Из упражнения 3 вывести, что в теореме 5.4.9 условие недоказуемости $\Psi \rightarrow \neg \Phi$ опустить нельзя.

§ 5.5. Счетная однородность и универсальность

Пусть T — теория сигнатуры Σ . Обозначим через $F_n(\Sigma)$ множество формул сигнатуры Σ со свободными переменными из множества $\{v_1, \dots, v_n\}$. Если $\Phi \in F_n(\Sigma)$, то через $\|\Phi\|_T$ или просто через $\|\Phi\|$ обозначаем множество $\{\Psi \in F_n(\Sigma) \mid T \triangleright (\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)\}$. Обозначим через $\mathfrak{B}_n(T)$ булеву алгебру с носителем $B_n(T) = \{\|\Psi\| \mid \Psi \in F_n(\Sigma)\}$ и следующими операциями:

- $\|\Phi\| \cup \|\Psi\| = \|\Phi \vee \Psi\|;$
- $\|\Phi\| \cap \|\Psi\| = \|\Phi \wedge \Psi\|;$
- $\overline{\|\Phi\|} = \|\neg \Phi\|.$

Корректность определения операций, а также проверку аксиом 1)–10) булевых алгебр оставляем читателю в качестве упражнения.

Пусть в этом параграфе все рассматриваемые алгебраические системы и теории, если не оговорено противное, имеют сигнатуру Σ , а мощность Σ конечна или счетна. Под *моделью теории T* мы будем понимать модель T сигнатуры Σ . Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры Σ и $a_1, \dots, a_n \in A$. *Типом набора $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ в \mathfrak{A}* назовем следующий n -тип:

$$T(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) = \{\Phi(v_1, \dots, v_n) \mid \mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n), \Phi \in F_n(\Sigma)\}.$$

Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — системы сигнатуры Σ , $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B$, то равенство $T(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) = T(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n)$ будем обозначать также через

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n \rangle.$$

Определение. Счетная алгебраическая система Σ называется *однородной*, если для любых $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ и любого элемента $a \in A$ из

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \dots, b_n \rangle \quad (5.6)$$

следует

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \dots, b_n, b \rangle \quad (5.7)$$

для некоторого $b \in A$.

Ясно, что если \mathfrak{A} — однородная система и $X \subseteq A$ — конечное множество, то система \mathfrak{A}_X также является однородной.

Предложение 5.5.1. Для любой счетной системы \mathfrak{A} существует счетное элементарное однородное расширение $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$.

Доказательство. Покажем сначала, что для любой счетной системы \mathfrak{A} существует такое счетное элементарное расширение $\mathfrak{A}^{(1)} \succ \mathfrak{A}$, что для любых $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, a \in A$ из (5.6) следует

$$\langle \mathfrak{A}^{(1)}, a_1, \dots, a_n, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}^{(1)}, b_1, \dots, b_n, b \rangle \quad (5.8)$$

для некоторого $b \in A^{(1)}$. Для каждого $X = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ определяем множество

$$R(X) = \{\gamma: X \rightarrow A \mid \langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \gamma a_1, \dots, \gamma a_n \rangle\}.$$

Обозначим через R объединение всех $R(X)$, где X — конечное подмножество A . Ясно, что R имеет счетную мощность. Расширим сигнатуру Σ_A до Σ_1 , добавив новые символы одноместных операций f_γ

для каждого $\gamma \in R$. Рассмотрим следующее множество предложений сигнатуры Σ_1 :

$$Z = D^*(\mathfrak{A}) \cup \{\forall x(\Phi(x, c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \rightarrow \Phi(f_\gamma(x), c_{\gamma a_1}, \dots, c_{\gamma a_n})) \mid \gamma \in R, a_1, \dots, a_n \in \text{dom } \gamma, \Phi(x, y_1, \dots, y_n) \in F(\Sigma)\}.$$

Из определения множества R следует, что каждое конечное множество $Z_1 \subseteq Z$ выполняется в некотором обогащении системы \mathfrak{A} . Пусть \mathfrak{A}_1 — счетная модель Z и $\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}_1 \upharpoonright \Sigma$. Так как \mathfrak{A} — модель $D^*(\mathfrak{A})$, то по предложению 5.1.10 а) можно считать, что $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^{(1)}$. Если выполняется (5.6), то из истинности на \mathfrak{A}_1 предложений из Z следует выполнимость (5.8) для $b = f_\gamma^{\mathfrak{A}_1}(a)$, где $\gamma(a_1) = b_1, \dots, \gamma(a_n) = b_n$.

Определим последовательность систем $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in \omega\}$ следующим образом: $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{i+1} = \mathfrak{A}_i^{(1)}$, $i \in \omega$. По предложению 5.1.8 получаем $\mathfrak{A}_k \prec \mathfrak{B} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$, $k \in \omega$, в частности, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B} = \bigcup \mathfrak{A}_i$, то \mathfrak{B} — счетная система. Если $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, a \in B$ и

$$\langle \mathfrak{B}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n \rangle,$$

то $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, a \in A_i$ для некоторого $i \in \omega$. Так как $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{B}$, то имеем

$$\langle \mathfrak{A}_i, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}_i, b_1, \dots, b_n \rangle.$$

Из определения $\mathfrak{A}_i^{(1)} = \mathfrak{A}_{i+1}$ получаем

$$\langle \mathfrak{A}_{i+1}, a_1, \dots, a_n, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}_{i+1}, b_1, \dots, b_n, b \rangle,$$

для некоторого $b \in A_{i+1}$. Так как $\mathfrak{A}_{i+1} \prec \mathfrak{B}$, то

$$\langle \mathfrak{B}, a_1, \dots, a_n, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n, b \rangle.$$

Таким образом, $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ — счетная однородная система. \square

Предложение 5.5.2. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — счетные однородные системы сигнатуры Σ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$,
- 2) в \mathfrak{A} и \mathfrak{B} реализуются одни и те же n -типы сигнатуры Σ , $n \in \omega$.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) очевидно. Пусть выполняется 2). Занумеруем A и B : $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$, $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$. Индукцией по $n \in \omega$ построим конечные отображения $f_n: A_n \rightarrow B$, $A_n \subseteq A$, со следующими свойствами:

a_n) если $n \neq 0$, то $f_{n-1} \subseteq f_n$;

- б_н) если $n = 2k + 1$, то $a_k \in A_n$;
- в_н) если $n = 2(k + 1)$, то $b_k \in f_n(A_n)$;
- г_н) если $A_n = \{e_1, \dots, e_m\}$, то

$$\langle \mathfrak{A}, e_1, \dots, e_m \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, f_n e_1, \dots, f_n e_m \rangle.$$

Для $f_0 = \emptyset$ условия а₀) – в₀) тривиально выполнены. Условие г₀) следует из 2), так как $\text{Th}(\mathfrak{A})$ является 0-типовом. Пусть $n = 2k + 1$ и $A_{n-1} = \{e_1, \dots, e_m\}$. По индукционному предположению имеем

$$\langle \mathfrak{A}, e_1, \dots, e_m \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, f_{n-1} e_1, \dots, f_{n-1} e_m \rangle. \quad (5.9)$$

Из условия 2) получаем, что тип $T(\mathfrak{A}, e_1, \dots, e_m, a_k)$ реализуется в \mathfrak{B} , поэтому

$$\langle \mathfrak{A}, e_1, \dots, e_m, a_k \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, d_1, \dots, d_{m+1} \rangle \quad (5.10)$$

для некоторых $d_1, \dots, d_{m+1} \in B$. Из (5.9) и (5.10) получаем

$$\langle \mathfrak{B}, d_1, \dots, d_m \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, f_{n-1} e_1, \dots, f_{n-1} e_m \rangle$$

поэтому в силу однородности \mathfrak{B} существует такой $b \in B$, что

$$\langle \mathfrak{B}, d_1, \dots, d_{m+1} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, f_{n-1} e_1, \dots, f_{n-1} e_m, b \rangle.$$

В силу (5.10) тогда имеем

$$\langle \mathfrak{A}, e_1, \dots, e_m, a_k \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, f_{n-1} e_1, \dots, f_{n-1} e_m, b \rangle,$$

следовательно, отображение $f_n = f_{n-1} \cup \{\langle a_k, b \rangle\}$ будет удовлетворять условиям а_н)–г_н). Случай $n = 2(k + 1)$ рассматривается аналогично. Из условий а_н)–г_н), $n \in \omega$, получаем, что $f = \bigcup_{n \in \omega} f_n$ будет изоморфизмом \mathfrak{A} на \mathfrak{B} . \square

Определение. Счетная алгебраическая система \mathfrak{A} сигнатуры Σ называется *универсальной*, если для любого $n \in \omega$ в ней реализуются все совместные с $\text{Th}(\mathfrak{A})$ n -типы сигнатуры Σ . Счетная алгебраическая система \mathfrak{A} сигнатуры Σ называется *насыщенной*, если для любого конечного $X \subseteq A$ в \mathfrak{A}_X реализуются все совместные с $\text{Th}(\mathfrak{A}_X)$ 1-типы сигнатуры Σ_X .

Ясно, что совместность n -типа Z с $\text{Th}(\mathfrak{A})$ равносильна локальной выполнимости Z в \mathfrak{A} . Очевидно, что счетное элементарное расширение универсальной системы является универсальной системой. Ясно также, что если система \mathfrak{A} насыщена, то система \mathfrak{A}_X также насыщена для любого конечного $X \subseteq A$.

Предложение 5.5.3. Для счетной алгебраической системы \mathfrak{A} следующие условия эквивалентны:

- 1) \mathfrak{A} насыщена,
- 2) \mathfrak{A} универсальна и однородна.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть система \mathfrak{A} насыщена. Индукцией по $n \in \omega$ покажем, что в \mathfrak{A} выполняется любой совместный с $\text{Th}(\mathfrak{A})$ n -тип Z_0 сигнатуры Σ . Если $n = 1$, то выполнимость Z_0 в \mathfrak{A} следует из определения насыщенности. Пусть $n > 1$. Рассмотрим $(n - 1)$ -тип

$$Z_1 = \{\exists v_n (\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_k) \mid \Phi_1, \dots, \Phi_k \in Z_0\}.$$

Так как Z_1 локально выполним в \mathfrak{A} , то по индукционному предположению тип Z_1 реализуется в \mathfrak{A} элементами a_1, \dots, a_{n-1} . Будем считать, что v_1 не входит связано в элементы Z_0 . В силу предложения 4.2.6 б) достаточно рассмотреть только такие n -типы Z_0 . Рассмотрим 1-тип

$$Z_2 = \left\{ (\Phi)_{c_{a_1}, \dots, c_{a_{n-1}}, v_1}^{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n} \mid \Phi \in Z_0 \right\}.$$

Ясно, что 1-тип Z_2 локально выполним в $\mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}$. В силу насыщенности \mathfrak{A} существует элемент $a \in A$, реализующий в $\mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}$ тип Z_2 . Тогда n -тип Z_0 реализуется в \mathfrak{A} элементами a_1, \dots, a_{n-1}, a .

Покажем однородность \mathfrak{A} . Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, a \in A$ и

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \dots, b_n \rangle. \quad (5.11)$$

Рассмотрим 1-тип

$$Z_0 = \{\Phi(v_1) \mid \mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_n\}} \models \Phi(a), \Phi \in F_1(\Sigma_{\{a_1, \dots, a_n\}})\}.$$

Из (5.11) следует, что 1-тип

$$Z_1 = \left\{ (\Phi_1)_{c_{b_1}, \dots, c_{b_n}}^{x_1, \dots, x_m} \mid (\Phi_1)_{c_{a_1}, \dots, c_{a_n}}^{x_1, \dots, x_m} \in Z_0, \Phi_1(x_1, \dots, x_n, v_1) \in F(\Sigma) \right\}$$

локально выполним в $\mathfrak{A}_{\{b_1, \dots, b_n\}}$. Так как \mathfrak{A} насыщена, то Z_1 реализуется в $\mathfrak{A}_{\{b_1, \dots, b_n\}}$ элементом $b \in A$. Ясно, что тогда имеет место

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \dots, b_n, b \rangle.$$

2) \Rightarrow 1). Пусть \mathfrak{A} универсальна и однородна, $a_1, \dots, a_n \in A$ и Z_0 — локально выполнимый в $\mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_n\}}$ 1-тип сигнатуры $\Sigma_{\{a_1, \dots, a_n\}}$. Без ограничения общности можно считать, что все связанные переменные в элементах Z_0 отличны от v_1, \dots, v_{n+1} . Рассмотрим n -тип $Z_1 = T(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n)$ и $(n + 1)$ -тип

$$Z_2 = Z_1 \cup \left\{ \Phi \mid (\Phi)_{c_{a_1}, \dots, c_{a_n}, v_1}^{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}} \in Z_0, \Phi(v_1, \dots, v_{n+1}) \in F(\Sigma) \right\}.$$

Из локальной выполнимости Z_0 в $\mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_n\}}$ следует локальная выполнимость Z_2 в \mathfrak{A} . В силу универсальности \mathfrak{A} имеет место выполнимость Z_2 в \mathfrak{A} некоторыми $b_1, \dots, b_{n+1} \in A$. Так как $Z_1 \subseteq Z_2$, то

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \dots, b_n \rangle.$$

Из однородности \mathfrak{A} получаем

$$\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, b_1, \dots, b_{n+1} \rangle$$

для некоторого $a \in A$. Очевидно, что a реализует Z_0 в $\mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_n\}}$. \square

Предложение 5.5.4. *Если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — счетные насыщенные элементарно эквивалентные системы, то $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Предложение непосредственно следует из предложений 5.5.2 и 5.5.3, так как в \mathfrak{A} и \mathfrak{B} реализуются все совместные с $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B})$ n -типы. \square

Таким образом, между полными теориями T , имеющими счетные насыщенные модели, и счетными насыщенными моделями T существует взаимно однозначное с точностью до изоморфизма соответствие. В силу предложения 5.5.1 любая теория T имеет счетную однородную модель. Однако не все теории T имеют счетную насыщенную модель (см. упражнение 2). Следующее предложение характеризует полные теории T , имеющие насыщенные модели.

Предложение 5.5.5. *Для полной теории T , имеющей бесконечные модели, следующие условия эквивалентны:*

- 1) T имеет счетную универсальную модель;
- 2) T имеет счетную насыщенную модель;
- 3) для любого $n \in \omega$ булева алгебра $\mathfrak{B}_n(T)$ имеет счетное число ультрафильтров.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть \mathfrak{A} — счетная универсальная модель T . По предложению 5.5.1 существует счетная однородная модель $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$. Из предложения 5.5.3 получаем, что \mathfrak{B} — насыщенная модель T .

2) \Rightarrow 3). Пусть \mathfrak{A} — счетная насыщенная модель T , $n \in \omega$, и U — ультрафильтр алгебры $\mathfrak{B}_n(T)$. Рассмотрим n -тип

$$T(U) = \{\Phi \mid \|\Phi\| \in U, \Phi \in F_n(\Sigma)\}.$$

Ясно, что $T(U)$ — совместный с T n -тип. Так как \mathfrak{A} универсальна, то существует набор $\bar{a}(U) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, который реализует тип $T(U)$ в \mathfrak{A} . Если U_1, U_2 — два различных ультрафильтра $\mathfrak{B}_n(T)$, то для

некоторой $\Phi \in F_n(\Sigma)$ имеем $\|\Phi\| \in U_1$ и $\|\neg\Phi\| \in U_2$. Следовательно, $\bar{a}(U_1) \neq \bar{a}(U_2)$. Таким образом, существует разнозначное отображение множества всех ультрафильтров алгебры $\mathfrak{B}_n(T)$ в счетное множество A^n . Это дает условие 3).

3) \Rightarrow 1). Пусть $\{U_i^n \mid i \in \omega\}$ — множество всех ультрафильтров $\mathfrak{B}_n(T)$ и сигнатура Σ_1 получается добавлением к Σ новых попарно различных констант $\{c_j^{n,i} \mid n, i \in \omega, 1 \leq j \leq n\}$. Тогда счетное множество предложений сигнатуры Σ :

$$X = T \cup \left\{ (\Phi)_{c_1^{n,i}, \dots, c_n^{n,i}}^{v_1, \dots, v_n} \mid n, i \in \omega; \Phi \in T(U_i^n) \right\}$$

совместно. Пусть \mathfrak{A} — счетная модель X . Тогда $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma$ будет универсальной моделью T . В самом деле, пусть Z_0 — совместный с T n -тип сигнатуры Σ . Тогда множество $Y = \{\|\Phi\| \mid \Phi \in Z_0\}$ будет центрированным множеством алгебры $\mathfrak{B}_n(T)$. По предложению 2.3.2 существует ультрафильтр $U_i^n \supseteq Y$ алгебры $\mathfrak{B}_n(T)$. Так как $Z_0 \subseteq T(U_i^n)$, то Z_0 будет реализовываться в $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma$ элементами $\nu^{\mathfrak{A}}(c_1^{n,i}), \dots, \nu^{\mathfrak{A}}(c_n^{n,i})$. \square

Понятия однородной, универсальной и насыщенной счетной системы легко обобщаются на другие мощности. В частности, алгебраическая система \mathfrak{A} сигнатуры Σ называется κ -насыщенной, где κ — кардинал, если для любого множества $X \subseteq A$ мощности $< \kappa$ в \mathfrak{A}_X реализуется любой совместный с $\text{Th}(\mathfrak{A}_X)$ 1-тип сигнатуры Σ_X . В заключение этого параграфа мы приведем теорему, доказанную независимо Ю. Л. Ершовым и Г. Дж. Кейслером.

Фильтр D на множестве I называется *счетно полным*, если для любого множества $\{X_i \mid i \in \omega\} \subseteq D$ имеет место $\bigcap_{i \in \omega} X_i \in D$. Обозначим через ω_1 первый несчетный кардинал.

Теорема 5.5.6. *Если \mathfrak{A}_i , $i \in I$, — алгебраические системы сигнатуры Σ , а D — ультрафильтр на I , не являющийся счетно полным, то система $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$ является ω_1 -насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\{X_i \mid i \in \omega\} \subseteq D$ и $\bigcap_{i \in \omega} X_i \notin D$. Рассмотрим семейство $\{W_i \mid i \in \omega\}$, где $W_0 = I \setminus X_0$, $W_1 = \bigcap_{i \in \omega} X_i$ и

$$W_i = (X_0 \cap \dots \cap X_{i-2}) \setminus (X_0 \cap \dots \cap X_{i-1})$$

для $i \geq 2$. Ясно, что $W_i \notin D$ для $i \in \omega$, $\bigcup_{i \in \omega} W_i = I$ и $W_i \cap W_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Пусть \mathfrak{A}_i , $i \in I$, — алгебраические системы сигнатуры Σ , $X \subseteq D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$, $|X| \leq \omega$, $Z = \{\Phi_i(v_1) \mid i \in \omega\}$ — совместный с $\text{Th}((D\text{-prod } \mathfrak{A}_i)_X)$ 1-тип сигнатуры Σ_X и Φ_0 — тождественно истинная формула.

Пусть $\mathfrak{B} = (D\text{-prod } \mathfrak{A}_i)_X$ и $X = \{Df^k \mid k \in \omega\}$. Рассмотрим обогащения \mathfrak{B}_i систем \mathfrak{A}_i сигнатуры Σ_X , для которых $c_{Df^k}^{\mathfrak{B}_i} = f^k(i)$. Ясно, что $\mathfrak{B} = D\text{-prod } \mathfrak{B}_i$ и для всех $k \in \omega$ имеет место

$$\{i \in I \mid \mathfrak{B}_i \models \exists v_1(\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_k)\} \in D. \quad (5.12)$$

Возьмем такое $f \in I\text{-prod } B_i$, чтобы для любых $k, n \in \omega$, $k \in W_n$, было $\mathfrak{B}_k \models \Phi_0(fk) \wedge \dots \wedge \Phi_{m(k)}(fk)$, где $m(k)$ — наибольшее число из множества $\{0, 1, \dots, n\}$, для которого $\mathfrak{B}_k \models \exists v_1(\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{m(k)})$. Так как $W_i \cap W_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и Φ_0 тождественно истинна, то такое f можно выбрать.

Покажем, что для любого $k_0 \in \omega$, $k_0 \geq 1$, выполняется

$$\{i \in I \mid \mathfrak{B}_i \models \Phi_{k_0}(fi)\} \in D, \quad (5.13)$$

и предложение тем самым будет доказано. Рассмотрим множество

$$G = \{i \in I \mid \mathfrak{B}_i \models \exists v_1(\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{k_0})\} \setminus (W_0 \cup \dots \cup W_{k_0-1}).$$

Из (5.12) и из того, что $W_0 \notin D, \dots, W_{k_0-1} \notin D$, получаем $G \in D$. Так как $m(i) \geq k_0$ для любого $i \in G$, то из построения f вытекает $G \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{B}_i \models \Phi_k(fi)\}$, откуда получаем (5.13). \square

Упражнения

1. Показать, что в $\mathfrak{B}_n(T)$ истинны аксиомы булевых алгебр.
2. Пусть сигнтура Σ_0 состоит из счетного множества $\{r_i \mid i \in \omega\}$ одноместных предикатов и теория T_0 определяется множеством аксиом

$$\{\exists v_1(s_1(v_1) \wedge \dots \wedge s_n(v_1)) \mid n \in \omega, s_1 \in \{r_1, \neg r_1\}, \dots, s_n \in \{r_n, \neg r_n\}\}.$$

Показать, что T_0 — полная теория, не имеющая универсальной счетной модели. (Указание. Полнота T_0 следует из того, что $\mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma_1 \simeq \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma_1$ для любой конечной $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_0$ и любых счетных моделей $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ теории T ; отсутствие универсальной модели T следует из того, что все 1-типы $\{s_i(v_1) \mid i \in \omega, s_i \in \{r_i, \neg r_i\}\}$ совместны с T_0 .)

§ 5.6. Категоричность

Теорема 5.1.11 показывает, что $\text{Th}(\mathfrak{A})$ для бесконечной системы \mathfrak{A} не определяет \mathfrak{A} (с точностью до изоморфизма). Однако существует интересный класс систем \mathfrak{A} , теория которых определяет \mathfrak{A} с точностью до изоморфизма среди систем той же мощности. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства теорий таких систем. Сигнтуры в этом параграфе имеют счетную или конечную мощность.

Определение. Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ называется *категоричным в мощности κ* или *κ -категоричным*, если все системы из K мощности κ изоморфны между собой. Теория T сигнатуры Σ называется *категоричной в κ* , если класс $K_\kappa(T)$ является κ -категоричным.

Если класс K не имеет систем мощности κ , то по определению он категоричен в κ . Если K — класс алгебраических систем (T — теория) сигнатуры Σ , то через K_∞ (через T_∞) обозначаем класс бесконечных алгебраических систем из K (теорию

$$T \cup \left\{ \exists v_1 \dots \exists v_n \left(\bigwedge_{i < j \leq n} \neg v_i \approx v_j \right) \mid n \in \omega \right\}.$$

Ясно, что $K_\Sigma(T_\infty) = (K_\Sigma(T))_\infty$.

Предложение 5.6.1. *Если теория T сигнатуры Σ категорична в некоторой бесконечной мощности κ и T_∞ совместна, то T_∞ полна.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — две бесконечные модели T . Достаточно показать, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. По теореме 5.1.5 существуют счетные элементарные подсистемы $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}$. По теореме 5.1.8 существуют элементарные расширения $\mathfrak{A}_2 \succ \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_2 \succ \mathfrak{B}_1$ мощности κ . Так как \mathfrak{A}_2 изоморфна \mathfrak{B}_2 , то $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$. Следовательно, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. \square

Если T полна и имеет конечные модели, то по следствию 5.1.3 все модели T изоморфны некоторой конечной системе. До конца этого параграфа пусть T обозначает полную теорию сигнатуры Σ , имеющую бесконечные модели. Заметим, что из полноты теории T следует выполнимость любого главного совместного n -типа в любой модели T .

Теорема 5.6.2 (Ч. Рыль-Нардзевский). *Для того чтобы теория T была категорична в счетной мощности, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \omega$ алгебры $\mathfrak{B}_n(T)$ были конечны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{B}_{n_0}(T)$ — бесконечная булева алгебра. Так как T полна, то $|\mathfrak{B}_0(T)| = 2$, следовательно, $n_0 > 0$. По предложению 2.3.5 существует неглавный ультрафильтр U на $\mathfrak{B}_{n_0}(T)$. Ясно, что n_0 -тип $Z = \{\Phi \in F_{n_0}(\Sigma) \mid \|\Phi\| \in U\}$ является неглавным n_0 -типов в T . По теореме 5.4.6 существует счетная модель \mathfrak{A} теории T , в которой он опускается. Так как $T \cup Z$ совместно, то по теореме о существовании модели существует модель \mathfrak{B} , в которой Z реализуется. Так как можно считать \mathfrak{B} счетной, то T не является счетно категоричной.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{B}_n(T)$ конечны для всех $n \in \omega$. Тогда любой n -тип Z является главным в T . В силу предложения 5.5.4

достаточно показать, что любая счетная модель \mathfrak{A} теории T насыщена, для чего в свою очередь достаточно показать, что любой 1-тип сигнатуры $\Sigma_{\{a_1, \dots, a_n\}}$, где $a_1, \dots, a_n \in A$, является главным в $T_1 = \text{Th}(\mathfrak{A}_{\{a_1, \dots, a_n\}})$. Последнее следует из того, что отображение h , переводящее $\Phi(v_1, \dots, v_{n+1})$ в $\Phi(v_1, c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$, сохраняет отношение $\|\Phi\| \leq \|\Psi\|$ (т. е. $T \triangleright \Phi \rightarrow \Psi \implies T_1 \triangleright h\Phi \rightarrow h\Psi$) и любой $(n+1)$ -тип сигнатуры Σ является главным в T . \square

Следующее предложение доказано П. Линдстремом.

Предложение 5.6.3. *Если $\forall\exists$ -аксиоматизируемая непротиворечивая теория T сигнатуры Σ категорична в счетной мощности, то T модельно полна.*

Доказательство. Будем говорить, что формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ *сохраняется при переходе к подмоделям (надмоделям)* теории T , если для любых моделей $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ теории T и любых $a_1, \dots, a_n \in A$ из истинности $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ в \mathfrak{B} (в \mathfrak{A}) следует истинность $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ в \mathfrak{A} (в \mathfrak{B}). Рассмотрим множество G формул сигнатуры Σ , находящихся в пренексной н. ф. и не сохраняющихся при переходе к подмоделям T . Ясно, что модельная полнота T равносильна тому, что $G = \emptyset$. Предположим, что T не модельно полна. Возьмем $\Phi_0(x_1, \dots, x_n) \in G$, кванторная приставка которой имеет наименьшую длину r_0 . Очевидно, что $r_0 > 0$. Пусть $\Phi_0 = \mathbf{Q}y\Psi_0(y, x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{Q} \in \{\forall, \exists\}$. Из минимальности r_0 следует, что Ψ_0 сохраняется при переходе к подсистемам, поэтому $\mathbf{Q} = \exists$. Так как $\neg\Psi_0$ эквивалентна формуле с кванторной приставкой длины $r_0 - 1$, то из минимальности r_0 получаем, что Ψ_0 сохраняется при переходе к надсистемам.

Возьмем такое $\varphi: \omega \rightarrow \omega^n$, что для любого $a \in \omega^n$ множество $\{k \mid \varphi k = a\}$ бесконечно. Строим последовательность \mathfrak{A}_m , $m \in \omega$, счетных моделей теории T со следующими свойствами:

- 1) $A_m \subseteq \omega$ и множество $\omega \setminus A_m$ бесконечно;
- 2) $\mathfrak{A}_m \subseteq \mathfrak{A}_s$ для $m \leq s$;
- 3) если $\varphi m \in (A_m)^n$ и существует счетная модель $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_m$ теории T , для которой $\mathfrak{B} \models \Phi_0(\pi_1^n(\varphi m), \dots, \pi_n^n(\varphi m))$, то в качестве \mathfrak{A}_{m+1} берем модель T , удовлетворяющую условию 1) при $k = m + 1$, для которой $\mathfrak{A}_m \subseteq \mathfrak{A}_{m+1}$ и $\mathfrak{A}_{m+1} \models \Phi_0(\pi_1^n(\varphi m), \dots, \pi_n^n(\varphi m))$.

Рассмотрим систему $\mathfrak{A}_\omega = \bigcup_{m \in \omega} \mathfrak{A}_m$, которая в силу $\forall\exists$ -аксиоматизируемости T является моделью T (предложение 5.2.5, б)). Так как $\Phi_0 \in G$, то существуют модели $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, для которых $\mathfrak{B} \models \Phi_0(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \models \neg\Phi_0(a_1, \dots, a_n)$. Взяв соответствующие счетные элементарные подсистемы, можно считать, что \mathfrak{A} и \mathfrak{B} счетны, а в силу категоричности T в счетной мощности можно

считать, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\omega$. Так как $A_\omega \subseteq \omega$, то из условия на φ следует, что $\varphi m_0 = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in (A_{m_0})^n$ для некоторого $m_0 \in \omega$. Так как $\mathfrak{A}_{m_0} \subseteq \mathfrak{A}_\omega \subseteq \mathfrak{B}$, то из свойства 3) получаем $\mathfrak{A}_{m_0+1} \models \Phi_0(a_1, \dots, a_n)$, следовательно, имеем $\mathfrak{A}_{m_0+1} \models \Psi_0(b, a_1, \dots, a_n)$ для некоторого $b \in \omega$. Это противоречит тому, что $\mathfrak{A}_\omega \models \neg \exists y \Psi_0(y, a_1, \dots, a_n)$ и Ψ_0 сохраняется при переходе к надсистемам. \square

Отметим, что условие $\forall \exists$ -аксиоматизируемости теории T в предыдущем предложении является также необходимым для модельной полноты T . А именно, можно доказать обращение предложения 5.2.5, б): если аксиоматизируемый класс K замкнут относительно объединений систем, то K $\forall \exists$ -аксиоматизируем. Поэтому любая модельно полная теория $\forall \exists$ -аксиоматизируема.

Теория плотно упорядоченных множеств без первого и последнего элементов является категоричной в счетной мощности (предложение 3.1.7) и не категорична ни в какой бесконечной несчетной мощности (упражнение 1). Теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0 категорична во всех бесконечных несчетных мощностях и некатегорична в счетной мощности. Легко строятся примеры полных теорий, категоричных во всех бесконечных мощностях, и теорий, некатегоричных во всех бесконечных мощностях. Как показал М. Морли, других случаев «распределения» категоричности для полных теорий счетной сигнатуры с бесконечными моделями не существует.

Оставшуюся часть параграфа мы посвятим следующей теореме, доказанной Е. А. Палютиным. В ее доказательстве находят применение многие результаты данной главы, а также иллюстрируется важный метод теорий моделей — метод минимальных множеств.

Теорема 5.6.4. *Если квазимногообразие K категорично в счетной мощности, то оно категорично во всех неединичных мощностях.*

Класс неодноэлементных систем из K обозначим через K_+ . Пусть в дальнейшем K — счетно категоричное квазимногообразие сигнатуры Σ , для которого K_+ не пуст. Элементы классов K , K_+ и K_∞ будут называться соответственно K -системами, K_+ -системами и K_∞ -системами. Под формулой мы будем понимать, если не оговорено противное, формулу сигнатуры Σ . В дальнейшем, если не оговорено противное, буквами \mathfrak{A} , \mathfrak{B} будут обозначаться K -системы. Через \bar{w} обозначаем упорядоченный набор $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$, при этом пишем $\bar{w} \in A$, если $w_1, \dots, w_n \in A$, и $\Phi(\bar{w})$ вместо $\Phi(w_1, \dots, w_n)$. Если $\Phi(y, \bar{x})$ — формула, $\bar{a} \in A$, то через $\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$ обозначается множество $\{b \in A \mid \mathfrak{A} \models \Phi(b, a)\}$. Если $t(y_1, \dots, y_m, \bar{x})$ — терм, $a \in A$

и $X_1 \subseteq A, \dots, X_m \subseteq A$, то через $t^{\mathfrak{A}}(X_1, \dots, X_m, \bar{a})$ обозначается множество

$$\{b_0 \in A \mid b_0 = t^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_m, \bar{a}) \text{ для некоторых } b_1 \in X_1, \dots, b_m \in X_m\}.$$

Если $X_1 = \dots = X_m = X$, то вместо $t^{\mathfrak{A}}(X_1, \dots, X_m, \bar{a})$ пишем $t^{\mathfrak{A}}(\bar{X}, \bar{a})$. Для сокращения записи мы будем часто опускать кванторы всеобщности в записи квазитождеств, т. е. обозначать квазитождество $\forall x_1 \dots \forall x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$ через $\Phi(x_1, \dots, x_n)$. Для простоты обозначений мы будем также отождествлять «диагональные» элементы $f_a \in A^I$, которые тождественно равны $a \in A$ на I , с элементом $a \in A$. Поэтому система \mathfrak{A} будет считаться подсистемой своей декартовой степени \mathfrak{A}^I . Это возможно в силу того, что отображение, сопоставляющее элементу $a \in A$ элемент $f_a \in A^I$, является изоморфизмом \mathfrak{A} на подсистему диагональных элементов \mathfrak{A}^I .

В силу предложений 5.6.1 и 5.6.3 теория $\text{Th}(K_\infty)$ является полной и модельно полной. Из предложений 5.2.5, а) и 5.2.8, а) получаем, что класс K замкнут относительно подсистем и декартовых произведений. В частности, из $K_+ \neq \emptyset$ следует $K_\infty \neq \emptyset$.

Лемма 5.6.5. а). *Если предложение Φ условно фильтруется вместе со своим отрицанием $\neg\Phi$ и истинно на некоторой K_+ -системе \mathfrak{A} , то оно истинно на любой K_+ -системе. Фильтрующееся предложение и квазитождество условно фильтруются вместе со своими отрицаниями.*

б). *Для любой K -системы \mathfrak{A} и любого конечного множества $X \subseteq A$ система $\mathfrak{A}(X)$ конечна.*

Доказательство. а). Если предложение Φ ложно в K_+ -системе \mathfrak{B} , то из условной фильтруемости Φ и $\neg\Phi$ следует, что Φ истинно в \mathfrak{A}^ω и ложно в \mathfrak{B}^ω . Это противоречит полноте $\text{Th}(K_\infty)$. Если Φ — фильтрующаяся формула, то условная фильтруемость $\neg\Phi$ очевидна. Условная фильтруемость квазитождества показана в доказательстве предложения 5.2.8, а). Отрицание квазитождества Φ эквивалентно предложению $\exists x_1 \dots \exists x_n (\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2)$, где Φ_1, Φ_2 — фильтрующиеся формулы. По лемме 3.3.3 формула $\neg\Phi$ условно фильтруется.

б). Пусть система $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ бесконечна. Для каждого $a \in A(a_1, \dots, a_n)$ существует такой терм $t_a(v_1, \dots, v_n)$, что $t_a^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = a$. Тогда формулы $v_{n+1} \approx t_a(v_1, \dots, v_n)$, $a \in A(a_1, \dots, a_n)$, будут попарно неэквивалентными в $\text{Th}(\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)) = \text{Th}(K_\infty)$. Так как $\text{Th}(K_\infty)$ ω -категорична, то это противоречит теореме 5.6.2. \square

Лемма 5.6.6. *Пусть $\Phi(y, \bar{x})$ — фильтрующаяся формула, $\mathfrak{A} \in K_+$, $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A$ и $\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$ содержит не менее двух элементов.*

Тогда

- а) существует такой терм $t(\bar{y}, \bar{x})$, что $t^{\mathfrak{A}}(\overline{\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})}, \bar{a}) = A$;
- б) для любой $\mathfrak{B} \in K_+$ и $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B$ множество $\Phi(\mathfrak{B}, \bar{b})$ содержит не менее двух элементов или пусто.

Доказательство. а). Докажем сначала, что если $\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$ бесконечно, то множество $X = \Phi(\mathfrak{A}, \bar{a}) \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ порождает \mathfrak{A} . Пусть $\{t_i(v_1, \dots, v_i) \mid 0 < i < \omega\}$ — нумерация всех термов. Для каждого $i \in \omega$, $i > n$, рассмотрим формулу

$$\begin{aligned}\Psi_i(v_0, v_1, \dots, v_n) = \\ = \exists v_{n+1} \exists v_{n+2} \dots \exists v_i \left(\bigvee_{j < i} v_0 \approx t_j \wedge \bigwedge_{n < k < i} \Phi(v_k, v_1, \dots, v_n) \right),\end{aligned}$$

истинность которой на системе \mathfrak{B} при интерпретации $\gamma: \{v_0, \dots, v_n\} \rightarrow B$ равносильна тому, что $\gamma(v_0)$ есть значение терма $t_j^{\mathfrak{B}}(\gamma(v_1), \dots, \gamma(v_n), b_{n+1}, \dots, b_j)$, где $j \leq i$ и $b_{n+1}, \dots, b_j \in \Phi(\mathfrak{B}, \gamma(v_1), \dots, \gamma(v_n))$. Ясно, что для любого $b \in A(X)$ существует $i \in \omega$, $i \geq n$, для которого $\mathfrak{A}(X) \models \Psi_i(b, \bar{a})$. По теореме 5.6.2 существует такое конечное множество $\{i_1, \dots, i_k\}$, что для любого $i \in \omega$ справедливо $\text{Th}(K_\infty) \triangleright \Psi_i \rightarrow (\Psi_{i_1} \vee \dots \vee \Psi_{i_k})$. Тогда в $\mathfrak{A}(X)$ истинно $\forall v_0 (\Psi_{i_1}(v_0, \bar{a}) \vee \dots \vee \Psi_{i_k}(v_0, \bar{a}))$. Так как $\mathfrak{A}(X) \prec \mathfrak{A}$, то эта формула истинна в \mathfrak{A} , откуда получаем, что \mathfrak{A} порождается множеством X . Предположим, что а) ложно. Тогда существуют такие $b_i \in A$, $n \leq i \in \omega$, что $t_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a}, a_{n+1}, \dots, a_i) \neq b_i$ для любых $a_{n+1}, \dots, a_i \in \Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$. Тогда множество $Y = \Phi(\mathfrak{A}^\omega, \bar{a}) = (\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a}))^\omega$ бесконечно и $g \notin A^\omega(Y \cup \{a_1, \dots, a_n\})$, где $gi = b_i$, $i \in \omega$. Это противоречит предыдущему.

б). Предположим, что существуют такие $\mathfrak{B} \in K_+$ и $\bar{b} \in B$, что $\Phi(\mathfrak{B}, \bar{b}) = \{d_0\}$. В силу фильтруемости Φ множество $\Phi(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \bar{a} \times \bar{b})$ равно $\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a}) \times \{d_0\}$, где $\bar{a} \times \bar{b} = \langle \langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle \rangle$. Пусть $a_0 \in A$; $d_1, d_2 \in B$, $d_1 \neq d_2$, тогда по а) имеем

$$t(\langle c_1, d_0 \rangle, \dots, \langle c_m, d_0 \rangle, \bar{a} \times \bar{b}) = \langle a_0, d_1 \rangle,$$

$$t(\langle c'_1, d_0 \rangle, \dots, \langle c'_m, d_0 \rangle, \bar{a} \times \bar{b}) = \langle a_0, d_2 \rangle$$

для некоторого терма $t(y_1, \dots, y_m, \bar{x})$ и некоторых $c_1, \dots, c_m, c'_1, \dots, c'_m \in \Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$. Из определения операций на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ получаем $t(d_0, \dots, d_0, \bar{b}) = d_1$ из первого равенства и $t(d_0, \dots, d_0, \bar{b}) = d_2$ из второго равенства, что противоречит условию $d_1 \neq d_2$. \square

Рассмотрим максимальное совместное с $\text{Th}(K)$ множество

$$X^* = \{\neg v_1 \approx v_2\} \cup \{\Phi_i(v_1, v_2) \mid i \in \omega\},$$

где $\Phi_i(v_1, v_2)$, $i \in \omega$, — атомарные формулы. Пусть сигнатура Σ^* получается из Σ добавлением двух новых констант c_1, c_2 . Рассмотрим квазимногообразие K^* сигнатуры Σ^* , множество аксиом которого состоит из аксиом K , а также квазитождеств $v_1 \approx v_1 \rightarrow \Phi(c_1, c_2)$ для атомарных формул $\Phi(v_1, v_2) \in X^*$ и квазитождеств $\Phi(c_1, c_2) \rightarrow v_1 \approx v_2$ для атомарных $\Phi(v_1, v_2) \notin X^*$

Лемма 5.6.7. а). Для любой K_+ -системы \mathfrak{A} существует такая K^* -система \mathfrak{A}^* , что $\mathfrak{A}^* \upharpoonright \Sigma = \mathfrak{A}$.

б). Квазимногообразие K^* категорично в счетной мощности.

Доказательство. а). В силу максимальности X^* достаточно показать, что X^* выполняется в любой K_+ -системе \mathfrak{A} . Из теоремы 5.6.2 следует существование такого $n_0 \in \omega$, что $\text{Th}(K_\infty) \triangleright (\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{n_0}) \rightarrow \rightarrow \Phi_i$ для всех $i \in \omega$. Так как $K_\infty \neq \emptyset$, то по лемме 5.6.5 а) выполняется $\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{n_0}) \rightarrow \Phi_i$ для всех $i \in \omega$. Поэтому достаточно показать, что в \mathfrak{A} истинно предложение $\exists v_1 \exists v_2 \Psi(v_1, v_2)$, где $\Psi(v_1, v_2)$ равна $\neg v_1 \approx v_2 \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{n_0}$. Пусть X^* выполняется в K -системе \mathfrak{B} . Тогда $|B| > 1$ и $\exists v_1 \exists v_2 \Psi(v_1, v_2)$ истинно в K_∞ -системе \mathfrak{B}^ω . В силу полноты $\text{Th}(K_\infty)$ имеем $\mathfrak{A}^\omega \models \Psi(f_1, f_2)$ для некоторых $f_1, f_2 \in A^\omega$. Так как $\mathfrak{A}^\omega \models \neg f_1 \approx f_2$, то $f_1 i_0 \neq f_2 i_0$ для некоторого $i_0 \in \omega$. Из фильтруемости $\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{n_0}$ получаем, что $\mathfrak{A} \models \Psi(f_1 i_0, f_2 i_0)$.

б). Как было показано в доказательстве теоремы 5.6.2, каждая счетная K_∞ -система является насыщенной. Так как любая K_∞^* -система \mathfrak{A}^* является обогащением некоторой K_∞ -системы \mathfrak{A} на две константы, то \mathfrak{A}^* является насыщенной. Поэтому в силу предложения 5.5.4 достаточно показать, что любые K_∞^* -системы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны. Пусть $\nu^{\mathfrak{A}}(c_1) = a_1, \nu^{\mathfrak{A}}(c_2) = a_2, \nu^{\mathfrak{B}}(c_1) = b_1, \nu^{\mathfrak{B}}(c_2) = b_2$. Так как квазитождества $\Phi(c_1, c_2) \rightarrow v_1 \approx v_2$ эквивалентны в $\text{Th}(K_+^*)$ предложению $\neg \Phi(c_1, c_2)$, то из аксиом K^* следует, что отображение, сопоставляющее элементам a_1, a_2 соответственно элементы b_1, b_2 , продолжается до изоморфизма $f: \mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{B}_0$, где $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}(a_1, a_2) \upharpoonright \Sigma$ и $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}(b_1, b_2) \upharpoonright \Sigma$. Тогда f продолжается до изоморфизма K_∞ -систем $\mathfrak{A}_0^\omega \subseteq \mathfrak{A}^\omega \upharpoonright \Sigma$ и $\mathfrak{B}_0^\omega \subseteq \mathfrak{B}^\omega \upharpoonright \Sigma$. Следовательно, $\langle \mathfrak{A}_0^\omega, a_1, a_2 \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}_0^\omega, b_1, b_2 \rangle$ и в силу модельной полноты $\text{Th}(K_\infty)$ получаем $\langle \mathfrak{A}^\omega \upharpoonright \Sigma, a_1, a_2 \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}^\omega \upharpoonright \Sigma, b_1, b_2 \rangle$. Снова из модельной полноты $\text{Th}(K_\infty)$ получаем $\langle \mathfrak{A} \upharpoonright \Sigma, a_1, a_2 \rangle \equiv \langle \mathfrak{B} \upharpoonright \Sigma, b_1, b_2 \rangle$, следовательно, имеет место $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. \square

В дальнейшем будем предполагать, что сигнатура Σ содержит константы c_1, c_2 и предложение $\neg c_1 \approx c_2$ истинно в любой K_+ -системе. Такое предположение для доказательства теоремы 5.6.4 можно сделать в силу леммы 5.6.7. Тогда для любой K_+ -системы определена K_+ -система $\mathfrak{A}(\emptyset)$, носитель которой состоит из значений в \mathfrak{A} константных термов. Из леммы 5.6.5, а) следует, что $\mathfrak{A}(\emptyset) \simeq \mathfrak{B}(\emptyset)$ для любых

K_+ -систем \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . Множество $X \subseteq A$ назовем *атомно минимальным* в K -системе \mathfrak{A} , если $|X| > 1$ и для любой атомарной формулы $\Phi(y, \bar{x})$, любого $\bar{a} \in A$ множество $X \cap \Phi(\mathfrak{A}, \bar{a})$ пусто, одноэлементно или равно X .

Лемма 5.6.8. *Существует такая фильтрующаяся формула $\Phi^*(v_1)$, что для любой K_+ системы \mathfrak{A} множество $\Phi^*(\mathfrak{A})$ атомно минимально в \mathfrak{A} .*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} \in K_+$. По лемме 5.6.5, б) K_+ -система $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}(\emptyset)$ конечна. Рассмотрим такую конъюнкцию $\Phi^*(v_1)$ атомарных формул, что $|\Phi^*(\mathfrak{B}_0)| > 1$ и для любой атомарной формулы $\Phi(v_1)$ множество $\Phi^*(\mathfrak{B}_0) \cap \Phi(\mathfrak{B}_0)$ пусто, одноэлементно или равно $\Phi^*(\mathfrak{B}_0)$. Пусть $\Phi(y, \bar{x})$ — атомарная формула. Так как любой элемент $b \in B_0$ является значением в \mathfrak{B}_0 константного терма, то множество $\Phi^*(\mathfrak{B}_0) \cap \Phi(\mathfrak{B}_0, \bar{b})$ пусто, одноэлементно или равно $\Phi^*(\mathfrak{B}_0)$ для любого $\bar{b} \in B_0$. В силу леммы 5.6.7 б) не существует таких $\bar{a}, \bar{b} \in B_0$, что $\Phi^*(\mathfrak{B}_0) \subseteq \Phi(\mathfrak{B}_0, \bar{b})$ и $\Phi^*(\mathfrak{B}_0) \cap \Phi(\mathfrak{B}_0, \bar{a})$ одноэлементно. Таким образом, в \mathfrak{B}_0 истинно одно из следующих квазитождеств:

- а) $(\Phi^*(v_1) \wedge \Phi(v_1, \bar{x}) \wedge \Phi^*(v_2) \wedge \Phi(v_2, \bar{x})) \rightarrow v_1 \approx v_2$;
- б) $(\Phi^*(v_1) \wedge \Phi(v_1, \bar{x}) \wedge \Phi^*(v_2)) \rightarrow \Phi(v_2, \bar{x})$.

По лемме 5.6.5 а) одно из этих квазитождеств истинно в любой K_+ -системе \mathfrak{A} . Так как $\Phi^*(\mathfrak{A}) \supseteq \Phi^*(\mathfrak{A}(\emptyset))$ и $\mathfrak{A}(\emptyset) \simeq \mathfrak{B}_0$, то $|\Phi^*(\mathfrak{A})| > 1$. Следовательно, $\Phi^*(\mathfrak{A})$ атомно минимально в \mathfrak{A} . \square

Пусть $\mathfrak{A} \in K_+$. Множество $X \subseteq \Phi^*(\mathfrak{A})$ назовем *базисом* для \mathfrak{A} , если выполняются следующие условия:

- 1) $\mathfrak{A}(X) = \mathfrak{A}$;
- 2) если a_1, \dots, a_n — попарно различные элементы X и $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$ для некоторой атомарной формулы $\Phi(v_1, \dots, v_n)$, то в любой K_+ -системе истинно квазитождество $(\Phi^*(v_1) \wedge \dots \wedge \Phi^*(v_n)) \rightarrow \Phi(v_1, \dots, v_n)$.

Лемма 5.6.9. а). *Если $\Phi(y, \bar{x})$ — фильтрующаяся формула и $\Phi(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \{b\}$ для K_+ -системы \mathfrak{A} и $\bar{a} \in A$, то $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = b$ для некоторого терма $t(\bar{x})$.*

б). *Каждая K_+ -система \mathfrak{A} имеет базис.*

Доказательство. а). Пусть $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}(\bar{a})$. Если а) не выполняется, что предложение $\exists y \Phi(y, \bar{a})$ в K_∞ -системе \mathfrak{A}_0^ω ложно, а в $\mathfrak{A}^\omega \supseteq \mathfrak{A}_0^\omega$ истинно. Это противоречит модельной полноте $\text{Th}(K_\infty)$.

б). Пусть $X \subseteq \Phi^*(\mathfrak{A})$ — максимальное множество, удовлетворяющее условию 2). В силу леммы 5.6.6, а) достаточно показать, что $\mathfrak{A}(X)$ содержит $\Phi^*(\mathfrak{A})$. Предположим, что существует $a_0 \in \Phi^*(\mathfrak{A}) \setminus A(X)$. Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ для атомарной $\Phi(v_0, v_1, \dots, v_n)$ и попарно

различных $a_1, \dots, a_n \in X$. В силу а) и атомной минимальности $\Phi^*(\mathfrak{A})$ имеем $\Phi^*(\mathfrak{A}) \subseteq \Phi(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n)$. Так как $\Phi^*(\mathfrak{A}(\emptyset)) \neq \emptyset$, то $\mathfrak{A} \models \Phi^*(t_0) \wedge \Phi(t_0, a_1, \dots, a_n)$ для некоторого константного терма t_0 . Так как X удовлетворяет условию 2) и $\Phi^*(t_0) \in \text{Th}(K_+)$ (лемма 5.6.5, а)), то множество $\Phi^*(\mathfrak{B}) \wedge \Phi(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n)$ не пусто для любой K_+ -системы \mathfrak{B} и любых $b_1, \dots, b_n \in \Phi^*(\mathfrak{B})$. Поэтому в силу леммы 5.6.6, б) из $|\Phi(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \cap \Phi^*(\mathfrak{A})| > 1$ и атомной минимальности $\Phi^*(\mathfrak{B})$ получаем истинность $\Phi(b_0, b_1, \dots, b_n)$ в любой K_+ -системе \mathfrak{B} для любых $b_0, b_1, \dots, b_n \in \Phi^*(\mathfrak{B})$. Следовательно, $X \cup \{a_0\}$ удовлетворяет условию 2), что противоречит максимальности X . \square

Доказательство теоремы 5.6.4. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — две K_+ -системы одной мощности κ и X, Y — их базисы. Из определения базиса следует, что любое разнозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ продолжается единственным образом до изоморфизма \mathfrak{A} на $\mathfrak{B}(f(X))$. Поэтому в силу свойства 1) базиса достаточно заметить, что $|X| = |Y|$. Если $\kappa \geq \omega$, то из леммы 5.6.5, б) получаем $|X| = |Y| = \kappa$. Если $\kappa < \omega$ и $|X| \leq |Y|$, то \mathfrak{A} изоморфна подсистеме $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$. Так как $|B_1| = |A| = |B|$, то $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$. \square

Упражнения

- Показать, что теория T_0 плотных линейных порядков без первого и последнего элемента не категорична ни в какой бесконечной несчетной мощности. (**Указание.** Пусть \mathfrak{A} — модель T_0 мощности $\kappa > \omega$ и \mathfrak{A}_0 — счетная модель T_0 , для которой $A_0 \cap A = \emptyset$, рассмотрим модель \mathfrak{A}_1 с носителем A^2 и отношением $\langle a, b \rangle \leq^{\mathfrak{A}_1} \langle c, d \rangle \iff (a < c \text{ или } (a = c \text{ и } b \leq^{\mathfrak{A}} d))$ и модель \mathfrak{A}_2 с носителем $A \cup A_0$ и отношением

$$a \leq^{\mathfrak{A}_2} b \iff ((a \in A \text{ и } b \in A_0) \text{ или } (a, b \in A \text{ и } a \leq^{\mathfrak{A}} b) \text{ или } (a, b \in A_0 \text{ и } a \leq^{\mathfrak{A}_0} b));$$

тогда \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 неизоморфны.)

- Показать, что многообразие булевых алгебр категорично во всех конечных мощностях и некатегорично во всех бесконечных.
- Доказать, что многообразие M с аксиомами (кванторы всеобщности опущены)
 - 1) $f(g_1(x), g_2(x)) \approx x$,
 - 2) $f(x, y) \approx f(g_1(x), g_2(y))$,
 - 3) $g_1(f(g_1(x), g_1(y))) \approx g_1(x)$,
 - 4) $g_2(f(g_1(x), g_1(y))) \approx g_1(y)$,
 - 5) $g_i(g_k(x)) \approx g_k(x)$, $i, k \in \{1, 2\}$,

категорично во всех мощностях. (**Указание.** Показать, что $\nu^{\mathfrak{A}}(f)$ для любой $\mathfrak{A} \in M$ разнозначно отображает $(g_1^{\mathfrak{A}}[A])^2$ на A и любое разнозначное отображение $h: g_1^{\mathfrak{A}}[A] \rightarrow g_1^{\mathfrak{B}}[B]$ для $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M$ продолжается до изоморфизма системы \mathfrak{A} на $\mathfrak{B}(h(g_1^{\mathfrak{A}}[A]))$, переводящего a в $f^{\mathfrak{B}}(hg_1^{\mathfrak{A}}(a), hg_2^{\mathfrak{A}}(a))$.)

4. Построить пример, показывающий, что в теореме 5.6.4 нельзя утверждать, что K категорично также в мощности 1.
5. Обобщить предложение 5.6.3 на теории, категоричные в бесконечной мощности κ , и получить тем самым теорему Линдстрема в полном объеме. (**Указание.** Применить метод предложения 5.6.3 с заменой ω на κ и показать, что если формула Φ не сохраняется при переходе к подмоделям теории T , то Φ не сохраняется при переходе к подмоделям мощности κ .)

§ 5.7. RQ-формулы и Σ -формулы

Пусть $\sigma = \langle \leq^2, \dots \rangle$ — произвольная сигнатура с выделенным двуместным предикатным символом \leq . Расширим синтаксис языка ИП $^\sigma$, введя в рассмотрение наряду с обычными ограниченные кванторы. Формулы, возможно содержащие ограниченные кванторы, будут называться RQ-формулами. Дадим точное определение RQ-формул.

Определение. RQ-формулы:

- любая атомарная формула языка ИП $^\sigma$ есть RQ-формула;
- если Φ и Ψ — RQ-формулы ИП $^\sigma$, то $\neg\Phi$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ суть RQ-формулы;
- если x — переменная, t — терм, где $x \notin FV(t)$, а Φ — RQ-формула, то $\exists x \leq t\Phi$, $\forall x \leq t\Phi$, $\exists x\Phi$, $\forall x\Phi$ суть RQ-формулы.

Можно определить множество свободных переменных RQ-формулы Φ , расширив определение множества свободных переменных $FV(\Phi)$ для обычной формулы Φ добавлением соотношения¹⁾

$$FV(\exists x \leq t\Phi) (= FV(\forall x \leq t\Phi)) \leftrightharpoons (FV(\Phi) \setminus \{x\}) \cup FV(t).$$

Для дальнейшего важны два подкласса RQ-формул: Δ_0 -формулы и Σ -формулы. Приведем их определения.

Определение. Δ_0 -формулы:

- любая атомарная формула языка ИП $^\Sigma$ есть Δ_0 -формула;
- если Φ и Ψ — Δ_0 -формулы, то $\neg\Phi$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ суть Δ_0 -формулы;

¹⁾ Знак \leftrightharpoons читается «положим по определению».

- если x — переменная, t — терм, где $x \notin FV(t)$, а Φ — Δ_0 -формула, то $\exists x \leq t\Phi, \forall x \leq t\Phi$ суть Δ_0 -формулы.

Определение. Σ -формулы:

- любая Δ_0 -формула есть Σ -формула;
- если Φ и Ψ — Σ -формулы, то $(\Phi \vee \Psi)$ и $(\Phi \wedge \Psi)$ суть Σ -формулы;
- если x — переменная, t — терм, где $x \notin FV(t)$, а Φ — Σ -формула, то $\exists x \leq t\Phi, \forall x \leq t\Phi, \exists x \Phi$ суть Σ -формулы.

Для того чтобы определить понятие истинности RQ-формулы на алгебраической системе \mathfrak{A} , следует рассматривать формулу $\exists x \leq t\Phi$ как сокращение формулы $\exists x(x \leq t \wedge \Phi)$, а формулу $\forall x \leq t\Phi$ — как сокращение формулы $\forall x(x \leq t \rightarrow \Phi)$ в случае, когда $x \notin FV(t)$. Именно, к индукционному определению понятия истинности, данному в § 3.2, добавим два дополнительных случая.

Рассмотрим алгебраическую систему \mathfrak{A} сигнатуры σ и интерпретацию переменных $\gamma: X \rightarrow A$.

10. Если $\Phi = \exists x \leq t\Phi_0$ — RQ-формула, $FV(\Phi) \subseteq X$, то отношение $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ имеет место тогда и только тогда, когда существует интерпретация $\gamma_0: X \cup \{x\} \rightarrow A$ такая, что

$$\begin{aligned}\gamma_0 \upharpoonright X \setminus \{x\} &= \gamma \upharpoonright X \setminus \{x\}, \\ \langle \gamma_0(x), t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle &\in \leq^{\mathfrak{A}} \quad [\text{т. е. } \gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]], \\ \mathfrak{A} &\models \Phi_0[\gamma_0].\end{aligned}$$

11. Если $\Phi = \forall x \leq t\Phi_0$ — RQ-формула, $FV(\Phi) \subseteq X$, то отношение $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \Phi_0[\gamma_0]$ для любой интерпретации $\gamma: X \cup \{x\} \rightarrow A$ такой, что

$$\gamma_0 \upharpoonright X \setminus \{x\} = \gamma \upharpoonright X \setminus \{x\}, \quad \langle \gamma_0(x), t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \in \leq^{\mathfrak{A}}.$$

Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, — алгебраические системы сигнатуры σ .

Определение. Система \mathfrak{B} называется *концевым расширением* системы \mathfrak{A} (обозначается $\mathfrak{A} \leq_{\text{end}} \mathfrak{B}$), если для любых $a \in A, b \in B$ из соотношения $\langle b, a \rangle \in \leq^{\mathfrak{B}}$ ($b \leq^{\mathfrak{B}} a$) следует принадлежность $b \in A$ (тем самым $b \leq^{\mathfrak{A}} a$).

Предложение 5.7.1. Пусть $\mathfrak{A} \leq_{\text{end}} \mathfrak{B}$, Φ — RQ-формула и $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ — интерпретация. Тогда

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models \Phi[\gamma] \text{ для любой } \Delta_0\text{-формулы } \Phi,$$

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \Phi[\gamma] \text{ для любой } \exists\text{-формулы } \Phi.$$

Доказательство. Утверждение устанавливается индукцией по построению формулы Φ с использованием сформулированных и доказанных ниже утверждений (1)–(6).

(1) *Если формула Φ атомарна и имеет вид $R(t_0, \dots, t_n)$, $\bar{t} = (t_0, \dots, t_n)$, то*

$$\mathfrak{A} \models R(\bar{t})[\gamma] \iff \langle t_0^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

Так как $t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_i^{\mathfrak{B}}[\gamma]$, $i \leq n$, и $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^{n+1}$, имеем

$$\langle t_0^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \iff \langle t_0^{\mathfrak{B}}[\gamma], \dots, t_n^{\mathfrak{B}}[\gamma] \rangle \in R^{\mathfrak{B}} \iff \mathfrak{B} \models R(\bar{t})[\gamma].$$

Аналогично рассматривается случай, когда формула Φ имеет вид $t_0 \approx t_1$.

(2) *Если Φ_0, Φ_1 – RQ-формулы и $\gamma: FV(\Phi_0) \cup FV(\Phi_1) \rightarrow A$ – интерпретация такая, что $\mathfrak{A} \models \Phi_i[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models \Phi_i[\gamma]$, $i = 0, 1$, то*

$$\mathfrak{A} \models \neg \Phi_0[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models \neg \Phi_0[\gamma],$$

$$\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma],$$

$$\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma],$$

$$\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \rightarrow \Phi_1)[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models (\Phi_0 \rightarrow \Phi_1)[\gamma].$$

Утверждение следует из определения истинности формул.

(3) *Если Φ_0, Φ_1 – RQ-формулы и $\gamma: FV(\Phi_0) \cup FV(\Phi_1) \rightarrow A$ – интерпретация, такая, что $\mathfrak{A} \models \Phi_i[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \Phi_i[\gamma]$, $i = 0, 1$, то*

$$\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma],$$

$$\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma].$$

Утверждение следует из определения истинности формул.

(4) *Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models \Phi[\gamma]$ для RQ-формулы Φ и любой интерпретации $\gamma: X \rightarrow A$ такой, что $FV(\Phi) \subseteq X$. Тогда для любой интерпретации $\gamma: FV(\exists x \leq t\Phi) \rightarrow A$*

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma],$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma] \iff \mathfrak{B} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma].$$

Установим лишь первую эквивалентность, поскольку вторая выводится аналогично. Пусть $\mathfrak{A} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma]$. Тогда согласно случаю 10 существует интерпретация $\gamma_0: X \cup \{x\} \rightarrow A$ такая, что $FV(\exists x \leq t\Phi) \subseteq X$, $\gamma_0 \upharpoonright X \setminus \{x\} = \gamma \upharpoonright X \setminus \{x\}$, $\gamma_x(x) \leq^{\mathfrak{A}} t\Phi[\gamma]$, $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_0]$. Ввиду сделанных предположений $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma_0]$ и $\mathfrak{B} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma]$. Пусть

$\mathfrak{B} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma]$. Тогда существует интерпретация $\gamma_0: X \cup \{x\} \rightarrow B$ такая, что $\gamma_0 \upharpoonright X \setminus \{x\} = \gamma \upharpoonright X \setminus \{x\}$, $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{B}} t^{\mathfrak{B}}[\gamma]$ и $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma_0]$. Так как γ — интерпретация в A , имеет место равенство $t^{\mathfrak{B}}[\gamma] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$. Кроме того, соотношение $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{B}} t^{\mathfrak{B}}[\gamma] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ (напомним, что \mathfrak{B} — концевое расширение \mathfrak{A}) влечет $\gamma_0(x) \in A$ (и $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$). Но тогда γ_0 — интерпретация в A такая, что $\gamma_0 \upharpoonright X \setminus \{x\} = \gamma \upharpoonright X \setminus \{x\}$, $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ и $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_0]$, поскольку $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma_0] \implies \mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_0]$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma]$.

(5) Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \Phi[\gamma]$ для RQ-формулы Φ и любой интерпретации $\gamma: X \rightarrow A$ такой, что $FV(\Phi) \subseteq X$. Тогда для любой интерпретации $\gamma: FV(\exists x \leq t\Phi) \rightarrow A$

$$\mathfrak{A} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \exists x \leq t\Phi[\gamma],$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma].$$

Установим лишь вторую импликацию, так как первая доказывается аналогично. Пусть $\mathfrak{A} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma]$. Покажем, что $\mathfrak{B} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma]$. Ввиду случая 11 достаточно установить, что для любой интерпретации $\gamma_0: FV(\forall x \leq t\Phi) \cup \{x\} \rightarrow B$ такой, что $\gamma_0 \upharpoonright FV(\forall x \leq t\Phi) \setminus \{x\} = \gamma \upharpoonright FV(\forall x \leq t\Phi) \setminus \{x\}$ и $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{B}} t^{\mathfrak{B}}[\gamma]$, верна формула $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma_0]$. Пусть γ_0 — такая интерпретация. Поскольку γ — интерпретация в A , имеем $t^{\mathfrak{B}}[\gamma] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma] \in A$. Из $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{B}} t^{\mathfrak{B}}[\gamma] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ следует (с учетом $\mathfrak{A} \leq_{\text{end}} \mathfrak{B}$), что $\gamma_0(x) \in A$ и $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$. Но тогда γ_0 является интерпретацией в A такой, что $\gamma_0 \upharpoonright FV(\forall x \leq t\Phi) \setminus \{x\} = \gamma \upharpoonright FV(\forall x \leq t\Phi) \setminus \{x\}$, $\gamma_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$. В силу истинности $\mathfrak{A} \models \forall x \leq t\Phi[\gamma]$ получаем $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_0]$, откуда $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma_0]$.

(6) Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \Phi[\gamma]$ для RQ-формулы Φ и любой интерпретации $\gamma: X \rightarrow A$ такой, что $FV(\Phi) \subseteq X$. Тогда для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \setminus \{x\} \rightarrow A$ справедлива импликация

$$\mathfrak{A} \models \exists x\Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \exists x\Phi[\gamma].$$

Действительно, пусть интерпретация $\gamma: FV(\Phi) \setminus \{x\} \rightarrow A$ такова, что $\mathfrak{A} \models \exists x\Phi[\gamma]$. Предположим, что $\gamma_0: FV(\Phi) \cup \{x\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma_0 \upharpoonright FV(\Phi) \setminus \{x\} = \gamma$ и $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_0]$. Но тогда $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma_0]$ и $\mathfrak{B} \models \exists x\Phi[\gamma]$.

Таким образом, предложение 5.7.1 доказано. \square

Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система и Φ, Ψ — RQ-формулы соответствующей сигнатуры.

Определение. Формула Ψ называется

- *следствием* формулы Φ на \mathfrak{A} (обозначается $\Phi \implies_{\mathfrak{A}} \Psi$), если для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \cup FV(\Psi) \rightarrow A$ из $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$ следует $\mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$;

- семантическим следствием формулы Φ (обозначается $\Phi \Rightarrow_S \Psi$), если $\Phi \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \Psi$ для любой алгебраической системы \mathfrak{A} .

Определение. Формулы Φ и Ψ называются

- \mathfrak{A} -эквивалентными (обозначается $\Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \Psi$), если $\Phi \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \Psi$ и $\Psi \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \Phi$;
- семантически эквивалентными (обозначается $\Phi \equiv_S \Psi$), если $\Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \Psi$ для всех \mathfrak{A} .

Укажем ряд легко проверяемых семантических эквивалентностей и импликаций:

$$\begin{aligned} \neg\neg\Phi &\equiv_S \Phi, \\ \Phi \rightarrow \Psi &\equiv_S \neg\Phi \vee \Psi, \\ \neg\exists x\Phi &\equiv_S \forall x\neg\Phi, \\ \neg\forall x\Phi &\equiv_S \exists x\neg\Phi, \\ \neg(\Phi \vee \Psi) &\equiv_S \neg\Phi \wedge \neg\Psi, \\ \neg(\Phi \wedge \Psi) &\equiv_S \neg\Phi \vee \neg\Psi, \\ \neg\exists x \leq t\Phi &\equiv_S \forall x \leq t\neg\Phi, \\ \neg\forall x \leq t\Phi &\equiv_S \exists x \leq t\neg\Phi, \\ \exists x \exists y \leq t\Phi &\equiv_S \exists y \leq t\exists x\Phi, \\ \forall x \forall y \leq t\Phi &\equiv_S \forall y \leq t\forall x\Phi, \end{aligned}$$

$\exists x \leq t\Phi \equiv_S \exists y(y \leq t \wedge (\Phi)_y^x)$, если y не встречается в t и Φ ,

$\forall x \leq t\Phi \equiv_S \forall y(y \leq t \rightarrow (\Phi)_y^x)$, если y не встречается в t и Φ ,

$$\begin{aligned} \Phi \Rightarrow_S \exists x\Phi, \\ \forall x\Phi \Rightarrow_S \Phi, \\ \exists x \leq t\Phi \Rightarrow_S \exists x\Phi, \\ \forall x\Phi \Rightarrow_S \forall x \leq t\Phi. \end{aligned}$$

В качестве следствий приведем две леммы.

Лемма 5.7.2. Для любой RQ-формулы Φ можно эффективно указать RQ-формулу Ψ такую, что $\Phi \equiv_S \Psi$, и формула Φ не содержит \rightarrow , а отрицания встречаются в ней лишь перед атомарными формулами.

Замечание 5.7.3. Если RQ-формула Φ в лемме 5.7.2 есть Δ_0 -формула (Σ -формула), то Ψ можно выбрать Δ_0 -формулой (Σ -формулой).

Лемма 5.7.4. Для любой RQ-формулы Φ можно эффективно указать формулу Ψ языка ИП $^\sigma$ такую, что $\Phi \equiv_S \Psi$.

Для Σ -формулы Φ и переменной u , не встречающейся в Φ , определим Δ_0 -формулу $\Phi^{(u)}$ как формулу, полученную из Φ заменой каждого вхождения в Φ неограниченного квантора существования вида $\exists x$ вхождением ограниченного квантора существования $\exists x \leq u$.

Предложение 5.7.5. Для любой Σ -формулы Φ справедлива импликация $\exists u \Phi^{(u)} \implies_S \Phi$.

Доказательство. Установим индукцией по построению Φ импликацию $\Phi^{(u)} \implies_S \Phi$. Для Δ_0 -формулы Φ имеем $\Phi^{(u)} = \Phi$ и $\Phi \implies_S \Phi$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \Phi_0^{(u)} \implies_S \Phi_0 \\ \Phi_1^{(u)} \implies_S \Phi_1 \end{array} \right\} &\implies (\Phi_0 \vee \Phi_1)^{(u)} (= \Phi_0^{(u)} \vee \Phi_1^{(u)}) \implies_S \Phi_0 \vee \Phi_1, \\ &(\Phi_0 \wedge \Phi_1)^{(u)} (= \Phi_0^{(u)} \wedge \Phi_1^{(u)}) \implies_S \Phi_0 \wedge \Phi_1, \\ \Phi_0^{(u)} \implies_S \Phi_0 &\implies \left\{ \begin{array}{l} (\exists x \leq t \Phi_0)^{(u)} (= \exists x \leq t \Phi_0^{(u)}) \implies_S \exists x \leq t \Phi_0, \\ (\forall x \leq t \Phi_0)^{(u)} (= \forall x \leq t \Phi_0^{(u)}) \implies_S \forall x \leq t \Phi_0, \end{array} \right. \\ \Phi_0^{(u)} \implies_S \Phi_0 &\implies (\exists x \Phi)^{(u)} (= \exists x \leq u \Phi_0^{(u)}) \implies_S \exists x \Phi_0^{(u)} \implies_S \exists x \Phi_0. \end{aligned}$$

Так как $\Phi^{(u)} \implies_S \Phi$ и u не свободна в Φ , то $\exists u \Phi^{(u)} \implies_S \Phi$. \square

Предложение 5.7.6 (монотонность $\Phi^{(u)}$). Если в \mathfrak{A} отношение $\leq^{\mathfrak{A}}$ транзитивно, Φ — Σ -формула, $FV(\Phi) \subseteq X$, $u \notin X$ и $\gamma: X \cup \{u\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma_0]$ для любой интерпретации $\gamma_0: X \cup \{u\} \rightarrow A$ такой, что $\gamma_0 \restriction X = \gamma \restriction X$ и $\gamma(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma_0(u)$.

Доказательство. Утверждение устанавливается индукцией по построению Φ и следует из сформулированных и доказанных ниже утверждений (1)–(4).

(1) Если Φ — Δ_0 -формула, то Φ удовлетворяет свойству монотонности.

Действительно, тогда Φ не содержит неограниченных кванторов существования, $\Phi^{(u)} = \Phi$ и u не входит свободно в Φ . Следовательно, $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma] \implies \mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \implies \mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_0] \implies \mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma_0]$.

(2) Если Φ_0 и Φ_1 — Σ -формулы, удовлетворяющие свойству монотонности, то формулы $(\Phi_0 \vee \Phi_1)$ и $(\Phi_0 \wedge \Phi_1)$ также удовлетворяют этому свойству.

Пусть $FV(\Phi_0 \vee \Phi_1) \subseteq X$, $u \notin X$, $\gamma: X \cup \{u\} \rightarrow A$, $\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)^{(\gamma)}$, $\gamma_0: X \cup \{u\} \rightarrow A$ и $\gamma_0 \restriction X = \gamma \restriction X$, $\gamma(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma_0(u)$. Из равенства

$(\Phi_0 \vee \Phi_1)^{(u)} = \Phi_0^{(u)} \vee \Phi_1^{(u)}$ следует, что $\mathfrak{A} \models \Phi_i^{(u)}[\gamma]$ для некоторого $i = 0, 1$. Но тогда $\mathfrak{A} \models \Phi_i^{(u)}[\gamma_0]$ и $\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)^{(u)}[\gamma_0]$. Для формулы $(\Phi_0 \wedge \Phi_1)$ рассуждения аналогичны.

(3) Если Φ_0 — Σ -формула, удовлетворяющая свойству монотонности, то формулы $\exists x \leq t\Phi_0$ и $\forall x \leq t\Phi_0$ также удовлетворяют свойству монотонности.

Пусть $FV(\Phi_0) \cup FV(t) \subseteq X$, $u \notin X$, $\gamma: X \cup \{u\} \rightarrow A$, $\mathfrak{A} \models (\forall x \leq t\Phi_0)^{(u)}[\gamma]$ и $\gamma_0: X \cup \{u\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma_0 \upharpoonright X = \gamma \upharpoonright X$ и $\gamma(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma_0(u)$. Так как $(\forall x \leq t\Phi_0)^{(u)} = \forall x \leq t\Phi_0^{(u)}$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \models \forall x \leq t\Phi_0^{(u)}[\gamma]$, имеем $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma']$ для любой интерпретации $\gamma': X \cup \{x, u\} \rightarrow A$ такой, что $\gamma' \upharpoonright (X \setminus \{x\}) \cup \{u\} = \gamma \upharpoonright (X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$, $\gamma'(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$. Пусть $\gamma'_0: X \cup \{x, u\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma'_0 \upharpoonright (X \setminus \{x\}) \cup \{u\} = \gamma_0 \upharpoonright (X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ и $\gamma'_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ (так как $u \notin FV(t)$ и $\gamma_0 \upharpoonright X = \gamma \upharpoonright X$). Пусть интерпретация $\gamma': X \cup \{x, u\} \rightarrow A$ такова, что $\gamma' \upharpoonright X \cup \{x\} = \gamma'_0 \upharpoonright X \cup \{x\}$, $\gamma'(u) = \gamma(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma_0(u) = \gamma'_0(u)$. Тогда $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma']$ и $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma'_0]$ ввиду монотонности формулы Φ_0 . Следовательно, $\mathfrak{A} \models \forall x \leq t\Phi_0^{(u)}[\gamma_0]$. Для формулы $\exists x \leq t\Phi_0$ рассуждения аналогичны.

(4) Если Φ_0 — Σ -формула, удовлетворяющая свойству монотонности, то формула $\exists x\Phi_0$ также удовлетворяет свойству монотонности.

Пусть $FV(\Phi_0) \subseteq X$, $x \in X$, $u \notin X$, $\gamma: X \cup \{u\} \rightarrow A$, $\mathfrak{A} \models (\exists x\Phi_0)^{(u)}[\gamma]$ и $\gamma_0: X \cup \{u\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma_0 \upharpoonright X = \gamma \upharpoonright X$ и $\gamma(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma_0(u)$. Имеем $(\exists x\Phi_0)^{(u)} = \exists x \leq u\Phi_0^{(u)}$. Так как $\mathfrak{A} \models \exists x \leq u\Phi_0^{(u)}[\gamma]$, существует интерпретация $\gamma': X \cup \{u\} \rightarrow A$ такая, что $\gamma' \upharpoonright (X \setminus \{x\}) \cup \{u\} = \gamma \upharpoonright (X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$, $\gamma'(x) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma'(u) = \gamma(u)$, $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma']$. Пусть $\gamma'_0: X \cup \{u\} \rightarrow A$ — интерпретация, определенная так, что $\gamma'_0 \upharpoonright X = \gamma' \upharpoonright X$ и $\gamma'_0(u) = \gamma_0(u)$. Тогда $\gamma'(u) = \gamma(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma_0(u) = \gamma'_0(u)$. В силу монотонности формулы Φ_0 получаем $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma'_0]$. Кроме того, $\gamma'_0(x) = \gamma'(x) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma'(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma'_0(u)$, и $\gamma'_0(x) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma'_0(u)$ ввиду транзитивности отношения $\leq^{\mathfrak{A}}$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \exists x \leq u\Phi_0^{(u)}[\gamma_0]$ и $\mathfrak{A} \models (\exists x \leq u\Phi_0)^{(u)}[\gamma_0]$.

Таким образом, предложение 5.7.6 доказано. \square

Следствие 5.7.7. *Если в системе \mathfrak{A} отношение $\leq^{\mathfrak{A}}$ транзитивно, Φ есть Σ -формула, переменные $u \neq v$ не входят в Φ и $\gamma: FV(\Phi) \cup \{v\} \rightarrow A$, то $\mathfrak{A} \models \forall u \leq v (\Phi^{(u)} \rightarrow \Phi^{(v)})[\gamma]$.*

Следствие 5.7.8. Если в системе \mathfrak{A} отношение $\leq^{\mathfrak{A}}$ транзитивно, Φ есть Σ -формула и переменные $u \neq v$ не входят в Φ , то $\exists u \leq^{\mathfrak{A}} v \Phi^{(u)} \implies_{\mathfrak{A}} \Phi^{(v)}$.

Доказательство. Пусть $\gamma: FV(\Phi) \cup \{v\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\mathfrak{A} \models \exists u \leq^{\mathfrak{A}} v \Phi^{(u)}[\gamma]$. Тогда существует интерпретация $\gamma': FV(\Phi) \cup \{u, v\} \rightarrow A$ такая, что $\gamma' \upharpoonright FV(\Phi) \cup \{v\} = \gamma$, $\gamma'(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma'(v) = \gamma(v)$ и $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma']$. Пусть $\gamma'': FV(\Phi) \cup \{v\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma'' \upharpoonright FV(\Phi) = \gamma \upharpoonright FV(\Phi)$ и $\gamma''(v) = \gamma'(u)$. Так как $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma']$, имеем $\mathfrak{A} \models \Phi^{(v)}[\gamma'']$. С другой стороны, $\gamma'' \upharpoonright FV(\Phi) = \gamma \upharpoonright FV(\Phi)$ и $\gamma''(v) = \gamma'(u) \leq^{\mathfrak{A}} \gamma'(v) = \gamma(v)$. Следовательно, по монотонности $\mathfrak{A} \models \Phi^v[\gamma]$. \square

Определение. Алгебраическая система \mathfrak{A} называется *ограниченной*, если выполнены следующие условия:

- отношение $\leq^{\mathfrak{A}}$ является транзитивным и направленным на A , т. е. $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z) \wedge \forall x \forall y \exists z (x \leq z \wedge y \leq z)$,
- для любой Δ_0 -формулы Φ имеет место *принцип Δ_0 -ограниченности*: $\forall x \leq t \exists y \Phi \implies_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi$.

Замечание 5.7.9. Принцип Δ_0 -ограниченности (для Δ_0 -формулы Φ) эквивалентен соотношению $\forall x \leq t \exists y \Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi$. Действительно, для любой RQ-формулы Φ справедливы импликации

$$\exists y \leq v \Phi \implies_S \exists y \Phi,$$

$$\forall x \leq t \exists y \leq v \Phi \implies_S \forall x \leq t \exists y \Phi,$$

$$\exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi \implies_S \forall x \leq t \exists y \Phi.$$

Для ограниченных систем верны два важных утверждения (принцип Σ -рефлексии и принцип Σ -ограниченности).

Принцип Σ -рефлексии. Если система \mathfrak{A} ограничена и Φ — Σ -формула, то справедлива эквивалентность $\Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi^{(u)}$.

Доказательство. Имеем $\exists u \Phi^{(u)} \implies_S \Phi$ согласно предложению 5.7.5. Поэтому достаточно доказать импликацию $\Phi \implies_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi^{(u)}$. Она следует из нижеприведенных утверждений 〈1〉–〈5〉 индукцией по построению формулы Φ .

〈1〉 Если Φ — Δ_0 -формула, то $\Phi \implies_S \exists u \Phi^{(u)}$.

Действительно, в этом случае $\Phi^{(u)} = \Phi$.

〈2〉 Если для Σ -формул Φ_0 и Φ_1 верны импликации $\Phi_i \implies_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi_i^{(u)}$, $i = 0, 1$, то

$$(\Phi_0 \vee \Phi_1) \implies_{\mathfrak{A}} \exists u (\Phi_0 \vee \Phi_1)^{(u)},$$

$$(\Phi_0 \wedge \Phi_1) \implies_{\mathfrak{A}} \exists u (\Phi_0 \wedge \Phi_1)^{(u)}.$$

Рассмотрим формулу $(\Phi_0 \wedge \Phi_1)$ (случай $(\Phi_0 \vee \Phi_1)$ проще). Пусть $\gamma: FV(\Phi_0 \wedge \Phi_1) \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\mathfrak{A} \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma]$. Тогда $\mathfrak{A} \models \Phi_0[\gamma]$, $\mathfrak{A} \models \Phi_1[\gamma]$. По предположению $\mathfrak{A} \models \exists u \Phi_0^{(u)}[\gamma]$, $\mathfrak{A} \models \exists u \Phi_1^{(u)}[\gamma]$. Поэтому существуют интерпретации $\gamma_i: FV(\Phi_0 \wedge \Phi_1) \cup \{u\} \rightarrow A$, $\gamma_i \upharpoonright FV(\Phi_0 \wedge \Phi_1) = \gamma$, $i = 0, 1$, такие, что $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma_0]$, $\mathfrak{A} \models \Phi_1^{(u)}[\gamma_1]$. Так как отношение $\leq^{\mathfrak{A}}$ направленное, существует элемент $a \in A$ такой, что $\gamma_0(u) \leq^{\mathfrak{A}} a$ и $\gamma_1(u) \leq^{\mathfrak{A}} a$. Пусть $\gamma^*: FV(\Phi_0 \wedge \Phi_1) \cup \{u\} \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma^* \upharpoonright FV(\Phi_0 \wedge \Phi_1) = \gamma$ и $\gamma^*(u) = a$. Ввиду монотонности имеем $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma^*]$, $\mathfrak{A} \models \Phi_1^{(u)}[\gamma^*]$ и $\mathfrak{A} \models (\Phi_0^{(u)} \wedge \Phi_1^{(u)})[\gamma^*]$, $(\Phi_0^{(u)} \wedge \Phi_1^{(u)}) = (\Phi_0 \wedge \Phi_1)^{(u)}$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \exists u (\Phi_0 \wedge \Phi_1)^{(u)}[\gamma]$, и импликация $(\Phi_0 \wedge \Phi_1) \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u (\Phi_0 \wedge \Phi_1)^{(u)}$ установлена.

(3) Если Φ_0 — Σ -формула и $\Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi_0^{(u)}$, то $\exists x \leq t \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u (\exists x \leq t \Phi_0)^{(u)}$.

В силу основных свойств отношений $\Rightarrow_{\mathfrak{A}}$, $\equiv_{\mathfrak{A}}$, \Rightarrow_S , \equiv_S имеем

$$\exists x \leq t \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists x \leq t \exists u \Phi_0^{(u)},$$

$$\exists x \leq t \exists u \Phi_0^{(u)} \equiv_S \exists u \exists x \leq t \Phi_0^{(u)} = \exists u (\exists x \leq t \Phi_0)^{(u)}.$$

Следовательно, $\exists x \leq t \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u (\exists x \leq t \Phi_0)^{(u)}$.

(4) Если Φ_0 — Σ -формула и $\Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi_0^{(u)}$, то $\forall x \leq t \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u (\forall x \leq t \Phi_0)^{(u)}$.

Соотношения

$$\forall x \leq t \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \forall x \leq t \exists u \Phi_0^{(u)}, \quad \forall x \leq t \exists u \Phi_0^{(u)} \equiv_{\mathfrak{A}} \exists w \forall x \leq t \exists u \leq w \Phi_0^{(u)},$$

справедливы ввиду ограниченности системы \mathfrak{A} и того факта, что $\Phi_0^{(u)}$ — Δ_0 -формула. Из следствия 5.7.8 следует импликация $\exists u \leq w \Phi_0^u \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \Phi_0^{(w)}$. Получаем $\forall x \leq t \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u (\forall x \leq t \Phi_0)^{(u)}$ в силу соотношения

$$\exists w \forall x \leq t \exists u \leq w \Phi_0^{(u)} \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists w \forall x \leq t \Phi_0^{(w)} \equiv_S$$

$$\equiv_S \exists u \forall x \leq t \Phi_0^{(u)} = \exists u (\forall x \leq t \Phi_0)^{(u)}.$$

(5) Если $\Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi_0^{(u)}$, то $\exists x \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u (\exists x \Phi_0)^{(u)}$.

Справедливы следующие импликации:

$$\exists x \Phi_0 \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists x \exists u \Phi_0^{(u)},$$

$$\exists x \exists u \Phi_0^{(u)} \Rightarrow_{\mathfrak{A}} \exists u \exists x \leq u \Phi_0^{(u)}.$$

Действительно, пусть $\gamma: FV(\Phi_0) \rightarrow A$ — интерпретация такой, что $\mathfrak{A} \models \exists x \exists u \Phi_0^{(u)}[\gamma]$. Тогда существует интерпретация $\gamma': FV(\Phi_0) \cup \{x, u\} \rightarrow A$ такая, что $\gamma' \upharpoonright FV(\Phi_0) = \gamma$, $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma']$. Рассмотрим элемент $a \in A$ такой, что $\gamma'(x) \leq^{\mathfrak{A}} a$, $\gamma'(u) \leq^{\mathfrak{A}} a$, и интерпретацию $\gamma'': FV(\Phi_0) \cup \{x\} \rightarrow A$ такую, что $\gamma'' \upharpoonright FV(\Phi_0) \cup \{x\} = \gamma' \upharpoonright FV(\Phi_0) \cup \{x\}$, $\gamma''(u) = a$. Тогда в силу монотонности из $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma']$ следует $\mathfrak{A} \models \Phi_0^{(u)}[\gamma'']$. Заметим, что $\gamma''(x) = \gamma'(x) \leq^{\mathfrak{A}} a = \gamma''(u)$. Тогда $\mathfrak{A} \models \exists u \exists x \leq u \Phi_0^{(u)}[\gamma]$. Поэтому $\exists x \Phi_0 \implies_{\mathfrak{A}} \exists u \exists x \leq u \Phi_0^{(u)} = \exists u (\exists x \Phi_0)^{(u)}$.

Таким образом, принцип Σ -рефлексии установлен. \square

Приведем одно из следствий принципа Σ -рефлексии для случая конечной сигнатуры σ , не содержащей функциональных символов.

Следствие 5.7.10. *Пусть \mathfrak{A} — ограниченная система сигнатуры σ , не содержащей функциональных символов, Φ — Σ -формула сигнатуры σ и $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ — интерпретация такой, что $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$. Тогда существует элемент $a \in A$ такой, что $\widehat{a} = \{a' \mid a' \leq^{\mathfrak{A}} a\}$ содержит все значения констант сигнатуры σ , $\gamma(FV(\Phi)) \subseteq \widehat{a}$ и $\mathfrak{A} \upharpoonright \widehat{a} (\leq_{\text{end}} \mathfrak{A}) \models \Phi[\gamma]$.*

Доказательство. Так как $\Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \exists u \Phi^{(u)}$, существует интерпретация $\gamma': FV(\Phi) \cup \{u\} \rightarrow A$ такая, что $\gamma' \upharpoonright FV(\Phi) = \gamma$ и $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma']$. Используя направленность отношения $\leq^{\mathfrak{A}}$, находим элемент $a \in A$ такой, что $\{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \sigma\} \cup \gamma'(FV(\Phi) \cup \{u\}) \subseteq \widehat{a}$. Система \mathfrak{A} является концевым расширением $\mathfrak{A} \upharpoonright \widehat{a}$, а $\Phi^{(u)}$ — Δ_0 -формулой. Согласно предложению 5.7.1 получаем $\mathfrak{A} \models \Phi^{(u)}[\gamma'] \iff \mathfrak{A} \upharpoonright \widehat{a} \models \Phi^{(u)}[\gamma']$, $\mathfrak{A} \upharpoonright \widehat{a} \models \Phi^{(u)}[\gamma']$, $\mathfrak{A} \upharpoonright \widehat{a} \models \exists u \Phi^{(u)}[\gamma]$, $\mathfrak{A} \upharpoonright \widehat{a} \models \Phi[\gamma]$, так как $\exists u \Phi^{(u)} \implies_S \Phi$ в силу предложения 5.7.5. \square

Принцип Σ -ограниченности. *Если система \mathfrak{A} ограничена и Φ — Σ -формула, то $\forall x \leq t \exists y \Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi$.*

Доказательство. Как отмечено выше, всегда верна импликация $\exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi \implies_S \forall x \leq t \exists y \Phi$. Поэтому требуется установить импликацию $\forall x \leq t \exists y \Phi \implies_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi$. По принципу рефлексии $\exists y \Phi \implies_{\mathfrak{A}} \exists w (\exists y \Phi)^{(w)}$. Далее, $\forall x \leq t \exists y \Phi \implies_{\mathfrak{A}} \forall x \leq t \exists w (\exists y \Phi)^{(w)}$. По принципу Δ_0 -ограниченности

$$\forall x \leq t \exists w (\exists y \Phi)^{(w)} \implies_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t \exists w \leq v (\exists y \Phi)^{(w)}.$$

Кроме того,

$$\exists w \leq v (\exists y \Phi)^{(w)} \implies_{\mathfrak{A}} (\exists y \Phi)^v \quad [\text{следствие 5.7.8}],$$

$$\begin{aligned} \exists v \forall x \leq t \exists w \leq v (\exists y \Phi)^{(v)} &\implies_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t (\exists y \Phi)^{(v)}, \\ (\exists y \Phi)^{(v)} &= \exists y \leq v \Phi^{(v)}, \\ \exists y \leq v \Phi^{(v)} &\implies_S \exists y \leq v \Phi \quad [\text{предложение 5.7.5}], \\ \exists v \forall x \leq t (\exists y \Phi)^{(v)} &\implies_S \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi. \end{aligned}$$

Итак, $\forall x \leq t \exists y \Phi \implies_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi$. Принцип Σ -ограниченности установлен. \square

Следствие 5.7.11. Если система \mathfrak{A} ограничена и Φ — Σ -формула, то справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \forall x_0 \leq t_0 \forall x_1 \leq t_1 \dots \forall x_k \leq t_k \exists y \Phi &\equiv_{\mathfrak{A}} \\ \equiv_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x_0 \leq t_0 \forall x_1 \leq t_1 \dots \forall x_k \leq t_k \exists y \leq v \Phi. \end{aligned}$$

Доказательство. Установим утверждение для $k = 1$; для больших k рассуждения аналогичны. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \forall x_1 \leq t_1 \exists y \Phi &\implies_{\mathfrak{A}} \exists v \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq v \Phi, \\ \forall x_0 \leq t_0 \forall x_1 \leq t_1 \exists y \Phi &\implies_{\mathfrak{A}} \forall x_0 \leq t_0 \exists v \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq v \Phi, \\ \forall x_0 \leq t_0 \exists v \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq v \Phi &\implies_{\mathfrak{A}} \exists w \forall x_0 \leq t_0 \exists v \leq w \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq v \Phi, \\ \exists v \leq w \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq v \Phi &\implies_{\mathfrak{A}} \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq w \Phi, \\ \forall x_0 \leq t_0 \forall x_1 \leq t_1 \exists y \Phi &\implies_{\mathfrak{A}} \exists w \forall x_0 \leq t_0 \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq w \Phi \equiv_S \\ &\equiv_S \exists v \forall x_0 \leq t_0 \forall x_1 \leq t_1 \exists y \leq v \Phi. \end{aligned}$$

Таким образом, следствие 5.7.11 доказано. \square

В заключение параграфа укажем без доказательства, как естественно расширить исчисление ИП $^{\sigma}_1$ до исчисления языка RQ-формул так, чтобы теорема о полноте оставалась справедливой.

Гильбертовское исчисление RQ-формул получается из ИП $^{\sigma}_1$ добавлением следующих новых схем аксиом и правил вывода.

Определение. Новые аксиомы:

- 11') $\forall x \leq t \Phi \wedge t_0 \leq t \rightarrow (\Phi)_{t_0}^x$, где x не входит в t ;
- 12') $(\Phi)_{t_0}^x \wedge t_0 \leq t \rightarrow \exists x \leq t \Phi$, где x не входит в t .

Новые правила вывода:

- 2') $\frac{(x \leq t \wedge \Psi) \rightarrow \Phi}{\Psi \rightarrow \forall x \leq t \Phi}$, если x не входит свободно в Ψ и не входит в t ;
- 3') $\frac{(x \leq t \wedge \Phi) \rightarrow \Psi}{\exists x \leq t \Phi \rightarrow \Psi}$, если x не входит свободно в Ψ и не входит в t .

Упражнение

1. Доказать, что система $\langle Z, +, 0, \leq \rangle$ не является ограниченной.
 (указание. Рассмотреть формулу $\forall x \leq 0 \exists y x + y \approx 0$.)

§ 5.8. Формульная определимость

Используя формулы (RQ-формулы) сигнатуры σ , можно определять предикаты на алгебраических системах сигнатуры σ .

Пусть Φ — формула сигнатуры σ и y_0, \dots, y_{k-1} — список попарно различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$. Тогда для любой алгебраической системы \mathfrak{A} соответствующей сигнатуры на A определяется k -местный предикат

$$\Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}] \doteq \{\langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle \mid a_i \in A, i < k; \mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_{\bar{a}}], \text{ где интерпретация } \gamma_{\bar{a}}: \{y_0, \dots, y_{k-1}\} \rightarrow A \text{ такая, что } \gamma_{\bar{a}}(y_i) = a_i, i < k\}.$$

Замечание 5.8.1. Можно рассматривать конструкцию $\Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$ и без условия $FV(\Phi) \subseteq \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$. Тогда «предикат» $\Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$ зависит от параметров $FV(\Phi) \setminus \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ и имеет однозначный смысл, лишь когда задана интерпретация $\gamma: FV(\Phi) \setminus \{\bar{y}\} \rightarrow A$ и имеет место соотношение

$$\Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}][\gamma] \doteq \{\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle \mid \bar{a} \in A^k, \mathfrak{A} \models \Phi[\gamma_{\bar{a}} \cup \gamma]\}.$$

Определение. Предикаты вида $\Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$ называются σ -формульными на \mathfrak{A} .

Предложение 5.8.2. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры σ , $\sigma' = \sigma \cup \langle P_0^{k_0}, \dots, P_s^{k_s} \rangle$, $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, Q_0, \dots, Q_s \rangle$ — обогащение \mathfrak{A} до сигнатуры σ' такое, что Q_i , $i \leq s$, — σ -формульный предикат на \mathfrak{A} . Если Q — σ' -формульный предикат на \mathfrak{A}' , то Q — σ -формульный предикат на \mathfrak{A} .

Доказательство проведем для случая $s = 0$; общий случай получается индукцией по s .

Пусть φ — формула сигнатуры σ такая, что $Q_0 = \varphi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$, и Φ — формула сигнатуры $\sigma \cup \langle P_0 \rangle$ такая, что $Q = \Phi^{(\mathfrak{A}, Q_0)}[\bar{z}]$. Предполагая, что все связанные переменные формулы φ не встречаются в Φ , определим синтаксическую операцию подстановки $(\Phi)^{P_0}_{\varphi[\bar{y}]}$ следующим образом: формула $(\Phi)^{P_0}_{\varphi[\bar{y}]}$ сигнатуры σ получается из формулы Φ сигнатуры $\sigma \cup \langle P_0 \rangle$ заменой каждой атомарной подформулы формулы Φ вида $P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$ формулой $(\varphi)_{t_0, \dots, t_{k_0-1}}^{y_0, \dots, y_{k_0-1}}$. Заметим, что $FV((\Phi)^{P_0}_{\varphi[\bar{y}]}) \subseteq FV(\Phi)$.

Индукцией по построению формулы Φ устанавливается следующее утверждение: для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ имеет место соотношение

$$\langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models (\Phi)_{\varphi[\bar{y}]}^{P_0}[\gamma] \quad (\Phi \equiv_{\langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle} (\Phi)_{\varphi[\bar{y}]}^{P_0}).$$

Единственный нетривиальный случай — когда Φ атомарна и имеет вид $P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle \models \Phi[\gamma] &\iff \langle t_0^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_{k_0-1}^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \in Q_0 \iff \\ &\iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma_{t^{\mathfrak{A}}[\gamma]}], \text{ где } \gamma_{t^{\mathfrak{A}}[\gamma]}(y_i) = t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma], i < k_0, \iff \\ &\iff \mathfrak{A} \models (\varphi)_{\bar{t}}^{\bar{y}}[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models (P_0(\bar{t}))_{\varphi[\bar{y}]}^{P_0}[\gamma]. \end{aligned}$$

Из указанного свойства сразу вытекает, что для любой формулы Φ сигнатуры $\sigma \cup \langle P_0 \rangle$ имеет место соотношение

$$\Phi^{(\mathfrak{A}, Q_0)}[\bar{z}] = \left((\Phi)_{\varphi[\bar{y}]}^{P_0} \right)^{\mathfrak{A}} [\bar{z}],$$

из которого следует заключение предложения 5.8.2 (для $s = 0$). \square

Замечание 5.8.3. Как отмечалось выше, конструкцию $\varphi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$ можно использовать и без условия $FV(\varphi) \subseteq \{\bar{y}\}$. Это же справедливо и для подстановки. Предположим, что все переменные формулы φ не встречаются в Φ . Тогда формула $(\Phi)_{\varphi[\bar{y}]}^{P_0}$, определенная выше, обладает следующим свойством: для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \cup (FV(\varphi) \setminus \{\bar{y}\}) \rightarrow A$ справедливо соотношение

$$\langle \mathfrak{A}, \varphi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}][\gamma'] \rangle \models \Phi \iff \mathfrak{A} \models (\Phi)_{\varphi[\bar{y}]}^{P_0}[\gamma], \quad \gamma' = \gamma \upharpoonright (FV(\varphi) \setminus \{\bar{y}\}).$$

Наряду с понятием формульного предиката можно ввести и понятие формульной функции. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры σ .

Определение. Функция $g: A^l \rightarrow A$ называется σ -формульной на \mathfrak{A} , если ее график $\Gamma_\sigma = \{(\bar{a}, b) \mid \bar{a} \in A^l, b \in A, g(\bar{a}) = b\} \subseteq A^{l+1}$ является σ -формульным предикатом на \mathfrak{A} .

Справедливо естественное обобщение предложения 5.8.2.

Предложение 5.8.4. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатурь σ , $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0}, \dots, f_m^{l_m}, P_0^{k_0}, \dots, P_s^{k_s} \rangle$, $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, g_0, \dots, g_m, Q_0, \dots, Q_s \rangle$ — σ' -обогащение \mathfrak{A} такое, что $g_i, i \leq m$ — σ -формульные функции, $Q_j, j \leq s$, — σ -формульные предикаты. Тогда любой σ' -формульный предикат (σ' -формульная функция) на \mathfrak{A}' является σ -формульным предикатом (σ -формульной функцией) на \mathfrak{A} .

Установим сначала следующее общее утверждение.

Лемма 5.8.5. Для любой формулы Φ можно эффективно найти формулу $\bar{\Phi}$ той же сигнатуры такую, что $\Phi \equiv_S \bar{\Phi}$, $FV(\Phi) = FV(\bar{\Phi})$, любая атомарная подформула формулы $\bar{\Phi}$ является атомной, а любой ограниченный квантор формулы $\bar{\Phi}$ имеет вид $\exists x \leq y$ или $\forall x \leq y$.

Доказательство. Легко проверяется справедливость следующих эквивалентностей:

$$\exists x \leq t\Phi \equiv_S \exists y(y \approx t \wedge \exists x \leq y\Phi), \quad y \notin FV(\Phi) \cup FV(t),$$

$$\forall x \leq t\Phi \equiv_S \exists y(y \approx t \wedge \forall x \leq y\Phi), \quad y \notin FV(\Phi) \cup FV(t),$$

$$P(t_0, \dots, t_{k-1}) \equiv_S \exists x_0 \dots \exists x_{k-1} \left(\bigwedge_{i < k} x_i \approx t_i \wedge P(x_0, \dots, x_{k-1}) \right),$$

$$x_i \notin \bigcup_{j < k} FV(t_j), \quad j < k,$$

$$t \approx f(t_0, \dots, t_{l-1}) \equiv_S f(t_0, \dots, t_{l-1}) \approx t \equiv_S$$

$$\equiv_S \exists x \exists x_0 \dots \exists x_{l-1} \left(x \approx t \wedge \bigwedge_{i < l} x_i \approx t_i \wedge x \approx f(x_0, \dots, x_{l-1}) \right),$$

где $x, x_i \notin \bigcup_{j < k} FV(t_j) \cup FV(t)$, $i < l$. Если формула Φ содержит подформулы вида $\exists x \leq t\Psi$ ($\forall x \leq t\Psi$), где терм t отличен от переменной, то, последовательно заменяя их на $\exists y(y \approx t \wedge \exists x \leq y\Psi)$ ($\exists y(y \approx t \wedge \forall x \leq y\Psi)$), добьемся того, что Φ не будет содержать таких подформул.

Определим ранг $\rho(t)$ терма t по индукции:

$$\rho(x) = 0, \quad \rho(f(t_0, \dots, t_{l-1})) = \max_{i < l} \rho(t_i) + 1,$$

и ранг $\rho(\Phi)$ атомарной формулы Φ :

- когда Φ есть $P(t_0, \dots, t_{k-1})$, полагаем $\rho(\Phi) = 0$, если $\rho(t_0) = \dots = \rho(t_{k-1}) = 0$, и $\rho(\Phi) = \max_{i < k} \rho(t_i) + 1$, если существует $i < k$ такое, что $\rho(t_i) > 0$;
- когда Φ есть $t_0 \approx t_1$, полагаем $\rho(\Phi) = 0$, если $\rho(t_0) = \rho(t_1) = 0$, и $\rho(\Phi) = \rho(t_0) + \rho(t_1) - 1$, если $\rho(t_0) > 0$ или $\rho(t_1) > 0$.

Заметим, что для атомарной формулы Φ равенство $\rho(\Phi) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда Φ атомная.

Наконец, определим ранг $\rho(\Phi)$ для произвольной формулы Φ как максимум рангов ее атомарных подформул.

Если $\rho(\Phi) > 0$, то каждую атомарную подформулу вида $P(t_0, \dots, t_{k-1})$ формулы Φ такую, что $\rho(P(t_0, \dots, t_{k-1})) > 0$, заменим формулой

$$\exists x_0 \dots \exists x_{k-1} \left(\bigwedge_{i < k} x_i \approx t_i \wedge P(x_0, \dots, x_{k-1}) \right),$$

а каждую атомарную подформулу вида

$$t \approx f(t_0, \dots, t_{l-1}) \text{ (или } f(t_0, \dots, t_{l-1}) \approx t\text{)},$$

такую, что

$$\rho(f(t_0, \dots, t_{l-1})) > 1 \text{ (или } \rho(t) = \rho(f(t_0, \dots, t_{l-1})) = 1\text{)},$$

заменим формулой

$$\exists x \exists x_0 \dots \exists x_{l-1} \left(x \approx t \wedge \bigwedge_{i < l} x_i \approx t_i \wedge x \approx f(x_0, \dots, x_{l-1}) \right).$$

В результате получим формулу Φ' такую, что

$$\Phi \equiv_S \Phi', \quad FV(\Phi) = FV(\Phi') \text{ и } \rho(\Phi') < \rho(\Phi).$$

Если $\rho(\Phi') = 0$, то $\overline{\Phi} \Leftarrow \Phi'$ удовлетворяет заключению леммы. Если $\rho(\Phi') > 0$, то, образуя последовательность

$$\Phi, \Phi', (\Phi')', \dots, \Phi^{(n+1)} \Leftarrow (\Phi^{(n)})', \dots,$$

находим $n \leq \rho(\Phi)$ такое, что $\rho(\Phi^{(n)}) = 0$. Тогда $\overline{\Phi} \Leftarrow \Phi^{(n)}$ удовлетворяет заключению леммы 5.8.5. \square

Доказательство предложения 5.8.4. Достаточно рассмотреть случай $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0} \rangle$.

Пусть φ — формула сигнатуры σ такая, что $\Gamma_{g_0} = \varphi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$, и Φ — формула сигнатуры σ' такая, что $Q = \Phi^{\langle \mathfrak{A}, g_0 \rangle}[\bar{z}]$. Согласно лемме 5.8.5 можно считать, что любая атомарная подформула формулы Φ является атомной.

Определим по формулам Φ и φ формулу Ψ сигнатуры σ , заменив в Φ всякую атомную подформулу вида $x_i \approx f_0(x_{i_0}, \dots, x_{i_{l_0-1}})$ ($f_0(x_{i_0}, \dots, x_{i_{l_0-1}}) \approx x_i$) формулой $(\varphi)^{y_0, \dots, y_{l_0-1}, y_{l_0}}_{x_{i_0}, \dots, x_{i_{l_0-1}}, x_i}$. Тогда (так же как в доказательстве предложения 5.8.2) устанавливается следующий факт: для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ справедливы соотношения

$$\langle \mathfrak{A}, g_0 \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\gamma] \quad (\Phi \equiv_{\langle \mathfrak{A}, g_0 \rangle} \Psi).$$

Следовательно, $\Phi^{\langle \mathfrak{A}, g_0 \rangle}[\bar{z}] = \Psi^{\mathfrak{A}}[\bar{z}]$. Предложение 5.8.4 доказано. \square

Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система.

Определение. k -местный предикат $Q \subseteq A^k$ на A называется Σ -предикатом (на \mathfrak{A}), если существуют Σ -формула Φ и переменные y_0, \dots, y_{k-1} такие, что $Q = \Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$.

Определение. Σ -предикат $Q \subseteq A^k$ называется Δ -предикатом (на \mathfrak{A}), если предикат $A^k \setminus Q$ является Σ -предикатом.

Определение. Функция $g: A^l \rightarrow A$ называется Σ -функцией (на \mathfrak{A}), если ее график Γ_g является Σ -предикатом.

Заметим, что если $g: A^l \rightarrow A$ является Σ -функцией, то ее график будет даже Δ -предикатом. Действительно, если Φ — Σ -формула и $\bar{y} = y_0, \dots, y_l$ — переменные такие, что $\Gamma_g = \Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$, то для Σ -формулы $\Psi \Leftrightarrow \exists z((\Phi)_z^{y_i} \wedge \neg y_i \approx z)$ легко проверить равенство $\Psi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}] = A^{l+1} \setminus \Gamma_g$.

Справедлив следующий аналог предложения 5.8.4.

Предложение 5.8.6. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры σ , $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0}, \dots, f_m^{l_m}, P_0^{k_0}, \dots, P_s^{k_s} \rangle$, $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, g_0, \dots, g_m, Q_0, \dots, Q_s \rangle$ — σ' -обогащение \mathfrak{A} такое, что $g_i, i \leq m$, — Σ -функция на \mathfrak{A} , $Q_j, j \leq s$, — Δ -предикат на \mathfrak{A} . Тогда любой Σ -предикат на \mathfrak{A}' является Σ -предикатом на \mathfrak{A} .

Нам понадобится следующий вариант леммы 5.8.

Лемма 5.8.7. Для любой Σ -формулы Φ можно эффективно найти Σ -формулу $\bar{\Phi}$ той же сигнатуры такую, что $\Phi \equiv_S \bar{\Phi}$ и $FV(\Phi) = FV(\bar{\Phi})$, любая атомарная подформула формулы $\bar{\Phi}$ является атомной, $\bar{\Phi}$ не содержит импликации, все отрицания в $\bar{\Phi}$ встречаются только перед атомными формулами, а любой ограниченный квантор $\bar{\Phi}$ имеет вид $\exists x \leq y$ или $\forall x \leq y$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что Φ не содержит импликации и отрицания в ней встречаются лишь перед атомарными подформулами. Так же, как в лемме 5.8.5, можно получить формулу с теми же свойствами, все ограниченные кванторы которой имеют вид $\exists x \leq y$ или $\forall x \leq y$. Далее определяется преобразование Φ в Φ' (если ранг $\rho(\Phi) > 0$), как в лемме 5.8.5, со следующими уточнениями:

— подформулу $P(t_0, \dots, t_{k-1})$, если она положительно входит в Φ и $\rho(P(t_0, \dots, t_{k-1})) > 0$, заменяем формулой

$$\exists x_0 \dots \exists x_{k-1} \left(\bigwedge_{i < k} x_i \approx t_i \wedge P(x_0, \dots, x_{k-1}) \right),$$

а подформулу вида $\neg P(t_0, \dots, t_{k-1})$ — формулой

$$\exists x_0 \dots \exists x_{k-1} \left(\bigwedge_{i < k} x_i \approx t_i \wedge \neg P(x_0, \dots, x_{k-1}) \right);$$

— подформулу $t \approx f(t_0, \dots, t_{l-1})$ (или $f(t_0, \dots, t_{l-1}) \approx t$), если она положительно входит в Φ и $\rho(f(t_0, \dots, t_{l-1})) > 1$ (или $\rho(t) = \rho(f(t_0, \dots, t_{l-1})) = 1$), заменяем формулой

$$\exists x \exists x_0 \dots \exists x_{l-1} \left(x \approx t \wedge \bigwedge_{i < l} x_i \approx t_i \wedge x \approx f(x_0, \dots, x_{l-1}) \right),$$

а подформулу $\neg t \approx f(t_0, \dots, t_{l-1})$ (или $\neg f(t_0, \dots, t_{l-1}) \approx t$) с теми же условиями на ранги — формулой

$$\exists x \exists x_0 \dots \exists x_{l-1} \left(x \approx t \wedge \bigwedge_{i < l} x_i \approx t_i \wedge \neg x \approx f(x_0, \dots, x_{l-1}) \right).$$

После этих замен получаем Σ -формулу Φ' такую, что $\Phi \equiv_S \Phi'$, $FV(\Phi) = FV(\Phi')$, $\rho(\Phi') < \rho(\Phi)$, удовлетворяющую тем же условиям, что и формула Φ . После $n \leq \rho(\Phi)$ шагов находим требуемую формулу $\bar{\Phi} = \Phi^{(n)}$. \square

Доказательство предложения 5.8.6. Достаточно рассмотреть два случая: $\sigma' = \sigma \cup \langle P_0^{k_0} \rangle$ и $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0} \rangle$.

Случай $\sigma' = \sigma \cup \langle P_0^{k_0} \rangle$. Пусть φ_0, φ_1 — Σ -формулы (сигнатуры σ) и переменные $\bar{y} = y_0, \dots, y_{k_0-1}$ таковы, что $Q_0 = \varphi_0^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$ и $A^{k_0} \setminus Q_0 = \varphi_1^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$. Пусть Φ — Σ -формула сигнатуры σ' и $\bar{z} = z_0, \dots, z_{k_0-1}$ — список различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{z}\}$ и $Q \Leftarrow \Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{z}] \subseteq A^k$ — Σ -предикат на \mathfrak{A}' . Не уменьшая общности, будем предполагать (см. лемму 5.7.2), что формула Φ не содержит импликации и отрицания встречаются в ней только перед атомарными формулами. Предположим также, что все связанные переменные формул φ_0 и φ_1 не встречаются в Φ . Образуем Σ -формулу Ψ , заменяя в Φ каждое положительное вхождение подформулы Φ вида $P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$ на $(\varphi_0)_{t_0, \dots, t_{k_0-1}}^{y_0, \dots, y_{k_0-1}}$, а каждое вхождение подформулы вида $\neg P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$ на $(\varphi_1)_{t_0, \dots, t_{k_0-1}}^{y_0, \dots, y_{k_0-1}}$. Отметим, что $FV(\Psi) \subseteq FV(\Phi)$.

Индукцией по построению Φ без труда устанавливается следующее утверждение: для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ имеет место соотношение $\langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$ ($\Phi \equiv_{\langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle} \Psi$).

Нетривиальными являются лишь случаи $\Phi = P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$ и $\Phi = \neg P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$. Оба они рассматриваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением $\Phi = \neg P_0(t_0, \dots, t_{k_0-1})$. Пусть $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ — интерпретация. Тогда

$$\langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \langle t_0^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_{k_0-1}^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \notin Q_0 \iff$$

$$\begin{aligned} &\iff \langle t_0^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_{k_0-1}^{\mathfrak{A}}[\gamma] \rangle \in A^{k_0-1} \setminus Q_0 (= \varphi_1^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]) \iff \\ &\iff \mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma_{t^{\mathfrak{A}}[\gamma]}] \text{ [где } \gamma_{t^{\mathfrak{A}}[\gamma]}(y_i) = t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma], i < k_0] \iff \\ &\iff \mathfrak{A} \models (\varphi_1)_{\bar{t}}^{\bar{y}}[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]. \end{aligned}$$

Следовательно, $Q = \Phi^{\langle \mathfrak{A}, Q_0 \rangle}[\bar{z}] = \Psi^{\mathfrak{A}}[\bar{z}]$ — Σ -предикат на \mathfrak{A} .

Случай $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0} \rangle$. Пусть $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0} \rangle$ и $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, g_0 \rangle$. Предположим, что Σ -формула (сигнатуры σ) φ и переменные $\bar{y} = y_0, \dots, y_{l_0}$ таковы, что $\Gamma_{g_0} = \varphi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$.

Пусть Φ — Σ -формула сигнатуры σ' и $\bar{z} = z_0, \dots, z_{k-1}$ — список различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{z}\}$ и $Q \doteq \Phi^{\mathfrak{A}'}[\bar{z}]$ — Σ -предикат на \mathfrak{A}' . Предположим, что все связанные переменные формулы φ не встречаются в формуле Φ и последняя удовлетворяет заключению леммы 5.8.7. Образуем Σ -формулу Ψ сигнатуры σ , заменяя в Φ каждое положительное вхождение подформулы вида $u \approx f_0(u_0, \dots, u_{l_0-1})$ (или $f_0(u_0, \dots, u_{l_0-1}) \approx u$) формулой $(\varphi)_{\bar{u}, u}^{\bar{y}}$, а каждое вхождение подформулы вида $\neg u \approx f_0(u_0, \dots, u_{l_0-1})$ (или $\neg f_0(u_0, \dots, u_{l_0-1}) \approx u$) — формулой $\exists x((\varphi)_{\bar{u}, x}^{\bar{y}} \wedge \neg u \approx x)$. Как и выше, индукцией устанавливается следующее утверждение: для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ имеет место соотношение $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, g_0 \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \Psi[\gamma]$. Следовательно, $\Phi^{\mathfrak{A}'}[\bar{z}] = \Psi^{\mathfrak{A}}[\bar{z}]$, и $Q = \Phi^{\mathfrak{A}'}[\bar{z}]$ является Σ -предикатом на \mathfrak{A} . Предложение 5.8.6 доказано. \square

Предложение 5.8.8. Пусть \mathfrak{A} — ограниченная алгебраическая система сигнатуры σ , $\sigma' = \sigma \cup \langle f_0^{l_0}, \dots, f_m^{l_m}, P_0^{k_0}, \dots, P_s^{k_s} \rangle$, $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, g_0, \dots, g_m, Q_0, \dots, Q_s \rangle$ — σ' -обогащение \mathfrak{A} такое, что g_i , $i \leq m$, — Σ -функция на \mathfrak{A} , Q_j , $j \leq s$, — Δ -предикат на \mathfrak{A} . Тогда \mathfrak{A}' — ограниченная алгебраическая система сигнатуры σ' .

Доказательство. Требуется проверить лишь принцип Δ_0 -ограниченности для Δ_0 -формулы сигнатуры σ' . Но согласно предложению 5.8.6 для любой Σ -формулы (не только Δ_0 -формулы) Φ сигнатуры σ' существует Σ -формула Ψ сигнатуры σ такая, что $\Phi \equiv_{\mathfrak{A}'} \Psi$. Следовательно, $\forall x \leq t \exists y \Phi \equiv_{\mathfrak{A}'} \forall x \leq t \exists y \Psi$. По принципу Σ -ограниченности (см. § 5.7) имеем $\forall x \leq t \exists y \Psi \equiv_{\mathfrak{A}'} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Psi$. Но тогда

$$\forall x \leq t \exists y \Phi \equiv_{\mathfrak{A}'} \forall x \leq t \exists y \Psi \equiv_{\mathfrak{A}'} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Psi \equiv_{\mathfrak{A}'} \exists v \forall x \leq t \exists y \leq v \Phi.$$

Предложение 5.8.8 доказано. \square

§ 5.9. Позитивные формулы и монотонные операторы.

Определение. RQ-формула Φ сигнатуры σ называется *позитивной*, если она не содержит ни импликации, ни отрицания, ни ограниченных кванторов всеобщности.

Основное семантическое свойство позитивных формул указано в следующем предложении.

Предложение 5.9.1. *Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — алгебраические системы сигнатуры σ , $\alpha: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — эпиморфизм (гомоморфизм «на»), Φ — позитивная формула, $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A$ — интерпретация в A . Тогда*

$$\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma] \implies \mathfrak{B} \models \Phi[\alpha\gamma]. \quad (5.14)$$

Доказательство. Применим индукцию по построению формулы Φ . Для атомарной формулы Φ соотношение (5.14) справедливо по определению гомоморфизма.

Если (5.14) справедливо для Φ_0 и Φ_1 , то легко проверить, что (5.14) также справедливо для $\Phi_0 \vee \Phi_1$ и $\Phi_0 \wedge \Phi_1$.

Пусть (5.14) справедливо для Φ и $\mathfrak{A} \models \forall x\Phi[\gamma]$. Предположим, что интерпретация $\gamma': FV(\Phi) \rightarrow B$ такова, что $\gamma' \upharpoonright FV(\Phi) \setminus \{x\} = \alpha\gamma$. Поскольку α есть отображение A на B , существует элемент $a \in A$ такой, что $\alpha(a) = \gamma'(x)$. Пусть $\gamma^*: FV(\Phi) \rightarrow A$ — интерпретация такая, что $\gamma^* \upharpoonright FV(\Phi) \setminus \{x\} = \gamma$ и $\gamma^*(x) = a$. Тогда $\alpha\gamma^* = \gamma'$. Так как $\mathfrak{A} \models \forall x\Phi[\gamma]$, верно $\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma^*]$, и согласно индукционному предположению $\mathfrak{B} \models \Phi[\alpha\gamma^*]$ ($\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma']$). Итак, для любой интерпретации $\gamma': FV(\Phi) \rightarrow B$ такой, что $\gamma' \upharpoonright FV(\Phi) \setminus \{x\} = \alpha\gamma$, имеем $\mathfrak{B} \models \Phi[\gamma']$. Поэтому $\mathfrak{B} \models \forall x\Phi[\alpha\gamma]$ и $\forall x\Phi$ удовлетворяет (5.14).

Если Φ обладает свойством (5.14), аналогично проверяется, что $\exists x\Phi$ и $\exists x \leqslant t\Phi$ обладают свойством (5.14). \square

Формула Φ может не быть позитивной, но возможно, что некоторые предикатные символы входят в нее позитивно. В этом случае справедлив некоторый вариант предложения 5.9.1.

Пусть Φ — формула сигнатуры σ такая, что Φ не содержит импликации и отрицания в ней встречаются только перед атомарными подформулами. Будем говорить, что предикатный символ P сигнатуры σ *входит позитивно в Φ* (обозначаем $\Phi(P^+)$), если Φ не имеет подформул вида $\neg P(t_0, \dots, t_{k-1})$ ни для каких σ -термов t_0, \dots, t_{k-1} .

Пусть P входит позитивно в Φ , $\sigma_0 = \sigma \setminus \langle P^k \rangle$, \mathfrak{A}_0 — алгебраическая система сигнатуры σ_0 , $Q \subseteq A_0^k$. Тогда $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle$ есть алгебраическая система сигнатуры σ ($\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle$ — обогащение \mathfrak{A}_0 до σ и $P^{\mathfrak{A}} = Q$). При сделанных предположениях справедливо

Предложение 5.9.2. Если предикат $R \subseteq A_0^k$ таков, что $Q \subseteq R$, то для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A_0$ имеет место импликация $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma] \implies \langle \mathfrak{A}_0, R \rangle \models \Phi[\gamma]$.

Доказательство. Как при доказательстве предложения 5.9.1, применим индукцию по Φ . Отличия состоят лишь в базисе индукции. Если Φ — атомарная формула или отрицание атомарной формулы и Φ не содержит P , то

$$\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A}_0 \models \Phi[\gamma] \iff \langle \mathfrak{A}_0, R \rangle \models \Phi[\gamma].$$

Если Φ содержит P , Φ должна иметь вид $P(t_0, \dots, t_{k-1})$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma] &\implies \langle t_0^{\mathfrak{A}_0}[\gamma], \dots, t_{k-1}^{\mathfrak{A}_0}[\gamma] \rangle \in Q \implies \\ &\implies \langle t_0^{\mathfrak{A}_0}[\gamma], \dots, t_{k-1}^{\mathfrak{A}_0}[\gamma] \rangle \in R \implies \langle \mathfrak{A}_0, R \rangle \models \Phi[\gamma]. \end{aligned}$$

Предложение 5.9.2 доказано. \square

Предложение 5.9.2 позволяет связывать формулами, имеющими позитивные вхождения предикатного символа, некоторые интересные монотонные операторы.

Пусть формула Φ позитивно содержит k -местный предикатный символ P , и пусть $\bar{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ — список попарно различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{x}\}$ (такой список может быть пустым). С формулой $\Phi(P^+)$, списком \bar{x} и алгебраической системой \mathfrak{A}_0 сигнатуры $\sigma_0 = \sigma \setminus \langle P \rangle$ свяжем оператор $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}$ на множестве $\mathcal{P}(A_0^k)$ всех k -местных предикатов на A_0 следующим образом: для $Q \subseteq A_0^k$ полагаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) &\doteq \Phi^{\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle}[\bar{x}] = \{ \langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle \mid \langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma_0] \\ &\quad (= \Phi(a_0, \dots, a_{k-1})) \}. \end{aligned}$$

Из предложения 5.9.2 вытекает монотонность этого оператора:

$$Q \subseteq R \subseteq A_0^k \implies \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) \subseteq \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(R).$$

С оператором $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}$ свяжем последовательность

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\alpha, \dots \quad (\alpha — ординал)$$

k -местных предикатов на A_0 следующим образом:

$$\Gamma_0 \doteq \emptyset, \quad \Gamma_{\alpha+1} \doteq \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Gamma_\alpha), \quad \Gamma_\alpha \doteq \bigcup_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta,$$

где α — предельный ординал. Заметим, что $\alpha \leq \beta$ влечет $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta$. Действительно, в противном случае предположим, что α_0 — наименьший ординал, для которого существует ординал β такой, что $\alpha_0 \leq \beta$ и $\Gamma_{\alpha_0} \not\subseteq \Gamma_\beta$, и β_0 — наименьший ординал, для которого $\alpha_0 \leq \beta_0$ и $\Gamma_{\alpha_0} \not\subseteq \Gamma_{\beta_0}$. Ясно, что $\alpha_0 \neq \beta_0$, т. е. $\alpha_0 < \beta_0$, и α_0 не может быть предельным, так как иначе $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_{\beta_0}$ для всех $\alpha < \alpha_0$ (по выбору наименьшего α_0). Следовательно,

$$\Gamma_{\alpha_0} = \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_{\beta_0},$$

что невозможно. Таким образом, $\alpha_0 = \alpha + 1$ для подходящего α . Покажем, что ординал β_0 также не может быть предельным. Действительно, если β_0 предельный, то

$$\Gamma_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\beta < \beta_0} \Gamma_\beta = \Gamma_{\beta_0},$$

что невозможно. Таким образом, $\beta_0 = \beta + 1$ для подходящего β и $\alpha \leq \beta$, но тогда

$$\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_\beta, \quad \Gamma_{\alpha_0} = \Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Gamma_\alpha) \subseteq \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Gamma_\beta) = \Gamma_{\beta+1} = \Gamma_{\beta_0}.$$

Пришли к противоречию.

Если $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$ для некоторого α , то $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha$ для всех $\beta \geq \alpha$.

Заметим, что найдется ординал α такой, что $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha$. Пусть β — ординал такой, что $\Gamma_\gamma \neq \Gamma_{\gamma+1}$ для всех $\gamma < \beta$ и

$$D_\gamma = \Gamma_{\gamma+1} \setminus \Gamma_\gamma, \quad \gamma < \beta, \quad D = \prod_{\gamma < \beta} D_\gamma.$$

Так как $D_\gamma \neq \emptyset$ для $\gamma < \beta$, по аксиоме выбора существует элемент $f \in D$ такой, что $f: \beta \rightarrow A_0$ и при $\gamma_0 < \gamma_1 < \beta$ из соотношения

$$\Gamma_{\gamma_0} \subset \Gamma_{\gamma_0+1} \subseteq \Gamma_{\gamma_1} \subset \Gamma_{\gamma_1+1}$$

вытекает разнозначность функции f . Следовательно, $|\beta| \leq |A_0|$. Тогда, если α — ординал такой, что его мощность больше мощности A_0 , то $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha+1}$.

Обозначим через Γ_* множество Γ_α для наименьшего ординала α такого, что $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$.

Множество Γ_ является наименьшей неподвижной точкой оператора $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}$, т. е. $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Gamma_*) = \Gamma_*$ и $\Gamma_* \subseteq \Delta$, если предикат $\Delta \subseteq A_0^k$ таков, что $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Delta) = \Delta$.*

Первое свойство имеет место по определению Γ_* . Для доказательства второго свойства индукцией по α устанавливается, что для

любого предиката $\Delta \subseteq A_0^k$ такого, что $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Delta) \subseteq \Delta$, верно соотношение $\Gamma_\alpha \subseteq \Delta$. Действительно, $\Gamma_0 = \emptyset \subseteq \Delta$. Если $\Gamma_\alpha \subseteq \Delta$, то $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Gamma_\alpha) \subseteq \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(\Delta) \subseteq \Delta$. Если ординал α предельный и $\Gamma_\beta \subseteq \Delta$ для всех $\beta < \alpha$, то $\Gamma_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta \subseteq \Delta$.

Таким образом, Γ_* является предикатом на A_0 , однозначно определенным формулой $\Phi(P^+)$ (и набором \bar{x}). Это определение безусловно сложнее формульного определения предикатов, приведенного в § 5.8. Однако в § 7.2 будет рассмотрен важный случай, когда для Σ -формулы $\Phi(P^+)$ предикат Γ_* окажется Σ -предикатом.

В заключение параграфа укажем некоторые свойства ограниченных систем по отношению к Σ -формулам $\Phi(P^+)$.

Предложение 5.9.3. Пусть \mathfrak{A}_0 — произвольная алгебраическая система сигнатуры σ_0 , предикатный символ P входит позитивно в Σ -формулу Φ сигнатуры $\sigma = \sigma_0 \cup \langle P^k \rangle$ и $\bar{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ — список различных переменных такой, что

$$FV(\Phi) \subseteq \{\bar{x}\} = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}.$$

Тогда оператор $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}$ переводит Σ -предикаты на \mathfrak{A}_0 в Σ -предикаты.

Доказательство. Пусть $Q \subseteq A_0^k$ — Σ -предикат, φ — Σ -формула сигнатуры σ_0 такая, что $Q = \varphi^{\mathfrak{A}}[\bar{z}]$, и $\Psi \leftrightharpoons (\Phi(P^+))^P_{\varphi[\bar{z}]}$. Тогда Ψ является Σ -формулой сигнатуры σ_0 и для любой интерпретации $\gamma: \{\bar{x}\} \rightarrow A_0$ имеет место эквивалентность $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A}_0 \models \Psi[\gamma]$. Поэтому $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) = \Phi^{\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle}[\bar{x}] = \Psi^{\mathfrak{A}_0}[\bar{x}]$ — Σ -предикат на \mathfrak{A}_0 . \square

Предложение 5.9.4. Пусть \mathfrak{A}_0 — ограниченная алгебраическая система сигнатуры σ_0 , предикатный символ P ($\notin \sigma_0$) входит в Σ -формулу Φ сигнатуры $\sigma_0 \cup \langle P^k \rangle$ позитивно, $\bar{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ — список различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{x}\}$. Тогда операторы $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}$ и $\Gamma_{\exists u\Phi^{(u)}[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}$ действуют одинаково на Σ -предикатах $Q \subseteq A_0^k$ на \mathfrak{A}_0 .

Доказательство. Пусть $Q = \varphi^{\mathfrak{A}_0}[\bar{y}] \subseteq A_0^k$ для некоторой Σ -формулы сигнатуры σ_0 . Тогда импликация $\exists u\Phi^{(u)} \Rightarrow_S \Phi$ приводит к соотношению $\Gamma_{\exists u\Phi^{(u)}[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) \subseteq \Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q)$. Из доказательства предложения 5.9.3 следуют равенства

$$\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) = \Psi^{\mathfrak{A}_0}[\bar{x}], \quad \Psi = (\Phi)^P_{\varphi[\bar{y}]},$$

$$\Gamma_{\exists u\Phi^{(u)}[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) = \Psi_0^{\mathfrak{A}_0}[\bar{x}], \quad \Psi_0 = (\exists u\Phi^{(u)})^P_{\varphi[\bar{y}]}.$$

Так как \mathfrak{A}_0 ограничена, а Ψ — Σ -формула, имеем

$$\Psi \equiv_{\mathfrak{A}_0} \exists u\Psi^{(u)} = (\exists u\Phi^{(u)})^P_{\varphi^{(u)}[\bar{y}]}.$$

В силу импликации $\varphi^{(u)} \implies_S \varphi$ справедлива импликация

$$(\exists u\Phi^{(u)})_{\varphi^{(u)}[\bar{y}]}^P \implies_S (\exists u\Phi^{(u)})_{\varphi[\bar{y}]}^P = \Psi_0.$$

Следовательно,

$$\Psi \implies_{\mathfrak{A}_0} \Psi_0,$$

$$\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q) = \Psi^{\mathfrak{A}_0}[\bar{x}] \subseteq \Psi_0^{\mathfrak{A}_0}[\bar{x}] = \Gamma_{\exists u\Phi^{(u)}[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q).$$

Поэтому $\Gamma_{\Phi[\bar{x}](Q)}^{\mathfrak{A}_0} = \Gamma_{\exists u\Phi^{(u)}[\bar{x}]}^{\mathfrak{A}_0}(Q)$. \square

Принцип Σ -параметризации. Пусть \mathfrak{A}_0 — ограниченная алгебраическая система сигнатуры σ_0 , предикатный символ P ($\notin \sigma_0$) входит позитивно в Σ -формулу Φ сигнатуры $\sigma = \sigma_0 \cup \langle P^k \rangle$. Предположим, что $\varphi(x, \bar{y}) = \varphi(x, y_0, \dots, y_{k-1})$ — Σ -формула сигнатуры σ_0 ,

$$Q_\varphi \Leftarrow (\exists x\varphi)^{\mathfrak{A}_0}[\bar{y}] = \{\bar{a} \mid \mathfrak{A}_0 \models \exists x\varphi(x, \bar{a})\},$$

$$Q_a \Leftarrow \{\bar{a} \mid \mathfrak{A}_0 \models \varphi(a, \bar{a})\}, \quad a \in A,$$

и из $a \leqslant^{\mathfrak{A}} a'$ следует $Q_a \subseteq Q_{a'}$. Тогда для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A_0$ такой, что $\langle \mathfrak{A}_0, Q_\varphi \rangle \models \Phi[\gamma]$, существует элемент $a_0 \in A$ такой, что $\langle \mathfrak{A}_0, Q_{a_0} \rangle \models \Phi[\gamma]$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать что $\varphi - \Delta_0$ -формула. Действительно,

$$\exists x\varphi(x, \bar{y}) \equiv_{\mathfrak{A}_0} \exists u\exists x \leqslant u\varphi^{(u)}(x, \bar{y}).$$

Если $\varphi_0(u, \bar{y}) \Leftarrow \exists x \leqslant u\varphi^{(u)}(x, \bar{y})$, то

$$Q_{\varphi_0} \Leftarrow \exists u\varphi_0^{\mathfrak{A}_0}[\bar{y}] = \{\bar{a} \mid \mathfrak{A}_0 \models \exists u\varphi_0(u, \bar{a})\} = Q_\varphi,$$

$$Q_a^0 \Leftarrow \{\bar{a} \mid \mathfrak{A}_0 \models \varphi_0(a, \bar{a})\} \subseteq Q_a, \quad a \in A_0,$$

$$Q_a^0 \subseteq Q_{a'}^0, \quad a \leqslant^{\mathfrak{A}_0} a',$$

и φ_0 является Δ_0 -формулой.

Пусть $\Psi \Leftarrow (\Phi(P^+))_{\exists x\varphi(x, \bar{y})[\bar{y}]}^P$. Тогда Ψ — Σ -формула сигнатуры σ_0 , справедливо $FV(\Psi) \subseteq FV(\Phi)$ и для любой интерпретации $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A_0$ имеет место

$$\langle \mathfrak{A}_0, Q_\varphi \rangle \models \Phi[\gamma] \iff \mathfrak{A}_0 \models \Psi[\gamma].$$

Так как \mathfrak{A}_0 ограничена и Ψ — Σ -формула сигнатуры σ_0 , верно $\Psi \equiv_{\mathfrak{A}_0} \exists u\Phi^{(u)}$. Заметим, что $\Psi^{(u)} = (\Phi^{(u)})_{\exists x \leqslant u\varphi(x, \bar{y})[\bar{y}]}^P$. Если интерпретация $\gamma: FV(\Phi) \rightarrow A_0$ такова, что $\langle \mathfrak{A}_0, Q_\varphi \rangle \models \Phi[\gamma]$, то $\mathfrak{A}_0 \models \Psi[\gamma]$ и $\mathfrak{A}_0 \models \exists u\Psi^{(u)}[\gamma]$. Следовательно, существует интерпретация

$\gamma': FV(\Psi) \cup \{u\} \rightarrow A_0$ такая, что $\gamma' \upharpoonright FV(\Psi) = \gamma$ и $\mathfrak{A}_0 \models \Psi^{(u)}[\gamma']$. Если $a_0 \sqsubseteq \gamma'(u)$, то

$$\mathfrak{A}_0 \models (\Phi^{(u)})_{\exists x \leq u \varphi(x, \bar{y})[\bar{y}]}^P[\gamma'], \quad \langle \mathfrak{A}_0, Q'_{a_0} \rangle \models \Phi^{(u)}[\gamma'],$$

где

$$Q'_{a_0} = \{\bar{a} \mid \mathfrak{A}_0 \models \exists x \leq a_0 \varphi(x, \bar{a})\} = \bigcup_{a \leq^{\mathfrak{A}_0} a_0} Q_a \subseteq Q_{a_0}.$$

Так как $\Phi^{(u)} \Rightarrow_S \Phi$, имеем $\langle \mathfrak{A}_0, Q'_{a_0} \rangle \models \Phi[\gamma']$, $\langle \mathfrak{A}_0, Q'_{a_0} \rangle \models \Phi[\gamma]$, а поскольку P входит в Φ позитивно и $Q'_{a_0} \subseteq Q_{a_0}$, заключаем, что $\langle \mathfrak{A}, Q_{a_0} \rangle \models \Phi[\gamma]$. \square

Глава 6

ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

§ 6.1. Генценовская система G

Изученные ранее исчисления представляют собой естественные формализации правил логики. Однако для более глубокого изучения самого понятия доказательства более удобными являются другие формы исчислений. В настоящем параграфе мы изучим одно из таких исчислений G , близкое к исчислению, предложенному Генценом.

Алфавит исчисления G отличается от алфавита исчисления предикатов гильбертовского типа, изученного в гл. 4, отсутствием знаков импликации и равенства. Понятие *формулы исчисления G* отличается от соответствующего понятия формулы ИП $^\Sigma_1$: 1) отсутствием правил образования формул вида $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $t_1 \approx t_2$ и 2) выполнением *условия несмешанности переменных*, которое означает отсутствие переменных, имеющих как свободные, так и связанные вхождения в формулу. *Секвенции G* — это выражения вида $\Gamma \vdash \Theta$, где Γ и Θ — конечные, возможно пустые, последовательности формул исчисления G такие, что для $\Gamma \vdash \Theta$ выполнено условие несмешанности переменных, определяемое для секвенций так же, как и для формул. Соглашения о сокращенной записи формул и некоторые обозначения, используемые ниже, имеют тот же смысл, что и в гл. 4.

Определение. Аксиомами исчисления G являются секвенции вида $\Phi, \Gamma \vdash \Theta, \Phi$, где Φ — атомарная формула, Γ и Θ — последовательности (быть может, пустые) атомарных формул.

Определение. Правилами вывода исчисления G будут следующие:

1.
$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi; \Gamma \vdash \Theta, \Psi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi},$$
2.
$$\frac{\Phi, \Psi, \Gamma \vdash \Theta}{\Phi \wedge \Psi, \Gamma \vdash \Theta},$$
3.
$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Psi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \vee \Psi},$$
4.
$$\frac{\Phi, \Gamma \vdash \Theta; \Psi, \Gamma \vdash \Theta}{\Phi \vee \Psi, \Gamma \vdash \Theta},$$

$$5. \frac{\Phi, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg \Phi},$$

$$6. \frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi}{\neg \Phi, \Gamma \vdash \Theta},$$

$$7. \frac{\Gamma \vdash \Theta, (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash \Theta, \exists x \Phi},$$

где y не входит
свободно в фор-
мулы из Γ и Θ ,

$$9. \frac{\Gamma \vdash \Theta, [\Phi]_y^x}{\Gamma \vdash \Theta, \forall x \Phi}, \quad \text{где } y \text{ не входит}$$

свободно в фор-
мулы из Γ и Θ ,

$$10. \frac{(\Phi)_t^x, \Gamma \vdash \Theta}{\forall x \Phi, \Gamma \vdash \Theta},$$

$$11. \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Phi, \Psi, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, \Psi, \Phi, \Theta},$$

$$12. \frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Delta \vdash \Theta},$$

$$13. \frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Phi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi},$$

$$14. \frac{\Phi, \Phi, \Gamma \vdash \Theta}{\Phi, \Gamma \vdash \Theta}.$$

Правила 1–10 называются *основными*, а правила 11–14 — *структурными*. Структурные правила 11 и 12 называются правилами *перестановки* или *перестановками*, а правила 13 и 14 — правилами *утончения* или *утончениями*. Понятие доказательства (линейного и в виде дерева) определяется так же, как для исчисления предикатов.

Отметим ряд особенностей этого исчисления. Во-первых, это большая симметричность правых и левых частей секвенции $\Gamma \vdash \Theta$ (называемых *заключением* или *сукцедентом* (Θ) и *посылкой* или *антecedентом* (Γ) соответственно). Во-вторых, каждое основное (в отличие от структурных) правило под чертой содержит более сложную формулу, получаемую из формул посылки (эту формулу будем называть *главной формулой правила*). Третья особенность — свойство подформульности — требует введения новых понятий.

На вхождениях I секвенций в доказательство D в виде дерева определим операцию l следующим образом: если I — заключительное вхождение в D , то $l(I) = I$; если I содержится в переходе P над чертой, то $l(I)$ есть вхождение секвенции из перехода P под чертой. На вхождениях J формул в дерево D определим операцию S следующим образом: если J содержится во вхождении I некоторой секвенции, то $S(J)$ входит в секвенцию $l(I)$; если J входит в последовательность Γ или Θ (или Δ) в секвенции I , то $S(J)$ равно тому же вхождению формулы в Γ или Θ (или Δ), но уже в секвенции $l(I)$; для основных правил, если J не входит в Γ и Θ , то $S(J)$ есть главная формула перехода, для структурных правил, если J не входит в Γ , Θ или Δ ,

то в обозначениях правил 11–14 имеем $S(\Phi) = \Phi, S(\Psi) = \Psi$. Если для некоторого положительного n имеем $l^n(I_1) = I_2$, то говорим, что *вхождение I_1 в дереве D расположено выше вхождения I_2* . (Здесь через $l^n(I)$ обозначается значение $l \dots l(I)$, где l повторено n раз.) Если для некоторого положительного n имеем $S^n(J_1) = J_2$, то говорим, что J_1 является *предком* J_2 , а J_2 является *потомком* J_1 .

Если Φ — формула исчисления G , x — переменная, t — терм, то будем говорить, что *терм t свободен для переменной x в формуле Φ* , если Φ не имеет свободных вхождений переменной x или если ни одна переменная терма t не имеет связанных вхождений в Φ .

Расширим понятие подформулы, считая *обобщенными подформулами* формул $\exists x\Phi, \forall x\Phi$ и формулы $(\Phi)_t^x$, где терм t свободен для x в Φ .

Замечание 6.1.1. Если Ψ есть обобщенная подформула формулы Φ и переменная v имеет связанное вхождение в Ψ , то она имеет связанное вхождение и в Φ .

Назовем *булевой сложностью* $\beta(\Phi)$ формулы Φ число вхождений символов из множества $\{\neg, \wedge, \vee\}$ в Φ .

Замечание 6.1.2. Если Ψ является обобщенной подформулой формулы Φ , то $\beta(\Psi) \leq \beta(\Phi)$.

Справедливо следующее свойство подформульности.

Лемма 6.1.3. Отношение предок–потомок удовлетворяет следующим условиям: если вхождение секвенции C_0 находится выше вхождения секвенции C_1 , то для любого вхождения формулы в C_0 существует единственный ее потомок в C_1 ; для любого вхождения формулы в C_1 существует по крайней мере один его предок в C_0 . Любой предок является обобщенной подформулой потомка.

Справедливость леммы легко устанавливается индукцией. \square

Хотя в определении понятий формулы и секвенции G предполагалось условие несмешанности переменных, этого не предполагается в определении доказательства (в виде дерева). Тем не менее, можно даже требовать большего. Будем говорить, что доказательство (в виде дерева) D обладает *свойством чистоты переменных*, если для дерева D выполнено условие несмешанности переменных и для любого перехода в D по правилам 8 или 9 соответствующая переменная u встречается только в секвенциях, находящихся выше заключительной секвенции этого перехода.

Лемма 6.1.4. Для любой доказуемой в G секвенции существует доказательство этой секвенции со свойством чистоты переменных.

Доказательство. Пусть D — доказательство секвенции C в G . Скажем, что переменная u исчезает в переходе P дерева D , если u имеет по крайней мере одно свободное вхождение в секвенцию над чертой и не имеет свободных вхождений в секвенцию под чертой в этом переходе. Заметим, что переменная может исчезать лишь в переходах, соответствующих одному из правил 7–10. Скажем, что переменная u исчезает правильно, если u исчезает в некотором переходе и имеет вхождения в D только в секвенции, находящиеся выше нижней секвенции этого перехода. Заметим, что если переменная u исчезает правильно, то она имеет только свободные вхождения в дереве D . Если все исчезающие переменные в D исчезают правильно, то D имеет свойство чистоты переменных. Если D имеет неправильно исчезающие переменные, то найдем переход P , в котором некоторая переменная u исчезает неправильно; пусть D' — поддерево D , соответствующее нижней секвенции этого перехода, т. е. дерево, состоящее из этой секвенции и секвенций и переходов, находящихся выше нее в D . Выберем переменную z , отличную от всех переменных в D , и заменим в D поддерево D' на дерево $[D']_z^u$, которое получается из D' заменой каждого вхождения формулы Ψ на $[\Psi]_z^u$. Легко проверить, что получившееся дерево D^* остается доказательством и это доказательство таково, что переменная z исчезает в D^* правильно. Ясно, что за конечное число таких преобразований (D на D^*) мы получим доказательство, в котором все исчезновения переменных правильные. \square

Следующая лемма позволит ввести в исчисление G полезное допустимое правило (правило утончения).

Лемма 6.1.5. *Пусть $\Gamma \vdash \Theta$ — доказуемая секвенция и Φ — формула такая, что $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ является секвенцией G , тогда секвенции $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ доказуемы в G .*

Доказательство. Пусть x_0, \dots, x_n — все свободные переменные формулы Φ . Пусть D — доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Theta$ со свойством чистоты переменных. Как видно из доказательства леммы 6.1.4, можно предполагать, что все исчезающие переменные в D отличны от x_0, \dots, x_n .

Докажем лемму индукцией по построению формулы Φ . Если Φ атомарна, а (D, Φ) — дерево, полученное заменой каждого вхождения секвенции $\Delta \vdash \Lambda$ на вхождения секвенции $\Delta, \Phi \vdash \Lambda$, то (при сформулированных выше предположениях относительно D) дерево (D, Φ) есть доказательство секвенции $\Gamma, \Phi \vdash \Theta$. Применяя структурное правило перестановки 12 несколько раз, получим доказательство секвенции $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$. Аналогично определяется дерево (Φ, D) ($\Delta \vdash \Lambda$ заменяется

на $\Delta \vdash \Phi, \Lambda$, которое есть доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Phi, \Theta$; использование правила 11 завершает доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$.

Пусть $\Phi = \Phi_0 \vee \Phi_1$. По индукции из доказуемости $\Gamma \vdash \Theta$ следует доказуемость секвенций $\Phi_0, \Gamma \vdash \Theta; \Phi_1, \Gamma \vdash \Theta; \Gamma \vdash \Theta, \Phi_0; \Gamma \vdash \Theta, \Phi_0, \Phi_1$, тогда квазивыводы

$$\frac{\Phi_0, \Gamma \vdash \Theta; \Phi_1, \Gamma \vdash \Theta}{\Phi_0 \vee \Phi_1, \Gamma \vdash \Theta}, \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi_0, \Phi_1}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi_0 \vee \Phi_1}$$

показывают доказуемость секвенций $\Phi_0 \vee \Phi_1, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Phi_0 \vee \Phi_1$. Аналогично проверяется утверждение для $\Phi = \Phi_0 \wedge \Phi_1$ и $\Phi = \neg \Phi_0$. Для формул вида $\exists x\Phi, \forall x\Phi$ выбираем переменную y , не имеющую вхождений в $\exists x\Phi, \Gamma, \Theta$, и применяем индукционное предположение к формуле $[\Phi]_y^x$. Тогда, например, из доказуемости $\Gamma \vdash \Theta$ следует доказуемость $[\Phi]_y^x, \Gamma \vdash \Theta$, и квазивывод

$$\frac{[\Phi]_y^x, \Gamma \vdash \Theta}{\exists x\Phi, \Gamma \vdash \Theta}$$

показывает, что $\exists x\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ тоже доказуема. \square

В заключение отметим ряд простых свойств, которыми в дальнейшем будем пользоваться без явного на них указания.

1. Если $\frac{\Gamma \vdash \Theta; \Lambda \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Theta'}$ есть переход, соответствующий одному из правил вывода, то для любой формулы Φ такой, что $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Lambda \vdash \Phi, \Delta$ являются секвенциями G ,

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Theta; \Lambda \vdash \Phi, \Delta, \quad \Gamma, \Phi \vdash \Theta; \Lambda, \Phi \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Phi, \Theta'}, \quad \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Theta; \Lambda, \Phi \vdash \Delta}{\Gamma', \Phi, \vdash \Theta'}$$

суть переходы, соответствующие тому же правилу вывода.

2. Если $\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma' \vdash \Theta'}$ — переход, соответствующий одному из правил вывода, Φ — формула такая, что $\Gamma, \Phi \vdash \Theta$ — секвенция G и переменные x и y не свободны в Φ в случае, когда этот переход соответствует правилу 8 или 9, то

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \Theta \quad \Gamma, \Phi \vdash \Theta}{\Gamma' \vdash \Phi, \Theta'}, \quad \frac{\Gamma, \Phi \vdash \Theta}{\Gamma', \Phi \vdash \Theta'}$$

— переходы, соответствующие тому же правилу вывода.

3. Если $\frac{\Gamma \vdash \Theta (\Lambda \vdash \Delta)}{\Gamma' \vdash \Theta'}$ — переход, соответствующий одному из правил вывода, и Φ входит в Γ' (Θ'), то переход

$$\frac{\Gamma^* \vdash \Theta (\Lambda^* \vdash \Delta)}{\Gamma'^* \vdash \Theta'} \left(\frac{\Gamma \vdash \Theta^* (\Lambda \vdash \Delta^*)}{\Gamma' \vdash \Theta'^*} \right),$$

где Γ^* , Λ^* (Θ^* , Δ^*) получены вычеркиванием из Γ , Λ (Θ , Δ) предков фиксированного вхождения Φ в Γ' (Θ'), а Γ'^* (Θ'^*) получено из Γ' (Θ') вычеркиванием этого вхождения Φ , является либо переходом, соответствующим тому же правилу вывода, либо тривиальным переходом (т. е. секвенции над чертой совпадают с нижней секвенцией этого перехода).

Упражнения

- Показать, что для любой формулы Φ исчисления предикатов ИП^Σ существует эквивалентная ей формула Ψ , удовлетворяющая условию несмешанности переменных.
- Проверить, что любая формула ИП^Σ , находящаяся в пренексной нормальной форме, удовлетворяет условию несмешанности переменных.
- Расширим язык исчисления G , допуская формулы и секвенции и без условия несмешанности переменных. Установить, что тождественно истинная секвенция $P(x) \vdash \exists y \forall x P(y)$ не доказуема в получившемся исчислении G^* .
- Показать, что если Ψ — собственная обобщенная подформула формулы $\mathbf{Q}x\Phi$, где \mathbf{Q} — квантор, то существует терм t , свободный для x в Φ и такой, что Ψ — обобщенная подформула формулы $(\Phi)_t^x$.

§ 6.2. Обратимость правил

Большинство правил вывода исчисления G обладают еще одним примечательным свойством, которое можно использовать при поиске вывода в исчислении. Свойство это — обратимость, выражаяющаяся (несколько огрубленно) в том, что секвенция, стоящая под чертой в правиле, доказуема тогда и только тогда, когда доказуемы секвенции (секвенция), стоящие над чертой.

Сформулируем и докажем это свойство сначала для пропозициональных правил.

Предложение 6.2.1. 1). *Если доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi$, то доказуемы и секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Gamma \vdash \Theta, \Psi$.*

2). *Если доказуема секвенция $\Phi \wedge \Psi, \Gamma \vdash \Theta$, то доказуема и секвенция $\Phi, \Psi, \Gamma \vdash \Theta$.*

3). *Если доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi \vee \Psi$, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Psi$.*

4). *Если доказуема секвенция $\Phi \vee \Psi, \Gamma \vdash \Theta$, то доказуемы и секвенции $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$ и $\Psi, \Gamma \vdash \Theta$.*

5). Если доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \neg\Phi$, то доказуема и секвенция $\Phi, \Gamma \vdash \Theta$.

6). Если доказуема секвенция $\neg\Phi, \Gamma \vdash \Theta$, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$.

Доказательство. Проверка всех утверждений предложения утомительна и однообразна. Поэтому докажем типичные случаи, например, утверждения 1) и 6). Проверку будем вести индукцией по высоте доказательства (см. также доказательство леммы 1.9.5).

Утверждение 1) будем доказывать в чуть более общей форме и только для формулы Φ : если секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi, \Lambda$ доказуема, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Lambda$, причем существует доказательство с меньшим числом переходов, чем в доказательстве исходной.

Пусть доказательство D секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi, \Lambda$ имеет вид

$$\frac{D_0; D_1}{C}.$$

Если $\Phi \wedge \Psi$ — главная формула последнего перехода, то D_0 — доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Lambda$ (в этом случае Λ — пустая последовательность формул) и D_0 имеет меньше переходов, чем D .

Если $\Phi \wedge \Psi$ — не главная формула последнего перехода, то заключительные секвенции C_0 и C_1 доказательств D_0 и D_1 имеют вид $\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi \wedge \Psi, \Lambda_0$ и $\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi \wedge \Psi, \Lambda_1$ соответственно, где выделенные вхождения $\Phi \wedge \Psi$ в C_0 и C_1 — это предки рассматриваемого вхождения формулы $\Phi \wedge \Psi$ в секвенцию C . По индукционному предположению существуют доказательства D'_0 и D'_1 секвенций $\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi, \Lambda_0$ и $\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi, \Lambda_1$ соответственно. Тогда дерево секвенций

$$\frac{D'_0; D'_1}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Lambda}$$

будет доказательством. (Так как $\Phi \wedge \Psi$ не была главной формулой перехода

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi \wedge \Psi, \Lambda_0; \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi \wedge \Psi, \Lambda_1}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi, \Lambda},$$

то переход

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi, \Lambda_0; \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \Phi, \Lambda_1}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Lambda}$$

осуществляется по тому же правилу, что и первый.)

Пусть доказательство секвенции C имеет вид

$$\frac{D_0}{C}.$$

Если последний переход осуществляется не по правилу 13, примененному к $\Phi \wedge \Psi$, а $C_0 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi \wedge \Psi, \Lambda_0$ — заключительная

секвенция доказательства D_0 , то по индукционному предположению существует доказательство D'_0 секвенции $\Gamma \vdash \Theta_0, \Phi, \Lambda_0$ и дерево

$$\frac{D'_0}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Lambda}$$

есть доказательство.

Пусть последний переход в дереве D есть

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi, \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi}.$$

По индукционному предположению существует доказательство D'_0 секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi, \Phi$, причем число переходов доказательства D'_0 меньше числа переходов D_0 . Снова по индукционному предположению существует доказательство D''_0 секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi, \Phi$. Тогда

$$\frac{D''_0}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi}$$

есть нужное доказательство.

Докажем теперь утверждение 6). Пусть D — доказательство секвенции $C_0 = \neg\Phi, \Gamma \vdash \Theta$; по лемме 6.1.4 можно считать, что доказательство D обладает свойством чистоты переменных. Перейдем от дерева D к дереву D' , сделав следующие преобразования: заменяем каждое вхождение секвенции $C = \Lambda \vdash \Phi, \Delta$ на вхождение секвенции $C' = \Lambda' \vdash \Phi, \Delta'$, где Λ' и Δ' получаются из Λ и Δ вычеркиванием всех предков формулы $\neg\Phi$ заключительного вхождения секвенции C_0 , имеющих вид Φ или $\neg\Phi$. (Замечание. Легко с помощью индукции проверить, что предок формулы $\neg\Phi$ вида $\neg\Phi$ может быть только в левой части секвенции, а предок вида Φ — только в правой части.) Проверим, что D' — квазивывод секвенции $\Gamma \vdash \Phi, \Theta$. Это, очевидно, достаточно для доказуемости секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$. Если $C = \Lambda \vdash \Delta$ — аксиома, то $\Lambda' = \Lambda$; если последняя формула из Δ есть предок $\neg\Phi$ вида Φ , то $\Lambda' \vdash \Phi, \Delta'$ получается из аксиомы $\Lambda \vdash \Delta$ применением только правила перестановки; если последняя формула из Δ не есть предок $\neg\Phi$ вида Φ , то $\Lambda' \vdash \Delta'$ — аксиома и $\Lambda' \vdash \Phi, \Delta'$ получается из нее правилом утончения (лемма 6.1.5) и перестановками.

Посмотрим теперь на переходы дерева D' . Легко проверяется, что если в переходе дерева D ни один предок формулы $\neg\Phi$ вида Φ или $\neg\Phi$ не является главной формулой, то соответствующий переход в D' будет осуществляться по тому же правилу вывода. Рассмотрим теперь случаи, когда предок $\neg\Phi$ вида Φ или $\neg\Phi$ является главной формулой перехода. Тогда этот переход может быть только по правилам 1, 3, 5, 6, 7, 9 или по структурным правилам 11–14.

Разбор всех случаев вряд ли поучителен. Рассмотрим случаи применения правил 1, 5, 6, 9, 13.

Пусть переход в D имеет вид

$$\frac{\Delta \vdash \Lambda, \Psi; \Delta \vdash \Lambda, X}{\Delta \vdash \Lambda, \Psi \wedge X}$$

и $\Phi = \Psi \wedge X$ есть предок $\neg\Phi$, тогда переход в D' будет

$$\frac{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda', \Psi; \Delta' \vdash \Phi, \Lambda', X}{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda'}$$

и нижняя секвенция может быть получена из верхних правилами введения конъюнкции (1), перестановки (11) и сокращения (13).

Пусть переход в D имеет вид

$$\frac{\Psi, \Delta \vdash \Lambda}{\Delta \vdash \Lambda, \neg\Psi}$$

и $\Phi = \neg\Psi$ есть предок $\neg\Phi$, тогда переход в D' будет

$$\frac{\Psi, \Delta' \vdash \Phi, \Lambda'}{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda'},$$

но так как $\Phi = \neg\Psi$, то нижняя секвенция получается из верхней применением правил введения отрицания (5), перестановки (11) и сокращения (13).

Пусть переход в D имеет вид

$$\frac{\Delta \vdash \Lambda, \Phi}{\neg\Phi, \Delta \vdash \Lambda},$$

а Φ и $\neg\Phi$ — предки формулы $\neg\Phi$ (из заключительной секвенции), тогда соответствующий переход в D' будет

$$\frac{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda'}{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda'},$$

т. е. тривиален.

Пусть переход в D имеет вид

$$\frac{\Delta \vdash \Lambda, [\Psi]_y^x}{\Delta \vdash \Lambda, \forall x \Psi}$$

и $\Phi = \forall x \Psi$ — предок $\neg\Phi$, тогда соответствующий перевод в D' будет

$$\frac{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda', [\Psi]_y^x}{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda'}$$

и нижняя секвенция получается из верхней применением правил 9 (это применение законно, так как Δ' и Λ' являются частями Δ и Λ и y отлично от всех свободных переменных формулы Φ по свойству чистоты переменных в D), 11 и 13.

Пусть, наконец, переход в D таков:

$$\frac{\Delta \vdash \Lambda, \Phi, \Phi}{\Delta \vdash \Lambda, \Phi}$$

и Φ — предок $\neg\Phi$, тогда в D' соответствующий переход

$$\frac{\Delta' \vdash \Phi, \Lambda'}{\Delta' \vdash \neg\Phi, \Lambda'}$$

будет тривиальным. \square

Обратимся теперь к кванторным правилам.

Предложение 6.2.2. 1). *Если в G доказуема секвенция $\exists x\Phi, \Gamma \vdash \Theta$, то для любого терма t такого, что $(\Phi)_t^x, \Gamma \vdash \Theta$ — секвенция G , эта секвенция доказуема в G .*

2). *Если доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, \forall x\Phi$, то для любого терма t такого, что $\Gamma \vdash \Theta, (\Phi)_t^x$ — секвенция G , эта секвенция доказуема в G .*

Доказательства этих утверждений аналогичны, поэтому приведем только доказательство утверждения 2).

Пусть y_0, \dots, y_k — все свободные переменные терма t и пусть D — доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \forall x\Phi$, обладающее свойством чистоты переменных и такое, что любая переменная, исчезающая в этом доказательстве, отлична от переменных y_0, \dots, y_k . Пусть $[\Phi]_{z_0}^x, \dots, [\Phi]_{z_s}^x$ — все предки вида $[\Phi]_y^x$ вхождения формулы $\forall x\Phi$ в заключительную секвенцию. Построим дерево секвенции D' следующим образом. Каждое вхождение секвенции C в D заменяем на вхождение секвенции C' , полученной из C заменой всех предков формулы $\forall x\Phi$ вида $\forall x\Phi$ на $(\Phi)_t^x$ и подстановкой терма t вместо всех вхождений переменных z_0, \dots, z_s . Легко проверяется, что все начальные секвенции дерева D' являются аксиомами, а все переходы D' либо совершаются по тем же правилам, что и в соответствующем переходе D , либо являются тривиальными переходами. Последнее случается, когда в D соответствующий переход есть

$$\frac{\Delta \vdash \Lambda, [\Phi]_{z_i}^x}{\Delta \vdash \Lambda, \forall x\Phi}$$

и $\forall x\Phi$ — предок формулы $\forall x\Phi$ заключительной секвенции. Таким образом, D' есть квазивывод секвенции $\Gamma \vdash \Theta, (\Phi)_t^x$. \square

Следствие 6.2.3. Пусть переменная y не имеет вхождений ни в одну из формул секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \forall x\Phi$; эта секвенция (секвенция $\exists x\Phi, \Gamma \vdash \Theta$) доказуема тогда и только тогда, когда доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Theta, [\Phi]_y^x$ (секвенция $[\Phi]_y^x, \Gamma \vdash \Theta$). \square

Для правил 7 и 10 хорошей формулировки свойства обратимости нет (см. упражнение 1), хотя оно справедливо в некотором «распределенном по всему доказательству» виде (ср. доказательство теоремы об устраниении сечения в следующем параграфе).

Упражнения

1. Доказать, что не существует термов t_0, \dots, t_k таких, что секвенция $\exists xP(x) \vdash (P)_{t_0}^x, \dots, (P)_{t_k}^x$ доказуема, хотя секвенция $\exists xP(x) \vdash \exists xP(x)$ доказуема.
2. Доказать в G секвенцию $\exists zP(z) \vdash \exists y \forall xP(y)$.
3. Показать, что в исчислении G^* (см. упражнение 3 § 6.1) предложение 6.2.2 несправедливо. (Указание. Воспользоваться упражнением 2 и упражнением 3 из § 6.1.)

§ 6.3. Сравнение исчислений ИП $^\Sigma$ и G

В этом параграфе докажем, что секвенция исчисления ИП $^\Sigma$, которая является и секвенцией исчисления G (т. е. не содержит знаков импликации \rightarrow и равенства \approx и удовлетворяет условию несмешанности переменных), доказуема в ИП $^\Sigma$ тогда и только тогда, когда она доказуема в G .

В основе доказательства этого утверждения лежит следующая важная теорема об исчислении G .

Теорема 6.3.1 (об устраниении сечения). Пусть $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Phi, \Lambda \vdash \Delta$ – доказуемые секвенции исчисления G . Если $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$ – секвенция исчисления G , то она доказуема.

Доказательство. Докажем теорему сначала для атомарной формулы Φ индукцией по числу существенных переходов в доказательстве секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$, понимая под существенными переходами те переходы, которые осуществляются по правилам, отличным от правил перестановки 11 и 12. Если $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ имеет доказательство без существенных переходов, то $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ отличается от аксиом только перестановкой формул. Рассмотрим два возможных случая.

1. $\Phi \in \Gamma$; тогда секвенция $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta$ может быть получена из (доказуемой) секвенции $\Phi, \Lambda \vdash \Delta$ применением производного правила утончения (лемма 6.1.5) и правил перестановки.

2. Существует формула Ψ такая, что $\Psi \in \Gamma$ и $\Psi \in \Theta$; тогда секвенция $\Gamma \vdash \Theta$ доказуема (перестановка аксиомы) и секвенция $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta; \Theta$ получается из нее утончениями и перестановками.

Предположим, что для секвенций $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$, имеющих доказательство с менее чем $n > 0$ существенными переходами, теорема справедлива. Пусть D — доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$, имеющее n существенных переходов; будем предполагать, что доказательство D обладает свойством чистоты переменных.

Рассмотрим самый нижний существенный переход в доказательстве D . Возможны следующие случаи.

1°. Переход имеет вид

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta'_0, \Phi, \Theta''_0; \Gamma_1 \vdash \Theta'_1, \Phi, \Theta''_1}{\Gamma' \vdash \Theta', \Phi, \Theta''}. \quad (6.1)$$

Здесь Γ' — перестановка Γ ; Θ', Θ'' — перестановка Θ ; указанные вхождения формулы Φ являются предками вхождения Φ в заключительную секвенцию $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$. Секвенции $\Gamma_0 \vdash \Theta'_0, \Theta''_0, \Phi$ и $\Gamma_1 \vdash \Theta'_1, \Theta''_1, \Phi$ имеют доказательство с числом существенных переходов $< n$ (так как они получаются перестановкой из секвенций $\Gamma_0 \vdash \Theta'_0, \Phi, \Theta''_0$ и $\Gamma_1 \vdash \Theta'_1, \Phi, \Theta''_1$). Поэтому доказуемы секвенции $\Gamma_0, \Lambda \vdash \Delta, \Theta'_0, \Theta''_0$ и $\Gamma_1, \Lambda \vdash \Delta, \Theta'_1, \Theta''_1$. Дерево секвенций

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_0, \Lambda \vdash \Delta, \Theta'_0, \Theta''_0; \Gamma_1, \Lambda \vdash \Delta, \Theta'_1, \Theta''_1 \\ \hline \Gamma', \Lambda \vdash \Delta, \Theta', \Theta'' \end{array}}{\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta}$$

является квазивыводом, так как атомарная формула Φ не является главной формулой перехода (6.1).

2°. Переход имеет вид

$$\frac{\Gamma' \vdash \Theta', \Phi, \Phi}{\Gamma' \vdash \Theta, \Phi}.$$

Здесь Γ' — перестановка Γ , Θ' — перестановка Θ , а указанные вхождения Φ являются предками вхождения Φ в заключительную секвенцию. Если D' — поддерево дерева D , определенное вхождением в D секвенции $\Gamma' \vdash \Theta', \Phi, \Phi$, то пусть D'' получается из D' вычеркиванием в каждой секвенции всех предков правого вхождения формулы Φ заключительной секвенции $\Gamma' \vdash \Theta', \Phi, \Phi$. На вершинах дерева D'' будут секвенции, отличающиеся от аксиом только перестановкой. Переходы будут либо тривиальны, либо происходить в соответствии с теми же правилами, что и в D' . Простой перестройкой из D'' можно получить доказательство секвенции $\Gamma' \vdash \Theta', \Phi$ (а следовательно, и доказательство секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$) с числом существенных переходов, равным

числу существенных переходов в D' . Так как число существенных переходов в D' меньше чем в D , то по индукционному предположению секвенция $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$ доказуема.

3°. Переход имеет вид

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta'_0, \Phi, \Theta''_0}{\Gamma \vdash \Theta', \Phi, \Theta''}.$$

Здесь Γ' — перестановка Γ ; Θ', Θ'' — перестановка Θ ; указанные вхождения Φ являются предками Φ из заключительной секвенции дерева D и Φ не является главной формулой этого перехода.

Секвенция $\Gamma_0 \vdash \Theta'_0, \Theta''_0, \Phi$ получается из $\Gamma_0 \vdash \Theta'_0, \Phi, \Theta''_0$ перестановкой, поэтому эта секвенция имеет доказательство с числом существенных переходов $n - 1$. Тогда по индукционному предположению секвенция $\Gamma_0, \Lambda \vdash \Delta, \Theta'_0, \Theta''_0$ доказуема. Дерево секвенций

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_0, \Lambda \vdash \Delta, \Theta'_0, \Theta''_0 \\ \hline \Gamma', \Lambda \vdash \Delta, \Theta', \Theta'' \end{array}}{\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta}$$

есть квазивывод.

Итак, для секвенций $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ с атомарной формулой Φ теорема установлена.

Продолжим доказательство теоремы, применяя индукцию по построению формулы Φ . Предполагая, что для собственных (т. е. не равных Φ) обобщенных подформул формулы Φ и любых $\Gamma, \Lambda, \Theta, \Delta$ теорема справедлива, установим ее справедливость и для Φ .

Пусть $\Phi = \Psi \wedge X$; $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Phi, \Lambda \vdash \Delta$ — доказуемые секвенции, а $\Gamma, \Lambda \vdash \Theta, \Phi$ — секвенция исчисления G . По свойству обратимости (предложение 6.2.1) доказуемы и секвенции $\Gamma \vdash \Theta, \Psi$; $\Gamma \vdash \Theta, X$; $\Psi, X, \Lambda \vdash \Delta$. Используя индукционное предположение, получаем, что доказуемы и секвенции $\Gamma, X, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$; $X, \Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$; $\Gamma, \Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$, наконец, доказуема секвенция $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$.

Случай $\Phi = \Psi \vee X$, $\Phi = \neg \Psi$ разбираются аналогично.

Пусть теперь $\Phi = \forall x \Psi$; $\Gamma \vdash \Theta, \Phi$ и $\Phi, \Lambda \vdash \Delta$ — доказуемые секвенции, $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$ — секвенция исчисления G . Пусть D — доказательство секвенции $\Phi, \Lambda \vdash \Delta$. Будем предполагать, что D обладает свойством чистоты переменных и что любая переменная y , которая исчезает в D , отлична от всех переменных формул списка Γ, Θ . Установим индукцией по глубине вхождения в дерево D , что для любого вхождения $\Lambda' \vdash \Delta'$ секвенции в D секвенция $\Lambda^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta'$ доказуема, где Λ^* получается из Λ' вычеркиванием всех предков формулы Φ заключительной секвенции вида Φ .

Ясно, что для самых верхних вхождений ($\Lambda' \vdash \Delta'$ — аксиома) соответствующая секвенция $\Lambda', \Gamma \vdash \Theta, \Delta'$ доказуема (получается применением правила утончения). Рассмотрим переход в D

$$\frac{\Lambda_0 \vdash \Delta_0; \Lambda_1 \vdash \Delta_1}{\Lambda' \vdash \Delta'}$$

и предположим, что соответствующие верхним вхождениям секвенции $\Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0$ и $\Lambda_1^*, \Gamma \vdash \Theta_1, \Delta_1$ доказуемы, тогда

$$\frac{\Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Lambda_0; \Lambda_1^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_1}{\Lambda^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta'}$$

как нетрудно проверить, будет переходом по тому же правилу вывода и, следовательно, квазивыводом. Аналогично обстоит дело для однопосыльочных переходов, за исключением переходов вида

$$\frac{(\Psi)_t^x, \Lambda_0 \vdash \Delta_0}{\forall x \Psi, \Lambda_0 \vdash \Delta_0},$$

где вхождение $\Phi = \forall x \Psi$ в нижнюю секвенцию есть предок формулы Φ заключительной секвенции дерева D . Вхождениям в этот переход соответствуют секвенции $(\Psi)_t^x, \Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0$ и $\Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0$. Предположим, что секвенция $(\Psi)_t^x, \Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0$ доказуема. По условию теоремы $\Gamma \vdash \Theta, \forall x \Psi$ — доказуемая секвенция, тогда по предложению 6.2.2 будет доказуема и секвенция $\Gamma \vdash \Theta, (\Psi)_t^x$. Так как $(\Psi)_t^x$ является собственной обобщенной подформулой формулы $\Phi = \forall x \Psi$, то, применяя индукционное предположение о справедливости теоремы для собственных обобщенных подформул формулы Φ к доказуемым секвенциям $(\Psi)_t^x, \Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0$ и $\Gamma \vdash \Theta, (\Psi)_t^x$, получаем, что секвенция $\Gamma, \Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0, \Theta$ доказуема. Используя правила перестановок и сокращения, из доказуемости последней секвенции получаем доказуемость секвенции $\Lambda_0^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta_0$.

Итак, для каждого вхождения секвенции $\Lambda' \vdash \Delta'$ в D соответствующая секвенция $\Lambda^*, \Gamma \vdash \Theta, \Delta'$ доказуема. Заключительной секвенции дерева D будет соответствовать доказуемая секвенция $\Lambda, \Gamma \vdash \Theta, \Delta$. Используя правила перестановки, отсюда получаем доказуемость секвенции $\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta$.

Случай, когда Φ имеет вид $\exists x \Psi$, рассматривается аналогично. \square

Замечание 6.3.2. Можно считать, что теорема 6.3.1 устанавливает допустимость следующего правила — правила сечения

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi; \Phi, \Lambda \vdash \Delta}{\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Theta}.$$

Приступим к доказательству основного утверждения.

Если $\Theta = \Phi_1, \dots, \Phi_n$ — список формул, то через $\neg\Theta$ будем обозначать список $\neg\Phi_1, \dots, \neg\Phi_n$.

Предложение 6.3.3. Если секвенция $C = \Gamma \vdash \Theta$ доказуема в G, то секвенция $C' = \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$.

Доказательство. Доказывать будем индукцией по высоте доказательства в исчислении G. Если $\Phi, \Gamma \vdash \Theta, \Phi$ — аксиома, то секвенция $\Phi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \Phi$ доказуема в ИП $^\Sigma$ с использованием аксиомы $\Phi \vdash \Phi$ и правила добавления лишней посылки; наконец,

$$\frac{\Phi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \Phi; \neg\Phi \vdash \neg\Phi}{\Phi, \Gamma, \neg\Theta, \neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}$$

есть квазивывод нужной секвенции в ИП $^\Sigma$.

Теперь для каждого правила вывода исчисления G нужно проверить, что если секвенции C_0 (и C_1), стоящие над чертой в правиле, таковы, что C'_0 (и C'_1) доказуемы в ИП $^\Sigma$, то и секвенция C' , соответствующая секвенции C под чертой, тоже доказуема в ИП $^\Sigma$. Проверка всех правил достаточно утомительна, поэтому проверим это только для правил 2, 3, 5, 7, 8, 10:

2). Пусть секвенция $\Phi, \Psi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$, тогда следующее дерево секвенций есть квазивывод в ИП $^\Sigma$:

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi}; \frac{\frac{\Phi, \Psi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}{\Phi \wedge \Psi, \Psi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}}{\Phi \wedge \Psi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \neg\Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \neg\Psi}}{\Phi \wedge \Psi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}.$$

3). Пусть секвенция $\Gamma, \neg\Theta, \neg\Phi, \neg\Psi \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$, тогда следующее дерево секвенций есть квазивывод в ИП $^\Sigma$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Gamma, \neg\Theta, \neg\Phi, \neg\Psi \vdash \mathfrak{F}}}{\Gamma, \neg\Theta, \neg\Phi \vdash \Psi}}{\Gamma, \neg\Theta, \neg\Phi \vdash \Phi \vee \Psi}}{\Gamma, \neg\Theta \vdash \Phi \vee \Psi; \quad \frac{\neg(\Phi \vee \Psi) \vdash \neg(\Phi \vee \Psi)}{\Gamma, \neg\Theta, \neg(\Phi \vee \Psi) \vdash \mathfrak{F}}}.$$

5). Пусть секвенция $\Phi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$, тогда

$$\frac{\frac{\frac{\Phi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma, \neg\Theta \vdash \neg\Phi}}{\neg\neg\Phi \vdash \neg\neg\Phi}}{\Gamma, \neg\Theta, \neg\neg\Phi \vdash \mathfrak{F}}$$

есть квазивывод в ИП $^\Sigma$.

7). Пусть секвенция $\Gamma, \neg\Theta, \neg(\Phi)_t^x \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$, тогда

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg\Theta, \neg(\Phi)_t^x \vdash \mathfrak{F}}{\Gamma, \neg\Theta \vdash (\Phi)_t^x} \quad \Gamma, \neg\Theta \vdash \exists x\Phi; \quad \neg\exists x\Phi \vdash \neg\exists x\Phi}{\Gamma, \neg\Theta, \neg\exists x\Phi \vdash \mathfrak{F}}}{\text{есть квазивывод в ИП}^\Sigma}.$$

8). Пусть секвенция $[\Phi]_y^x, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$, переменная y не имеет свободных вхождений в $\Gamma, \neg\Theta$, тогда

$$\frac{\frac{\frac{[\Phi]_y^x, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}{\exists y[\Phi]_y^x, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}} \quad \exists x\Phi \vdash \exists y[\Phi]_y^x; \quad \Gamma, \neg\Theta \vdash \neg\exists y[\Phi]_y^x}{\exists x\Phi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}}{\text{есть квазивывод в ИП}^\Sigma}.$$

10). Пусть секвенция $(\Phi)_t^x, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}$ доказуема в ИП $^\Sigma$, тогда

$$\frac{(\Phi)_t^x, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}{\forall x\Phi, \Gamma, \neg\Theta \vdash \mathfrak{F}}$$

есть квазивывод в ИП $^\Sigma$.

Проверка оставшихся правил вполне аналогична уже рассмотренным. Индукция по высоте доказательства в G завершает доказательство предложения. \square

Предложение 6.3.4. *Если секвенция C исчисления G доказуема в ИП $^\Sigma$, то она доказуема и в исчислении G .*

Доказательство. Установим сначала доказуемость в G аксиом $\Phi \vdash \Phi$ исчисления ИП $^\Sigma$ индукцией по построению формулы Φ . Если Φ — атомарная формула, то $\Phi \vdash \Phi$ — аксиома исчисления G . Пусть для формул Φ и Ψ в G доказуемы секвенции $\Phi \vdash \Phi$ и $\Psi \vdash \Psi$. Рассмотрим следующие квазивыводы в G :

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi, \Psi \vdash \Phi} \quad \frac{\Psi \vdash \Psi}{\Phi, \Psi \vdash \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi; \Phi \wedge \Psi \vdash \Psi} \quad \frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \Phi, \Psi} \quad \frac{\Psi \vdash \Psi}{\Psi \vdash \Phi, \Psi}}{\Phi \vdash \Phi \vee \Psi; \Psi \vdash \Phi \vee \Psi}}{\Phi \wedge \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi \quad \Phi \vee \Psi \vdash \Phi \vee \Psi},$$

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash \Phi}{\vdash \Phi, \neg\Phi} \quad \frac{[\Phi]_y^x \vdash [\Phi]_y^x}{[\Phi]_y^x \vdash \exists x\Phi} \quad \frac{[\Phi]_y^x \vdash [\Phi]_y^x}{\forall x\Phi \vdash [\Phi]_y^x}}{\vdash \neg\Phi, \Phi} \quad \frac{[\Phi]_y^x \vdash \exists x\Phi}{\exists x\Phi \vdash \exists x\Phi} \quad \frac{\forall x\Phi \vdash [\Phi]_y^x}{\forall x\Phi \vdash \forall x\Phi}}{\neg\Phi \vdash \neg\Phi \quad \exists x\Phi \vdash \exists x\Phi \quad \forall x\Phi \vdash \forall x\Phi}.$$

В двух последних квазивыводах переменная y выбрана так, что она не имеет никаких вхождений в Φ . Эти квазивыводы показывают, что можно завершить индукционное доказательство того, что все секвенции вида $\Phi \vdash \Phi$, где Φ — формула исчисления G , доказуемы в G .

Теперь необходимо для каждого правила вывода исчисления ИП $^\Sigma$ (за исключением правил, касающихся импликации) проверить, что если секвенции, стоящие над чертой, доказуемы в G , то и секвенция, стоящая под чертой, также доказуема в G . Правила 1, 11, 13–16 исчисления ИП $^\Sigma$ являются частными случаями правил вывода G . Для правил 2 и 3

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi \quad \Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$$

необходимое утверждение следует из соответствующего свойства обратимости (предложение 6.2.2). Для правила 4 (5)

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi} \quad \left(\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi} \right)$$

квазивывод в G

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \Psi} \quad \left(\frac{\begin{array}{c} \Gamma \vdash \Psi \\ \hline \Gamma \vdash \Psi, \Phi \end{array}}{\Gamma \vdash \Phi, \Psi} \right) \quad \left(\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \Psi} \right)$$

устанавливает необходимое свойство. Рассмотрим теперь правило 6:

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi; \Gamma, \Phi \vdash X; \Gamma, \Psi \vdash X}{\Gamma \vdash X}.$$

Если секвенции, стоящие над чертой, доказуемы в G , то следующее дерево, использующее допустимое правило сечения (см. замечание после доказательства теоремы 6.3.1), есть квазивывод в G :

$$\frac{\begin{array}{c} \frac{\Gamma, \Phi \vdash X \quad \Gamma, \Psi \vdash X}{\Phi, \Gamma \vdash X; \quad \Psi, \Gamma \vdash X} \\ \hline \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi; \quad \Phi \vee \Psi, \Gamma \vdash X \end{array}}{\frac{\Gamma, \Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash X}}.$$

Правилу 9 соответствует утверждение об обратимости правила введения отрицания.

Для правила 10, если $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Gamma \vdash \neg \Phi$ доказуемы в G , то (по обратимости) доказуема в G секвенция $\Phi, \Gamma \vdash$, а по теореме 6.3.1 доказуема секвенция $\Gamma, \Gamma \vdash$, а следовательно, и секвенция $\Gamma \vdash$. Допустимость правила 12 в G установлена ранее.

Индукция по высоте доказательства секвенции C в исчислении ИП $^\Sigma$ и завершает доказательство. \square

Следствием предложений 6.3.3 и 6.3.4 и является основное утверждение этого параграфа.

Теорема 6.3.5. *Секвенция исчисления ИП $^\Sigma$, являющаяся и секвенцией исчисления G , доказуема в ИП $^\Sigma$ тогда и только тогда, когда она доказуема в исчислении G .* \square

Упражнение

1. Показать, что в исчислении G^* (см. упражнение 3 § 6.1) теорема 6.3.1 несправедлива. (Указание. Воспользоваться результатами упражнения 3 § 6.2 и упражнением 3 § 6.1.)

§ 6.4. Теорема Эрбрана

В этом параграфе мы установим весьма важную теорему Эрбрана, которая, в частности, является теоретической основой современных машинных методов поиска доказательства в исчислении предикатов. Один из таких методов основан на исчислении резольвент, которое будет рассмотрено в следующем параграфе. Теорема Эрбрана обосновывает обнаружение этим методом доказуемости любой доказуемой формулы ИП $^\Sigma$; последнее свойство называется полнотой метода. Теорема эта также придает определенный конструктивный смысл произвольным предложениям исчисления предикатов.

Начнем параграф с изучения некоторых синтаксических связей.

С каждым термом t и переменной x свяжем некоторое множество $F_x(t)$ функциональных символов:

- если x не входит в t или $x = t$, то $F_x(t) = \emptyset$;
- если x входит в t и $t \neq x$, то $t = h(t_1, \dots, t_n)$ для некоторых функционального символа h и термов t_1, \dots, t_n ; полагаем тогда $F_x(t) = \{h\} \cup \bigcup_{i=1}^n F_x(t_i)$.

Лемма 6.4.1. *Если $x \neq y$ и x не входит в t' , то для любого терма t имеет место равенство*

$$F_x((t)_y^{t'}) = F_x(t).$$

Доказательство проводится индукцией по построению терма t . \square

Предложение 6.4.2. Если $\mathbf{Q}x\Psi$ ($\mathbf{Q} \in \{\forall, \exists\}$) — обобщенная подформула формулы Φ , то для любого терма t_0 формулы Ψ найдется такой терм t_1 формулы Φ , что

$$F_x(t_0) = F_x(t_1)$$

и t_1 находится в области действия квантора $\mathbf{Q}x$.

Доказательство. Так как $\mathbf{Q}x\Psi$ является обобщенной подформулой формулы Φ , то существует такая последовательность формул $\Phi_0 = \Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_n = \mathbf{Q}x\Psi$, что для любого $i < n$ выполнено одно из условий:

- (1) $\Phi_i = \neg\Phi_{i+1}$;
- (2) $\Phi_i = \Phi_{i+1}\tau\Psi_{i+1}$ ($\Phi_i = \Psi_{i+1}\tau\Phi_{i+1}$) для подходящей формулы Ψ_{i+1} и $\tau \in \{\vee, \wedge\}$;
- (3) $\Phi_i = \mathbf{Q}'yX_i$, $\Phi_{i+1} = (X_i)_t^y$ для подходящих формул X_i , переменной y , терма t , свободного для y в X_i , и $\mathbf{Q}' \in \{\forall, \exists\}$.

Предположим теперь справедливость предложения для $n - 1$. Если в качестве Φ взять формулу Φ_1 последовательности $\Phi_0 = \Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_n = \mathbf{Q}x\Psi$, то по индукционному предположению для любого терма t_0 формулы Ψ в Φ_1 можно указать терм t такой, что $F_x(t_0) = F_x(t)$ и t входит в область действия квантора $\mathbf{Q}x$. Если переход от Φ_0 к Φ_1 удовлетворяет условию (1) или (2), то Φ_1 является подформулой (а не только обобщенной подформулой) формулы $\Phi = \Phi_0$, поэтому в качестве искомого t_1 нужно взять соответствующий терм t . Если выполнено условие (3), то рассмотрим три возможных подслучаев.

Подслучай (3а): $y = x$. Тогда $\Phi = \mathbf{Q}'xX$, $\Phi_1 = (X)_t^x$ для подходящей формулы X . Так как Φ_1 (и, следовательно, X) имеет (по индукционному предположению) связанные вхождения переменной x , то по свойству несмешанности переменных x не имеет свободных вхождений в X и $\Phi_1 = X$, $\Phi = \mathbf{Q}'xX$; Φ_1 есть подформула Φ .

Подслучай (3б): $y \neq x$ и x входит в t . Тогда $\Phi_1 = (X)_t^y$, $\Phi = \mathbf{Q}'yX$ для некоторой формулы X . Формула Φ_1 имеет связанные вхождения переменной x ; если бы X имела свободные вхождения y , то нарушалось бы условие свободы терма t для переменной y в формуле X . Итак, y не имеет свободных вхождений в X и $\Phi_1 = (X)_t^y = X$; $\Phi = \mathbf{Q}'y\Phi_1$; Φ_1 есть подформула Φ .

Подслучай (3в): $y \neq x$ и x не входит в t . Пусть X — такая формула, что $\Phi_1 = (X)_t^y$, $\Phi = \mathbf{Q}'yX$. Для любого терма t_2 формулы Φ_1 существует соответствующий терм t_1 формулы X такой, что $t_2 = (t_1)_t^y$, причем если t_2 входит в область действия какого-либо квантора в Φ_1 , то t_1 входит в область действия такого же квантора по той же переменной. По лемме 6.4.1 имеем $F_x(t_2) = F_x((t_1)_t^y) = F_x(t_1)$; если t_2 выбран

в Φ_1 для t_0 в соответствии с заключением предложения, то соответствующий терм t_1 будет удовлетворять заключению предложения для формулы Φ .

Предложение доказано. \square

Будем говорить, что функциональный символ g имеет связанное вхождение в формулу Φ , если Φ содержит подформулу вида $Qx\Psi$ и Ψ имеет вхождение терма t такого, что $g \in F_x(t)$.

Укажем два следствия предложения 6.4.2.

Следствие 6.4.3. Если Ψ — обобщенная подформула формулы Φ и функциональный символ g имеет связанное вхождение в Ψ , то g имеет связанное вхождение и в Φ . \square

Следствие 6.4.4. Если D — доказательство секвенции C в исчислении G и функциональный символ g не имеет связанных вхождений ни в одну из формул секвенции C , то g не имеет связанных вхождений ни в одну из формул дерева D .

По свойству подформульности и следствию 6.4.3. \square

Зафиксируем терм t_0 , начинающийся с функционального символа g , и переменную x_0 . Определим теперь преобразование s (существенно зависящее от выбора пары (t_0, x_0)) термов так:

- если t — переменная или константа (отличная от g), то $s(t) = t$;
- если $t = f(t_1, \dots, t_n)$ и $t \neq t_0$, то $s(t) = f(s(t_1), \dots, s(t_n))$;
- если $t = t_0$, то $s(t) = x_0$.

Замечание 6.4.5. Если терм t не имеет вхождений терма t_0 , то $s(t) = t$.

Следующая лемма показывает взаимоотношения преобразования s с подстановкой.

Лемма 6.4.6. Если $x \neq x_0$ и $g \notin F_x(t)$, то для любого терма t' имеет место равенство

$$s((t)_{t'}^x) = (s(t))_{s(t')}^x.$$

Доказательство. Доказывать это равенство будем индукцией по построению терма t . Если x не входит в t , то x не входит и в $s(t)$, поэтому $s((t)_{t'}^x) = s(t) = (s(t))_{s(t')}^x$. Пусть x входит в t , тогда $t \neq t_0$, так как если $t = t_0 = g(t_1, \dots, t_k)$, то $g \in F_x(t)$. Если $t = x$, то $s((x)_{t'}^x) = s(t') = (x)_{s(t')}^x = (s(x))_{s(t')}^x$. Если $t = h(t_1, \dots, t_n)$, то $(t)_{t'}^x = h((t_1)_{t'}^x, \dots, (t_n)_{t'}^x)$ и $s((t)_{t'}^x) = s(h((t_1)_{t'}^x, \dots, (t_n)_{t'}^x)) = h(s((t_1)_{t'}^x), \dots, s((t_n)_{t'}^x))$, так как $h \in F_x(t)$, $g \notin F_x(t)$ и, следовательно,

$h((t_1)_{t'}^x, \dots, (t_n)_{t'}^x) \neq t_0$. Из индукционного предположения получаем $h(s((t_1)_{t'}^x, \dots, s((t_n)_{t'}^x)) = h((s(t_1))_{s(t')}^x, \dots, s(t_n))_{s(t')}^x = (s(t))_{s(t')}^x$. \square

Замечание 6.4.7. В условиях леммы выполняется $s(t) = t$ в соответствии с замечанием 6.4.5.

Преобразование термов s можно распространить естественным образом и на формулы, секвенции и деревья секвенций, полагая, например, для формул

- a) $s(\Phi) = P(s(t_1), \dots, s(t_n))$ для атомарной формулы $\Phi = P(t_1, \dots, t_n)$;
- б) $s(\Phi) = \neg s(\Psi)$ для $\Phi = \neg \Psi$;
- в) $s(\Phi) = s(\Phi_0) \tau s(\Phi_1)$ для $\Phi = \Phi_0 \tau \Phi_1$, $\tau \in \{\vee, \wedge\}$;
- г) $s(\Phi) = Q x s(\Psi)$ для $\Phi = Q x \Psi$, $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Следствием предыдущей леммы будет

Предложение 6.4.8. Пусть переменная x_0 не имеет связанных входжений в Φ ; $x \neq x_0$ — такая переменная, что $g \notin F_x(t)$ для любого терма t формулы Φ . Тогда для любого терма t' , свободного для x в Φ , имеет место равенство

$$s((\Phi)_{t'}^x) = (s(\Phi))_{s(t')}^x$$

(это соотношение включает в себя и утверждение, что $s(t')$ свободен для x в $s(\Phi)$). \square

Очевидно, справедливо следующее

Предложение 6.4.9. Пусть переменная x_0 не имеет связанных входжений в Φ ; x_1, \dots, x_n — такие переменные, отличные от x_0 , что $g \notin F_{x_i}(t)$, $i = 1, \dots, n$, для любого терма t формулы Φ . Тогда для любых термов t'_1, \dots, t'_n , свободных для x_1, \dots, x_n в Φ соответственно, имеет место равенство

$$s\left((\Phi)_{t'_1, \dots, t'_n}^{x_1, \dots, x_n}\right) = (s(\Phi))_{s(t'_1), \dots, s(t'_n)}^{x_1, \dots, x_n}. \quad \square$$

Установим следующее важное свойство преобразования s , действующего на доказательствах.

Предложение 6.4.10. Если D — доказательство в исчислении G , переменная x_0 не встречается в D и g не имеет связанных входжений в заключительную секвенцию D , то дерево sD является доказательством в G .

Доказательство. Если $C = \Phi, \Gamma \vdash \Theta$, Φ — аксиома, то $sC = s\Phi$, $s\Gamma \vdash s\Theta$, $s\Phi$ — также аксиома.

Для каждого перехода, соответствующего пропозициональному или структурному правилу, легко проверить, что соответствующий s -переход (т. е. переход в sD) осуществляется по тому же правилу вывода. Например, пусть в D переход таков:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \Phi; \Gamma \vdash \Theta, \Psi}{\Gamma \vdash \Theta, \Phi \wedge \Psi},$$

тогда в sD соответствующий переход есть

$$\frac{s\Gamma \vdash s\Theta, s\Phi; s\Gamma \vdash s\Theta, s\Psi}{s\Gamma \vdash s\Theta, s(\Phi \wedge \Psi)}.$$

Но $s(\Phi \wedge \Psi) = s(\Phi) \wedge s(\Psi)$, следовательно, это переход по тому же правилу (введение конъюнкции в заключение).

Рассмотрим теперь переходы, соответствующие кванторным правилам. Пусть переход в D таков:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash \Theta, \exists x\Phi}.$$

Тогда в sD соответствующий переход будет

$$\frac{s\Gamma \vdash s\Theta, s((\Phi)_t^x)}{s\Gamma \vdash s\Theta, s(\exists x\Phi)}.$$

По следствию 6.4.4 g не имеет связанных вхождений в формулу $\exists x\Phi$; следовательно, для любого терма t' формулы Φ имеем $g \notin F_x(t')$. Тогда по предложению 6.4.8 $s((\Phi)_t^x) = (s\Phi)_{s(t)}^x$. Итак, в дереве sD переходом будет

$$\frac{s\Gamma \vdash s\Theta, (s\Phi)_{s(t)}^x}{s\Gamma \vdash s\Theta, \exists x(s\Phi)},$$

но это переход по правилу введения квантора существования в заключение.

Рассмотрим теперь переход в D по правилу 8:

$$\frac{[\Phi]_y^x, \Gamma \vdash \Theta}{\exists x\Phi, \Gamma \vdash \Theta},$$

где y не имеет свободных вхождений в Γ, Θ . Соответствующим переходом в sD будет

$$\frac{s[\Phi]_y^x, s\Gamma \vdash s\Theta}{s(\exists x\Phi), s\Gamma \vdash s\Theta}.$$

Как и выше, устанавливается, что $s[\Phi]_y^x = (s\Phi)_{s(y)}^x = (s\Phi)_y^x = [s\Phi]_y^x$ и что переменная y не встречается свободно в $s\Gamma, s\Theta$. Последнее

утверждение вытекает из того, что для любой формулы Φ формула $s\Phi$ может содержать только одну новую свободную переменную, а именно, x_0 , которая в D не встречается, в частности, $x_0 \neq y$. Тогда в sD переход имеет вид

$$\frac{[s\Phi]_y^x, s\Gamma \vdash s\Theta}{\exists x(s\Phi), s\Gamma \vdash s\Theta},$$

где y не входит свободно в $s\Gamma$, $s\Theta$. Следовательно, это переход по правилу 8.

Аналогично рассматриваются правила 9 и 10. \square

Приступим теперь к рассмотрению основного утверждения настоящего параграфа. Для сокращения записи последовательность термов t_1, \dots, t_n будет обозначаться через \bar{t} ; $\exists \bar{x}$ означает $\exists x_1 \dots \exists x_n$; \bar{z} — последовательность z_1, \dots, z_n .

Теорема 6.4.11. *Пусть секвенция $C = \Gamma \vdash \Theta, \Phi$ такова, что $\Phi = \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})$, и n -местный функциональный символ g не имеет вхождений в C . Секвенция C доказуема в G тогда и только тогда, когда в G доказуема секвенция $C^* = \Gamma \vdash \Theta, \exists \bar{x} \Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z})$.*

Необходимость. Отмеченной формулой назовем всякую формулу Φ_0 исчисления G вида

$$(\exists x_{s+1} \dots \exists x_n \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_s}^{x_1, \dots, x_s}, \quad 0 \leq s < n,$$

являющуюся обобщенной подформулой формулы Φ . Если Φ_0 — отмеченная формула, то через Φ_0^* обозначим формулу

$$(\exists x_{s+1} \dots \exists x_n \Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{t_1, \dots, t_s}^{x_1, \dots, x_s}.$$

Пусть D — доказательство секвенции C со свойством чистоты переменных. Пусть дерево секвенций D^* получено из D заменой каждого вхождения каждой отмеченной формулы Φ_0 , являющейся предком вхождения Φ в заключительную секвенцию C , на формулу Φ_0^* . Заметим, что заключительной секвенцией дерева D^* будет C^* . Покажем, что D^* является квазивыводом.

На вершинах дерева D^* будут стоять те же аксиомы, что и в D , так как отмеченные формулы не являются атомарными (содержат квантор $\forall y$).

Всем переходам дерева D будут соответствовать переходы дерева D^* по тем же правилам вывода, за исключением переходов вида

$$\frac{\Lambda \vdash \Delta, [(\Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}]_y^u}{\Lambda \vdash \Delta, (\forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}}, \quad (6.2)$$

где главная формула перехода является отмеченной и предком формулы Φ .

Этому переходу в D^* соответствует переход

$$\frac{\Lambda' \vdash \Delta', [(\Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}]_u^y}{\Lambda' \vdash \Delta', (\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}}. \quad (6.3)$$

Воспользуемся индукцией по глубине вывода и будем предполагать, что секвенция, стоящая над чертой в переходе (6.3), является доказуемой. Так как u не имеет вхождений в Λ , Δ и Λ' , Δ' имеет те же переменные, что и Λ , Δ , то u не имеет вхождений в Λ' , Δ' ; следовательно, доказуема секвенция $\Lambda' \vdash \Delta', \forall y(\Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}$. По предложению 6.2.2 тогда доказуема и секвенция

$$\Lambda' \vdash \Delta', ((\Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}})_{g(\bar{t})}^y,$$

но $((\Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}})_{g(\bar{t})}^y = (\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}$, следовательно, секвенция, стоящая под чертой в переходе (6.3), доказуема.

Необходимость установлена.

Достаточность. Специальной формулой назовем всякую формулу вида $(\exists x_{s+1} \dots \exists x_n \Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{t_1, \dots, t_s}^{x_1, \dots, x_s}$, $0 \leq s < n$. Обозначим формулу $\exists \bar{x} \Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z})$ через Ψ_* .

Замечание 6.4.12. Если Φ_0 — специальная формула, то g имеет связанное вхождение в Φ_0 .

Замечание 6.4.13. Если Φ_0 — специальная формула, то $\beta(\Phi_0) = \beta(\Psi_*)$.

Замечание 6.4.14. Если Φ_0 — обобщенная подформула формулы Ψ_* , которая имеет связанное вхождение g , то формула Φ_0 является специальной.

Пусть D — доказательство секвенции C_* со свойством чистоты переменных.

Замечание 6.4.15. Если Φ_0 — специальная формула, то Φ_0 не является главной формулой переходов в дереве D , осуществляемых по правилам 1–6.

Лемма 6.4.16. Если $\Gamma_0 \vdash \Theta_0$ — секвенция из D и формула Φ_0 из Γ_0, Θ_0 имеет связанное вхождение g , то Φ_0 — специальная формула, Φ_0 является предком формулы Ψ_* из заключительной секвенции дерева D и $\Phi_0 \in \{\Theta_0\} \setminus \{\Gamma_0\}$.

Доказательство. Пусть Φ_0 имеет связанное вхождение g , Φ_1 — потомок Φ_0 в заключительной секвенции. Тогда по следствию 6.4.3

формула Φ_1 имеет связанное вхождение g . Но в заключительной секвенции только формула Ψ_* имеет связанное вхождение g . Следовательно, Φ_0 является предком этой формулы. Тогда по замечанию 6.4.14 формула Φ_0 является специальной.

Предположим теперь, что $\Phi_0 \in \{\Gamma_0\}$. Так как потомок Φ_0 в заключительной секвенции лежит в правой части этой секвенции, то в D найдется переход

$$\frac{\Gamma_1, \Phi_1 \vdash \Theta_1}{\Gamma_2 \vdash \Phi_2, \Theta_2}$$

такой, что Φ_1 и Φ_2 — потомки Φ_0 . Легко проверить, что тогда этот переход осуществляется по правилу 5 и $\Phi_2 = \neg\Phi_1$. По установленному выше Φ_1 и Φ_2 — специальные формулы. Имеем $\beta(\Phi_2) = \beta(\Phi_1) + 1$, но это невозможно, поскольку по замечанию 6.4.13 справедливо $\beta(\Phi_1) = \beta(\Psi_*) = \beta(\Phi_2)$. В силу полученного противоречия лемма доказана. \square

Для формулы Φ_0 обозначим через $\Sigma_0(\Phi_0)$ список всех формул вида $(\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}$ таких, что терм $g(\bar{t})$ имеет свободное вхождение в Φ_0 . Если Γ_0 — список формул, то через $\Sigma_0(\Gamma_0)$ обозначим список, состоящий из всех формул, входящих в списки $\Sigma_0(\Phi_0)$, где Φ_0 — формулы из Γ_0 . Если $S = \Gamma_0 \vdash \Theta_0$ — секвенция, то $\Sigma_0(S) \rightleftharpoons \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0)$.

Замечание 6.4.17. Если Φ_0 — специальная формула, то $\Sigma_0(\Phi_0)$ — пустой список.

Замечание 6.4.18. Если формула Φ_0 имеет вид $\Phi_1 \tau \Phi_2$, $\tau \in \{\wedge, \vee\}$, то $\Sigma_0(\Phi_0) = \Sigma_0(\Phi_1) \cup \Sigma_0(\Phi_2)$; если $\Phi_0 = \neg\Phi_1$, то $\Sigma_0(\Phi_0) = \Sigma_0(\Phi_1)$.

Замечание 6.4.19. Если $X \in \Sigma_0(\Phi_0)$ и переменная u имеет свободное вхождение в X , то u имеет свободное вхождение в Φ_0 или в Ψ_* .

Пусть $S = \Gamma_0 \vdash \Theta_0$ — секвенция из D . Через $\Sigma(\Theta_0)$ (соответственно $\Sigma(S)$) обозначим список всех специальных формул из Θ_0 (из Γ_0, Θ_0). Обозначим через Θ_0^* список всех формул из Θ_0 , не входящих в $\Sigma(\Theta_0)$, и положим $S^* \rightleftharpoons \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*$. Образуем дерево секвенций D^* , которое получается заменой в дереве D каждого вхождения секвенции S на секвенцию S^* . Докажем индукцией по глубине дерева, что все секвенции из D^* доказуемы.

Если S — аксиома, то S^* получается из S утончениями и перестановками. Если в D переход осуществляется по одному из правил 1–6, то соответствующий переход в D^* может быть получен несколькими утончениями, перестановками и применением того же правила.

Для примера рассмотрим случай, когда в дереве D переход осуществляется по правилу 1:

$$\frac{S_0; S_1}{S_2}, \tag{6.4}$$

где $S_0 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi_0$, $S_1 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi_1$, $S_2 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, \Phi_0 \wedge \Phi_1$. Тогда

$$\begin{aligned} S_0^* &= \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Phi_0, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Sigma_0(\Phi_0), \Psi_*, \\ S_1^* &= \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Phi_1, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Sigma_0(\Phi_1), \Psi_*, \\ S_2^* &= \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Phi_0 \wedge \Phi_1, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Sigma_0(\Phi_0 \wedge \Phi_1), \Psi_*. \end{aligned}$$

Заметим, что формулы Φ_0 , Φ_1 и $\Phi_0 \wedge \Phi_1$ не могут быть специальными. Тогда $\Sigma(S_0) = \Sigma(S_1) = \Sigma(S_2)$. Поскольку правила

$$\frac{S_i^*}{\Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Phi_i, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Sigma_0(\Phi_0 \wedge \Phi_1), \Psi_*},$$

$i = 0, 1$, допустимы, квазивывод $\frac{S_0^*; S_1^*}{S_2^*}$ осуществляет переход в дереве D^* , соответствующий переходу (6.4) в D .

Рассмотрим случай, когда переход в дереве D осуществляется по правилу 8:

$$\frac{S_0}{S_1}, \quad (6.5)$$

где $S_0 = [\Phi_0]_v^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0$, $S_1 = \exists u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0$.

Возьмем секвенции $S_0^* = [\Phi_0]_v^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0([\Phi_0]_v^u, \Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*$ и $S_1^* = \exists u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(\exists u \Phi_0, \Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*$. Покажем, что $\Sigma_0([\Phi_0]_v^u) = \Sigma_0(\exists u \Phi_0)$. Включение \supseteq очевидно. Предположим, что $\Sigma_0([\Phi_0]_v^u) \neq \Sigma_0(\exists u \Phi_0)$. Тогда формула $\exists u \Phi_0$ содержит связанное вхождение g и по замечанию 6.4.12 и лемме 6.4.16 не должна входить в левую часть секвенции S_1^* . Чтобы утверждать, что переход $\frac{S_0^*}{S_1^*}$ осуществляется по правилу 8, нужно проверить, что переменная u не имеет свободных вхождений в $\Gamma_0, \Theta_0^*, \Sigma_0(\exists u \Phi_0, \Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*$. Действительно, переменная u , очевидно, не входит свободно в $\Sigma_0(\exists u \Phi_0)$, не входит свободно в Ψ_* по свойству чистоты переменных, не входит свободно в Γ_0, Θ_0 , а, следовательно, и в $\Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0)$ по замечанию 6.4.19, так как $\frac{S_0}{S_1}$ — переход по правилу 8. Итак, переход $\frac{S_0^*}{S_1^*}$ в дереве D^* осуществляется по правилу 8.

Рассмотрим теперь случай, когда переход (6.5) в дереве D осуществляется по правилу 9, где $S_0 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, [\Phi_0]_v^u$, $S_1 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, \forall u \Phi_0$. Формула $\forall u \Phi_0$ не является, очевидно, специальной. Если формула $[\Phi_0]_v^u$ специальна, то g имеет связанное вхождение в $[\Phi_0]_v^u$. Но тогда g имеет связанное вхождение в $\forall u \Phi_0$ и, следовательно, по лемме 6.4.16 является специальной, что, как уже замечено, невозможно. Покажем, что $\Sigma_0([\Phi_0]_v^u) = \Sigma_0(\forall u \Phi_0)$. Включение $\Sigma_0([\Phi_0]_v^u) \supseteq \Sigma_0(\forall u \Phi_0)$ очевидно. Если $\Sigma_0([\Phi_0]_v^u) \neq \Sigma_0(\forall u \Phi_0)$, то формула $\forall u \Phi_0$ имеет связанное вхож-

дение g и, следовательно, $\forall u\Phi_0$ специальна, что невозможно. Далее, рассуждая как в случае правила 8, устанавливаем, что соответствующий переход

$$\frac{S_0^*}{S_1^*} = \frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0, [\Phi_0]_v^u)(= \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0, \forall u\Phi_0)), [\Phi_0]_v^u, \Psi_*}{\Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0, \forall u\Phi_0), \forall u\Phi_0, \Psi_*}$$

в дереве D^* осуществляется по правилу 9.

Рассмотрим случай, когда переход (6.5) в дереве D осуществляется по правилу 7, где $S_0 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, (\Phi_0)_t^u$, $S_1 = \Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists u\Phi_0$. Предварительно установим следующие два утверждения.

Лемма 6.4.20. *Если в G доказуема секвенция*

$$\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), \Psi(\bar{t}, g(\bar{t}), \bar{z}),$$

символ g не имеет связанных вхождений в эту секвенцию и $g(\bar{t})$ не имеет вхождений в $\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})$, то в G доказуема секвенция

$$\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}).$$

Доказательство. Пусть D — доказательство секвенции $\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), \Psi(\bar{t}, g(\bar{t}), \bar{z})$; x_0 — переменная, не встречающаяся в D . Если s — синтаксическое преобразование, определенное парой $\langle x_0, g(\bar{t}) \rangle$, то по предложению 6.4.10 дерево sD является доказательством (секвенции

$$\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), \Psi(\bar{t}, x_0, \bar{z})$$

по предложению 6.4.8). Следовательно, секвенция

$$\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), (\Psi(x_1, \dots, x_n, x_0, \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}$$

доказуема. Легко проверить, что дерево секвенций

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), [(\Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}]_{x_0}^y}{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), (\forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}}$$

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), (\exists x_n \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_{n-1}}^{x_1, \dots, x_{n-1}}}{\vdots}$$

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})}{\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})}$$

является квазивыводом. □

Следствие 6.4.21. Если в G доказуема секвенция

$$\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z}), \Psi(\bar{t}^1, g(\bar{t}^1), \bar{z}), \dots, \Psi(\bar{t}^s, g(\bar{t}^s), \bar{z}),$$

символ g не имеет связанных входжений в эту секвенцию и $g(\bar{t}^i)$ не имеет входжений в $\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})$, то в G доказуема секвенция $\Gamma_0 \vdash \Theta_0, \exists \bar{x} \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})$.

Для доказательства нужно расположить термы $g(\bar{t}^1), \dots, g(\bar{t}^s)$ в порядке неубывания длины, применить индукционное предположение по s и лемму 6.4.20. \square

Вернемся к рассмотрению правила 7. Если формулы $(\Phi_0)_t^u$ и $\exists u \Phi_0$ не являются специальными, то допустимость соответствующего перехода в D^* устанавливается как выше. В случае, когда формула $(\Phi_0)_t^u$ является специальной, формула $\exists u \Phi_0$ также специальна и соответствующий переход в дереве D^* тривиален, т. е. запись $\Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, (\Phi_0)_t^u, \Sigma_0((\Phi_0)_t^u, \Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*$ над чертой совпадает с записью под чертой. Рассмотрим случай, когда $\exists u \Phi_0$ — специальная формула, а формула $(\Phi_0)_t^u$ не является специальной. Тогда $(\Phi_0)_t^u$ имеет вид $(\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}$. Если последняя формула входит в $\Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0)$, то рассматриваемый переход в D^* тривиален. Если же $(\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}$ не входит в $\Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0)$, то этот переход имеет вид

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, (\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}}^{\bar{x}}, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*}{\Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(\Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*} \quad (6.6)$$

и является квазивыводом по лемме 6.4.20.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть переходы по правилу 10, т. е. переходы (6.5) в дереве D , где $S_0 = = (\Phi_0)_t^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0, S_1 = \forall u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0$. Тогда по определению

$$\begin{aligned} S_0^* &= (\Phi_0)_t^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0((\Phi_0)_t^u, \Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*, \\ S_1^* &= \forall u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(\forall u \Phi_0, \Gamma_0, \Theta_0), \Psi_*. \end{aligned}$$

По замечанию 6.4.12 и лемме 6.4.16 формулы $(\Phi_0)_t^u$ и $\forall u \Phi_0$ не являются специальными. Следовательно, $\Sigma(S_0) = \Sigma(S_1)$. Заметим, что $\Sigma_0(S_0) \supseteq \Sigma_0(S_1)$. Пусть Ψ_1, \dots, Ψ_m , где $\Psi_i = (\Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_{\bar{t}_i}^{\bar{x}}$, $i = 1, \dots, m$, — список всех формул из $\Sigma_0(S_0) \setminus \Sigma_0(S_1)$, т. е. $\Sigma_0(S_0) = \Sigma_0(S_1), \Psi_1, \dots, \Psi_m$. Переход

$$\frac{(\Phi_0)_t^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(S_0), \Psi_*}{\forall u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(S_0), \Psi_*}$$

является переходом по правилу 10, а переход

$$\frac{(\Phi_0)_t^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(S_1), \Psi_1, \dots, \Psi_m, \Psi_*}{\forall u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(S_1), \Psi_*}$$

является квазивыводом по следствию 6.4.21. Следовательно, переход

$$\frac{S_0^*}{S_1^*} = \frac{(\Phi_0)_t^u, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(S_0), \Psi_*}{\forall u \Phi_0, \Gamma_0 \vdash \Theta_0^*, \Sigma_0(S_1), \Psi_*}$$

является квазивыводом. \square

С каждой формулой Ψ , находящейся в пренексной нормальной форме, свяжем некоторую Э-формулу Φ_H , которую назовем *эрбрановой формой* формулы Φ , по следующему правилу. Если Φ есть Э-формула, то $\Phi_H = \Phi$; если Φ имеет вид $\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y \Psi(\bar{x}, y, \bar{z})$ и g — n -местный функциональный символ, не встречающийся в Φ , то $\Phi_H = (\exists x_1 \dots \exists x_n \Psi(\bar{x}, g(\bar{x}), \bar{z}))_H$. Индукцией по числу кванторов всеобщности устанавливается, что это определение корректно.

Теорема Эрбрана. *Пусть Φ — формула в пренексной нормальной форме, $\Phi_H = \exists x_1 \dots \exists x_n \Psi(\bar{x}, \bar{z})$ — эрбранова форма формулы Φ , где Ψ — бескванторная формула. Формула Φ доказуема тогда и только тогда, когда существуют такие последовательности термов $\bar{t}^1 = t_1^1, \dots, t_n^1; \dots, \bar{t}^k = t_1^k, \dots, t_n^k$, что доказуема формула $\Psi(\bar{t}^1, \bar{z}) \vee \dots \vee \Psi(\bar{t}^k, \bar{z})$.*

Доказательство. Используя индукцию (по числу кванторов всеобщности) и предыдущую теорему, получаем, что формула Φ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема формула Φ_H . Для завершения доказательства теоремы установим следующее

Предложение 6.4.22. *Формула $\Phi = \exists x_1 \dots \exists x_n \Psi(\bar{x}, \bar{z})$, где Ψ — бескванторная формула, доказуема тогда и только тогда, когда существует такая последовательность n -наборов термов $\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^k$, что доказуема формула $\Psi(\bar{t}^1, \bar{z}) \vee \dots \vee \Psi(\bar{t}^k, \bar{z})$.*

Доказательство. По свойству обратимости (правило 3 и предложение 6.2.1) формула $\Psi(\bar{t}^1, \bar{z}) \vee \dots \vee \Psi(\bar{t}^k, \bar{z})$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема секвенция $\vdash \Psi(\bar{t}^1, \bar{z}), \dots, \Psi(\bar{t}^k, \bar{z})$.

Пусть эта секвенция доказуема, тогда, многократно применяя правило введения квантора существования в заключение, получаем доказуемую секвенцию $\vdash \exists \bar{x} \Psi(\bar{x}, \bar{z}), \dots, \exists \bar{x} \Psi(\bar{x}, \bar{z})$. Из этой секвенции с помощью правила сокращения получаем секвенцию $\vdash \exists \bar{x} \Psi(\bar{x}, \bar{z})$. Так устанавливается достаточность.

Необходимость. Пусть D — доказательство формулы Φ в исчислении G со свойством чистоты переменных. Пусть $\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^k$ — это все наборы n -термов \bar{t} таких, что в D встречается формула $\Psi(\bar{t}, \bar{z})$. Заметим, что все такие формулы дерева D являются предками формулы Φ . Пусть дерево D^* получается из D заменой каждого вхождения секвенции $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ на секвенцию $\Gamma_0 \vdash \Psi(\bar{t}^1, \bar{z}), \dots, \Psi(\bar{t}^k, \bar{z}), \Delta_1$, где Δ_1 получается из Δ_0 вычеркиванием всех формул вида $(\exists x_{s+1} \dots \exists x_n \Psi(\bar{x}, \bar{z}))_{t_1, \dots, t_s}^{x_1, \dots, x_s}$, $0 \leq s < n$. Без труда проверяется, что полученное дерево D^* будет квазивыводом (секвенции $\vdash \Psi(\bar{t}^1, \bar{z}), \dots, \Psi(\bar{t}^k, \bar{z})$). Действительно, на вершинах стоят секвенции, полученные из аксиом перестановками. Переходу, соответствующему пропозициональным правилам, соответствуют переходы по тому же правилу (быть может, с сокращением и перестановками). Кванторные правила, за исключением правила 7, в дереве D не используются; переходам по правилу 7 соответствуют тривиальные переходы в D^* . Переходам по структурным правилам соответствуют переходы, полученные применением структурных правил. Итак, D^* — квазивывод секвенции $\vdash \Psi(\bar{t}^1, \bar{z}), \dots, \Psi(\bar{t}^k, \bar{z})$ и необходимость установлена. \square

Сила теоремы Эрбрана состоит в том, что вопрос о доказуемости произвольной формулы сводится к вопросу о доказуемости формулы из некоторой эффективно порождаемой последовательности бескванторных формул. А для обнаружения доказуемости бескванторной формулы требуются только пропозициональные (и структурные) правила.

Более точно, пусть Φ — бескванторная формула, а Ψ_0, \dots, Ψ_n — все различные атомарные подформулы формулы Φ ; тогда *пропозициональной формой формулы* Φ назовем формулу Φ_P исчисления высказываний, которая получается из Φ подстановкой всюду вместо подформулы Ψ_i пропозициональной переменной P_i , $i = 0, \dots, n$.

Предложение 6.4.23. *Бескванторная формула Φ доказуема в исчислении G тогда и только тогда, когда ее пропозициональная форма Φ_P доказуема в исчислении высказываний.*

Доказательство. Прямо вытекает из свойства подформульности. \square

Упражнение

1. Доказать замечание 6.4.14. (*Указание.* Рассмотреть последовательность формул, начинающуюся с исходной и удовлетворяющей условиям (1)–(3) из доказательства предложения 6.4.2, и воспользоваться упражнением 4 из § 6.1.)

§ 6.5. Исчисления резольвент

Исчисления резольвент используются для поиска вывода в исчислениях высказываний и предикатов. Начнем с пропозиционального варианта.

Формулами пропозициональных исчислений резольвент будут пропозициональные переменные или их отрицания.

Если Φ — формула, то Φ^* есть $\neg\Phi$, когда Φ — пропозициональная переменная, и есть P , когда $\Phi = \neg P$.

Основным синтаксическим понятием будет *список формул*. Пустой список будем обозначать символом \emptyset . Исчисления резольвент будут иметь одни и те же правила вывода и различаться только аксиомами. Если $\Gamma_0; \dots; \Gamma_n$ — списки формул, то через $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ будем обозначать (*пропозициональное*) *исчисление резольвент*, аксиомами которого являются списки $\Gamma_0; \dots; \Gamma_n$.

Правилами вывода исчислений резольвент будут:

$$1. \frac{\Gamma, \Phi; \Theta, \Phi^*}{\Gamma, \Theta}, \quad 2. \frac{\Gamma, \Phi, \Psi, \Theta}{\Gamma, \Psi, \Phi, \Theta}, \quad 3. \frac{\Gamma, \Phi, \Phi}{\Gamma, \Phi}.$$

Понятие *доказательства* (в виде дерева) определяется обычным образом. Если Γ — непустой список формул, то через $\wedge\Gamma$ будем обозначать конъюнкцию формул из Γ . Формула $\wedge\Gamma$ является формулой исчисления высказываний, но, вообще говоря, не является формулой исчисления резольвент.

Лемма 6.5.1. *Если D — доказательство списка Γ в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ и Γ_n встречается на вершине D , то для любого списка Γ' в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_{n-1}; \Gamma', \Gamma_n)$ доказуем список Γ', Γ .*

Доказательство проводится индукцией по числу списков дерева D . Если $D = \Gamma_n$, то $\Gamma = \Gamma_n$ и Γ', Γ — доказательство в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_{n-1}; \Gamma', \Gamma_n)$.

Пусть $D = \frac{D_0; D_1}{\Gamma}$ и последний переход есть $\frac{\Gamma^0, \Phi; \Gamma^1, \Phi^*}{\Gamma^0, \Gamma^1}$, тогда по индукционному предположению существуют доказательства D'_0, D'_1 в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_{n-1}; \Gamma', \Gamma_n)$ списков Γ', Γ^0, Φ (или Γ^0, Φ , если Γ_n не встречается на вершине D_0) и $\Gamma', \Gamma^1, \Phi^*$ (или Γ^1, Φ^* , если Γ_n не встречается в D_1) соответственно. Так как Γ_n встречается на вершине D_0 или на вершине D_1 , то по крайней мере одно из деревьев

$$\frac{D'_0; D'_1}{\Gamma', \Gamma^0, \Gamma^1}, \quad \frac{D'_0; D'_1}{\Gamma', \Gamma^0, \Gamma^1}, \quad \frac{D'_0; D'_1}{\Gamma^0, \Gamma', \Gamma^1}$$

есть доказательство в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_{n-1}; \Gamma', \Gamma_n)$. Из заключительного списка структурными правилами легко получается список Γ', Γ .

Если последний переход дерева D осуществляется по правилам 2 или 3, то индукционный шаг очевиден. \square

Докажем теперь утверждение, связывающее исчисление резольвент с доказуемостью в исчислении высказываний.

Предложение 6.5.2. *Если $\Gamma_0; \dots; \Gamma_n$ — непустые списки формул (исчисления резольвент), то формула $\bigvee_{i=0}^n (\bigwedge \Gamma_i)$ доказуема в исчислении высказываний тогда и только тогда, когда в исчислении $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ доказуем пустой список формул \emptyset .*

Доказательство. Пусть D — такое дерево списков формул, что на вершинах стоят непустые списки формул $\Theta_0; \dots; \Theta_k$, каждый переход есть переход по одному из правил вывода исчисления резольвент, а Θ — заключительный (быть может, пустой) список формул. Докажем, что тогда в исчислении высказываний доказуема секвенция $\Theta \vdash \bigvee_{i=0}^k (\bigwedge \Theta_i)$. Доказывать будем индукцией по числу списков формул в дереве D .

Пусть D состоит из единственного (непустого) списка Θ , тогда секвенция $\Theta \vdash \bigwedge \Theta$, очевидно, доказуема в исчислении высказываний.

Пусть дерево D имеет вид $\frac{D_0; D_1}{\Theta}; \Theta_0^0; \dots; \Theta_{k_0}^0$ — списки, стоящие на вершинах дерева $D_0; D_1$; $\Theta_0^1; \dots; \Theta_{k_1}^1$ — списки, стоящие на вершинах дерева D_1 . Пусть заключительный переход есть

$$\frac{\Theta_0, \Phi; \Theta_1, \Phi^*}{\Theta}$$

(тогда $\Theta = \Theta_0, \Theta_1$). По индукционному предположению в исчислении высказываний доказуемы секвенции $\Theta_0, \Phi \vdash \Phi^0$ и $\Theta_1, \Phi^* \vdash \Phi^1$, где $\Phi^0 = \bigvee_{i=0}^{k_0} (\bigwedge \Theta_i^0)$ и $\Phi^1 = \bigvee_{i=0}^{k_1} (\bigwedge \Theta_i^1)$. Тогда дерево

$$\frac{\frac{\frac{\Theta_0, \Phi \vdash \Phi^0}{\vdash \Phi \vee \Phi^*}; \quad \frac{\Theta_1, \Phi^* \vdash \Phi^1}{\Theta_1, \Phi^* \vdash \Phi^0 \vee \Phi^1}}{\Theta_0, \Theta_1 \vdash \Phi^0 \vee \Phi^1}}$$

есть квазивывод нужной секвенции для дерева D . Случай, когда последний переход в дереве D соответствует структурным правилам 2 или 3, очевиден. Из доказанного утверждения вытекает, что если в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ доказуем пустой список формул, то формула $\bigvee_{i=0}^n (\bigwedge \Gamma_i)$ доказуема в исчислении высказываний.

Для доказательства обратного утверждения будем использовать пропозициональный вариант G_P исчисления G . Индукцией по числу символов конъюнкций в секвенции

$$\vdash \bigwedge \Theta_0, \dots, \bigwedge \Theta_k \quad (6.7)$$

покажем, что если эта секвенция доказуема в G_P , то в $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_k)$ доказуем пустой список.

Пусть секвенция (6.7) не содержит знака конъюнкции. Тогда она имеет вид $\vdash \Phi_0, \dots, \Phi_k$, где Φ_i — пропозициональные переменные или их отрицания. Такая секвенция доказуема в G_P в том и только в том случае, когда существуют $i, j \leq k$ такие, что $\Phi_i = \Phi_j^*$, тогда

$$\frac{\Phi_j; \Phi_j^*}{\emptyset}$$

есть доказательство в $R_P(\Phi_0; \dots; \Phi_k)$.

Пусть для секвенций вида (6.7) с числом знаков \wedge , меньшим n , утверждение справедливо. Пусть секвенция (6.7) имеет n знаков \wedge и $\Theta_k = \Theta_k^0, \Theta_k^1$, где Θ_k^0 и Θ_k^1 — непустые списки формул. По свойству обратимости, если секвенция (6.7) доказуема, то доказуемы и секвенции $\vdash \bigwedge \Theta_0, \dots, \bigwedge \Theta_{k-1}, \bigwedge \Theta_k^0$ и $\vdash \bigwedge \Theta_0, \dots, \bigwedge \Theta_{k-1}, \bigwedge \Theta_k^1$. По индукционному предположению в $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_{k-1}; \Theta_k^0)$ и $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_{k-1}; \Theta_k^1)$ доказуем пустой список \emptyset . Пусть D_0 и D_1 — соответствующие доказательства. Если Θ_k^1 не встречается на вершинах дерева D_1 , то D_1 — доказательство (списка \emptyset) в $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_{k-1})$ и тем более в $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_{k-1}; \Theta_k)$. Если же Θ_k^1 встречается на вершинах дерева D_1 , то по лемме 6.5.1 в $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_{k-1}; \Theta_k = \Theta_k^0, \Theta_k^1)$ существует доказательство D'_0 списка Θ_k^0 . Подставляя в D_0 на место всех вершин вида Θ_k^0 дерево D'_0 , получим доказательство пустого списка в $R_P(\Theta_0; \dots; \Theta_k)$.

Возвращаемся к доказательству нужного утверждения. По свойству обратимости формула $\bigvee_{i=0}^n (\bigwedge \Gamma_i)$ доказуема в G_P тогда и только тогда, когда доказуема секвенция $\vdash \bigwedge \Gamma_0, \dots, \bigwedge \Gamma_n$. По только что доказанному утверждению из доказуемости секвенции $\vdash \bigwedge \Gamma_0, \dots, \bigwedge \Gamma_n$ следует, что в $R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ доказуем пустой список формул \emptyset . \square

Перейдем теперь к изучению *исчислений резольвент* для исчисления предикатов.

Формулами исчисления резольвент будут атомарные формулы исчисления G или их отрицания. Для формулы Φ обозначение Φ^* определяется, как выше. *Правилами вывода* будут правила 1, 2, 3 и правило

$$4. \frac{\Gamma}{(\Gamma)^{\overline{x}}_t},$$

где $\bar{x} = x_1, \dots, x_k$ — список различных переменных, а $\bar{t} = t_1, \dots, t_k$ — список термов.

Исчисления резольвент различаются аксиомами. Исчисление резольвент с аксиомами (списками) $\Gamma_0; \dots; \Gamma_n$ обозначается $R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$. Связь исчисления резольвент с доказуемостью в исчислении предикатов устанавливается следующим утверждением.

Предложение 6.5.3. *Предположим, что*

$$\Phi = \exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigvee_{i=0}^n (\bigwedge \Gamma_i) \right)$$

— замкнутая формула исчисления предикатов, а Γ_i , $i = 0, \dots, n$, — непустые списки атомарных формул или их отрицаний. Формула Φ доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда в исчислении резольвент $R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ доказуем пустой список формул.

Доказательство. Пусть Φ — доказуемая в G формула, тогда по предложению 6.4.22 существуют такие наборы термов $\bar{t}^1 = t_1^1, \dots, t_m^1; \dots; \bar{t}^k = t_1^k, \dots, t_m^k$, что доказуема секвенция

$$\vdash \left(\bigvee_{i=0}^n (\bigwedge \Gamma_i) \right)_{\bar{t}^1}^{\bar{x}}, \dots, \left(\bigvee_{i=0}^n (\bigwedge \Gamma_i) \right)_{\bar{t}^k}^{\bar{x}}.$$

Доказуемость этой секвенции равносильна доказуемости формулы

$$\Phi' = \bigvee_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \left(\bigwedge \Gamma_i \right)_{\bar{t}^j}^{\bar{x}}.$$

По предложению 6.4.23 формула Φ' доказуема тогда и только тогда, когда доказуема пропозициональная формула Φ'_P . Используя предложение 6.5.2, из доказуемости формулы Φ'_P в исчислении высказываний получаем, что в исчислении резольвент $R(\dots; (\Gamma_i)_{\bar{t}^j}^{\bar{x}}; \dots)$ доказуем пустой список с использованием только правил 1–3. (Для этого в доказательстве пустого списка в пропозициональном исчислении резольвент, связанном с формулой Φ'_P , нужно сделать обратную замену пропозициональных переменных на соответствующие элементарные формулы.) Но так как списки $(\Gamma_i)_{\bar{t}^j}^{\bar{x}}$ получаются из списков Γ_i по правилу 4, то получаем, что в $R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ доказуем пустой список.

Для доказательства обратного утверждения, как в предложении 6.5.2, будем доказывать такое утверждение: если D — доказательство

списка Θ в $R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ и $\bar{x} = x_1, \dots, x_m$ — список всех переменных из формул списков $\Gamma_0; \dots; \Gamma_n$, то существуют такие наборы термов $\bar{t}^i = \bar{t}_1^i, \dots, \bar{t}_m^i$, $i = 1, \dots, k$, что в исчислении G доказуема секвенция

$$\Theta \vdash \bigvee_{i=1}^k \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge (\Gamma_j) \frac{\bar{x}}{\bar{t}^j} \right) \right).$$

Доказательство проводится индукцией по числу списков в доказательстве D . В случае, когда D есть просто список Γ_i , следующее дерево будет квазивыводом нужной секвенции:

$$\frac{\Gamma_i \vdash \bigwedge \Gamma_i}{\Gamma_i \vdash \bigvee_{j=1}^k (\bigwedge \Gamma_j)}.$$

Пусть доказательство D имеет вид $\frac{D'}{\Theta'}$, а последний переход есть $\frac{\Theta'}{\Theta}$, где $\Theta = (\Theta') \frac{\bar{u}}{\bar{t}}$. По индукционному предположению для некоторых наборов термов $\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^k$ в исчислении предикатов доказуема секвенция

$$C = \Theta' \vdash \bigvee_{i=1}^k \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge (\Gamma_j) \frac{\bar{x}}{\bar{t}^j} \right) \right).$$

Очевидно, что из доказуемости секвенции C следует и доказуемость секвенции $C' = (C) \frac{\bar{u}}{\bar{t}}$ (нужно взять доказательство D секвенции C в G и сделать подстановку $(D) \frac{\bar{u}}{\bar{t}}$, но тогда доказуема секвенция $C' = \Theta \vdash \bigvee_{i=1}^k \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge (\Gamma_j) \frac{\bar{x}}{\bar{t}'^j} \right) \right)$, где $\bar{t}'^j = (\bar{t}^j) \frac{\bar{u}}{\bar{t}}$).

Рассмотрение случаев, когда последний переход в доказательстве D осуществляется по правилу 1, 2 или 3 — как в предложении 6.5.2. Итак, если в $R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$ доказуем пустой список \emptyset , то существуют такие наборы термов $\bar{t}^1; \dots; \bar{t}^k$, что доказуема секвенция $\vdash \bigvee_{i=1}^k \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge (\Gamma_j) \frac{\bar{x}}{\bar{t}^i} \right) \right)$. Тогда доказуема секвенция

$$\vdash \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge \Gamma_j \right) \right) \frac{\bar{x}}{\bar{t}^1}, \dots, \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge \Gamma_j \right) \right) \frac{\bar{x}}{\bar{t}^k}.$$

Из доказуемости такой секвенции легко выводится, что доказуема и секвенция

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigvee_{j=0}^n \left(\bigwedge \Gamma_j \right) \right).$$

□

Укажем теперь, как свести вопрос о доказуемости в G произвольной формулы Φ исчисления G к вопросу о доказуемости пустого списка в подходящем исчислении резольвент.

Если Φ содержит свободные переменные z_0, \dots, z_n , то, используя следствие 6.2.3, легко проверить, что Φ доказуема тогда и только тогда, когда доказуемо универсальное замыкание $\Phi^0 = \forall z_0 \dots \forall z_n \Phi$ формулы Φ .

Пусть Φ^0 — замкнутая формула, тогда для нее эффективно находится ей эквивалентная формула Φ^1 , находящаяся в пренексной нормальной форме. По теореме Эрбрана доказуемость формулы Φ^1 (а следовательно, также формул Φ^0 и Φ) равносильна доказуемости эрбановой формы Φ_H^1 формулы Φ^1 . Матрица формулы Φ_H^1 находится в дизъюнктивной нормальной форме, т. е. имеет вид $\bigvee_{i=0}^n (\Lambda \Gamma_i)$, где Γ_i — некоторые списки атомарных формул или их отрицаний. Но тогда Φ_H^1 есть замкнутая Э-формула и, следовательно, ее доказуемость по предложению 6.5.3 равносильна выводимости пустого списка \emptyset в исчислении резольвент $R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$.

Из только что доказанного, теоремы 5.4.6 и теоремы 6.3.5 получаем сводимость вопроса о доказуемости произвольной формулы Φ в исчислении предикатов к вопросу о доказуемости пустого списка в подходящем исчислении резольвент.

Для машинной реализации поиска доказуемости пустого списка в исчислении резольвент используются различные детерминированные (иногда и недетерминированные) способы последовательного преобразования списков так, чтобы все доказуемые списки были получены при таких преобразованиях. Такие способы носят названия *стратегий поиска*. Обсуждение каких либо стратегий выходит за рамки нашего учебника.

Для того чтобы хоть немного почувствовать возникающие здесь проблемы, предлагается доказать следующее утверждение.

Предложение 6.5.4. *Существует алгоритм, который по двум формулам Φ и Ψ исчисления резольвент узнает, существуют ли такие наборы термов $\bar{t} = t_1, \dots, t_n$, что формулы $(\Phi)_{\bar{t}}^{\bar{x}}$ и $(\Psi)_{\bar{t}}^{\bar{x}}$ совпадают, и если такие наборы существуют, то находит универсальный такой набор \bar{t} .*

Универсальность означает, что для любого набора \bar{t}' такого, что $(\Phi)_{\bar{t}'}^{\bar{x}} = (\Psi)_{\bar{t}'}^{\bar{x}}$, существует такой набор термов $\bar{t}'' = t_0'', \dots, t_k''$, соответствующий списку $\bar{u} = u_0, \dots, u_k$ свободных переменных термов из \bar{t} , что $\bar{t}' = (\bar{t})_{\bar{t}''}^{\bar{u}}$. \square

Г л а в а 7

ВЫЧИСЛИМОСТЬ

§ 7.1. Понятие алгоритма

В предыдущих главах мы неоднократно говорили об алгоритме \mathfrak{A} , действующем на некотором множестве объектов X , понимая под этим точное предписание, определяющее по любому объекту $a \in X$ некоторую вполне определенную последовательность простейших действий, осуществляя которые, мы либо никогда не закончим этот процесс (вычисления), либо этот процесс заканчивается и мы получаем объект $\mathfrak{A}(a)$, называемый *значением \mathfrak{A} на a* , либо процесс обрывается без получения значения. Если процесс, определяемый алгоритмом \mathfrak{A} по элементу a , не заканчивается или обрывается без получения значения, то говорят, что \mathfrak{A} *не применим к a* . Примерами алгоритмов могут служить правила сложения, умножения и деления, действующие на множестве пар натуральных чисел. Заметим, что алгоритм деления не применим к паре натуральных чисел $\langle n, m \rangle$, если n не делится нацело на m . Другим примером является описанный в § 4.3 алгоритм нахождения по формуле исчисления предикатов эквивалентной ей формулы, находящейся в пренексной нормальной форме. Количество простейших действий, необходимых для получения значения алгоритма, может быть весьма большим. Однако мы отвлекаемся (абстрагируемся) на данном уровне изучения от реальных возможностей осуществления алгоритмов и будем исходить из предположения, что при осуществлении процесса вычисления, определенного алгоритмом, мы имеем неограниченный запас времени и материалов. Такое предположение носит название *принципа потенциальной осуществимости*.

Как правило, интуитивного понимания бывает достаточно для установления того, является ли данное предписание алгоритмом или нет. Однако без точного определения алгоритма невозможно обойтись, если пытаться доказывать, что для решения определенного класса задач не существует единой эффективной процедуры (алгоритма). Но возможно ли найти такое математическое определение понятия алгоритма, чтобы и охватить все разнообразие уже существующих алгоритмов и эффективных процедур, накопленных математической и вычислительной

практикой, и быть уверенным, что любой предложенный в будущем интуитивно приемлемый алгоритм подпадает под это определение? Поставленный столь широко вопрос вряд ли имеет положительное решение. Однако реальное развитие математики привело к удовлетворительному решению (точнее было бы сказать снятию) этой проблемы. А именно, было предложено несколько формализаций понятия алгоритма, различающихся возможными областями действия, набором допустимых простейших действий и возможностями составления предписаний (программ) для вычисления. Изучение этих формализаций показало, что они обладают свойствами замкнутости относительно всевозможных комбинаций (суперпозиции, итерации и т. п.), большими возможностями воспроизводить с достаточной степенью похожести (адекватности) все известные алгоритмические процедуры и приемы. Наиболее существенным для оправдания определений оказалось совпадение классов вычислимых функций для всех этих понятий. Поэтому по крайней мере понятие (алгоритмически) вычислимой функции (с натуральными аргументами и значениями) оказалось инвариантно определенным и для теоретических целей этого вполне достаточно. Существование ряда различных определений (уточнений) понятия алгоритм имеет и свои преимущества, так как для решения различных задач бывает удобно использовать различные, наиболее подходящие для этого случая, определения. Аналогию этому явлению можно найти в программировании — существующее многообразие языков программирования во многом объясняется разнообразием задач, стоящих перед вычислителями и программистами.

В этой главе будут даны определения для трех различных, но эквивалентных подходов к понятию алгоритмической вычислимости. За основу первого подхода, отступая от традиций, берется понятие Σ -определенности. Традиционные уточнения понятия вычислимости — машины Тьюринга и рекурсивные функции — будут приведены в конце настоящей главы.

§ 7.2. Σ -предикаты и Σ -функции на Ω

Пусть $\Omega = \langle \omega, 0, s, +, \cdot, \leq \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma_0 = \langle 0, s^1, +^2, \cdot^2, \leq^2 \rangle$, основным множеством которой является множество натуральных чисел (конечных ordinalов), символы $0, +, \cdot, \leq$ имеют обычный смысл, а функция $s^\Omega: \omega \rightarrow \omega$ такая, что $s^\Omega(n) = n + 1$ для всех $n \in \omega$. Изучение Σ -функций удобно проводить в более широком классе частичных Σ -функций.

Напомним, что под *частичной функцией* мы понимаем здесь всякое отображение $f: X \rightarrow \omega$, где $X \subseteq \omega^k$ для некоторого $k \in \omega$. Число

k в этом случае называется *местностью* частичной функции f и обозначается через $\nu(f)$. Если $f: X \rightarrow \omega$ — частичная функция, то будем называть f *нигде не определенной* при $X = \emptyset$ и *всюду определенной* при $X = \omega^{\nu(f)}$.¹⁾ Всюду определенную частичную функцию в дальнейшем будем называть просто *функцией*. Частичную функцию местности k будем называть *k -местной частичной функцией*. Мы допускаем случай, когда $k = 0$. Тогда 0-местная функция $f: \omega^0 \rightarrow \omega$ будет состоять из одной пары $\langle \emptyset, n \rangle$ для некоторого $n \in \omega$ и часто будет отождествляться с числом n . Всюду в дальнейшем буквы m, k, n, i и j , возможно с индексами, будут обозначать натуральные числа.

Пусть $f: X \rightarrow \omega$ — k -местная частичная функция. Если $\langle m_1, \dots, m_k \rangle \in X$, то $f(m_1, \dots, m_k)$ — это значение функции f на наборе $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$. Если $\langle m_1, \dots, m_k \rangle \notin X$, то будем говорить, что $f(m_1, \dots, m_k)$ *не определено* или что f *не определена на наборе* $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$.

Ясно, что для задания частичной k -местной функции f достаточно для любого набора $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$ сказать, определено ли $n = f(m_1, \dots, m_k)$. Если f и g — частичные функции, то будем писать

$$f(m_1, \dots, m_k) = g(m_1, \dots, m_k),$$

когда обе части равенства определены и равны, либо обе части равенства не определены.

Пусть $k > 0$ и $X \subseteq \omega^k$.

Определение. (Частичная) k -местная функция $g: X \rightarrow \omega$ называется (*частичной*) Σ -функцией, если ее график

$$\Gamma_g = \{ \langle m_0, \dots, m_{k-1}, m_k \rangle \mid m_0, \dots, m_{k-1} \in X, g(m_0, \dots, m_{k-1}) = m_k \}$$

есть Σ -предикат на Ω .

Множество X — область определения функции g — будем обозначать через δ_g .

Укажем простейшие факты о (частичных) Σ -функциях.

$\langle 1 \rangle$ Следующие функции $\theta: \omega \rightarrow \omega$ и $I_k^n: \omega^n \rightarrow \omega$, где $n > 0$, $k < n$, являются Σ -функциями:

$$\theta(i) = 0, \quad i \in \omega,$$

$$I_k^n(i_0, \dots, i_{n-1}) = i_k, \quad i_1, \dots, i_{n-1} \in \omega.$$

¹⁾ Отметим, что если f — частичная функция, то ее местность определена по f однозначно в случае, когда f не является нигде не определенной. Нигде не определенные функции местности k и m для любых $k, m \in \omega$ равны.

Как легко видеть,

$$\Gamma_\theta = (x_1 \approx 0)^\Omega [x_0, x_1],$$

$$\Gamma_{I_k^r} = (x_n \approx x_k)^\Omega [x_0, \dots, x_{n-1}, x_n].$$

(2) Пусть $D \subseteq \omega^n$ и $\delta_i \subseteq \omega^k$, где $i \leq n$. Если $H: D \rightarrow \omega$ и $g_i: \delta_i \rightarrow \omega$, где $i < n$, являются частичными Σ -функциями,

$$\delta \Leftarrow \left\{ \bar{i} \mid \bar{i} = \langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in \bigcap_{j < n} \delta_j, \langle g_0(\bar{i}), \dots, g_{n-1}(\bar{i}) \rangle \in D \right\},$$

то следующая функция $h: \delta \rightarrow \omega$ является Σ -функцией:

$$h(\bar{i}) = H(g_0(\bar{i}), \dots, g_{n-1}(\bar{i})), \quad \bar{i} \in \delta.$$

Действительно, если $\Gamma_H = \Phi^\Omega[\bar{x}]$ и $\Gamma_{g_i} = \varphi_i^\Omega[\bar{y}]$, $i < n$, для Σ -формул Φ и φ_i , $i < n$, то

$$\Gamma_h = \exists x_0 \dots \exists x_{n-1} \left(\bigwedge_{j < n} (\varphi_j)_{x_j}^{y_k} \wedge (\Phi)_{y_k}^{x_n} \right)^\Omega [\bar{y}].$$

Для дальнейшего изучения Σ -предикатов и Σ -функций на Ω важной является возможность «кодирования» пар, троек, ..., всех конечных последовательностей натуральных чисел натуральными числами с помощью Σ -функций на Ω . Начнем с «кодирования» пар.

(3) Функция $c: \omega^2 \rightarrow \omega$, определенная по формуле

$$c(x, y) \Leftarrow \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x,$$

взаимно однозначно отображает ω^2 на ω (см. рис. 1).

Формальное доказательство оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только лишь, что c соответствует «пересчету» (т. е. нумерации) всех упорядоченных пар натуральных чисел в соответствии с рис. 1. Именно: номером $c(x, y)$ пары (x, y) является сумма числа пар (u, v) таких, что $u + v < x + y$; это число равно величине $(x + y)(x + y + 1)/2$ и первой координаты x .

Следствие 7.2.1. Существуют функции $l: \omega \rightarrow \omega$ и $r: \omega \rightarrow \omega$ такие, что для любых $x, y \in \omega$ выполняется

$$l(c(x, y)) = x, \quad r(c(x, y)) = y, \quad c(l(x), r(x)) = x.$$

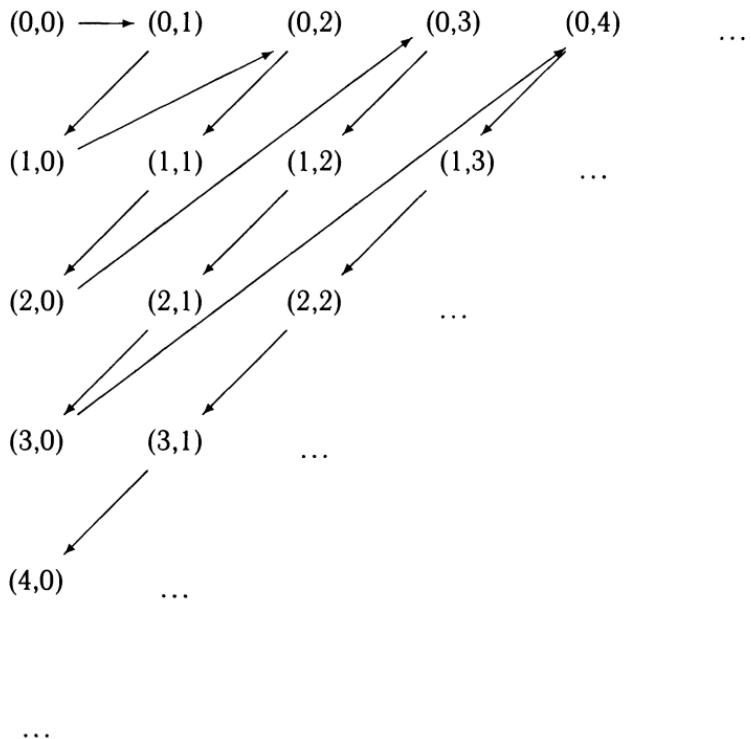


Рис. 1

Замечание 7.2.2. Для любых $x, y \in \omega$ справедливо

$$c(x, y) \geqslant x, y,$$

$$c(x, y) = x \text{ лишь в случае } x = y = 0,$$

$$c(x, y) = y \text{ лишь в случаях } x = 0 \text{ и } (y = 0 \text{ или } y = 1),$$

$$l(x) \leqslant x,$$

$$l(x) = x \text{ лишь в случае } x = 0,$$

$$r(x) \leqslant x,$$

$$r(x) = x \text{ лишь в случаях } x = 0 \text{ или } x = 1.$$

4) Функции c , l и r являются Σ -функциями на Ω .

Действительно, легко проверить, что если

$$\Phi(x, y, z) \Leftrightarrow \exists u(u + u \approx (x + y)(x + s(y)) \wedge z \approx u + x),$$

$$\Gamma_c \Leftrightarrow \Phi^\Omega[x, y, z], \Gamma_l \Leftrightarrow (\exists y\Phi)^\Omega[z, x], \Gamma_r \Leftrightarrow (\exists x\Phi)^\Omega[z, y].$$

Расширим сигнатуру σ_0 до сигнатуры $\sigma_1 = \sigma_0 \cup \langle c^2, l^1, r^1 \rangle$ и алгебраическую систему Ω обогатим до Ω_1 так, что $c^{\Omega_1} = c$, $l^{\Omega_1} = l$ и $r^{\Omega_1} = r$. В соответствии с предложением 5.8.6 Σ -предикаты (Σ -функции) на Ω_1 будут Σ -предикатами (Σ -функциями) на Ω . Рассмотрим Δ_0 -формулу $B(x, y, z)$ сигнатуры σ_1 :

$$\exists w \leqslant l(x)(s(s(c(z, y))r(x))w \approx l(x)) \wedge$$

$$\forall \forall u \leqslant z (\neg u \approx z \rightarrow \neg \exists w \leqslant l(x)(s(s(c(u, y))r(x))w \approx l(x))) \vee$$

$$\forall \forall u \leqslant l(x) \forall w \leqslant l(x) (\neg (s(s(c(u, y))r(x))w \approx l(x)) \wedge z \approx 0)$$

и соответствующий ей предикат $B^{\Omega_1}[x, y, z]$ на Ω_1 .

(5) Предикат $B^{\Omega_1}[x, y, z]$ является графиком функции $\beta: \omega^2 \rightarrow \omega$ такой, что для любых $k \in \omega$ и $n_0, \dots, n_k \in \omega$ существует $m \in \omega$ такое, что $\beta(m, i) = n_i$ для всех $i \leqslant k$.

Проверим сначала, что $B^{\Omega_1}[z, y, z]$ является графиком. Пусть $n, m \in \omega$. Возможны два случая.

Случай 1: существует $k \in \omega$ такое, что число $s(s(c(k, m))r(n)) = (c(k, m) + 1)r(n) + 1$ делит $l(n)$, т. е. существует w такой, что

$$s(s(c(k, m))r(n))w = l(n).$$

Выбираем наименьшее k_0 такое, что $s(s(c(k_0, m))r(n))$ делит $l(n)$. Заметим, что в этом случае $k_0 \leqslant l(n)$. Действительно, если $l(n) = 0$ или $r(n) = 0$, то $k_0 = 0$. Если $r(n) \neq 0$, то

$$k_0 \leqslant c(k_0, m) < s(s(c(k_0, m))r(n)) \leqslant s(s(c(k_0, m))r(n)) \leqslant l(n).$$

Следовательно,

$$\Omega_1 \models \exists u \leqslant l(n) \exists w \leqslant l(n) (s(s(c(u, m))r(n))w \approx l(n))$$

и если $\langle n, m, k \rangle \in B^{\Omega_1}[x, y, z]$, то $k = k_0$.

Случай 2: не существует k со свойством, указанным в случае 1. Очевидно, имеем лишь $\langle n, m, 0 \rangle \in B^{\Omega_1}[x, y, z]$. Таким образом, $B^{\Omega_1}[x, y, z]$ — график двуместной функции, которую обозначим через β .

Докажем вторую часть утверждения (5). Пусть $n_0, \dots, n_k \in \omega$, $c = \max\{c(n_i, i) + 1 \mid i \leqslant k\}$ и $a = c!$. Покажем, что при $0 \leqslant j < l \leqslant c$ числа $ja + 1$ и $la + 1$ взаимно просты. Предположим противное: пусть простое число p делит их разность $(la + 1) - (ja + 1) = (l - j)a$. Тогда p делит $l - j$ или a . Но так как $l - j \leqslant c$, получаем, что p делит $a = c!$. Так что в любом случае p делит a . Но тогда $a = pa'$ для некоторого $a' \in \omega$ и $ja + 1 = (ja')p + 1$ и это число не может делиться на p . Приходим к противоречию.

Полагаем

$$b \doteq \prod_{i \leq k} ((c(n_i, i) + 1)a + 1), \quad m \doteq c(b, a).$$

Покажем, что m таково, что $\beta(m, i) = n_i$ для всех $i \leq k$.

Пусть $l \leq k$. Тогда число $s(s(c(n_i, i))a) = ((c(n_i, i) + 1)a + 1)$ делит b ($a = r(m)$, $b = l(m)$). Предположим, что для некоторого $u \leq n_i$ число $s(s(c(u, i))a)$ также делит b . Так как $u \leq n_i$, имеем $c(u, i) \leq c(n_i, i) < c$. Ввиду взаимной простоты чисел вида $ja + 1$ и $la + 1$ для $j \neq l < c$ получаем, что $c(u, i) + 1$ должно совпадать с некоторым $c(n_j, j) + 1$ для $j \leq k$. Но если $c(u, i) + 1 = c(n_j, j) + 1$, то $c(u, i) = c(n_j, j)$, $i = j$, и $u = n_i$. Таким образом, n_i является наименьшим из таких z ($\leq b = l(m)$), что $s(s(c(z, i)r(m))$ делит $l(m)$. Поэтому $\beta(m, i) = n_i$.

Функцию β , обычно применяемую для кодирования конечных последовательностей натуральных чисел, используем лишь один раз для введения более удобного кодирования.

(6) Следующая двуместная функция $l_*: \omega^2 \rightarrow \omega$ является Σ -функцией на Ω_1 (на Ω):

$$l_*(n, 0) = n,$$

$$l_*(n, k + 1) = l(l_*(n, k)), \quad n, k \in \omega.$$

Установим, что l_* есть Σ -функция на Ω'_1 , где Ω'_1 — обогащение Ω_1 до сигнатуры $\sigma'_1 \doteq \sigma \cup \langle \beta^2 \rangle$ и $\beta^{\Omega'_1} = \beta$. Рассмотрим следующую Σ -формулу $\Lambda(x, y, z)$ (сигнатуры σ'_1):

$$\exists u (\beta(u, 0) \approx x \wedge \forall v \leq y (\beta(u, s(v)) \approx l(\beta(u, v)) \wedge z \approx \beta(u, y))).$$

Нетрудно проверить, что $\Gamma_{l_*} = \Lambda^{\Omega'_1}[x, y, z]$.

Замечание 7.2.3. Справедливы следующие утверждения:

- если $l_*(n, i) > 0$, то $l_*(n, i + 1) < l_*(n, i)$, и $l_*(n, i) = 0$ при $i \geq n$;
- $l_*(l_*(m, i), j) = l_*(m, i + j)$, $m, i, j \in \omega$.

Определим функцию $\Gamma: \omega^2 \rightarrow \omega$ по формуле $\Gamma(x, y) \doteq r(l_*(x, y))$. Поскольку $\Gamma_\Gamma = \exists u (\Lambda(x, y, u) \wedge z \approx r(u))^{\Omega'_1}[x, y, z]$, справедливо

Следствие 7.2.4. Функция Γ является Σ -функцией на Ω'_1 (Ω_1).

Пусть $\sigma_2 \doteq \sigma'_1 \cup \langle \Gamma^2 \rangle$ и Ω_2 — обогащение Ω'_1 до сигнатуры σ_2 такое, что $\Gamma^{\Omega_2} = \Gamma$. Покажем, что функция Γ обладает тем же важнейшим свойством, что и функция β .

(7) Для любых $n_0, \dots, n_k \in \omega$ существует $m \in \omega$ такое, что $\Gamma(m, i) = n_i$ для всех $i \leq k$.

Действительно, легко проверить, что $\Gamma(m, i) = n_i$ для всех $i \leq k$, если

$$m = \underbrace{c(c(\dots c(c(0, n_k), n_{k-1}), \dots, n_1), n_0)}_{k+1}.$$

Для Γ справедливо более сильное утверждение.

(8) Функция Γ обладает следующими свойствами:

- для любой функции $f: \omega \rightarrow \omega$ такой, что $f(i) = 0$ для всех $i > k_f$, и для подходящего $k_f \in \omega$, существует $m \in \omega$ такое, что $\Gamma(m, i) = f(i)$ для всех $i \in \omega$;
- если $m_0 \neq m_1$, то существует $i \in \omega$ такое, что $\Gamma(m_0, i) \neq \Gamma(m_1, i)$.

Первое свойство вытекает из того факта, что если m выбрано для последовательности $n_0 = f(0), \dots, n_{k_f} = f(k_f)$ так же, как в доказательстве *(7)*, то $\Gamma(m, i) = f(i)$ для всех $i \in \omega$.

Второе свойство легко вытекает из следующего общего свойства, проверяемого индукцией по k : для любых $m, k \in \omega$, $k \neq 0$, имеет место соотношение

$$m = \underbrace{c(c(\dots c(l_*(m, k), \Gamma(m, k-1)), \dots, \Gamma(m, 1)), \Gamma(m, 0))}_k.$$

Замечание 7.2.5. Для любых $m \in \omega$ и $k \geq m$ верно равенство $\Gamma(m, k) = 0$. Следовательно, соответствие $m \mapsto \lambda_i \Gamma(m, i)$ (= функция $f: \omega \rightarrow \omega$ такая, что $f(i) = \Gamma(m, i)$ для всех $i \in \omega$), где $m \in \omega$, является взаимно однозначным соответствием между натуральными числами и одноместными функциями f на ω , «стремящимися к нулю на бесконечности» (т. е. такими, что существует k_f со свойством $f(i) = 0$ для $i > k_f$).

С функцией Γ можно связать также некоторую эффективную нумерацию семейства всех конечных подмножеств ω : для любого $n \in \omega$ полагаем $F_n = \{k \mid \Gamma(n, k) = 1\}$. Тогда F_n — конечное подмножество ω , $k \in F_n \implies k \leq n$. Если $F \subseteq \omega$ конечно и $\chi_F: \omega \rightarrow \omega$ — характеристическая функция F , т. е. $\chi_F(n) = 1$ при $n \in F$ и $\chi_F(n) = 0$ при $n \notin F$, то согласно замечанию 7.2.5 существует $m \in \omega$ такое, что $\Gamma(m, i) = \chi_F(i)$ для всех $i \in \omega$. Следовательно, $F = F_m$.

Укажем еще ряд свойств класса частичных Σ -функций, попутно определяя необходимые понятия.

Определение. Пусть $H: D \rightarrow \omega$, $D \subseteq \omega^{n+1}$. Функция $h: \delta \rightarrow \omega$, $\delta \subseteq \omega^n$, получена из H минимизацией ($h(\bar{x}) = \mu y H(\bar{x}, y)$), если $\langle i_0, \dots, i_{n-1} \rangle \in \delta$ тогда и только тогда, когда существует $i \in \omega$ такое, что для всех $j < i$ выполняется

$$\langle i_0, \dots, i_{n-1}, j \rangle \in D, \quad H(i_0, \dots, i_{n-1}, j) \neq 0,$$

$$\langle i_0, \dots, i_{n-1}, i \rangle \in D, \quad H(i_0, \dots, i_{n-1}, i) = 0,$$

причем $h(i_0, \dots, i_{n-1}) = i$ для этого i .

(9) Если $H: D \rightarrow \omega$, $D \subseteq \omega^{n+1}$, — частичная Σ -функция, а $h: \delta \rightarrow \omega$, $\delta \subseteq \omega^n$, получена из H минимизацией, то h также является частичной Σ -функцией.

Если $\Gamma_H = \Phi^\Omega[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]$ для Σ -формулы Φ , то

$$\Gamma_h = (\Phi(x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \wedge \forall y \leq x_n (y \approx x_n \vee$$

$$\vee \exists z (\Phi(x_0, \dots, x_{n-1}, z) \wedge \neg z \approx 0))^\Omega[x_0, \dots, x_n].$$

Определение. Пусть $h: \delta_0 \rightarrow \omega$, $\delta_0 \subseteq \omega^n$ и $H: D \rightarrow \omega$, $D \subseteq \omega^{n+2}$. Функция $g: \delta \rightarrow \omega$, $\delta \subseteq \omega^{n+1}$, получена из h и H примитивной рекурсией, если

- $\langle i_0, \dots, i_{n-1}, 0 \rangle \in \delta$ тогда и только тогда, когда $\langle i_0, \dots, i_{n-1} \rangle \in \delta_0$, причем в этом случае $g(i_0, \dots, i_{n-1}, 0) = h(i_0, \dots, i_{n-1})$;
- для $i \in \omega$ соотношение $\langle i_0, \dots, i_{n-1}, i+1 \rangle \in \delta$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\langle i_0, \dots, i_{n-1}, i \rangle \in \delta$$

$$\langle i_0, \dots, i_{n-1}, g(i_0, \dots, i_n, i), i+1 \rangle \in D,$$

причем в этом случае

$$g(i_0, \dots, i_{n-1}, i+1) = H(i_0, \dots, i_{n-1}, g(i_0, \dots, i_{n-1}, i), i+1).$$

(10) Если $h: \delta_0 \rightarrow \omega$, $\delta_0 \subseteq \omega^n$ и $H: D \rightarrow \omega$, $D \subseteq \omega^{n+2}$, — частичные Σ -функции, а $g: \delta \rightarrow \omega$, $\delta \subseteq \omega^{n+1}$, получена из h и H примитивной рекурсией, то g — частичная Σ -функция.

Пусть $\Gamma_h = \Phi_0^\Omega[x_0, \dots, x_{n-1}, y]$ и $\Gamma_H = \Phi_1^\Omega[x_0, \dots, x_{n-1}, y, z, w]$ для подходящих Σ -формул Φ_0 и Φ_1 . Определим Σ -формулу Ψ сигнатуры σ_2 :

$$\Psi(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) \Leftarrow \exists v \forall y \leq x_n \exists z (\Phi_0(x_0, \dots, x_{n-1}, \Gamma(v, 0)) \wedge$$

$$\wedge (y \approx x_n \vee \Phi_1(x_0, \dots, x_{n-1}, \Gamma(v, y), y+1, \Gamma(v, y+1))) \wedge x_{n+1} \approx \Gamma(v, x_n)).$$

Нетрудно проверить, что $\Gamma_g = \Psi^{\Omega_2}[x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]$.

Замечание 7.2.6. Легко убедиться, что если h и H — Σ -функции, то g — Σ -функция.

Определение. Пусть $Q \subseteq \omega^k$ — k -местный предикат. *Характеристической функцией* $\chi_Q: \omega^k \rightarrow \omega$ предиката Q называется функция

$$\chi_Q(\bar{i}) = \begin{cases} 1, & \bar{i} \in Q, \\ 0, & \bar{i} \notin Q, \end{cases}$$

для любого $\bar{i} = \langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in \omega^k$.

(11) *Если Q — Σ -предикат на Ω , то его характеристическая функция χ_Q является Σ -функцией на Ω .*

Пусть $Q = \Phi_0^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}]$, $\omega^k \setminus Q = \Phi_1^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}]$ для подходящих Σ -формул Φ_0 и Φ_1 . Если

$$\Psi \Leftarrow (\Phi_0(x_0, \dots, x_{k-1}) \wedge x_k \approx s(0)) \vee (\Phi_1(x_0, \dots, x_{k-1}) \wedge x_k \approx 0),$$

то $\Gamma_{\chi_Q} = \Psi^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}, x_k]$.

Определение. Пусть $Q \subseteq \omega^k$ — k -местный предикат. *Частичной характеристической функцией* предиката Q называется функция $\chi_Q^*: Q \rightarrow \omega$ такая, что $\chi_Q^*(\bar{i}) = 1$ для $\bar{i} \in Q$.

(11') *Если $Q \subseteq \omega^k$ — Σ -предикат на Ω , то его частичная характеристическая функция χ_Q^* является частичной Σ -функцией.*

Если $Q = \Phi^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}]$, то

$$\Gamma_{\chi_Q^*} = (\Phi(x_0, \dots, x_{k-1}) \wedge x_k \approx s(0))^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}, x_k].$$

Далее понадобится функция $\text{ch}: \omega^3 \rightarrow \omega$, обладающая следующим свойством: для любых $n, m \in \omega$ если $n' = \text{ch}(n, m, i)$, то $\Gamma(n', j) = \Gamma(n, j)$ для всех $j \neq i$ и $\Gamma(n', i) = m$. Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет следующим соотношениям (и ими характеризуется): для всех $n, m, i \in \omega$,

$$\text{ch}(n, m, 0) = c(l(n), m),$$

$$\text{ch}(n, m, i+1) = c(\text{ch}(l(n), m, i), r(n)).$$

Это определение напоминает определение примитивной рекурсии, однако таковым не является, так как во втором соотношении встречается не $\text{ch}(n, m, i)$, а $\text{ch}(l(n), m, i)$. Тем не менее, рассуждая аналогично,

как в случае примитивной рекурсии, можно установить следующее предложение.

(12) Функция ch : $\omega^3 \rightarrow \omega$ является Σ -функцией.

Пусть

$$\begin{aligned} \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3) \Leftarrow & \exists u \forall y \leq c(x_0, x_2)[(r(y) \approx 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \Gamma(u, y) \approx c(l(l(y)), x_1)) \wedge (\neg r(y) \approx 0 \rightarrow \\ & \rightarrow \exists z(s(z) \approx r(y) \wedge \Gamma(u, y) \approx c(\Gamma(u, c(l(l(y)), z)), r(l(y)))))] \wedge \\ & \wedge x_3 \approx \Gamma(u, c(x_0, x_2)). \end{aligned}$$

Тогда $\Gamma_{\text{ch}} = \Phi^{\Omega_2}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Прежде чем сформулировать и доказать главное утверждение настоящего параграфа, отметим следующий достаточно очевидный факт:

(13) Алгебраическая система Ω является ограниченной (в смысле определения из § 5.7).

Обозначим через σ^* расширение сигнатуры σ_0 , полученное добавлением символов для всех Σ -функций на Ω и константных символов для всех элементов ω , а через Ω^* — соответствующее обогащение Ω . Из рассуждений, проведенных в § 5.8, 5.9 (см. предложение 5.9.4), вытекает

Следствие 7.2.7. Справедливы следующие утверждения:

- (а) Ω^* — ограниченная алгебраическая система сигнатуры σ^* ,
- (б) предикат $Q \subseteq \omega^k$ (функция $f: \omega^k \rightarrow \omega$) является Σ -предикатом (Σ -функцией) на Ω^* тогда и только тогда, когда Q (f) есть Σ -предикат (Σ -функция) на Ω .

Теорема 7.2.8 (Ганди). Пусть $\Phi(x, P^+)$ — Σ -формула сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^+ \rangle$, в которую предикатный символ P входит позитивно. Тогда наименьшая неподвижная точка $\Gamma_* \subseteq \omega$ оператора $\Gamma_{\Phi[x]}^{\Omega^*}$ является Σ -подмножеством на Ω^* .

Доказательство. Рассмотрим последовательность подмножеств множества ω :

$$\Gamma_0 = \emptyset, \quad \Gamma_{n+1} = \Gamma_{\Phi[x]}^{\Omega^*}(\Gamma_n), \quad n \in \omega.$$

Имеем $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots \subseteq \Gamma_*$. Согласно предложению 5.9.3 все Γ_n являются Σ -подмножествами множества ω . Поэтому по предложению 5.9.4

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_{\exists u \Phi(u)[x]}^{\Omega^*}(\Gamma_n), \quad n \in \omega.$$

Определим последовательность конечных подмножеств множества ω следующим образом:

$$\Delta_0 \Leftarrow \emptyset,$$

$$\Delta_{n+1} \Leftarrow \{k \mid k \leq n+1, \langle \Omega^*, \Delta_n \rangle \models \exists u \leq n+1 \Phi^{(u)}(k)\}, \quad n \in \omega.$$

Легко проверить, что

$$\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \dots \subseteq \Delta_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \dots,$$

$$\Delta_n \subseteq \Gamma_n, \quad n \in \omega.$$

Докажем, что предикат $\Delta \Leftarrow \{\langle n, m \rangle \mid m \in \Delta_n, n, m \in \omega\}$ является Σ -предикатом. Для этого рассмотрим Δ_0 -формулу сигнатуры σ^* :

$$\Psi(x_0, x_1, x_2) \Leftarrow (\exists u \leq x_0 \Phi^{(u)}(x_1, P^+))_{\Gamma(x_2, x_3) \approx s(0)[x_3]}^P$$

(считая, что переменные x_1, x_2 не встречаются в $\exists u \Phi^{(u)}(x, P^+)$), которая получается из Δ_0 -формулы $\exists u \leq x_0 \Phi^{(u)}(x_1, P^+)$ заменой каждой атомарной подформулы вида $P(t)$ формулой $\Gamma(x_2, t) \approx s(0)$.

Индукцией по построению Φ проверяется справедливость следующего утверждения:

$$\Omega^* \models \Psi(k, m, n) \iff \langle \Omega^*, F_n \rangle \models \exists u \leq k \Phi^{(u)}(m, P^+), \quad k, m, n \in \omega.$$

Пусть $Q \Leftarrow \Psi^{\Omega^*}[x_0, x_1, x_2] \subseteq \omega^3$. Поскольку Q — Δ -предикат, его характеристическая функция χ_Q есть Δ -функция.

Определим трехместную функцию H примитивной рекурсией:

$$H(n, k, 0) = c(0, \chi_Q(n, 0, n)),$$

$$H(n, k, l + 1) = \text{ch}(H(n, k, l), \chi_Q(k, l + 1, n), k + 1).$$

Положим

$$\Delta_{n,k,l} \Leftarrow \{m \mid m \leq l, \langle \Omega^*, F_n \rangle \models \exists u \leq k \Phi^{(u)}(m, P^+)\}.$$

Установим равенство $F_{H(n,k,l)} = \Delta_{n,k,l}$. Из определения H и свойств функции ch индукцией по l получаем, что

$$\Gamma(H(n, k, l), i) = \begin{cases} \chi_Q(k, l, n), & i \leq l, \\ 0, & i > l. \end{cases}$$

Из этих соотношений и свойства формулы Ψ вытекает требуемое равенство $F_{H(n,k,l)} = \Delta_{n,k,l}$.

Пусть функция $H': \omega^2 \rightarrow \omega$ определена так: $H'(n, k) \doteq H(n, k, k)$. Очевидно, что H' является Σ -функцией. Определим функцию $H^*: \omega \rightarrow \omega$ примитивной рекурсией:

$$H^*(0) = 0,$$

$$H^*(n+1) = H'(H^*(n), n+1).$$

Установим, что $F_{H^*(n)} = \Delta_n$ для всех $n \in \omega$. Имеем $\Delta_0 = \emptyset = F_0 = F_{H^*(0)}$. Пусть $\Delta_n = F_{H^*(n)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &\doteq \{l \mid l \leq n+1, \langle \Omega^*, \Delta_n \rangle \models \exists u \leq n+1 \Phi^{(u)}(l)\} = \\ &= \Delta_{H^*(n), n+1, n+1} = F_{H(H^*(n), n+1, n+1)} = \\ &= F_{H'(H^*(n), n+1)} = F_{H^*(n+1)}. \end{aligned}$$

Так как H^* — Σ -функция, из равенства $\Delta = (\Gamma(H^*(x), y) \approx s(0))^{\Omega^*}[x, y]$ следует, что Δ является Σ -предикатом (Δ -предикатом). Заметим, что $\Delta_n = \{m \mid \langle n, m \rangle \in \Delta\}$, $n \in \omega$, и $\Delta^* \doteq \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n$ является Σ -множеством, так как

$$\Delta^* = (\exists x(\Gamma(H^*(x), y) \approx s(0)))^{\Omega^*}[y].$$

Воспользуемся теперь принципом Σ -параметризации (см. § 5.9) для доказательства вложения $\Gamma_{\Phi[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*) \subseteq \Delta^*$. Поскольку Δ^* — Σ -множество, по предложению 5.9.4,

$$\Gamma_{\Phi[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*) = \Gamma_{\exists u \Phi^{(u)}[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*).$$

Пусть $k \in \Gamma_{\exists u \Phi^{(u)}[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*)$. Тогда $\langle \Omega^*, \Delta^* \rangle \models \exists u \Phi^{(u)}(k)$ и существует интерпретация $\gamma: \{x, u\} \rightarrow \omega$ такая, что $\gamma(x) = k$ и $\langle \Omega^*, \Delta^* \rangle \models \Phi^{(u)}[\gamma]$. По принципу Σ -параметризации существует $k_0 \in \omega$ такое, что $\langle \Omega^*, \Delta_{k_0} \rangle \models \Phi^{(u)}[\gamma]$.

Пусть $k_1 \geq k_0, k, \gamma(u)$. Тогда из $\Delta_{k_0} \subseteq \Delta_{k_1}$ следует

$$\langle \Omega^*, \Delta_{k_1} \rangle \models \Phi^{(u)}[\gamma],$$

$$\langle \Delta^*, \Delta_{k_1} \rangle \models \exists u \leq k_1 \Phi^{(u)}(k).$$

Поэтому $k \in \Delta_{k_1+1} \subseteq \Delta^*$, и свойство $\Gamma_{\Phi[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*)(=\Gamma_{\exists u \Phi^{(u)}[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*)) \subseteq \Delta^*$ установлено.

Как отмечено в § 5.9, если $\Gamma_{\Phi[x]}^{\Omega^*}(\Delta^*) \subseteq \Delta^*$, то для наименьшей неподвижной точки Γ_* имеем $\Gamma_* \subseteq \Delta^*$. Но тогда из соотношений $\Delta^* = \bigcup_{n \in \omega} \Delta_n \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \Gamma_n = \Gamma_*$ следует, что $\Delta^* = \Gamma_*$ и Γ_* является Σ -подмножеством ω . \square

Теорема Ганди сформулирована и доказана выше для случая одноместных предикатов. Однако она справедлива и в общем виде.

Теорема 7.2.9 (общая форма теоремы Ганди). *Пусть $\Phi(P^+)$ — Σ -формула сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^k \rangle$, в которую предикатный символ P входит лишь положительно, и пусть $\bar{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ — список попарно различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{x}\}$. Тогда наименьшая неподвижная точка $\Gamma_* \subseteq \omega^k$ оператора $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\Omega^*}$ является Σ -предикатом на Ω^* .*

Доказательство может быть получено сведением к случаю $k = 1$ с помощью следующих без труда проверяемых фактов.

Пусть $k > 1$. Определим Σ -функции $c_k: \omega^k \rightarrow \omega$:

$$c_2(x_0, x_1) \leftrightharpoons c(x_0, x_1),$$

$$c_{k+1}(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k) \leftrightharpoons c(c_k(x_0, \dots, x_{k-1}), x_k),$$

и Σ -функции $p_{k,i}: \omega \rightarrow \omega$, $i < k$:

$$p_{k,0}(x) \leftrightharpoons l_*(x, k),$$

$$p_{k,i}(x) \leftrightharpoons r(l_*(x, k - i - 1)), \quad i > 0.$$

Тогда для любых $x, x_0, \dots, x_{k-1} \in \omega$ ($k > 1$)

$$c_k(p_{k,0}(x), \dots, p_{k,k-1}(x)) = x,$$

$$p_{k,i}(c_k(x_0, \dots, x_{k-1})) = x_i.$$

(14) Пусть $k > 1$, $Q \subseteq \omega^k$,

$$c(Q) \leftrightharpoons \{c_k(i_0, \dots, i_{k-1}) \mid \langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in Q\}.$$

Тогда Q является Σ -предикатом тогда и только тогда, когда $c(Q)$ является Σ -подмножеством множества ω .

Пусть $\bar{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ — список различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{x}\}$ для Φ , и $\Phi_c(x) \leftrightharpoons (\Phi)_{p_{k,0}(x), \dots, p_{k,k-1}(x)}^{x_0, \dots, x_{k-1}}$. Ясно, что если Φ — Σ -формула сигнатуры σ^* , то Φ_c также является Σ -формулой сигнатуры σ^* .

(15) Пусть $\Phi(P^+)$ и $\bar{x} = x_0, \dots, x_{k-1}$ такие же, как в теореме Ганди. Тогда для наименьших неподвижных точек Γ_*^0 и Γ_*^1 операторов $\Gamma_{\Phi[\bar{x}]}^{\Omega^*}$ и $\Gamma_{\Phi_c[\bar{x}]}^{\Omega^*}$ справедливо соотношение $\Gamma_*^1 = c(\Gamma_*^0)$, где $\Phi_c^*(Q^+) — Σ -формула сигнатуры $\sigma^* \cup \langle Q^+ \rangle$, определенная так: $\Phi_c^*(Q^+) \leftrightharpoons (\Phi_c)_{Q(c_k(y_0, \dots, y_{k-1}))[y_0, \dots, y_{k-1}]}^P$.$

Упражнения

1. Доказать, что функции $sg: \omega \rightarrow \omega$ и $\overline{sg}: \omega \rightarrow \omega$, определенные соотношениями

$$sg(0) = 0, \quad sg(n) = 1, \quad n > 0,$$

$$\overline{sg}(0) = 1, \quad \overline{sg}(n) = 0, \quad n > 0,$$

являются Σ -функциями.

2. Пусть $f: \omega \rightarrow \omega$ и $g: \omega \rightarrow \omega$ — две функции, почти всюду равные нулю, и пусть $n_0, n_1 \in \omega$ таковы, что $f = \lambda x \Gamma(n_0, x)$, $g = \lambda x \Gamma(n_1, x)$. Если $f \leq g$ (т. е. $f(m) \leq g(m)$ для всех $m \in \omega$), то $n_0 \leq n_1$.

§ 7.3. Σ -определенность истинности Σ -формул на Ω

Предположим, что множество V всех переменных есть

$$\{x_0, x_1, \dots\} = \{x_i \mid i \in \omega\}.$$

Тогда с функцией Γ можно связать нумерацию всех (полных) интерпретаций $\gamma: V \rightarrow \omega$, которые почти всюду (за исключением конечного числа переменных) равны нулю. Именно, пусть $n \in \omega$ и $\gamma_n: V \rightarrow \omega$ — интерпретация такая, что $\gamma_n(x_i) \leftrightharpoons \Gamma(n, i)$, $i \in \omega$. Если Φ — Σ -формула (сигнатуры σ_0), $\bar{y} = y_0, \dots, y_{k-1} (\in V)$ — список различных переменных такой, что $FV(\Phi) \subseteq \{\bar{y}\}$, то k -местный предикат

$$\Phi^\Omega[\bar{y}] = \{\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{k-1} \rangle \mid \bar{a} \in \omega^k, \Omega \models \Phi[\gamma_{\bar{a}}]\}$$

является Σ -предикатом по определению. Однако с Φ можно связать также следующий одноместный (подмножество ω) предикат Tr_Φ , не зависящий от выбора списка \bar{y} :

$$\text{Tr}_\Phi \leftrightharpoons \{n \mid \Omega \models \Phi[\gamma_n]\}.$$

Предложение 7.3.1. Для любой Δ_0 -формулы (Σ -формулы) Φ сигнатуры σ_0 множество Tr_Φ является Δ_0 -подмножеством (Σ -подмножеством) ω на Ω^* (и Δ -подмножеством (Σ -подмножеством) на Ω).

Сначала установим следующую лемму.

Лемма 7.3.2. Для любого терма t сигнатуры σ_0 функция $v_t: \omega \rightarrow \omega$ такая, что $v_t(n) \leftrightharpoons t^\Omega[\gamma_n]$, $n \in \omega$, является Σ -функцией.

Доказательство. Если t есть 0, то $v_t \leftrightharpoons 0$; если t есть x_i , то $v_t \leftrightharpoons \lambda n \Gamma(n, i)$; если $t = s(t_0)$, то $v_t \leftrightharpoons s(v_{t_0})$; если $t = t_0 + t_1$ ($t = t_0 \cdot t_1$), то $v_t \leftrightharpoons v_{t_0} + v_{t_1}$ ($v_t \leftrightharpoons v_{t_0} \cdot v_{t_1}$). \square

Доказательство предложения 7.3.1. Индукцией по построению Φ будем строить Δ_0 -формулу (Σ -формулу) $\Psi_\Phi(x_0)$ сигнатуры σ^* такую, что $\text{Tr}_\Phi = \Psi_\Phi^{\Omega^*}[x_0]$.

Если Φ есть $t_0 \approx t_1$ ($t_0 \leq t_1$), то Ψ_Φ есть $v_{t_0}(x_0) \approx v_{t_1}(x_0)$ ($v_{t_0}(x_0) \leq v_{t_1}(x_0)$).

Если для Φ_0 и Φ_1 формулы Ψ_{Φ_0} и Ψ_{Φ_1} уже определены, то полагаем

$$\Psi_{\neg\Phi_0} \Leftarrow \neg\Psi_{\Phi_0},$$

$$\Psi_{\Phi_0 \vee \Phi_1} \Leftarrow \Psi_{\Phi_0} \vee \Psi_{\Phi_1},$$

$$\Psi_{\Phi_0 \wedge \Phi_1} \Leftarrow \Psi_{\Phi_0} \wedge \Psi_{\Phi_1},$$

$$\Psi_{\exists x_i \Phi_0} \Leftarrow \exists x_n (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(x_0, x_n, i)}^{x_0},$$

$$\Psi_{\exists x_i \leq t \Phi_0} \Leftarrow \exists x_n \leq v_t(x_0) (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(x_0, x_n, i)}^{x_0},$$

$$\Psi_{\forall x_i \leq t \Phi_0} \Leftarrow \forall x_n \leq v_t(x_0) (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(x_0, x_n, i)}^{x_0},$$

где $n \in \omega$ — наименьшее число такое, что $n > 0$ и x_n не встречается в Ψ_{Φ_0} . Проверка того, что предложенные формулы удовлетворяют соответствующим заключениям, довольно проста. Для примера рассмотрим случай, когда Φ есть $\exists x_i \leq t \Phi_0$. Тогда

$$\Psi_\Phi = \exists x_n \leq v_t(x_0) (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(x_0, x_n, i)}^{x_0}$$

для подходящего $n \in \omega$. Пусть $k \in \Psi_\Phi^{\Omega^*}[x_0]$. Тогда

$$\Omega^* \models \exists x_n \leq v_t(k) (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(k, x_n, i)}^{x_0}.$$

Следовательно, существует $m \in \omega$ такое, что

$$\Omega^* \models m \leq v_t(k) \wedge (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(k, m, i)}^{x_0}.$$

Напомним, что имеет место равенство $v_t(k) = t^\Omega[\gamma_k]$, а число $k' \Leftarrow \text{ch}(k, m, i)$ такое, что

$$\gamma_{k'}(j) = \begin{cases} \gamma_k(j), & j \neq i, \\ m(\leq t^\Omega[\gamma_k]), & j = i. \end{cases}$$

По индукционному предположению соотношение

$$\Omega^* \models (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(k, m, i)}^{x_0} = \Psi_{\Phi_0}(k')$$

означает, что $k' \in \text{Tr}_{\Phi_0}$, т. е. $\Omega \models \Phi_0[\gamma_{k'}]$.

Таким образом, для интерпретации γ_k существует интерпретация $\gamma_{k'}$ такая, что $\gamma_{k'}(j) = \gamma_k(j)$ для $j \neq i$ и $\gamma_{k'}(i) = m \leq t^\Omega[\gamma_k]$, $\Omega \models \Phi_0[\gamma_{k'}]$.

Поэтому $\Omega \models \exists x_i \leq t\Phi_0[\gamma_k]$ и $k \in \text{Tr}_{\exists x_i \leq t\Phi_0} = \text{Tr}_\Phi$. Следовательно, $\Psi_\Phi^{\Omega^*}[x_0] \subseteq \text{Tr}_\Phi$.

Проверим обратное включение. Пусть $k \in \text{Tr}_{\exists x_i \leq t\Phi_0}$, т.е. $\Omega \models \exists x_i \leq t\Phi_0[\gamma_k]$. По определению истинности существует интерпретация $\gamma': V \rightarrow \omega$ такая, что $\gamma'(j) = \gamma_k(j)$ для $j \neq i$, $m \leftarrow \gamma'(i) \leq t^\Omega[\gamma_k] (= v_t(k))$ и $\Omega \models \Phi_0[\gamma']$. Так как γ' отличается от γ_k лишь для одного значения аргумента, существует $k' \in \omega$ такое, что $\gamma' = \gamma_{k'}$. Более того, $k' = \text{ch}(k, m, i)$. по индукционному предположению имеем

$$\Omega^* \models \Psi_{\Phi_0}(k') = (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(k, m, i)}^{x_0},$$

но тогда

$$\Omega^* \models m \leq v_t(k) \wedge (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(k, m, i)}^{x_0},$$

$$\Omega^* \models \exists x_n \leq v_t(k) (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(k, x_n, i)}^{x_0},$$

где $k \in \Psi_\Phi^{\Omega^*}[x_0]$. Таким образом,

$$\text{Tr}_{\exists x_i \leq y\Phi_0} = \Psi_\Phi^{\Omega^*}[x_0],$$

где

$$\Psi_\Phi = \exists x_n \leq v_t(x_0) (\Psi_{\Phi_0})_{\text{ch}(x_0, x_n, i)}^{x_0}.$$

Если Φ есть Δ_0 -формула (Σ -формула) сигнатуры σ_0 , то легко проверить, что Ψ_Φ есть Δ_0 -формула (Σ -формула) сигнатуры

$$\sigma_0 \cup \langle v_t^1 \mid t — \text{терм сигнатуры } \sigma_0 \rangle \cup \langle \Gamma^2, \text{ch}^3 \rangle \subseteq \sigma^*. \quad \square$$

Ниже будет установлено значительно более сильное утверждение, означающее «равномерность» построения Ψ_Φ по Φ . Предварительно следует определить гёделеву нумерацию всех термов и RQ-формул сигнатуры σ_0 .

Если $T(\sigma_0)$ — множество всех термов сигнатурь σ_0 и $\text{RQF}(\sigma_0)$ — множество всех RQ-формул сигнатурь σ_0 , то *гёделева нумерация* G — это отображение $G: T(\sigma_0) \cup \text{RQF}(\sigma_0) \rightarrow \omega$, удовлетворяющее следующим соотношениям:

$$G(0) = c(0, 1),$$

$$G(x_i) = c(1, i), i \in \omega,$$

$$G(s(t)) = c(2, G(t)), t \in T(\sigma_0),$$

$$G(t_0 + t_1) = c(3, c(G(t_0), G(t_1))), t_0, t_1 \in T(\sigma_0),$$

$$G(t_0 \cdot t_1) = c(4, c(G(t_0), G(t_1))), t_0, t_1 \in T(\sigma_0),$$

$$G(t_0 \approx t_1) = c(5, c(G(t_0), G(t_1))), t_0, t_1 \in T(\sigma_0),$$

$$G(t_0 \leq t_1) = c(6, c(G(t_0), G(t_1))), t_0, t_1 \in T(\sigma_0),$$

$$G(\Phi_0 \wedge \Phi_1) = c(7, c(G(\Phi_0), G(\Phi_1))), \Phi_0, \Phi_1 \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\Phi_0 \vee \Phi_1) = c(8, c(G(\Phi_0), G(\Phi_1))), \Phi_0, \Phi_1 \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\Phi_0 \rightarrow \Phi_1) = c(9, c(G(\Phi_0), G(\Phi_1))), \Phi_0, \Phi_1 \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\neg \Phi) = c(10, G(\Phi)), \Phi \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\exists x_i \leq t \Phi) = c(11, c_3(i, G(t), G(\Phi))), i \in \omega, t \in T(\sigma_0), \Phi \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\forall x_i \leq t \Phi) = c(12, c_3(i, G(t), G(\Phi))), i \in \omega, t \in T(\sigma_0), \Phi \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\exists x_i \Phi) = c(13, c(i, G(\Phi))), i \in \omega, \Phi \in \text{RQF}(\sigma_0),$$

$$G(\forall x_i \Phi) = c(14, c(i, G(\Phi))), i \in \omega, \Phi \in \text{RQF}(\sigma_0).$$

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 7.3.3 (Σ -определенность истинности Σ -формул). *Следующий двуместный предикат является Σ -предикатом на Ω :*

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\Sigma \leftrightharpoons & \{ \langle n, k \rangle \mid n, k \in \omega, n - \text{гёделев номер } \Sigma\text{-формулы } \Phi \\ & \text{сигнатуры } \sigma_0 \text{ (т. е. } G(\Phi) = n \text{) и } \Omega \models \Phi[\gamma_k] \}. \end{aligned}$$

Доказательство. Предварительно установим ряд вспомогательных утверждений. В доказательстве этих утверждений, а также в доказательстве основной теоремы 7.3.3, используется теорема Ганди в общей форме (см. теорему 7.2.9).

⟨1⟩ Следующая функция $T: \omega \rightarrow \omega$:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{существует терм } t \in T(\sigma_0) \text{ такой, что } G(t) = n, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

Предполагая, что P — двуместный предикатный символ, соответствующий графику Γ_T функции T , можно выписать следующую Σ -формулу $\Phi_T(x_0, x_1, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^2 \rangle$, в которую P входит позитивно и для которой Γ_T является наименьшей неподвижной точкой оператора $\Gamma_{\Phi_T[x_0, x_1]}^{\Omega^*}$:

$$\Phi_T(x_0, x_1) \leftrightharpoons [l(x_0) \approx 0 \wedge (x_0 \approx 1 \wedge x_1 \approx 1 \vee \neg x_0 \approx 1 \wedge x_1 \approx 0)] \vee$$

$$\vee [l(x_0) \approx 1 \wedge x_1 \approx 1] \vee$$

$$\vee [l(x_0) \approx 2 \wedge P(r(x_0), x_1)] \vee$$

$$\begin{aligned} & \vee[(l(x_0) \approx 3 \vee l(x_0) \approx 4) \wedge (P(l(r(x_0)), 1) \wedge \\ & \wedge P(r(r(x_0)), 1) \wedge x_1 \approx 1 \vee (P(l(r(x_0)), 0) \vee \\ & \vee P(r(r(x_0)), 0)) \wedge x_1 \approx 0)] \vee \\ & \vee[5 \leq l(x_0) \wedge x_1 \approx 0]. \end{aligned}$$

$\langle 2 \rangle$ Следующая функция $\text{val}_T: \omega^2 \rightarrow \omega$:

$$\text{val}_T(n, k) = \begin{cases} t^\Omega[\gamma_k], & \text{если } n, k \in \omega \text{ и существует терм } t \in T(\sigma_0) \\ & \text{такой, что } G(t) = n, \\ & \text{т. е. } T(n) = 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

Выпишем соответствующую Σ -формулу $\Phi(x_0, x_1, x_2, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^3 \rangle$, в которую P входит позитивно и для которой график $\Gamma_{\text{val}_T} \subseteq \omega^3$ является наименьшей неподвижной точкой оператора $\Gamma_{\Phi[x_0, x_1, x_2]}^{\Omega^*}$:

$$\begin{aligned} & \Phi(x_0, x_1, x_2) \doteq [T(x_0) \approx 0 \wedge x_2 \approx 0] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 0 \wedge x_2 \approx 0] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 1 \wedge x_2 \approx \Gamma(x_1, r(x_0))] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 2 \wedge T(x_0) \approx 1 \wedge \exists x_3 (P(r(x_0))x_1, x_3) \wedge \\ & \quad \wedge x_2 \approx s(x_3))] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 3 \wedge T(x_0) \approx 1 \wedge \\ & \quad \wedge \exists x_3 \exists x_4 (P(l(r(x_0))), x_1, x_3) \wedge \\ & \quad \wedge P(r(r(x_0)), x_1, x_4) \wedge x_2 \approx x_3 + x_4)] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 4 \wedge T(x_0) \approx 1 \wedge \\ & \quad \wedge \exists x_3 \exists x_4 (P(l(r(x_0)), x_1, x_3) \wedge \\ & \quad \wedge P(r(r(x_0)), x_1, x_4) \wedge x_2 \approx x_3 \cdot x_4)]. \end{aligned}$$

$\langle 3 \rangle$ Следующая функция $F_0: \omega \rightarrow \omega$:

$$F_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \Delta_0\text{-формула } \Phi \\ & \text{сигнатуры } \sigma_0 \text{ такая, что } G(\Phi) = n, \\ 0 & \text{противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

Выпишем Σ -формулу $\Phi(x_0, x_1, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^2 \rangle$, «определяющую» Γ_{F_0} :

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1) \Leftarrow & [(l(x_0) \leqslant 4 \vee 13 \leqslant l(x_0)) \wedge x_1 \approx 0] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 5 \vee l(x_0) \approx 6) \wedge (T(l(r(x_0))) \approx 1 \wedge \\ & \wedge T(r(r(x_0))) \approx 1 \wedge x_1 \approx 1 \vee (T(l(r(x_0))) \approx 0 \vee \\ & \vee T(r(r(x_0))) \approx 0) \wedge x_1 \approx 0)] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 7 \vee l(x_0) \approx 8 \vee l(x_0) \approx 9) \wedge \\ & \wedge (P(l(r(x_0)), 1) \wedge P(r(r(x_0)), 1) \wedge x_1 \approx 1 \vee \\ & \vee (P(l(r(x_0)), 0) \vee P(r(r(x_0)), 0)) \wedge x_1 \approx 0)] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 10 \wedge P(r(x_0), x_1)] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 11 \vee l(x_0) \approx 12) \wedge ((T(r(l(r(x_0)))) \approx 0) \vee \\ & \vee T(r(l(r(x_0)))) \approx 1 \wedge P(r(r(x_0)), x_1))]. \end{aligned}$$

4> Следующая функция $F_\Sigma: \omega \rightarrow \omega$:

$$F_\Sigma(n) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \Sigma\text{-формула } \Phi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \\ & \text{такая, что } G(\Phi) = n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

Следующая Σ -формула $\Phi(x_0, x_1, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^2 \rangle$ «определяет» Γ_{F_Σ} :

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1) \Leftarrow & [(l(x_0) \leqslant 4 \vee 14 \leqslant l(x_0)) \wedge x_1 \approx 0] \vee \\ & \vee [F_0(x_0) \approx 1 \wedge x_1 \approx 1] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 7 \vee l(x_0) \approx 8) \wedge \\ & \wedge (P(l(r(x_0)), 1) \wedge P(r(r(x_0)), 1) \wedge x_1 \approx 1 \vee \\ & \vee (P(l(r(x_0)), 0) \vee P(r(r(x_0)), 0)) \wedge x_1 \approx 0)] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 11 \vee l(x_0) \approx 12) \wedge \\ & \wedge (T(r(l(r(x_0)))) \approx 0 \wedge x_1 \approx 0 \vee \\ & \vee T(r(l(r(x_0)))) \approx 1 \wedge P(r(r(x_0)), x_1))] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 13 \wedge P(r(r(x_0)), x_1)]. \end{aligned}$$

(5) Следующая функция $\text{For}: \omega \rightarrow \omega$:

$$\text{For}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если существует RQ-формула } \Phi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \\ & \text{такая, что } n = G(\Phi), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

Следующая Σ -формула $\Phi(x_0, x_1, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^2 \rangle$ «определяет» Γ_{For} :

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1) \Leftarrow & [(l(x_0) \leq 4 \vee 15 \leq l(x_0)) \wedge x_1 \approx 0] \vee \\ & \vee [F_0(x_0) \approx 1 \wedge x_1 \approx 1] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 7 \vee l(x_0) \approx 8 \vee l(x_0) \approx 9) \wedge \\ & \wedge (P(l(r(x_0)), 1) \wedge P(r(r(x_0)), 1) \wedge x_1 \approx 1) \vee \\ & \vee (P(l(r(x_0)), 0) \vee P(r(r(x_0), 0)) \wedge x_1 \approx 0)] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 10 \wedge P(r(x_0), x_1)] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 11 \vee l(x_0) \approx 12) \wedge (T(r(l(r(x_0)))) \approx 0 \wedge x_1 \approx 0) \vee \\ & \quad \vee T(r(l(r(x_0)))) \approx 1 \wedge P(r(r(x_0)), x_1))] \vee \\ & \vee [(l(x_0) \approx 13 \vee l(x_0) \approx 14) \wedge P(r(r(x_0)), x_1)]. \end{aligned}$$

(6) Следующая функция $\text{Tr}_0: \omega^2 \rightarrow \omega$:

$$\text{Tr}_0(n, k) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \Delta_0\text{-формула } \Phi \\ & \text{такая, что } n = G(\Phi) \text{ и } \Omega \models \Phi[\gamma_k], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

Следующая Σ -формула $\Phi(x_0, x_1, x_2, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^3 \rangle$ «определяет» Γ_{Tr_0} :

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1, x_2) \Leftarrow & [F_0(x_0) \approx 0 \wedge x_2 \approx 0] \vee F_0(x_0) \approx 1 \wedge \\ & \wedge [l(x_0) \approx 5 \wedge (\text{val}_T(l(r(x_0)), x_1) \approx \\ & \quad \approx \text{val}_T(r(r(x_0)), x_1) \wedge x_2 \approx 1) \vee \\ & \vee \neg \text{val}_T(l(r(x_0)), x_1) \approx \text{val}_T(r(r(x_0)), x_1) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\ & \vee [l(x_0) \approx 6 \wedge (\text{val}_T(l(r(x_0)), x_1) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \text{val}_T(r(r(x_0)), x_1) \wedge x_2 \approx 1 \vee \\
&\quad \vee \neg(\text{val}_T(l(r(x_0)), x_1) \leqslant \\
&\quad \leqslant \text{val}_T(r(r(x_0)), x_1) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 7 \wedge (P(l(r(x_0)), x_1, 1) \wedge \\
&\quad \wedge P(r(r(x_0)), x_1, 1) \wedge x_2 \approx 1 \vee (P(l(r(x_0)), x_1, 0) \vee \\
&\quad \vee P(r(r(x_0), x_1, 0)) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\
&\vee [l(x_0) \approx 8 \wedge (P(l(r(x_0)), x_1, 1) \vee P(r(r(x_0)), x_1, 1)) \wedge x_2 \approx 1 \vee \\
&\quad \vee P(l(r(x_0)), x_1, 0) \wedge P(r(r(x_0), x_1, 0)) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 9 \wedge ((P(l(r(x_0)), x_1, 0) \vee \\
&\quad \vee P(r(r(x_0)), x_1, 1)) \wedge x_2 \approx 1 \vee \\
&\quad \vee P(l(r(x_0)), x_1, 1) \wedge P(r(r(x_0)), x_1, 0) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 10 \wedge (P(r(x_0), x_1, 0) \wedge x_2 \approx 1 \vee \\
&\quad \vee P(r(x_0), x_1, 1) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 11 \wedge (\exists x_3 \leqslant \text{val}_T(r(l(x_0)), \\
&\quad x_1) P(r(r(x_0)), \text{ch}(x_1, x_3, l(l(r(x_0)))), 1) \wedge x_2 \approx 1 \vee \\
&\quad \forall x_3 \leqslant \text{val}_T(r(l(x_0)), x_1) P(r(r(x_0)), \text{ch}(x_1, x_3, \\
&\quad l(l(r(x_0)))), 0) \wedge x_2 \approx 0)] \vee \\
&\vee [l(x_0) \approx 12 \wedge (\forall x_3 \leqslant \text{val}_T(r(l(x_0)), x_1) P(r(r(x_0)), \\
&\quad \text{ch}(x_1, x_3, l(l(r(x_0)))), 1) \wedge x_2 \approx 1 \vee \\
&\quad \forall x_3 \leqslant \text{val}_T(r(l(x_0)), x_1) P(r(r(x_0)), \\
&\quad \text{ch}(x_1, x_3, l(l(r(x_0)))), 0) \wedge x_2 \approx 0)] \}.
\end{aligned}$$

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 7.3.3. Выпишем Σ -формулу $\Phi_\Sigma(x_0, x_1, P^+)$ сигнатуры $\sigma^* \cup \langle P^2 \rangle$ такую, что предикат Tr_Σ будет наименьшей неподвижной точкой оператора $\Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}$:

$$\begin{aligned}
&\Phi_\Sigma(x_0, x_1) \Leftarrow F_\Sigma(x_0) \approx 1 \wedge ([F_0(x_0) \approx 1 \wedge \text{Tr}_0(x_0, x_1) \approx 1] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 7 \wedge P(l(r(x_0)), x_1) \wedge P(r(r(x_0)), x_1)] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 8 \wedge (P(l(r(x_0)), x_1) \vee P(r(r(x_0)), x_1))] \vee \\
&\quad \vee [l(x_0) \approx 11 \wedge \exists x_3 \leqslant \text{val}_T(r(l(r(x_0))), x_1) \\
&\quad \quad P(r(r(x_0)), \text{ch}(x_1, x_3, l(l(r(x_0)))))] \vee
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vee[l(x_0) \approx 12 \wedge \forall x_3 \leqslant \text{val}_T(r(l(r(x_0))), x_1) \\ P(r(r(x_0)), \text{ch}(x_1, x_3, l(l(r(x_0))))) \vee \\ \vee[l(x_0) \approx 13 \wedge \exists x_3 P(r(r(x_0)), \text{ch}(x_1, x_3, l(l(r(x_0)))))]). \end{aligned}$$

Докажем, что для любого $Q \subseteq \text{Tr}_\Sigma$,

$$\Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}(Q) = \{\langle n, k \rangle \mid \langle \Omega^*, Q \rangle \models \Phi_\Sigma(n, k)\} \subseteq \text{Tr}_\Sigma.$$

Действительно, пусть $Q \subseteq \text{Tr}_\Sigma$ и $\langle \Omega^*, Q \rangle \models \Phi_\Sigma(n, k)$. Тогда $\Omega^* \models F_\Sigma(n) \approx 1$, т. е. n — гёделев номер некоторой Σ -формулы Φ . Далее, должен быть истинен один из дизъюнктивных членов

$$F_0(n) \approx 1 \wedge \text{Tr}_0(n, k) \approx 1,$$

$$l(n) \approx 7 \wedge \langle l(r(n)), k \rangle \in Q \wedge \langle r(r(n)), k \rangle \in Q,$$

$$l(n) \approx 8 \wedge (\langle l(r(n)), k \rangle \in Q \vee \langle r(r(n)), k \rangle \in Q),$$

$$l(n) \approx 11 \wedge \exists x_3 \leqslant \text{val}_T(r(r(l(n))), k)(\langle r(r(n)), \text{ch}(k, x_3, l(l(r(n)))) \rangle \in Q),$$

$$l(n) \approx 12 \wedge \forall x_3 \leqslant \text{val}_T(r(r(l(n))), k)(\langle r(r(n)), \text{ch}(k, x_3, l(l(r(n)))) \rangle \in Q),$$

$$l(n) \approx 13 \wedge \exists x_3 (\langle r(r(n)), \text{ch}(k, x_3, l(l(r(n)))) \rangle \in Q).$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай $F_0(n) = 1$. Тогда Φ есть Δ_0 -формула. Следовательно, $\text{Tr}_0(n, k) = 1$ влечет $\Omega \models \Phi[\gamma_k]$ и $\langle n, k \rangle \in \text{Tr}_\Sigma$.

Случай $l(n) = 7$. Тогда Φ имеет вид $(\Phi_0 \wedge \Phi_1)$ и $G(\Phi_0) = l(r(n))$, $G(\Phi_1) = r(r(n))$. Следовательно, $\langle l(r(n)), k \rangle \in Q \subseteq \text{Tr}_\Sigma$ влечет $\Omega \models \Phi_0[\gamma_k]$, а $\langle r(r(n)), k \rangle \in Q \subseteq \text{Tr}_\Sigma$ влечет $\Omega \models \Phi_1[\gamma_k]$. Поэтому $\Omega \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma_k]$ и $\langle n, k \rangle \in \text{Tr}_\Sigma$.

Случай $l(n) = 8$ рассматривается аналогично предыдущему.

Случай $l(n) = 11$. Тогда Φ имеет вид $\exists x_i \leqslant t \Phi_0$, где $i = l(l(r(n)))$, $G(t) = r(l(r(n)))$, $G(\Phi_0) = r(r(n))$. Поэтому

$$\text{val}_T(r(l(r(n))), k) = t^\Omega[\gamma_k].$$

Если $m \leqslant t^\Omega[\gamma_k]$ такое, что $\langle r(r(n)), k' \rangle \in Q \subseteq \text{Tr}_\Sigma$ для $k' \Leftarrow \text{ch}(k, m, i)$, то $\Omega \models \Phi_0[\gamma'_k]$ и $\Omega \models \Phi[\gamma_k]$, $\langle n, k \rangle \in \text{Tr}_\Sigma$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Из доказанного следует, что $\Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}(\text{Tr}_\Sigma) \subseteq \text{Tr}_\Sigma$. Тем самым $\Gamma_* \subseteq \text{Tr}_\Sigma$, где Γ_* обозначает наименьшую неподвижную точку оператора $\Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}$.

Установим теперь, что $\text{Tr}_\Sigma \subseteq \Gamma_*$. Предположим, что это не так, т. е. $\text{Tr}_\Sigma \setminus \Gamma_* \neq \emptyset$. Пусть $n_0 \in \omega$ — наименьшее число, для которого суще-

ствует $k \in \omega$ такое, что $\langle n_0, k \rangle \in \text{Tr}_\Sigma \setminus \Gamma_*$, и пусть k_0 — наименьшее из таких k . Так как $\langle n_0, k_0 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma$ имеем $F_\Sigma(n_0) = 1$. Если $F_0(n_0) = 1$, то

$$\begin{aligned} \langle n_0, k_0 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma &\implies \Omega \models \Phi[\gamma_{k_0}], \quad [\text{где } G(\Phi) = n_0], \implies \\ &\implies \text{Tr}_0(n_0, k_0) = 1, \quad [\text{так как } \Phi \text{ — } \Delta_0\text{-формула}], \implies \\ &\implies \langle n_0, k_0 \rangle \in \Gamma_1 = \Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}(\emptyset) \subseteq \Gamma_*, \end{aligned}$$

что невозможно. Итак, $F_0(n_0) = 0$. Тогда $l(n_0) \in \{7, 8, 11, 12, 13\}$.

Рассмотрим для примера два случая.

Случай $l(n_0) = 7$. Тогда $\Phi = \Phi_0 \wedge \Phi_1$, где Φ — Σ -формула такая, что $n_0 = G(\Phi)$ и $G(\Phi_0) = l(r(n_0)) < n_0$, $G(\Phi_1) = r(r(n_0)) < n_0$,

$$\begin{aligned} \langle n_0, k_0 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma &\implies \Omega \models \Phi[\gamma_{k_0}] \implies \Omega \models \Phi_0[\gamma_{k_0}] \text{ и } \Omega \models \Phi_1[\gamma_{k_0}] \implies \\ &\implies \langle l(r(n_0)), k_0 \rangle, \langle r(r(n_0)), k_0 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma \implies \\ &\implies \langle l(r(n_0)), k_0 \rangle, \langle r(r(n_0)), k_0 \rangle \in \Gamma_* \quad [\text{по выбору } n_0]. \end{aligned}$$

Но тогда существует $s \in \omega$ такое, что

$$\langle l(r(n_0)), k_0 \rangle, \langle r(r(n_0)), k_0 \rangle \in \Gamma_s \subseteq \Gamma_*.$$

Поэтому $\langle n_0, k_0 \rangle \in \Gamma_{s+1} = \Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}(\Gamma_s) \subseteq \Gamma_*$, что невозможно.

Случай $l(n_0) = 12$. Тогда $\Phi = \forall x_i \leq t \Phi_0$, где Φ — Σ -формула такая, что $G(\Phi) = n_0$. Заметим, что $i = l(l(r(n_0)))$, $G(t) = r(l(r(n_0)))$, $G(\Phi_0) = r(r(n_0)) < n_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle n_0, k_0 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma &\implies \Omega \models \Phi[\gamma_{k_0}] \implies \\ &\implies \forall m \leq t^\Omega[\gamma_{k_0}](\Omega \models \Phi_0[\gamma_{\text{ch}(k_0, m, i)}]) \implies \\ &\implies \forall m \leq t^\Omega[\gamma_{k_0}](\langle r(r(n_0)), \text{ch}(k_0, m, i) \rangle \in \text{Tr}_\Sigma) \implies \\ &\implies \forall m \leq t^\Omega[\gamma_{k_0}](\langle r(r(n_0)), \text{ch}(k_0, m, i) \rangle \in \Gamma_*) \\ &\quad [\text{по выбору } n_0]. \end{aligned}$$

Пусть $s \in \omega$ такое, что

$$\begin{aligned} &\langle r(r(n_0)), \text{ch}(k_0, 0, i) \rangle, \langle r(r(n_0)), \text{ch}(k_0, 1, i) \rangle, \dots, \\ &\langle r(r(n_0)), \text{ch}(k_0, t^\Omega[\gamma_{k_0}], i) \rangle \in \Gamma_s \subseteq \Gamma_*. \end{aligned}$$

Но тогда ввиду выбора s , указанных свойств и вида формулы Φ ,

$$\langle n_0, k_0 \rangle \in \Gamma_{s+1} = \Gamma_{\Phi_\Sigma[x_0, x_1]}^{\Omega^*}(\Gamma_s) \subseteq \Gamma_*.$$

Приходим к противоречию. Случай $l(n_0) = 12$ невозможен.

Случаи $l(n_0) = 8, 11, 13$. Так же как выше, устанавливается, что эти случаи невозможны.

Полученное противоречие доказывает, что $\text{Tr}_\Sigma \subseteq \Gamma_*$ и $\text{Tr}_\Sigma = \Gamma_*$. \square

Теорема 7.3.3 имеет многочисленные следствия, некоторые из них будут указаны в § 7.4; здесь же мы ограничимся следующим утверждением.

Следствие 7.3.4. *Существует Σ -подмножество $R \subseteq \omega$, не являющееся Δ -подмножеством.*

Доказательство. Пусть $\Phi_\Sigma(x_0, x_1)$ — Σ -формула такая, что $\text{Tr}_\Sigma = \Phi_\Sigma^\Omega[x_0, x_1]$, и пусть $\Psi(x_0) \Leftarrow (\Phi_\Sigma)_{c(0, x_0)}^{x_1}$ — Σ -формула и $R \Leftarrow \Psi^{\Omega^*}[x_0]$ — Σ -подмножество ω . Предположим, что R — Δ -множество, т. е. $\omega \setminus R$ также является Σ -множеством, и $\omega \setminus R = \Psi_0^\Omega[x_0]$ для подходящей Σ -формулы Ψ_0 (сигнатуры σ_0). Пусть $n_0 \Leftarrow G(\Psi_0)$ — гёделев номер Ψ_0 и $n_1 \Leftarrow c(0, n_0)$. Попробуем выяснить, принадлежит ли пара $\langle n_0, n_1 \rangle$ множеству Tr_Σ .

Если $\langle n_0, n_1 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma$, то $\Omega \models \Psi_0[\gamma_{n_1}]$, так как $n_0 = G(\Psi_0)$, $\gamma_{n_1}(x_0) = \Gamma(n_1, 0) = r(n_1) = n_0$. Следовательно, $n_0 \in \Psi_0^\Omega[x_0] = \omega \setminus R$, $n_0 \notin R = \Psi^{\Omega^*}[x_0]$, $\Omega^* \models \neg \Psi(n_0)$, $\Omega \models \neg \Phi_\Sigma(n_0, c(0, n_0))$, $\Omega \models \neg \Phi_\Sigma(n_0, n_1)$, $\langle n_0, n_1 \rangle \notin \text{Tr}_\Sigma$; приходим к противоречию.

Если $\langle n_0, n_1 \rangle \notin \text{Tr}_\Sigma$, то $\Omega \models \neg \Phi_\Sigma(n_0, n_1)$, $\Omega^* \models \neg \Psi(n_0)$, $n_0 \notin R$, $\Omega \models \Psi_0(n_0)$, $\Omega \models \Psi_0[\gamma_{n_1}]$, $\langle n_0, n_1 \rangle \in \text{Tr}_\Sigma$; опять приходим к противоречию.

Итак, R является Σ -множеством, но не Δ -множеством. \square

В заключение параграфа отметим, что Δ_0 -формулы и Σ -формулы являются начальными классами иерархии формул, определенной так:

Определение. Σ_0 -формулы — это в точности Δ_0 -формулы.

Пусть класс Σ_n -формул определен. Определим Δ_{n+1} -формулы и Σ_{n+1} -формулы.

Δ_{n+1} -формулы:

- любая Σ_n -формула является Δ_{n+1} -формулой;
- если Φ и Ψ — Δ_{n+1} -формулы, то $\neg \Phi$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ суть Δ_{n+1} -формулы;
- если x — переменная, t — терм, не содержащий переменную x , и Φ — Δ_{n+1} -формула, то $\exists x \leq t \Phi$, $\forall x \leq t \Phi$ суть Δ_{n+1} -формулы.

Σ_{n+1} -формулы:

- любая Δ_{n+1} -формула является Σ_{n+1} -формулой;
- если Φ и Ψ — Σ_{n+1} -формулы, то $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$ суть Σ_{n+1} -формулы;

- если x — переменная, t — терм, не содержащий переменную x , и Φ — Σ_{n+1} -формула, то $\exists x \leq t\Phi, \forall x \leq t\Phi, \exists x\Phi$ суть Σ_{n+1} -формулы.

Замечание 7.3.5. Из определения видно, что Δ_1 -формулы — это в точности Δ_0 -формулы и Σ_1 -формулы — это в точности Σ -формулы.

Замечание 7.3.6. Индукцией по построению формулы Φ нетрудно установить, что для любой RQ-формулы Φ (сигнатуры σ_0) существуют $n > 0$ и Σ_n -формула Ψ такие, что $\Phi \equiv_{\Omega} \Psi$.

Определение. Предикат $Q \subseteq \omega^k$ называется Δ_n -предикатом (Σ_n -предикатом) на Ω , если существует Δ_n -формула (Σ_n -формула) Φ такая, что $Q = \Phi^{\Omega}[x_0, \dots, x_{k-1}]$.

Имеет место следующее обобщение основной теоремы 7.3.3.

Теорема 7.3.7 (Σ_n -определимость истинности Σ_n -формул). Для любого $n > 0$ следующий двуместный предикат является Σ_n -предикатом на Ω :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\Sigma_n} = \{ \langle m, k \rangle \mid m, k \in \omega, m \text{ — гёделев номер } \Sigma_n\text{-формулы } \Phi \\ \text{сигнатуры } \sigma_0 \text{ (т. е. } G(m) = \Phi) \text{ и } \Omega \models \Phi[\gamma_k] \}. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы о Σ -определенности истинности Σ -формул и проводится индукцией по n . Заметим, что если σ_{n+1} — расширение сигнатуры σ_0 символами для всех Δ_{n+1} -предикатов на Ω , а Ω_{n+1} — соответствующее обогащение Ω , то Ω_{n+1} является ограниченной алгебраической системой сигнатуры σ_{n+1} , так что можно применять теорему Ганди. \square

Как и выше, получаем следствие, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7.3.8 (об иерархии). Для любого $n \in \omega$ существует Σ_{n+1} -подмножество $R \subseteq \omega$, не являющееся Δ_n -множеством.

Важным следствием теоремы об иерархии является

Теорема 7.3.9 (теорема Тарского о неопределенности истинности в Ω). Следующий двуместный предикат не является σ_0 -формульным на Ω :

$$\begin{aligned} \text{Tr} = \{ \langle m, k \rangle \mid m, k \in \omega, m \text{ — гёделев номер RQ-формулы } \Phi \\ \text{сигнатуры } \sigma_0 \text{ (т. е. } G(\Phi) = m), \Omega \models \Phi[\gamma_k] \}. \end{aligned}$$

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно, и пусть $\Phi(x_0, x_1)$ — RQ-формула сигнатуры σ_0 такая, что $\text{Tr} = \Phi^{\Omega}[x_0, x_1]$.

Можно считать, что Φ есть Σ_n -формула для подходящего $n > 0$. Если $R \subseteq \omega$ — Σ_{n+2} -подмножество, не являющееся Δ_{n+1} -множеством, $\Psi(x_0)$ — Σ_{n+2} -формула, определяющая R ($R = \Psi^\Omega[x_0]$), $k_0 \Leftarrow G(\Psi)$, то Σ_n -формула $\Phi(k_0, c(0, x_0))$ также определяет R в Ω . Полученное противоречие доказывает теорему. \square

Упражнения

1. Доказать, что функция $\text{Fr}_F: \omega^2 \rightarrow \omega$:

$$\text{Fr}_F(n, i) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — гёделев номер RQ-формулы } \Phi, \\ & \text{и } x_i \in FV(\Phi), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

2. Доказать, что функция $\text{Sen}: \omega \rightarrow \omega$:

$$\text{Sen}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — гёделев номер некоторого} \\ & \text{RQ-предложения сигнатуры } \sigma_0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

3. Доказать, что функция $\text{Sub}: \omega^3 \rightarrow \omega$ такая, что если n — гёделев номер некоторой формулы Φ (терма t), m — гёделев номер некоторого терма t_0 , то $\text{Sub}(n, m, i)$ — гёделев номер формулы $(\Phi)_{t_0}^{x_i}$ (терма $(t)_{t_0}^{x_i}$) и $\text{Sub}(n, m, i) = 0$ в противном случае, является Σ -функцией.

4. Доказать, что функция $F_{\Sigma_n}: \omega \rightarrow \omega$ ($n > 0$):

$$F_{\sigma_n}(k) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \Sigma_n\text{-формула } \Phi \\ & \text{сигнатуры } \sigma_0 \text{ такая, что } k = G(\Phi), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

является Σ -функцией.

§ 7.4. Универсальные Σ -предикаты, универсальные частичные Σ -функции

Для любых $(k + 1)$ -местного Σ -предиката $Q \subseteq \omega^{k+1}$ ($k > 0$) и $n \in \omega$ следующий k -местный предикат является Σ -предикатом:

$$Q_n \Leftarrow \{\langle n_1, \dots, n_k \rangle \mid \langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \omega^k, \langle n, n_1, \dots, n_k \rangle \in Q\}.$$

Действительно, если $Q = \Phi^\Omega[x_0, \dots, x_k]$ и $\Psi \Leftarrow (\Phi)_n^{x_0}$, то

$$Q_n = \Psi^{\Omega^*}[x_1, \dots, x_k].$$

Определение. $(k+1)$ -местный Σ -предикат $Q \subseteq \omega^{k+1}$ называется *универсальным для k -местных Σ -предикатов*, если семейство $\{Q_n \mid n \in \omega\}$ состоит из всех k -местных Σ -предикатов.

Для $(k+1)$ -местного предиката $Q \subseteq \omega^{k+1}$ через δ_Q обозначим множество

$\{\langle n_1, \dots, n_k \rangle \mid \langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \omega^k \text{ и существует } n \in \omega \text{ такой, что}$

$$\langle n_1, \dots, n_k, n \rangle \in Q\}.$$

Предложение 7.4.1. Пусть $k > 0$, Φ_Σ — Σ -формула такая, что $\text{Tr}_\Sigma = \Phi_\Sigma^\Omega[x_0, x_1]$, $\Phi_k(x_0, x_1, \dots, x_k) \Leftarrow (\Phi_\Sigma)_{c_{k+1}(0, x_k, x_{k-1}, \dots, x_1)}^{x_1}$. Тогда $(k+1)$ -местный Σ -предикат $U^{k+1} \Leftarrow \Phi_k^{\Omega^*}[x_0, x_1, \dots, x_k]$ является универсальным.

Доказательство. Пусть $Q \subseteq \omega^k$ — Σ -предикат и Φ — формула сигнатуры σ_0 такая, что $Q = \Phi^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}]$. Обозначим через $n_0 \Leftarrow G(\Phi)$ гёделев номер формулы Φ . Заметим, что для любых $n_1, \dots, n_k \in \omega$ если $m \Leftarrow c_{k+1}(0, n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$, то $\gamma_m(x_i) = n_{i+1}$ для $i < k$ и $\gamma_m(x_i) = 0$ для $i \geq k$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle n_0, m \rangle \in \text{Tr}_\Sigma &\iff \Omega \models \Phi_\sigma(n_0, m) \iff \\ &\iff \Omega^* \models \Phi_k(n_0, n_1, \dots, n_k) \iff \\ &\iff \Omega \models \Phi[\gamma_m] \iff \\ &\iff \langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \Phi^\Omega[x_0, \dots, x_{k-1}] \iff \\ &\iff \langle n_1, \dots, n_k \rangle \in Q, \end{aligned}$$

т. е. $Q = U_n^{k+1}$. □

Для $(k+1)$ -местной частичной Σ -функции $F: D \rightarrow \omega$ ($D \subseteq \omega^{k+1}$, $k > 0$) и любого n следующая k -местная частичная функция $F_n: D_n \rightarrow \omega$ является частичной Σ -функцией:

$$\delta_{F_n} \Leftarrow D_n \Leftarrow \{\langle i_1, \dots, i_k \rangle \mid \langle i_1, \dots, i_k \rangle \in \omega^k, \langle n, i_1, \dots, i_k \rangle \in D\},$$

$$F_n(i_1, \dots, i_k) = F(n, i_1, \dots, i_k), \quad \langle i_1, \dots, i_k \rangle \in D_n.$$

Определение. $(k+1)$ -местная частичная Σ -функция $F: D \rightarrow \omega$, $D \subseteq \omega^{k+1}$, называется *универсальной для k -местных частичных Σ -функций*, если семейство $\{F_n \mid n \in \omega\}$ состоит из всех k -местных частичных Σ -функций.

Прежде чем переходить к доказательству существования универсальных частичных Σ -функций, установим общий факт, имеющий самостоятельный интерес.

Предложение 7.4.2 (теорема об униформизации). Пусть $k > 0$ и $Q \subseteq \omega^{k+1} — \Sigma\text{-предикат на } \Omega$. Тогда существует k -местная частичная Σ -функция $h: \delta \rightarrow \omega$, $\delta \subseteq \omega^k$, такая, что $\Gamma_h \subseteq Q$,

$\delta_h = \delta_Q = \{\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \mid \text{существует } i \in \omega \text{ такое,}$
 $\text{что } \langle i_0, \dots, i_{k-1}, i \rangle \in A\}$.

Доказательство. Пусть $\Phi(x_0, \dots, x_k) — \Sigma\text{-формула такая, что } Q = \Phi^\Omega[x_0, \dots, x_k]$. Так как Ω — ограниченная алгебраическая система, по принципу Σ -рефлексии имеем $\Phi \equiv_\Omega (\exists u \Phi^{(u)})$. Следовательно,

$$Q = (\exists u \Phi^{(u)})^\Omega[x_0, \dots, x_k].$$

Формула $\Phi^{(u)}$ является Δ_0 -формулой, поэтому характеристическая функция χ Δ_0 -предиката $(\Phi^{(u)})^\Omega[x_0, \dots, x_k, u]$ является Σ -функцией. Рассмотрим следующие функции:

$$h_0(x_0, \dots, x_k) \leftrightharpoons \chi(x_0, \dots, x_{k-1}, l(x_k), r(x_k)),$$

$$h_1(x_0, \dots, x_{k-1}) \leftrightharpoons \mu x_k(\overline{\text{sg}}(h_0(x_0, \dots, x_k)) = 0),$$

$$h_2(x_0, \dots, x_{k-1}) \leftrightharpoons l(h_1(x_0, \dots, x_{k-1})).$$

Функции h_0 и $\overline{\text{sg}}(h_0)$ получены из χ , l , r , sg подстановкой, следовательно, являются Σ -функциями. Функция h_1 получена из $\overline{\text{sg}}(h_0)$ минимизацией, следовательно, является частичной Σ -функцией. Функция h_2 получена из l и h_1 подстановкой, следовательно, является частичной Σ -функцией.

Проверим, что частичная Σ -функция h_2 удовлетворяет заключению предложения. Пусть $\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in \delta_{h_2}$ и $i \leftrightharpoons h_2(i_0, \dots, i_{k-1})$. Тогда $\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in \delta_{h_1}$. Пусть $j \leftrightharpoons h_1(i_0, \dots, i_{k-1})$. По определению h_1 получаем $\overline{\text{sg}}(h_0(i_0, \dots, i_{k-1}, j)) = 0$, поэтому $h_0(i_0, \dots, i_{k-1}, j) = 1$:

$$h_0(i_0, \dots, i_{k-1}, j) = \chi(i_0, \dots, i_{k-1}, l(j), r(j)) = 1.$$

Следовательно, $\langle i_0, \dots, i_{k-1}, l(j), r(j) \rangle \in (\Phi^{(u)})^\Omega[x_0, \dots, x_k, u]$,

$$\Omega \models \Phi^{(u)}(i_0, \dots, i_{k-1}, l(j), r(j)),$$

$$\Omega \models \exists u \Phi^{(u)}(i_0, \dots, i_{k-1}, l(j)),$$

т. е. $\langle i_0, \dots, i_{k-1}, l(j) \rangle \in Q$, но

$$l(j) = l(h_1(i_0, \dots, i_{k-1})) = h_2(i_0, \dots, i_{k-1}),$$

т. е. $\langle i_0, \dots, i_{k-1}, h_2(i_0, \dots, i_{k-1}) \rangle \in Q$ и $\Gamma_{h_2} \subseteq Q$.

Пусть $\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in \omega^k$ такова, что существует $i \in \omega$ такое, что $\langle i_0, \dots, i_{k-1}, i \rangle \in Q$. Тогда из $Q = (\exists u\Phi^{(u)})^\Omega[x_0, \dots, x_k]$ следует, что $\Omega \models \exists u\Phi^{(u)}(i_0, \dots, i_{k-1}, i)$ и существует $j \in \omega$ такое, что

$$\Omega \models \Phi^{(j)}(i_0, \dots, i_{k-1}, i).$$

Поэтому

$$\chi(i_0, \dots, i_{k-1}, i, j) = 1,$$

$$h_0(i_0, \dots, i_{k-1}, c(i, j)) = \chi(i_0, \dots, i_{k-1}, i, j) = 1,$$

$$\overline{\text{sg}}h_0(i_0, \dots, i_{k-1}, c(i, j)) = 0.$$

Итак, функция h_1 определена для $\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle$ и $\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \in \delta_{h_2} = \delta_{h_1}$. Предложение 7.4.2 доказано. \square

Отметим еще одну связь между Σ -множествами и Σ -функциями.

Предложение 7.4.3. *Пусть $R \subseteq \omega$ — непустое Σ -множество. Тогда существует Σ -функция $f: \omega \rightarrow \omega$ такая, что $R = \rho_f \Leftrightarrow \{f(n) \mid n \in \omega\}$.*

Доказательство. Фиксируем $n_0 \in R$. Пусть $R = (\exists u\Phi^{(u)})^\Omega[x_0]$, где $\Phi^{(u)}$ — Δ_0 -формула. Определим функцию $f: \omega \rightarrow \omega$ так, что для любого $n \in \omega$,

$$f(n) \Leftrightarrow \begin{cases} l(n), & \Omega \models \Phi^{(r(n))}(l(n)), \\ n_0, & \Omega \models \neg\Phi^{(r(n))}(l(n)). \end{cases}$$

Легко проверить, что $\rho_f = R$ и $\Gamma_f = \Psi^\Omega[x_0, x_1]$, где Σ -формула Ψ определена так:

$$\Psi(x_0, x_1) \Leftrightarrow \Phi^{(r(x_0))}(l(x_0)) \wedge x_1 \approx l(x_0) \vee \neg\Phi^{(r(x_0))}(l(x_0)) \wedge x_1 \approx n_0.$$

Предложение доказано. \square

Предложение 7.4.4. *Пусть $k > 0$; U^{k+2} — $(k+2)$ -местный предикат, универсальный для $(k+1)$ -местных Σ -предикатов; u^{k+1} — $(k+1)$ -местная частичная Σ -функция такая, что $\Gamma_{u^{k+1}} \subseteq U^{k+2}$ и*

$\delta_{u^{k+1}} = \{\langle i_0, \dots, i_k \rangle \mid$ существует $i \in \omega$ такое,

что $\langle i_0, \dots, i_k, i \rangle \in U^{k+2}\}$

(такая функция существует в силу предложения 7.4.2). Тогда функция u^{k+1} универсальна для k -местных частичных Σ -функций.

Доказательство. Действительно, пусть $h: \delta \rightarrow \omega$, $\delta \subseteq \omega^k$, — k -местная частичная Σ -функция. Тогда ее график $\Gamma_h \subseteq \omega^{k+1}$ есть $(k+1)$ -местный Σ -предикат и в силу универсальности Σ -предиката U^{k+2} существует $n \in \omega$ такое, что

$$\Gamma_h = U_n^{k+2} = \{\langle i_1, \dots, i_k, i_{k+1} \rangle \mid \langle n, i_1, \dots, i_k, i_{k+1} \rangle \in U^{k+2}\}.$$

Проверим, что для этого n функция h совпадает с функцией u_n^{k+1} . Так как $\Gamma_{u_n^{k+1}} \subseteq U^{k+2}$, имеем $\Gamma_{u_n^{k+1}} \subseteq U_n^{k+2} = \Gamma_h$, т.е. h — расширение функции u_n^{k+1} . Поэтому достаточно показать, что $\delta_h \subseteq \delta_{u_n^{k+1}}$. Пусть $\langle i_1, \dots, i_k \rangle \in \delta_h$. Тогда

$$\langle i_1, \dots, i_k, h(i_1, \dots, i_k) \rangle \in \Gamma_h \subseteq U_n^{k+2},$$

$$\langle n, i_1, \dots, i_k, h(i_1, \dots, i_k) \rangle \in U^{k+2},$$

$$\langle n, i_1, \dots, i_k \rangle \in \delta_{u_n^{k+1}}.$$

Но тем самым $\langle i_1, \dots, i_k \rangle \in \delta_{u_n^{k+1}}$, что и требовалось доказать. \square

Для $(k+1)$ -местной Σ -функции F , где $k > 0$, и любого n функция $F_n: \omega^k \rightarrow \omega$, определенная так, что $F_n(i_1, \dots, i_k) = F(n, i_1, \dots, i_k)$ для всех $i_1, \dots, i_k \in \omega$, является, очевидно, Σ -функцией. Поэтому естественно задаться вопросом о существовании универсальных Σ -функций. Однако, в отличие от класса частичных Σ -функций, ситуация здесь другая.

Предложение 7.4.5. *Не существует двуместной Σ -функции $F: \omega^2 \rightarrow \omega$ такой, что для любой одноместной Σ -функции $h: \omega \rightarrow \omega$, принимающей в качестве значений лишь 0 или 1, существует $n \in \omega$ такое, что $F_n = h$.*

Доказательство. Предположим, что такая функция F существует. Пусть $h: \omega \rightarrow \omega$ такова, что $h(n) = \overline{\text{sg}}F(n, n)$ для всех $n \in \omega$. Ясно, что h — функция, принимающая в качестве значений лишь 0 и 1. Тогда существует $n_0 \in \omega$ такое, что $F_{n_0} = h$. Однако $h(n_0) = \overline{\text{sg}}F(n_0, n_0) = F_{n_0}(n_0) = F(n_0, n_0)$, что невозможно, поскольку $\overline{\text{sg}}k \neq k$ для всех $k \in \omega$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. \square

Следствие 7.4.6. *Существует двуместная частичная Σ -функция h такая, что не существует двуместной Σ -функции g такой, что $\Gamma_h \subseteq \Gamma_g$ (g — Σ -доопределение h).*

Доказательство. Пусть u^2 — двуместная частичная Σ -функция, универсальная для одноместных частичных Σ -функций. Если $g: \omega^2 \rightarrow \omega$ такова, что $\Gamma_{u^2} \subseteq \Gamma_g$, то g является универсальной для

одноместных Σ -функций, т. е. для любой одноместной Σ -функции $h: \omega \rightarrow \omega$ существует $n \in \omega$ такое, что $h = g_n$. Однако g не может быть Σ -функцией по предложению 7.4.5. \square

Следствие 7.4.7. Существует двуместная частичная Σ -функция h , принимающая значения 0 или 1 и не имеющая Σ -доопределения.

Доказательство. Как и выше, устанавливается, что в качестве такой функции можно взять функцию $\text{sg}(u^2)$. \square

Следствие 7.4.8. Существует одноместная частичная Σ -функция h_0 , принимающая значения лишь 0 и 1 и не имеющая Σ -доопределения.

Доказательство. Пусть h такая же, как в следствии 7.4.7, и $h_0(x) \Leftarrow h(l(x), r(x))$, $x \in \omega$. Если g_0 — Σ -доопределение h_0 , то $g(x, y) \Leftarrow g_0(c(x, y))$ — Σ -доопределение h , что невозможно. \square

Определение. Два непересекающихся Σ -подмножества $R_0, R_1 \subseteq \omega$ называются Δ -неотделимыми, если не существует Δ -множества $D \subseteq \omega$ такого, что $R_0 \subseteq D$ и $D \cap R_1 = \emptyset$.

Следствие 7.4.9. Существуют Δ -неотделимые множества R_0 и R_1 .

Доказательство. Пусть h_0 такая же, как в следствии 7.4.8, и

$$R_0 \Leftarrow \{n \mid n \in \delta_{h_0}, h_0(n) = 0\},$$

$$R_1 \Leftarrow \{n \mid n \in \delta_{h_0}, h_0(n) = 1\}.$$

В этом случае R_0 и R_1 — непересекающиеся Σ -множества (если $\Gamma_{h_0} = \Phi^\Omega[x_0, x_1]$, то $R_0 = ((\Phi)_0^{x_1})^\Omega[x_0]$ и $R_1 = ((\Phi)_{s(0)}^{x_1})^\Omega[x_0]$). Если $D \subseteq \omega$ такое, что $R_0 \subseteq D$ и $D \cap R_1 = \emptyset$, то характеристическая функция χ_D доопределяет h_0 , т. е. $\Gamma_{h_0} \subseteq \Gamma_{\chi_D}$. Но если D — Δ -множество, то χ_D — Σ -функция. Поэтому не существует Δ -множества D такого, что $R_0 \subseteq D$ и $D \cap R_1 = \emptyset$. \square

Определение. Пусть $A, B \subseteq \omega$. Будем говорить, что A m -сводится к B (обозначается $A \leq_m B$), если существует Σ -функция $f: \omega \rightarrow \omega$ такая, что

$$n \in A \iff f(n) \in B, \quad n \in \omega,$$

или, что равносильно, $f^{-1}(B) = A$.

Отметим некоторые простейшие свойства m -сводимости.

(1) Для любых $A, B, C \subseteq \omega$ верно $A \leq_m A$; если $A \leq_m B$ и $B \leq_m C$, то $A \leq_m C$.

Множество A m -сводится к A тождественной функцией id_ω . Если f и g — Σ -функции такие, что $A = f^{-1}(B)$, $B = g^{-1}(C)$, то $A = (gf)^{-1}(C)$.

(2) Если $A \leq_m B$ и B — Σ -множество (Δ -множество), то A является Σ -множеством (Δ -множеством).

Если f — Σ -функция такая, что $A = f^{-1}(B)$ и $B = \Phi^\Omega[x_0]$ для Σ -формулы Φ , то $A = ((\Phi)_{f(x_0)}^{x_0})^{\Omega^*}[x_0]$.

§ 7.5. Теорема Чёрча и теорема Гёделя о неполноте

Пусть A — множество предложений сигнатуры $\sigma_0 = \langle 0, s, +, \cdot, \leq \rangle$. Введем следующие обозначения:

$\text{Mod}(A)$ — класс всех алгебраических систем \mathfrak{A} сигнатуры σ_0 таких, что $\mathfrak{A} \models \Phi$ для любого $\Phi \in A$;

$\text{Th}(K)$ (*теория класса K*) — множество всех предложений Φ сигнатуры σ_0 таких, что $\mathfrak{A} \models \Phi$ для любой системы \mathfrak{A} из класса K алгебраических систем сигнатуры σ_0 .

Определение. Множество A предложений сигнатуры σ_0 называется *теорией*, если A — теория некоторого класса K .

Заметим, что A является теорией тогда и только тогда, когда $A = \text{Th}(\text{Mod}(A))$.

Теория A называется

- *непротиворечивой*, если $\text{Mod}(A) \neq \emptyset$;
- *полной*, если A — теория класса, состоящего из одной системы, т. е. $A = \text{Th}(\{\mathfrak{A}\})$ для подходящей системы \mathfrak{A} ;
- *разрешимой*, если $G(A) = \{G(\Phi) \mid \Phi \in A\}$ является Δ -подмножеством ω , и *неразрешимой* в противном случае;
- *наследственно неразрешимой*, если любая теория A_0 , содержащаяся в A , неразрешима.

Определение. Множество A предложений сигнатуры σ_0 называется

- *системой аксиом для теории B*, если $B = \text{Th}(\text{Mod}(A))$;
- *перечислимым*, если $G(A)$ есть Σ -подмножество ω .

Формулируемые ниже теоремы являются наиболее принципиальными утверждениями об алгоритмической природе теорий.

Теорема 7.5.1 (А. Чёрч). *Наименьшая теория T_{σ_0} сигнатуры σ_0 , состоящая из всех тождественно истинных предложений сигнатуры σ_0 , является неразрешимой.*

Теорема 7.5.2 (теорема Гёделя о неполноте). *Существует предложение A_1^* сигнатуры σ_0 такое, что $\Omega \models A_1^*$, и если A — непротиворечивая перечислимая теория сигнатуры σ_0 такая, что $A_1^* \in A$, то A не является полной.*

Начнем с некоторых предварительных рассмотрений, которые приведут к доказательству этих теорем.

Рассмотрим семейство A_1 формул сигнатуры σ_0 :

- 1) $x_0 \leqslant x_0$,
- 2) $x_0 \leqslant x_1 \wedge x_1 \leqslant x_2 \rightarrow x_0 \leqslant x_2$,
- 3) $x_0 \leqslant x_1 \wedge x_1 \leqslant x_0 \rightarrow x_0 \approx x_1$,
- 4) $x_0 \leqslant x_1 \vee x_1 \leqslant x_0$,
- 5) $0 \leqslant x_0$,
- 6) $x_0 \leqslant s(x_0) \wedge \neg(x_0 \approx s(x_0))$,
- 7) $x_0 \leqslant x_1 \wedge \neg(x_0 \approx x_1) \rightarrow s(x_0) \leqslant x_1$,
- 8) $x_0 + 0 \approx x_0$,
- 9) $x_0 + s(x_1) \approx s(x_0 + x_1)$,
- 10) $x_0 \cdot 0 \approx 0$,
- 11) $x_0 \cdot s(x_1) \approx (x_0 \cdot x_1) + x_0$.

Пусть A_1 — конъюнкция формул 1–11 и $A_1^* \Leftarrow \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 A_1$ — предложение сигнатуры σ_0 .

Предложение 7.5.3. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры σ_0 такая, что $\mathfrak{A} \models A_1^*$. Тогда существует концевая подсистема $\Omega' \leqslant_{\text{end}} \mathfrak{A}$, изоморфная Ω .

Доказательство. Из истинности A_1^* в \mathfrak{A} следует, что отношение $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — линейный порядок на A (следствие формул 1–4), $0^{\mathfrak{A}}$ — наименьший элемент в A относительно этого порядка (следствие из 5) и для любого $a \in A$, $a \leqslant^{\mathfrak{A}} s^{\mathfrak{A}}(a)$, $a \neq s^{\mathfrak{A}}(a)$ (т. е. $a <^{\mathfrak{A}} s^{\mathfrak{A}}(a)$) и $s^{\mathfrak{A}}(a) \leqslant^{\mathfrak{A}} b$, если $a <^{\mathfrak{A}} b$.

Определим отображение $h: \omega \rightarrow A$ по индукции:

$$h(0) \Leftarrow 0^{\mathfrak{A}}, \quad h(n+1) \Leftarrow s^{\mathfrak{A}}(h(n)).$$

Покажем, что $\omega' \Leftarrow h(\omega)$ — начальный сегмент A и h — изоморфизм между $\langle \omega, \leqslant \rangle$ и $\langle \omega', \leqslant^{\mathfrak{A}} \upharpoonright (\omega')^2 \rangle$. Докажем индукцией по $n \in \omega$, что если $[n] \Leftarrow \{0, 1, \dots, n\}$, то $h([n]) \subseteq \omega'$ — начальный сегмент A и $h \upharpoonright [n]$ — изоморфизм между $\langle [n], \leqslant \upharpoonright [n]^2 \rangle$ и $\langle h([n]), \leqslant^{\mathfrak{A}} \upharpoonright (h([n]))^2 \rangle$.

Так как $h(0) = 0^{\mathfrak{A}}$ — наименьший элемент A , сформулированное выше утверждение справедливо для $n = 0$.

Пусть $n \in \omega$ таково, что для $[n]$ верно следующее: $h([n])$ — начальный сегмент A и $h \upharpoonright [n]$ — изоморфизм между $\langle [n], \leqslant \upharpoonright [n]^2 \rangle$ и $\langle h([n]), \leqslant^{\mathfrak{A}} \upharpoonright (h([n]))^2 \rangle$,

$$[n+1] = [n] \cup \{n+1\},$$

$$h([n+1]) = h([n]) \cup \{s^{\mathfrak{A}}(h(n))\},$$

$$h(n) <^{\mathfrak{A}} s^{\mathfrak{A}}(h(n)),$$

где $h(n)$ — наибольший элемент в $h([n])$. Поэтому $s^{\mathfrak{A}}(h(n)) \notin h([n])$ и $h \upharpoonright [n+1]$ разнозначно. Если $a \in A$ и $a \leq^{\mathfrak{A}} h(k)$, то по индукционному предположению $a \in h([n]) \subseteq h([n+1])$ в случае $k \leq n$; $a \in h([n+1])$ в случае $k = n+1$ и $a = h(n+1)$. Если $a <^{\mathfrak{A}} h(n+1) = s^{\mathfrak{A}}(h(n))$, то $a \leq^{\mathfrak{A}} h(n)$. Действительно, либо $a \leq^{\mathfrak{A}} h(n)$, либо $h(n) <^{\mathfrak{A}} a$. Во втором случае $s^{\mathfrak{A}}(h(n)) \leq^{\mathfrak{A}} a$ и $h(n+1) = s^{\mathfrak{A}}(h(n)) \leq^{\mathfrak{A}} a$, что невозможно. Следовательно, $a \leq^{\mathfrak{A}} h(n)$ и $a \in h([n+1])$. Итак, $h([n+1])$ — начальный сегмент A и h переводит наибольший элемент $n+1$ в $[n+1]$ в наибольший элемент $s^{\mathfrak{A}}(h(n))$ в $h([n+1])$. Поэтому $h \upharpoonright [n+1]$ — изоморфизм соответствующих линейно упорядоченных множеств.

Из приведенных рассуждений следует, что $\omega' \leftrightharpoons h(\omega)$ — начальный сегмент A и h — изоморфизм между $\langle \omega, \leq \rangle$ и $\langle \omega', \leq^{\mathfrak{A}} \upharpoonright (\omega')^2 \rangle$. Покажем, что $h(n+m) = h(n) +^{\mathfrak{A}} h(m)$ и $h(n \cdot m) = h(n) \cdot^{\mathfrak{A}} h(m)$ для любых $n, m \in \omega$. Предположим противное: пусть $n_0, m_0 \in \omega$ такие, что $h(n_0 + m_0) \neq h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m_0)$ и $n_0 \in \omega$ — наименьшее n , для которого существует $m \in \omega$ такие, что $h(n_0 + m) \neq h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m)$, а m_0 — наименьшее m такое, что $h(n_0 + m_0) \neq h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m_0)$. Покажем, что $m_0 \neq 0$. Действительно, если $m_0 = 0$, то

$$n_0 + m_0 = n_0 + 0 = n_0,$$

$$h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m_0) = h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(0) = g(n_0) +^{\mathfrak{A}} 0^{\mathfrak{A}} = h(n_0),$$

так как $\mathfrak{A} \models \forall x_0 (x_0 + 0 \approx x_0)$.

Таким образом, $m_0 \neq 0$, $m_0 = m + 1 = s(m)$ и, ввиду минимальности m_0 ,

$$h(n_0 + m) = h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m),$$

$$h(n_0 + m_0) = h(n_0 + s(m)) = h(s(m_0 + n)) =$$

$$= s^{\mathfrak{A}}(h(n_0 + m)) = s^{\mathfrak{A}}(h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m)) =$$

$$= h(n_0) +^{\mathfrak{A}} s^{\mathfrak{A}}(h(m)) = h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m_0)$$

(соотношение $s^{\mathfrak{A}}(h(n_0) +^{\mathfrak{A}} h(m)) = h(n_0) +^{\mathfrak{A}} s^{\mathfrak{A}}(h(m))$ вытекает из соотношения $\mathfrak{A} \models \forall x_0 \forall x_1 (x_0 + s(x_1) \approx s(x_0 + x_1))$). Полученное противоречие показывает, что $h(n+m) = h(n) +^{\mathfrak{A}} h(m)$ для всех $n, m \in \omega$.

Доказательство равенства $h(n \cdot m) = h(n) \cdot^{\mathfrak{A}} h(m)$ аналогично.

Из вышеприведенных рассуждений видно, что $\omega' = h(\omega) \subseteq A$ замкнуто относительно операций $s^{\mathfrak{A}}$, $+^{\mathfrak{A}}$, $\cdot^{\mathfrak{A}}$ и подсистема $\Omega' \leftrightharpoons \mathfrak{A} \upharpoonright \omega'$ изоморфна Ω ($h: \Omega \rightarrow \Omega'$). Кроме того, ω' — начальный сегмент A . Следовательно, $\Omega' \leq_{\text{end}} \mathfrak{A}$. \square

Следствие 7.5.4. Для любых Σ -предложения Φ сигнатуры σ_0 и алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры σ_0 из $\Omega \models \Phi$ следует $\mathfrak{A} \models A_1^* \rightarrow \Phi$.

Доказательство. Пусть $\Omega \models \Phi$. Если $\mathfrak{A} \models \neg A_1^*$, то $\mathfrak{A} \models A_1^* \rightarrow \Phi$. Если $\mathfrak{A} \models A_1^*$, то по предложению 7.5.3 существует $\Omega' \leq_{\text{end}} \mathfrak{A}$ такая, что $\Omega' (\simeq \Omega) \models \Phi$ и $\mathfrak{A} \models \Phi$, так как \mathfrak{A} — концевое расширение Ω' , а Φ — Σ -предложение (см. предложение 5.7.1). \square

В § 7.4 было установлено существование непересекающихся Σ -множеств $R_0, R_1 \subseteq \omega$, не отделимых Δ -множествами.

Пусть $\exists x_0 \Phi^{(x_0)}(x_1), \exists x_0 \Psi^{(x_0)}(x_1)$ — Σ -формулы такие, что

$$R_0 = (\exists x_0 \Phi^{(x_0)})^\Omega[x_1],$$

$$R_1 = (\exists x_0 \Psi^{(x_0)})^\Omega[x_1].$$

Определим следующие последовательности Σ -формул:

$$\Phi_0(x_0, x_1) \Leftarrow \Phi^{(x_0)}(x_1),$$

$$\Phi_0^0(x_0) \Leftarrow (\Phi_0)_0^{x_1},$$

$$\Phi_{n+1}(x_0, x_{n+2}) \Leftarrow \exists x_{n+1} \leq s(x_{n+2})(x_{n+1} \approx s(x_{n+2}) \wedge \Phi_n(x_0, x_{n+1})),$$

$$\Phi_{n+1}^0(x_0) \Leftarrow (\Phi_{n+1})_0^{x_{n+2}} (\exists x_{n+1} \leq s(0)(x_{n+1} \approx s(0) \wedge \Phi_n(x_0, x_{n+1}))),$$

$$\Psi_0(x_0, x_1) \Leftarrow \Psi^{(x_0)}(x_1),$$

$$\Psi_0^0(x_0) \Leftarrow (\Psi_0)_0^{x_1},$$

$$\Psi_{n+1}(x_0, x_{n+2}) \Leftarrow \exists x_{n+1} \leq s(x_{n+2})(x_{n+1} \approx s(x_{n+2}) \wedge \Psi_n(x_0, x_{n+1})),$$

$$\Psi_{n+1}^0(x_0) \Leftarrow (\Psi_{n+1})_0^{x_{n+2}},$$

$$\Delta_n \Leftarrow \exists x_0 (\Phi_n^0(x_0) \wedge \forall x_{n+2} \leq x_0 \neg \Psi_n^0(x_{n+2})),$$

$$\Theta_n \Leftarrow A_1^* \rightarrow \Delta_n,$$

где $n \in \omega$.

Предложение 7.5.5. Справедливы следующие утверждения.

(а). Если $n \in R_0$, то предложение Θ_n тождественно истинно (т.е. $\Theta_n \in T_{\sigma_0}$).

(б). Если $n \in R_1$ и \mathfrak{A} — алгебраическая система такая, что $\mathfrak{A} \models A_1^*$, то $\mathfrak{A} \models \neg \Theta_n$.

Доказательство. Из определений формул Φ_n^0, Ψ_n^0 следует, что для любой алгебраической системы \mathfrak{A} сигнатуры σ_0 и $a \in A$ справедливы эквивалентности

$$\mathfrak{A} \models \Phi_n^0(a) \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{(a)}(n),$$

$$\mathfrak{A} \models \Psi_n^0(a) \iff \mathfrak{A} \models \Psi^{(a)}(\mathbf{n});$$

здесь $\mathbf{n} = \underbrace{s(\dots s}_n(0)\dots).$

Пусть $n \in R_0$ и \mathfrak{A} — произвольная алгебраическая система сигнатуры σ_0 . Если $\mathfrak{A} \models \neg A_1^*$, то $\mathfrak{A} \models A_1^* \rightarrow \Delta_n$. Если $\mathfrak{A} \models A_1^*$, то существует система $\Omega' \leq_{\text{end}} \mathfrak{A}$, изоморфная Ω . Ввиду соотношения $\Omega \models \exists x_0 \Phi^{(x_0)}(\mathbf{n})$ для некоторого $a \in \omega'$ имеем $\Omega' \models \Phi^{(a)}(\mathbf{n})$, $\mathfrak{A} \models \Phi^{(a)}(\mathbf{n})$, так как $\Phi^{(x_0)} = \Delta_0$ -формула. Если $b \leq^{\mathfrak{A}} a$, то $b \in \omega'$ и $\Omega' \models \neg \Psi^{(b)}(\mathbf{n})$, в противном случае $\Omega' \models \exists x_0 \Psi^{(x_0)}(\mathbf{n})$ и $n \in R_1 \cap R_0 = \emptyset$. Но тогда $\mathfrak{A} \models \neg \Psi^{(b)}(\mathbf{n})$ и $\mathfrak{A} \models \exists x_0 (\Phi^{(x_0)}(\mathbf{n}) \wedge \forall x_{n+2} \leq x_0 \neg \Psi^{(x_{n+2})}(\mathbf{n}))$, $\mathfrak{A} \models \Delta_n$ и $\mathfrak{A} \models A_1^* \rightarrow \Delta_n$.

Пусть $n \in R_1$ и \mathfrak{A} — система такая, что $\mathfrak{A} \models A_1^*$. Покажем, что $\mathfrak{A} \models \neg \Delta_n$. Действительно, предположим, что $\mathfrak{A} \models \Delta_n$ и $a \in A$ такой, что $\mathfrak{A} \models \Phi_n^0(a) \wedge \forall x_{n+2} \leq a \neg \Psi_n^0(x_{n+2})$. Пусть $\Omega' \leq_{\text{end}} \mathfrak{A}$ — подсистема, изоморфная Ω . Если $a \in \omega'$, то $\Omega' \models \Phi_n^0(a)$, $\Omega' \models \Phi^{(a)}(\mathbf{n})$, $\Omega' \models \exists x_0 \Phi^{(x_0)}(\mathbf{n})$, $\Omega \models \exists x_0 \Phi^{(x_0)}(\mathbf{n})$. Следовательно, $n \in R_0$ (и $n \in R_1$). Поэтому $n \in R_0 \cap R_1 = \emptyset$, что невозможно. Пусть $a \notin \omega'$. Так как $n \in R_1$, верно $\Omega \models \exists x_0 \Psi^{(x_0)}(\mathbf{n})$ и $\Omega' \models \exists x_0 \Psi^{(x_0)}(\mathbf{n})$, существует $a' \in \omega'$ такой, что $\Omega' \models \Psi^{(a')}(\mathbf{n})$, $\Omega' \models \Psi_n^0(a')$ и $\mathfrak{A} \models \Psi_n^0(a')$. Однако ω' — начальный сегмент A . Следовательно, $a' \leq^{\mathfrak{A}} a$. Поэтому $\mathfrak{A} \models \neg (\Phi^{(a)}(\mathbf{n}) \wedge \forall x_{n+2} \leq a \neg \Psi^{(x_{n+2})}(\mathbf{n}))$, $\mathfrak{A} \models \neg (\Phi_n^0(a) \wedge \forall x_{n+2} \leq a \neg \Psi_n^0(x_{n+2}))$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{A} \models \neg \Delta_n$ и $\mathfrak{A} \models \neg \Theta_n$. \square

В качестве следствия предложения 7.5.5 докажем утверждение, из которого вытекают две основные теоремы.

Предложение 7.5.6. *Если класс K алгебраических систем (сигнатуры σ_0) содержит систему \mathfrak{A} такую, что $\mathfrak{A} \models A_1^*$, то теория $\text{Th}(K)$ класса K неразрешима.*

Доказательство. Установим сначала, что функция $h: \omega \rightarrow \omega$ такая, что $h(n) = G(\Theta_n)$ для любого $n \in \omega$, является Σ -функцией.

Пусть $m_0 \Leftarrow G(\Phi^{(x_0)}(x_1)) = G(\Phi(x_0, x_1))$, $m'_0 \Leftarrow G(\Phi_0^0(x_0))$ и функция $h_0: \omega \rightarrow \omega$ определена примитивной рекурсией:

$$h_0(0) = m_0,$$

$$\begin{aligned} h_0(n+1) &= c(11, c_3(n+1, c(2, c(1, n+2))), \\ &c(7, c(c(5, c(c(1, n+1)c(2, c(1, n+2)))), h_0(n))))). \end{aligned}$$

Легко проверить, что $h_0(n) = G(\Phi_n)$ для всех $n \in \omega$.

Пусть $h'_0: \omega \rightarrow \omega$ определена так, что

$$h'_0(0) = m'_0,$$

$$h'_0(n+1) = c(11, c_3(n+1, c(2, c(0, 1)), c(7, c(c(5, c(c(1, n+1), c(2, c(0, 1))))), h_0(n))))).$$

Тогда $h'_0(n) = G(\Phi_n^0)$ для всех $n \in \omega$.

Аналогично определяется Σ -функция $h'_1: \omega \rightarrow \omega$ такая, что $h'_1(n) = G(\Psi_n^0)$ для всех $n \in \omega$. Пусть

$$h''_1(n) \Leftarrow \text{Sub}(h'(n), c(1, n+2), 0), \quad n \in \omega.$$

Напомним, что функция Sub определена в упражнении 3 § 7.3. Заметим, что $h''_1(n) = G((\Psi_n^0)_{x_{n+2}}^{x_0})$, $n \in \omega$. Пусть

$$h^*_1(n) = c(12, c(n+2, c(c(1, 0), c(10, h''_1(n))))), \quad n \in \omega.$$

Тогда $h^*_1(n) = G(\forall x_{n+2} \leq x_0 \neg \Psi_n^0(x_{n+2}))$, $n \in \omega$. Пусть

$$h'(n) = c(13, c(0, c(7, c(h'_0(n), h^*_1(n))))), \quad n \in \omega.$$

Тогда $h'(n) = G(\exists x_0(\Phi_n^0(x_0) \wedge \forall x_{n+2} \leq x_0 \neg \Psi_n^0(x_{n+2}))) = G(\Delta_n)$, где $n \in \omega$. Полагаем $h(n) \Leftarrow c(9, c(N_0, h'(n)))$, где $N_0 \Leftarrow G(A_1^*)$. Следовательно $h: \omega \rightarrow \omega$ — искомая Σ -функция.

Вернемся к доказательству предложения 7.5.6. Предположим, что класс K алгебраических систем сигнатуры σ_0 таков, что существует $\mathfrak{A} \in K$ такая, что $\mathfrak{A} \models A_1^*$ и $\text{Th}(K)$ разрешима, т. е. $G(\text{Th}(K))$ — Δ -множество.

Рассмотрим множество $D \Leftarrow h^{-1}(G(\text{Th}(K)))$. Поскольку h — Σ -функция и D m -сводится к Δ -множеству $G(\text{Th}(K))$, то D — Δ -множество. Покажем, что $R_0 \subseteq D$ и $D \cap R_1 = \emptyset$. Если $n \in R_0$, то $\Theta_n \in T_{\sigma_0} \subseteq \text{Th}(K)$. Следовательно,

$$G(\Theta_n) = h(n) \in G(\text{Th}(K)), \quad n \in h^{-1}(G(\text{Th}(K))) = D,$$

т. е. $R_0 \subseteq D$. Пусть $n \in R_1$. Тогда $\mathfrak{A} \models \neg \Theta_n$ и $\Theta_n \notin \text{Th}(K)$, $G(\Theta_n) = h(n) \notin G(\text{Th}(K))$, $n \notin h^{-1}(G(\text{Th}(K))) = D$, т. е. $R_1 \cap D = \emptyset$. Но существование такого Δ -множества D противоречит выбору неотделимых R_0 и R_1 . \square

Следующее утверждение является просто переформулировкой предложения 7.5.6.

Предложение 7.5.7. *Если \mathfrak{A} — алгебраическая система такая, что $\mathfrak{A} \models A_1^*$, то теория $\text{Th}(\mathfrak{A})$ является наследственно неразрешимой.*

Из предложения 7.5.7 непосредственно следует теорема Чёрча. Для доказательства теоремы Гёделя установим следующее

Предложение 7.5.8. *Если A — перечислимая полная теория, то A разрешима.*

Доказательство. Если A — полная теория, то для любого предложения Φ сигнатуры σ_0 имеет место альтернатива: либо $\Phi \in A$, либо $\neg\Phi \in A$. Пусть A — перечислимая полная теория и $\Phi(x_0)$ — Σ -формула такая, что $G(A) = \Phi^\Omega[x_0]$. Следующая Σ -формула $\Psi(x_0, x_1)$ будет определять характеристическую функцию множества $G(A)$:

$$(\text{Sen}(x_0) \approx 0 \wedge x_1 \approx 0) \vee \text{Sen}(x_0) \approx 1 \wedge$$

$$\wedge (\Phi(x_0) \wedge x_1 \approx 1 \vee \Phi(c(10, x_0)) \wedge x_1 \approx 0);$$

функция Sen определена в упражнении 2 § 7.3. \square

Из предложений 7.5.6 и 7.5.8 следует теорема Гёделя о неполноте.

Предложение 7.5.9. *Если A — перечислимое множество предложений и $B = \text{Th}(\text{Mod}(A))$, то B — перечислимая теория.*

Набросок доказательства. Используя теорему о полноте для гильбертовского исчисления RQ-формул (см. конец § 5.7), можно описать множество B как семейство тех RQ-предложений Φ , для которых существует *доказательство из A* , т. е. последовательность Φ_0, \dots, Φ_n RQ-формул такая, что $\Phi_n = \Phi$ и для любого $i \leq n$ выполнено одно из следующих четырех условий:

- Φ_i — аксиома, т. е. имеет вид одной из аксиом 1–14 (см. § 4.5) или аксиом 11' или 12' (см. § 5.7),
- Φ_i принадлежит A ,
- существуют $j, l < i$ такие, что Φ_i получена из Φ_j и Φ_l по правилу вывода 1 (см. § 4.5),
- существует $j < i$ такое, что Φ_i получена из Φ_j по одному из правил вывода 2, 3 (см. § 4.5), 2' или 3' (см. § 5.7).

Доказательство Φ_0, \dots, Φ_n из A можно *кодировать парой* $\langle k, n \rangle$ чисел $k, n \in \omega$ такой, что $\Gamma(k, i) = G(\Phi_i)$, $i \leq n$. Тогда

$G(B) \Leftarrow \{m \mid m \in \omega, \text{ существуют } k, n \in \omega \text{ такие, что}$

$\langle k, n \rangle$ кодирует доказательство Φ_0, \dots, Φ_n из A

такое, что Φ_n — RQ-предложение и $G(\Phi_n) = m\}$.

Далее остается только рутинное доказательство того, что

$\{\langle k, n \rangle \mid k, n \in \omega, \langle k, n \rangle \text{ кодирует некоторое доказательство из } A\} \subseteq \omega^2$

является Σ -предикатом, если A — неречислимое множество предложений. \square

Предложение 7.5.9 позволяет сформулировать теорему Гёделя в следующей форме.

Теорема 7.5.10 (вариант теоремы Гёделя о неполноте). Если непротиворечивая теория B содержит A_1^* и имеет перечислимую систему аксиом, то она неполна.

В заключение рассмотрим предикатный вариант σ_0^π сигнатуры σ_0 и предикатные варианты модели Ω и теории, определяемой предложением A_1^* . Пусть

$$\sigma_0^\pi \doteq \langle 0, S^2, \text{Ad}^3, \text{Ml}^3, \leq^2 \rangle, \quad \Omega^\pi \doteq \langle \omega, 0, S, A, M, \leq \rangle,$$

где S, A, M — предикаты, соответствующие графикам функций $s: \omega \rightarrow \omega, +: \omega^2 \rightarrow \omega, \cdot: \omega^2 \rightarrow \omega$. Заметим, что функции $s, +$ и \cdot являются Δ_0 -определимыми в Ω^π . Поэтому Ω и Ω^π имеют одинаковые Σ -предикаты и Σ -функции.

Для $n \in \omega, [n] = \{0, 1, \dots, n\}$ полагаем $\Omega_n^\pi \doteq \Omega^\pi \upharpoonright [n]$.

Рассмотрим следующее семейство A_1^π формул сигнатуры σ_0^π :

- 1) $x_0 \leq x_0$,
- 2) $x_0 \leq x_1 \wedge x_1 \leq x_2 \rightarrow x_0 \leq x_2$,
- 3) $x_0 \leq x_1 \wedge x_1 \leq x_0 \rightarrow x_0 \approx x_1$,
- 4) $x_0 \leq x_1 \vee x_1 \leq x_0$,
- 5) $0 \leq x_0$,
- 6*) $S(x_0, x_1) \rightarrow x_0 \leq x_1 \wedge \neg(x_0 \approx x_1)$,
- 7*) $x_0 \leq x_1 \wedge \neg(x_0 \approx x_1) \rightarrow \exists x_2(S(x_0, x_2) \wedge x_2 \leq x_1)$,
- 8*) $\text{Ad}(x_0, 0, x_0) \wedge (\text{Ad}(x_0, x_1, x_2) \wedge \neg(x_1 \approx 0) \rightarrow x_0 \leq x_2 \wedge \neg(x_0 \approx x_2))$,
- 9*) $(\text{Ad}(x_0, x_1, x_2) \wedge S(x_1, x_3) \wedge S(x_2, x_4) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Ad}(x_0, x_3, x_4)) \wedge (\text{Ad}(x_0, x_1, x_2) \wedge S(x_3, x_1) \rightarrow$
 $\rightarrow \exists x_4(\text{Ad}(x_0, x_3, x_4) \wedge S(x_4, x_2)))$,
- 10*) $\text{Ml}(x_0, 0, 0)$,
- 11*) $(\text{Ml}(x_0, x_1, x_2) \wedge S(x_1, x_3) \wedge \text{Ad}(x_2, x_0, x_4) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{Ml}(x_0, x_3, x_4)) \wedge (\text{Ml}(x_0, x_1, x_2) \wedge (\text{Ml}(x_0, x_1, x_2) \wedge S(x_3, x_1) \rightarrow$
 $\rightarrow \exists x_4(\text{Ml}(x_0, x_3, x_4) \wedge \text{Ad}(x_4, x_0, x_2)))$,
- 12) $S(x_0, x_1) \wedge S(x_0, x_2) \rightarrow x_1 \approx x_2$,
- 13) $\text{Ad}(x_0, x_1, x_2) \wedge \text{Ad}(x_0, x_1, x_3) \rightarrow x_2 \approx x_3$,
- 14) $\text{Ml}(x_0, x_1, x_2) \wedge \text{Ml}(x_0, x_1, x_3) \rightarrow x_2 \approx x_3$.

Пусть $\bigwedge A_1^\pi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ — конъюнкция формул 1–5, 6*–11*, 12–14. Полагаем $\overline{A}_1^\pi \doteq \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \bigwedge A_1^\pi$. Заметим, что \overline{A}_1^π — предложение сигнатуры σ_0^π .

Имеет место следующий аналог предложения 7.5.3.

Предложение 7.5.11. Пусть \mathfrak{A} — алгебраическая система сигнатуры σ_0^π такая, что $\mathfrak{A} \models \overline{A}_1^\pi$. Если \mathfrak{A} конечна и $|A| = n + 1$, то $\mathfrak{A} \simeq \Omega_n^\pi$. Если \mathfrak{A} бесконечна, то она имеет концевую подсистему $\mathfrak{A}_0 \leq_{\text{end}} \mathfrak{A}$, изоморфную Ω^π .

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 7.5.3, попытаемся построить для каждого $n \in \omega$ отображение $h_n: [n] \rightarrow A$ так, чтобы выполнялись условия:

$$h_n(0) = 0^{\mathfrak{A}}, \quad \langle h_n(k), h_n(k+1) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}, \quad k < n,$$

$h_n([n])$ — начальный сегмент линейно упорядоченного множества $\langle A, \leq^{\mathfrak{A}} \rangle$,

h_n — изоморфизм между $\Omega_n^\pi \upharpoonright \langle 0, S, \leq \rangle$ и $(\mathfrak{A} \upharpoonright h_n([n])) \upharpoonright \langle 0, S, \leq \rangle$.

Для $n = 0$ такое отображение h_0 существует. Предположим, что для некоторого $n \in \omega$ требуемое отображение h_n уже построено. Если $h_n([n]) = A$, то $|A| = n + 1$, и h_{n+1} не может быть построено.

Пусть $h_n([n]) \neq A$ и $a \in A \setminus h_n([n])$. Так как $h_n([n])$ — начальный сегмент A и $h_n(n)$ — его наибольший элемент, то $h_n(n) <^{\mathfrak{A}} a$. Поскольку формула 7* входит конъюнктивно в $\bigwedge A_1^\pi$ и $\mathfrak{A} \models \overline{A}_1^\pi$, то

$$\mathfrak{A} \models h_n(n) \leq a \wedge \neg h_n(n) \approx a \rightarrow \exists x_2 (S(h_n(n), x_2) \wedge x_2 \leq a),$$

$$\mathfrak{A} \models \exists x_2 S(h_n(n), x_2).$$

Пусть $a' \in A$ таков, что $\mathfrak{A} \models S(h_n(n), a')$. Заметим, что согласно формуле 12 такой a' единственен. Полагаем $h_{n+1}(n+1) \leftrightharpoons a'$ и $h_{n+1}(k) = h_n(k)$ для $k \leq n$. Нетрудно проверить, что $h_{n+1}: [n+1] \rightarrow A$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Итак, если \mathfrak{A} бесконечна, то $h \leftrightharpoons \bigcup_{n \in \omega} h_n: \omega \rightarrow A$ отображает ω на $\omega' \leftrightharpoons h(\omega)$; ω' — начальный сегмент A и h — изоморфизм между $\Omega^\pi \upharpoonright \langle 0, S, \leq \rangle$ и $(\mathfrak{A} \upharpoonright \omega') \upharpoonright \langle 0, S, \leq \rangle$.

Покажем, что если отображение h_n определено, то оно является изоморфизмом между Ω_n^π и $\mathfrak{A} \upharpoonright h_n([n])$. Сначала установим, что h_n — изоморфизм между $\Omega_n^\pi \upharpoonright \langle 0, S, \text{Ad}, \leq \rangle$ и $(\mathfrak{A} \upharpoonright h_n([n])) \upharpoonright \langle 0, S, \text{Ad}, \leq \rangle$. Для этого достаточно доказать утверждения ⟨1⟩, ⟨2⟩.

⟨1⟩ *Если $k, l, k+l \leq n$, то $\langle h_n(k), h_n(l), h_n(k+l) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$.*

Предположим, что утверждение неверно, и пусть $\langle k_0, l_0 \rangle$ — пара с наименьшим номером (т. е. $c(k_0, l_0)$) такая, что $k_0, l_0, k_0 + l_0 \leq n$ и $\langle h_n(k_0), h_n(l_0), h_n(k_0 + l_0) \rangle \notin \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$. Заметим, что l_0 не может равняться нулю, так как

$$\langle h_n(k_0), h_n(0), h_n(k_0 + 0) \rangle = \langle h_n(k_0), 0^{\mathfrak{A}}, h_n(k_0) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}},$$

что следует из формулы 8*. Таким образом, $l_0 > 0$ и $l_0 = l + 1$ (для $l = l_0 - 1$). Поскольку $c(k_0, l) < c(l_0, l_0)$, имеем $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(k_0 + l) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$, $k_0 + l_0 \leq n$. Поэтому $k_0 + l < n$ и $\langle h_n(k_0 + l), h_n(k_0 + l_0) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$. Кроме того, $\langle h_n(l), h_n(l_0) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$. Ввиду первой конъюнкции формулы 9* справедливо соотношение $\langle h_n(k_0), h_n(l_0), h_n(k_0 + l_0) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$, что противоречит выбору k_0, l_0 .

(2) Если $k, l \leq n$, $k + l > n$, то не существует $m \leq n$ такого, что $\langle h_n(k), h_n(l), h_n(m) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$.

Предположим, что утверждение неверно, и пусть $\langle k_0, l_0 \rangle$ — пара с наименьшим номером такая, что $k_0, l_0 \leq n$, $k_0 + l_0 > n$ и существует (единственное) $m \leq n$ такое, что $\langle h_n(k_0), h_n(l_0), h_n(m) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$. Ясно, что $l_0 > 0$. Пусть $l_0 = l + 1$. Тогда $\langle h_n(l), h_n(l_0) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$. Ввиду второй конъюнкции формулы 9* имеем

$$\mathfrak{A} \models \exists x_4 (\text{Ad}(h_n(k_0), h_n(l), x_4) \wedge S(x_4, h_n(m))).$$

Если $a \in A$ таков, что $\langle a, h_n(m) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$, $\langle h_n(k_0), h_n(l), a \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$, то $m > 0$ и $a = h_n(m')$ для m' такого, что $m' + 1 = m$.

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $k_0 + l = n$. Согласно (1) имеем $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(k_0 + l) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$, $h_n(m') = a = h_n(k_0 + l) = h_n(n)$, $m' < m \leq n (= k_0 + l)$. Приходим к противоречию.

Случай 2: $k_0 + l > n$. В силу $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(m') \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$, $m' < n$, пара $\langle k_0, l \rangle$ также удовлетворяет условиям $k_0, l \leq n$, $k_0 + l > n$ и существует $m' \leq n$ такой, что

$$\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(m') \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}, \quad c(k_0, l) < c(k_0, l_0),$$

что противоречит выбору пары $\langle k_0, l_0 \rangle$.

Итак, (2) доказано, h_n есть изоморфизм $\Omega_n^\pi \restriction \langle 0, S, \text{Ad}, \leq \rangle$ и $(\mathfrak{A} \restriction h_n([n])) \restriction \langle 0, S, \text{Ad}, \leq \rangle$. Установим теперь, что h_n есть изоморфизм Ω_n^π и $\mathfrak{A} \restriction h_n([n])$. Для этого достаточно доказать утверждения (3) и (4).

(3) Если $k, l, k \cdot l \leq n$, то $\langle h_n(l), h_n(k), h_n(k \cdot l) \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$.

Предположим, что утверждение неверно. Выберем пару $\langle k_0, l_0 \rangle$ с наименьшим номером такую, что $k_0, l_0, k_0 \cdot l_0 \leq n$ и

$$\langle h_n(k_0), h_n(l_0), h_n(k_0 \cdot l_0) \rangle \notin \text{Ml}^{\mathfrak{A}}.$$

Заметим, что $l_0 \neq 0$, так как по формуле 10*

$$\langle h_n(k_0), h_n(0), h_n(k_0 \cdot 0) \rangle = \langle h_n(k_0), 0^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}} \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}.$$

Тогда $l_0 = l + 1$ и $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(k_0 \cdot l) \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$, поскольку $c(k_0, l) < c(k_0, l_0)$. Далее, $\langle h_n(l), h_n(l_0) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$ и $n \geq k_0 \cdot l_0 = k_0(l + 1) = k_0 \cdot l + k_0$ влечет по доказанному выше

$$\langle h_n(k_0 \cdot l), h_n(k_0), h_n(k_0 \cdot l_0) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}.$$

Согласно первой конъюнкции формулы 11* имеем

$$\langle h_n(k_0), h_n(l_0), h_n(k_0 \cdot l_0) \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}},$$

что противоречит выбору пары $\langle k_0, l_0 \rangle$.

(4) Если $k, l \leq n$, $k \cdot l > n$, то не существует $m \leq n$ такого, что $\langle h_n(k), h_n(l), h_n(m) \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$.

Предположим, что утверждение неверно и $k_0, l_0 \leq n$ — пара с наименьшим номером такая, что $k_0 \cdot l_0 > n$ и существует $m \leq n$ такое, что

$$\langle h_n(k_0), h_n(l_0), h_n(m) \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}.$$

Ясно, что $l_0 \neq 0$. Пусть $l_0 = l + 1$. Тогда $\langle h_n(l), h_n(l_0) \rangle \in S^{\mathfrak{A}}$ и ввиду второй конъюнкции формулы 11* имеем

$$\mathfrak{A} \models \exists x_4 \text{Ml}(h_n(k_0), h_n(l), x_4) \wedge \text{Ad}(x_4, h_n(k_0), h_n(m)).$$

Если $a \in A$ такой, что $\langle a, h_n(k_0), h_n(m) \rangle \in \text{Ad}^{\mathfrak{A}}$, $\langle h_n(k_0), h_n(l), a \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$, то $a <^{\mathfrak{A}} h_n(m)$ по формуле 8* и $a = h(m')$ для m' такого, что $m' < m$.

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $k_0 \cdot l = n$. Согласно *(3)* имеем $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(n) \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$, $h_n(m') = a = h_n(n)$, $m' < m \leq n$. Приходим к противоречию.

Случай 2: $k_0 \cdot l > n$. Ввиду $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(m') \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$, $m' \leq n$, пара $\langle k_0, l \rangle$ также удовлетворяет условию $k_0, l \leq n$, $k_0 \cdot l > n$ и существует $m' \leq n$ такое, что $\langle h_n(k_0), h_n(l), h_n(m') \rangle \in \text{Ml}^{\mathfrak{A}}$. Это противоречит выбору пары $\langle k_0, l_0 \rangle$, так как $c(k_0, l) < c(k_0, l_0)$.

Итак, *(4)* доказано, и h_n есть изоморфизм Ω_n^π и $\mathfrak{A} \upharpoonright h_n([n])$. Из доказанного вытекает предложение 7.5.11. \square

Пусть, как и выше, R_0 и R_1 — неотделимые непересекающиеся Σ -подмножества ω . Обозначим через $\bar{\Phi}(x_0)$ и $\bar{\Psi}(x_0)$ Σ -формулы сигнатуры σ_0^π такие, что $R_0 = \bar{\Phi}_{\Omega^\pi}[x_0]$ и $R_1 = \bar{\Psi}_{\Omega^\pi}[x_0]$. Определим следующие последовательности Σ -формул:

$$\bar{\Phi}_0(x_0) \Leftrightarrow \bar{\Phi}(x_0),$$

$$\bar{\Phi}_{n+1}(x_{n+1}) \Leftrightarrow \exists x_n(S(x_{n+1}, x_n) \wedge \bar{\Phi}(x_n)),$$

$$\bar{\Phi}_n^0 \Leftrightarrow \bar{\Phi}_n(0) = (\bar{\Phi}_n)_0^{x_n}, \quad n \in \omega,$$

$$\bar{\Psi}_0(x_0) \Leftrightarrow \bar{\Psi}(x_0),$$

$$\bar{\Psi}_{n+1}(x_{n+1}) \Leftrightarrow \exists x_n(S(x_{n+1}, x_n) \wedge \bar{\Psi}_n(x_n)),$$

$$\bar{\Psi}_n^0 \Leftrightarrow \bar{\Psi}_n(0) = (\bar{\Psi}_n)_0^{x_n}, \quad n \in \omega,$$

$$\bar{\Theta}_n \Leftrightarrow \bar{A}_1^\pi \rightarrow (\bar{\Psi}_n^0 \rightarrow \bar{\Phi}_n^0), \quad n \in \omega.$$

Аналогом предложения 7.5.5 является

Предложение 7.5.12. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $n \in R_0$, то предложение $\bar{\Theta}_n$ тождественно истинно (м.е. $\bar{\Theta}_n \in T_{\sigma_0^\pi}$).*

(б) *Если $n \in R_1$, то существует $N \in \omega$ такое, что если \mathfrak{A} — конечная алгебраическая система сигнатуры σ_0^π такая, что $\mathfrak{A} \models \bar{A}_1^\pi$ и $|A| \geq N$, то $\mathfrak{A} \models \neg \bar{\Theta}_n$.*

Доказательство. Пусть $n \in R_0$ и \mathfrak{A} — произвольная алгебраическая система сигнатуры σ_0^π . Если $\mathfrak{A} \models \neg \bar{A}_1^\pi$, то $\mathfrak{A} \models \bar{\Theta}_n$. Если $\mathfrak{A} \models \bar{A}_1^\pi$ и система \mathfrak{A} бесконечна, то существует подсистема $\mathfrak{A}_0 \leq_{\text{end}} \mathfrak{A}$, изоморфная Ω^π . Легко проверить, что $n \in R_0$ влечет $\Omega^\pi \models \bar{\Phi}_n^0$. Но тогда $\mathfrak{A}_0 \models \bar{\Phi}_n^0$ и $\mathfrak{A} \models \bar{\Theta}_n$. Если $\mathfrak{A} \models \bar{A}_1^\pi$ и система \mathfrak{A} конечна, то $\mathfrak{A} \simeq \Omega_k^\pi$ для некоторого $k \in \omega$. Тогда $\mathfrak{A} \models \neg \bar{\Psi}_n^0$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \bar{\Theta}_n$, так как $\mathfrak{A} \models \bar{\Psi}_n^0$ влечет $\Omega_k^\pi \models \bar{\Psi}_n^0$, $\Omega^\pi \models \bar{\Psi}_n^0$, и тогда $n \in R_1$. Однако $n \in R_0$ и $n \in R_0 \cap R_1 = \emptyset$. Пришли к противоречию. Таким образом, если $n \in R_0$, то $\bar{\Theta}_n$ тождественно истинна.

Пусть $n \in R_1$. Тогда $\Omega^\pi \models \bar{\Psi}_n^0$. Согласно следствию 5.7.10 принципа Σ -рефлексии существует $N \in \omega$ такое, что $\Omega^\pi \upharpoonright \hat{N} = \Omega_N^\pi \models \bar{\Psi}_n^0$.

Тогда если $|A| \geq N$, то Ω_N^π изоморфна концевой подмодели \mathfrak{A} . Следовательно, $\mathfrak{A} \models \bar{\Psi}_n^0$. Если $\mathfrak{A} \models \bar{A}_1^\pi$ и система \mathfrak{A} конечна, то $\mathfrak{A} \simeq \Omega_k^\pi$ для некоторого $k \in \omega$, $k \geq N$ и $\mathfrak{A} \models \neg \bar{\Phi}_n^0$, так как $\mathfrak{A} \models \bar{\Phi}_n^0$ влечет $\Omega_k^\pi \models \bar{\Phi}_n^0$, $\Omega^\pi \models \bar{\Phi}_n^0$, $n \in R_0$, но $n \in R_1$, $n \in R_0 \cap R_1 = \emptyset$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \neg \bar{\Theta}_n$. \square

Основным следствием предложения 7.5.12 является

Предложение 7.5.13. *Пусть S — бесконечное подмножество ω и $K_S \leftarrow \{\Omega_n^\pi \mid n \in S\}$. Тогда теория $\text{Th}(K_S)$ класса K_S является наследственно неразрешимой.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.5.6. \square

§ 7.6. Машины Тьюринга

Перейдем к описанию класса алгоритмов, который был введен А. М. Тьюрингом и Э. Постом в 1936 г.

Пусть заданы два конечных множества A и Q , не содержащих букв L и R . Множество четверок $P = \{\langle x_i, y_i, u_i, v_i \rangle \mid i \leq m\}$ называется *программой* с внешним алфавитом A и с внутренним алфавитом Q , если $x_i \in Q$, $y_i \in A$, $u_i \in Q$, $v_i \in A \cup \{L, R\}$ и для любого $i \leq m$. В дальнейшем элементы программы $\langle x, y, u, v \rangle$ будем называть *командами* и обозначать через $xy \rightarrow uv$.

Определение. *Машиной Тьюринга* называется шестерка $\langle A, Q, a_0, q_0, q_1, P \rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) множества A , Q конечны, не пересекаются и не содержат букв L , R ;
- 2) $a_0 \in A$; $q_0, q_1 \in Q$;

3) P — такая программа с внешним алфавитом A и внутренним алфавитом Q , что

- не существует двух различных четверок в P , у которых первые и соответственно вторые члены совпадают,
- q_0 не является первым членом ни одной четверки из P .

Машинным словом с внешним алфавитом A и внутренним алфавитом Q (или просто *машинным словом в $\langle A, Q \rangle$*) называется такое слово α в алфавите $A \cup Q$, что α является словом в алфавите $A \cup \{q\}$ для некоторого $q \in Q$ и α содержит ровно одно вхождение символа q .

Пусть α — слово в алфавите B и $a \in B$. Слово $a\alpha a$ будем обозначать через α^a . Если $\alpha = b\alpha_1 c$, где $b, c \in B$, то через α_a будем обозначать

- слово α_1 , если $b = c = a$;
- слово $\alpha_1 c$, если $b = a$ и $c \neq a$;
- слово $b\alpha_1$, если $c = a$ и $b \neq a$;
- слово α , если $b \neq a$ и $c \neq a$.

Пусть α и β — машинные слова в $\langle A, Q \rangle$ и элемент $q \in Q$ входит в α . Будем говорить, что машина Тьюринга $M = \langle A, Q, a_0, q_0, q_1, P \rangle$ переводит слово α в слово β (обозначаем $\alpha \xrightarrow{M} \beta$), если выполняются следующие три условия:

- если $\alpha^{a_0} = \alpha_1 q a_2$ и $qa \rightarrow rb \in P$, $b \in A$, то $\beta = (\alpha_1 r b \alpha_2)_{a_0}$;
- если $\alpha^{a_0} = \alpha_1 q b a_2$ и $qb \rightarrow rL \in P$, то $\beta = (\alpha_1 r a b \alpha_2)_{a_0}$;
- если $\alpha^{a_0} = \alpha_1 q a a_2$ и $qa \rightarrow rR \in P$, то $\beta = (\alpha_1 r a a \alpha_2)_{a_0}$.

Отметим, что машина M может переводить слово α только в одно слово. Это следует из условия 3, а) определения машины Тьюринга. Если машинное слово α в $\langle A, Q \rangle$ не переводится машиной Тьюринга $M = \langle A, Q, a_0, q_0, q_1, P \rangle$ ни в какое слово β , то будем говорить, что α — *тупиковое слово для M* . Заметим, что из условия 3, б) определения машины Тьюринга следует, что если машинное слово α содержит символ q_0 , то оно является тупиковым для M .

Пусть α — машинное слово в алфавите B . Слово, полученное из α заменой всех вхождений символа b на пустое слово, будем обозначать через α/b .

Определение. Пусть $M = \langle A, Q, a_0, q_0, q_1, P \rangle$ — машина Тьюринга и α, β — слова в алфавите $A \setminus \{a_0\}$. Будем говорить, что машина M преобразует слово α в слово β (обозначаем $M(\alpha) = \beta$), если существует последовательность $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ машинных слов в $\langle A, Q \rangle$, удовлетворяющих следующим условиям:

- $\gamma_0 = q_1 \alpha$;
- $\beta = (\gamma_n/q_0)/a_0$;
- $\gamma_i \xrightarrow{M} \gamma_{i+1}$, $i < n$.

Заметим, что если для последовательности $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ выполнены условия 1)–3), то слово γ_n содержит вхождение q_0 , так как β — слово в алфавите $A \setminus \{a_0\}$.

Ясно, что машина M может преобразовывать слово α только в одно слово. Если машина M не преобразовывает слово α ни в какое слово, то будем говорить, что машина M не применима к слову α или что значение $M(\alpha)$ не определено. В этом случае или существует бесконечная последовательность $\gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots$, для которой $\gamma_0 = q_1 \alpha$ и $\gamma_i \xrightarrow{M} \gamma_{i+1}$, $i \in \omega$, или существует конечная последовательность машинных слов $\gamma_0, \dots, \gamma_n$, удовлетворяющая условиям 1) и 3), а γ_n — тупиковое слово, не содержащее q_0 .

Определение. Частичная функция $f: X \rightarrow \omega$, $X \subseteq \omega^n$, называется вычислимой по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга $M = \langle A, Q, a_0, q_0, q_1, P \rangle$, для которой выполняются условия:

- $0, 1 \in A$, $a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$;
- машина M применима к записи n -ки $a \iff a \in X$;
- $M(a) = e$ для $a \in X$ и $f(a) = e$.

Такую машину M будем называть машиной Тьюринга, вычисляющей функцию f .

Очевидно, что все вычислимые по Тьюрингу частичные функции вычислимы.

Пример 7.6.1. Построим машину Тьюринга M , вычисляющую функцию $f(n) = 2n$. Пусть $M = \langle A, Q, a, q_0, q_1, P \rangle$, где $A = \{0, 1, a\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, а P состоит из следующих четверок:

$$q_1 1 \rightarrow q_3 0, \quad q_3 0 \rightarrow q_3 R, \quad q_3 1 \rightarrow q_2 0,$$

$$q_2 0 \rightarrow q_2 L, \quad q_2 a \rightarrow q_3 0, \quad q_3 a \rightarrow q_4 L,$$

$$q_4 0 \rightarrow q_4 1, \quad q_4 1 \rightarrow q_4 L, \quad q_4 a \rightarrow q_0 a.$$

Представляем читателю самому убедиться, что эта машина действительно вычисляет функцию $f(n) = 2n$. Для иллюстрации ее работы выпишем «процесс вычисления» $f(2)$:

$$\begin{aligned} q_1 1 1 1 &\xrightarrow{M} q_3 0 0 1 \xrightarrow{M} 0 q_3 1 1 \xrightarrow{M} 0 q_2 0 1 \xrightarrow{M} q_2 0 0 1 \xrightarrow{M} \\ &\xrightarrow{M} q_2 a 0 0 1 \xrightarrow{M} q_3 0 0 0 1 \xrightarrow{M} 0 q_3 0 0 1 \xrightarrow{M} 0 0 q_3 0 1 \xrightarrow{M} 0 0 0 q_3 1 \xrightarrow{M} \\ &\xrightarrow{M} 0 0 0 q_2 0 \xrightarrow{M} 0 0 q_2 0 0 \xrightarrow{M} 0 q_2 0 0 0 \xrightarrow{M} q_2 0 0 0 0 \xrightarrow{M} q_2 a 0 0 0 0 \xrightarrow{M} \\ &\xrightarrow{M} q_3 0 0 0 0 0 \xrightarrow{M} 0 q_3 0 0 0 0 \xrightarrow{M} 0 0 q_3 0 0 0 \xrightarrow{M} 0 0 0 q_3 0 0 \xrightarrow{M} \\ &\xrightarrow{M} 0 0 0 q_3 0 \xrightarrow{M} 0 0 0 0 q_3 \xrightarrow{M} 0 0 0 0 q_4 0 \xrightarrow{M} 0 0 0 0 q_4 1 \xrightarrow{M} \\ &\xrightarrow{M} 0 0 0 q_4 0 1 \xrightarrow{M} 0 0 0 q_4 1 1 \xrightarrow{M} 0 0 q_4 0 1 1 \xrightarrow{M} 0 0 q_4 1 1 1 \xrightarrow{M} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{M} 0q_40111 \xrightarrow{M} 0q_41111 \xrightarrow{M} q_401111 \xrightarrow{M} q_411111 \xrightarrow{M} q_4a11111 \xrightarrow{M} q_0a11111.$$

Имеет место следующая

Теорема 7.6.2. Класс частичных функций, вычислимых по Тьюрингу, совпадает с классом частичных Σ -функций.

Доказательство того, что вычислимые по Тьюрингу частичные функции являются частичными Σ -функциями, мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Доказательство другой части теоремы довольно громоздкое и состоит по существу из выписывания большого количества программ, поэтому мы его опускаем.

В силу теоремы 7.6.2 имеет место следующий тезис, являющийся основным принципиальным положением об «универсальности» вычислимости на машинах Тьюринга: *любая вычислимая частичная функция вычислена по Тьюрингу* (тезис Тьюринга).

§ 7.7. Рекурсивные функции

В настоящем параграфе мы приведем еще один способ уточнения понятия вычислимой функции, который можно назвать алгебраическим, так как определяемый класс функций будет порождаться из некоторых простейших функций с помощью некоторых операций.

Пусть Φ_n — семейство всех n -местных частичных функций, а $\Phi = \bigcup_{n \in \omega} \Phi_n$ — семейство всех частичных функций.

Определим на семействе Φ всех частичных функций операторы S, R, M , которые сохраняют вычислимость функций.

Пусть $n, k \in \omega$, f — $(n + 1)$ -местная частичная функция, g_0, \dots, g_n — k -местные частичные функции. Определим k -местную частичную функцию h следующим образом: $h(m_1, \dots, m_k)$ не определено, если хотя бы одна из частичных функций g_0, \dots, g_n не определена на $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$, и если все g_0, \dots, g_n определены на $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$, то $h(m_1, \dots, m_k) = f(g_0(m_1, \dots, m_k), \dots, g_n(m_1, \dots, m_k))$. Будем говорить, что h получена регулярной суперпозицией из f, g_0, \dots, g_n и обозначать это следующим образом: $h = S^{k,n}(f, g_0, \dots, g_n)$. Оператор (регулярной суперпозиции) $S^{k,n}$ является всюду определенным отображением из $\Phi_{n+1} \times \Phi_k^{n+1}$ в Φ_k и сохраняет вычислимость, т. е. если частичные функции $f \in \Phi_{n+1}$; $g_0, \dots, g_n \in \Phi_k$ вычислимы, то и частичная функция $S^{k,n}(f, g_0, \dots, g_n)$ вычислена. Верхние индексы у оператора S будут опускаться и вместо $S(f, g_0, \dots, g_n)$ будет, как правило, использоваться более привычное, но менее точное обозначение $f(g_0, \dots, g_n)$.

Пусть $n \in \omega$, $f \in \Phi_n$, $g \in \Phi_{n+2}$. Определим по f и g $n + 1$ -местную частичную функцию h так, что для любых $m_1, \dots, m_n \in \omega$

$$h(m_1, \dots, m_n, 0) = f(m_1, \dots, m_n);$$

$h(m_1, \dots, m_n, k+1)$ не определено, если $h(m_1, \dots, m_n, k)$ не определено и $h(m_1, \dots, m_n, k+1) = g(m_1, \dots, m_n, k, h(m_1, \dots, m_n, k))$, если $h(m_1, \dots, m_n, k)$ определено. Очевидно, что h однозначно определена по f и g и вычислима, если вычислимы f и g . Указанное определение h по f и g задает оператор $R^{n+1} : \Phi_n \times \Phi_{n+2} \rightarrow \Phi_{n+1}$, который назовем *оператором примитивной рекурсии*. Про функцию $h = R^{n+1}(f, g)$ будем говорить, что она получена *примитивной рекурсией из функций f и g* . Верхний индекс у оператора R^{n+1} будем опускать.

Пусть $n \in \omega$, $f \in \Phi_{n+1}$. Определим по f такую n -местную частичную функцию g , что для любых $k, m_1, \dots, m_n \in \omega$, $g(m_1, \dots, m_n) = k$ тогда и только тогда, когда $f(m_1, \dots, m_n, 0) = 0$ и $k = 0$ или $k > 0$ и $f(m_1, \dots, m_n, 0), \dots, f(m_1, \dots, m_n, k-1)$ определены и не равны нулю, а $f(m_1, \dots, m_n, k) = 0$. Ясно, что такая функция g существует и однозначно определена по f ; кроме того, если f — вычислимая функция, то из определения g видно, как вычислять g . Таким образом, задан оператор M^n — *оператор минимизации* — из Φ_{n+1} в Φ_n ; если $g = M^n(f)$, то будем говорить, что g получена *минимизацией из f* .

Базисными функциями называются функции o, s, I_m^n ($1 \leq m \leq n$), где o — одноместная функция, которая на любом n принимает значение 0, s — одноместная функция, принимающая на числе n значение $n+1$, а I_m^n — n -местная функция, принимающая на наборе $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ значение k_m . Очевидно, что базисные функции вычислимы.

Определение. Частичная функция f называется *частично рекурсивной*, если существует такая конечная последовательность частичных функций g_0, \dots, g_k , что $g_k = f$ и каждая g_i , $i \leq k$, либо базисная, либо получается из некоторых предыдущих регулярной суперпозицией, примитивной рекурсией или минимизацией. Эта последовательность g_0, \dots, g_k называется *определяющей последовательностью для f* . Всюду определенная частично рекурсивная функция называется *рекурсивной*.

Можно доказать, что для любой рекурсивной функции существует определяющая последовательность, состоящая только из всюду определенных функций.

Из данного определения и приведенных выше замечаний о сохранении вычислимости операторами S, R, M легко следует, что всякая частично рекурсивная функция является вычислимой.

Обратное утверждение носит название *тезиса Чёрча*: *Любая вычислимая частичная функция частично рекурсивна*.

Исторически именно это утверждение было первым точным математическим определением понятия алгоритмически вычислимой функции.

Из пунктов $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 9 \rangle$, $\langle 10 \rangle$, установленных в § 7.2, очевидно, что любая частично рекурсивная функция является частичной

Σ -функцией. Справедливо также обратное утверждение, доказательство которого мы опустим из-за его громоздкости: любая частичная Σ -функция является частично рекурсивной.

Тем самым, имеет место следующая теорема.

Теорема 7.7.1. *Класс частично рекурсивных функций совпадает с классом частичных Σ -функций.*

Таким образом, тезис Тьюринга эквивалентен тезису Чёрча.

Г л а в а 8

РАЗРЕШИМЫЕ И НЕРАЗРЕШИМЫЕ ТЕОРИИ

Теорема о неразрешимости элементарной арифметики (теорема 7.5.1) положила конец попыткам построить универсальный алгоритм решения всех математических задач. Однако нахождение алгоритмов для решения различных классов математических задач было и остается одной из важнейших целей математики. Построенные в математической логике формальные языки значительно расширили возможности нахождения классов задач с разрешающим алгоритмом. В частности, про любую элементарную теорию T мы можем спросить, разрешима ли она, т. е. существует ли алгоритм, устанавливающий по любому предложению φ , принадлежит ли φ данной теории T . К сожалению, многие важные для математики теории оказались неразрешимыми. В § 8.6 будет продолжен список неразрешимых теорий, начатый в § 7.5, и будут приведены плодотворные методы доказательства неразрешимости элементарных теорий. Вместе с тем, в § 8.1–8.5 на нескольких важных примерах будут продемонстрированы некоторые методы доказательства разрешимости элементарных теорий.

§ 8.1. Разрешимость теории одноместных предикатов

В этом параграфе мы докажем разрешимость теории класса всех моделей сигнатуры $\Sigma^1 = \langle P_0, P_1, \dots \rangle$, состоящей из счетного числа одноместных предикатов, и опишем все полные теории этой сигнатуры. Вначале докажем один факт более общего характера, который будет использоваться также в других параграфах.

Предложение 8.1.1. *Пусть Γ_0 — множество предложений некоторой сигнатуры Σ , замкнутое относительно конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Пусть T_0 — некоторая теория сигнатуры Σ и для любой полной теории T сигнатуры Σ , являющейся расширением теории T_0 , и любого $\Psi \in T$ выполнено условие $(T_0 \cup (\Gamma_0 \cap T)) \triangleright \Psi$. Тогда для любого предложения Φ сигнатуры Σ существует предложение $\Phi^* \in \Gamma_0$, для которого выполнено $T_0 \triangleright (\Phi \leftrightarrow \Phi^*)$ (через $(\Phi \leftrightarrow \Phi^*)$ обозначается формула $(\Phi \rightarrow \Phi^*) \wedge (\Phi^* \rightarrow \Phi)$). При этом*

если существует алгоритм перечисления предложений теории T_0 , то существует алгоритм получения предложений Φ^* по предложениям Φ .

Доказательство. Рассмотрим множество предложений

$$Y = \{\neg\Psi \mid \Psi \in \Gamma_0, (T_0 \cup \{\Psi\}) \triangleright \Phi\}.$$

Покажем, что множество $Z = T_0 \cup Y \cup \{\Phi\}$ несовместно. Предположим, что множество Z совместно. По предложению 4.4.4 существует полная теория T , содержащая множество предложений Z . Так как $\Phi \in T$, то по условию мы имеем $(T_0 \cup (\Gamma_0 \cap T)) \triangleright \Phi$. По определению отношения \triangleright и замкнутости множества Γ_0 относительно конъюнкции мы получаем $(T_0 \cup \{\Psi_0\}) \triangleright \Phi$ для некоторого $\Psi_0 \in T \cap \Gamma_0$. Следовательно, $\neg\Psi_0 \in Y$. Так как $Y \subseteq T$, то $\neg\Psi_0 \in T$. Это невозможно в силу непротиворечивости T и условия $\Psi_0 \in T$.

Таким образом, мы имеем $(T_0 \cup \{\neg\Psi_1, \dots, \neg\Psi_n\}) \triangleright \neg\Phi$ для некоторых $\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \Gamma_0$ с условиями $(T_0 \cup \{\Psi_i\}) \triangleright \Phi$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Ясно, что для формулы $\Phi^* = (\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_n)$ будет выполняться свойство $T_0 \triangleright (\Phi \leftrightarrow \Phi^*)$.

Алгоритм нахождения предложения Φ^* состоит в эффективном перечислении всех предложений теории T_0 пока не появится предложение вида $(\Phi \leftrightarrow \Phi^*)$, где $\Phi^* \in \Gamma_0$. \square

Рассмотрим сигнатуру $\Sigma_n^1 \rightleftharpoons \langle P_0, \dots, P_n \rangle \subseteq \Sigma^1$. Для любого кортежа $\varepsilon = \langle \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \rangle$ длины $n + 1$, состоящего из нулей и единиц, через $P^\varepsilon(x)$ обозначим формулу

$$P_0^{\varepsilon_0}(x) \wedge P_1^{\varepsilon_1}(x) \wedge \dots \wedge P_n^{\varepsilon_n}(x),$$

где, как обычно, $P^0(x) = \neg P(x)$, $P^1(x) = P(x)$. Пусть Φ — произвольная формула, $m > 0$. Формулу

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} x_i \approx x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^m \Phi(x_i) \right) \right),$$

обозначим через $\exists_m x \Phi(x)$, где $\exists_1 x \Phi(x)$ означает $\exists x \Phi(x)$.

Определение. Будем говорить, что формула Φ_0 является *булевой комбинацией* формул из класса Γ , если она принадлежит наименьшему классу формул, содержащему Γ и замкнутому относительно взятия конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний.

Пусть Γ_0 — множество всех предложений, являющихся булевыми комбинациями предложений вида $\exists_m x P^\varepsilon(x)$, где $m \in \omega$, $\varepsilon \in \{0, 1\}^{(n+1)}$.

Предложение 8.1.2. Пусть T — полная теория сигнатуры Σ_n^1 и $X = T \cap \Gamma_0$. Тогда для любого предложения $\Phi \in T$ выполнено $X \triangleright \Phi$.

Доказательство. Пусть теория T_1 является замыканием множества X относительно выводимости. Нужно показать, что $T \subseteq T_1$. Так как $T_1 \subseteq T$, то достаточно показать, что теория T_1 полна.

Так как T — полная теория, то для любого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{(n+1)}$ и любых T -моделей \mathfrak{A} и \mathfrak{B} не более чем счетной мощности множества $P^\varepsilon(\mathfrak{A})$ и $P^\varepsilon(\mathfrak{B})$ имеют одинаковую мощность. Так как эти множества не пересекаются и покрывают носители этих моделей, то любое биективное отображение $f : A \rightarrow B$, переводящее для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{(n+1)}$ множество $P^\varepsilon(\mathfrak{A})$ в множество $P^\varepsilon(\mathfrak{B})$ будет изоморфизмом систем \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . Заметим, что условие $|P^\varepsilon(\mathfrak{A})| = k \in \omega$ записывается предложением $(\exists_k x P^\varepsilon(x) \wedge \neg \exists_{(k+1)} x P^\varepsilon(x))$, а условие $|P^\varepsilon(\mathfrak{A})| \geq \omega$ — бесконечным множеством предложений $\{\exists_k x P^\varepsilon(x) \mid k \in \omega\}$. Таким образом, либо все T_1 -модели конечны и изоморфны, либо теория T_1 счетно категорична. По предложениям 3.2.7 и 5.6.1 теория T_1 полна. \square

Предложение 8.1.3. Для любого предложения Φ сигнатуры Σ_n^1 существует предложение $\Psi \in \Gamma_0$, которое эквивалентно Φ .

Доказательство. Предложение вытекает из предложений 8.1.1 и 8.1.2, где в качестве T_0 берется множество предложений сигнатуры Σ_n^1 , являющихся теоремами исчисления ИП $^{\Sigma_n^1}$. \square

Для предложения $\Psi \in \Gamma_0$ пусть $\tau(\Psi)$ обозначает такое наибольшее натуральное число m , что предложение $\exists_m x P^\varepsilon(x)$ является подформулой предложения Ψ .

Лемма 8.1.4 Для любой системы \mathfrak{A} сигнатуры Σ_n^1 и любого $m \in \omega$ существует система $\mathfrak{A}[m]$ мощности $\leq m \cdot 2^n$ такая, что

$$\mathfrak{A} \models \Psi \Leftrightarrow \mathfrak{A}[m] \models \Psi$$

для любого предложения $\Psi \in \Gamma_0$ с условием $\tau(\Psi) \leq m$.

Доказательство. Ясно, что в качестве $\mathfrak{A}[m]$ можно взять подсистему системы \mathfrak{A} , полученную уменьшением множеств $P^\varepsilon(\mathfrak{A})$, для которых выполнено $|P^\varepsilon(\mathfrak{A})| > m$, до множеств мощности m с сохранением множеств $P^\varepsilon(\mathfrak{A})$, для которых выполнено $|P^\varepsilon(\mathfrak{A})| \leq m$. \square

Предложение 8.1.5. По любому предложению сигнатуры Σ^1 можно эффективно узнать, является ли оно тождественно истинным.

Доказательство. Пусть Φ — предложение сигнатуры Σ^1 . Тогда Φ является предложением сигнатуры Σ_n^1 для некоторого $n \in \omega$. Так как

существует эффективная процедура выписывания доказуемых секвенций сигнатуры Σ_n^1 , то по предложению 8.1.3 мы можем эффективно найти предложение $\Psi \in \Gamma_0$, которое эквивалентно Φ . Пусть $m = \tau(\Psi)$. Так как свойство тождественной истинности сохраняется при переходе к эквивалентным формулам, то в силу леммы 8.1.4 тождественная истинность предложения Φ равносильна его $(m \cdot 2^n)$ -общезначимости. Проверка этого свойства осуществляется за конечное число шагов (предложение 3.2.8). \square

Из предыдущего предложения и теоремы о полноте исчисления ИП $^{\Sigma^1}$ вытекает

Теорема 8.1.6. *Исчисление предикатов сигнатуры Σ^1 разрешимо.*

Упражнения

1. Пусть Γ_1 — булева комбинация формул из Γ_0 и атомарных формул. Доказать, что если $\Phi(x_0, \dots, x_n) \in \Gamma_1$, то по формуле $\exists x_0 \Phi(x_0, \dots, x_n)$ можно эффективно построить эквивалентную ей формулу из Γ_1 . (Указание. Использовать индукцию по длине формулы.)
2. Используя упражнение 1, доказать предложение 8.1.3, не используя предложения 8.1.1 и 8.1.2, причем указанное предложение Ψ находится эффективно.

§ 8.2. Элиминация кванторов и разрешимость теории алгебраически замкнутых полей

Рассмотрим теорию АЗП сигнатуры $\sigma_f = \langle 0, -1, +, \cdot \rangle$, аксиомами которой будут аксиомы теории полей вместе со всеми предложениями вида

$$\forall x_0 \dots \forall x_{n-1} \exists y (y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1y + x_0 \approx 0), \quad n \in \omega \setminus \{0\}.$$

Модели теории АЗП в алгебре называются *алгебраически замкнутыми полями*.

В данном параграфе будет доказана следующая

Теорема 8.2.1. *Теория АЗП допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Для элиминации кванторов достаточно показать, что бескванторной формуле эквивалентна относительно АЗП всякая формула Φ вида

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^k (f_i \approx f'_i)^{\delta_i} \right),$$

где f_i, f'_i — термы сигнатуры σ_f , $\delta_i \in \{0, 1\}$.

Поскольку в теории АЗП имеет место $(t \approx t') \equiv (t - t' \approx 0)$, а $\neg t \approx 0 \wedge \neg t' \approx 0 \equiv \neg t \cdot t' \approx 0$, можно считать, что формула Φ имеет вид

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^k f_i \approx 0 \wedge g \approx 0 \right)$$

для некоторых термов f_1, \dots, f_k, g .

Заметим, что любой терм $t(\bar{u})$ сигнатуры σ_f «эквивалентен» некоторому полиному с целыми коэффициентами, т. е. из теории АЗП выводится формула $t(\bar{u}) \approx t'(\bar{u})$ для некоторого $t'(\bar{u}) \in Z[\bar{u}]$. Таким образом, для доказательства элиминации кванторов в АЗП можно рассматривать лишь формулы с термами из $Z[\bar{u}]$.

Пусть $t(x, \bar{y})$ — ненулевой терм из $Z[x, \bar{y}]$. Тогда $t(x, \bar{y})$ записывается в виде

$$t_n(\bar{y})x^n + t_{n-1}(\bar{y})x^{n-1} + \dots + t_0(\bar{y}),$$

где $t_n(\bar{y}) \in Z[\bar{y}] \setminus \{0\}$. Число n называется *степенью* полинома t и обозначается через $\partial_x t$ или просто ∂t .

Для полинома $t(x, \bar{y})$ степени n и числа m , где $0 \leq m \leq n$, положим

$$\text{Deg}_x t = m \Leftrightarrow \left(\bigwedge_{m < i \leq n} t_i(\bar{y}) \approx 0 \wedge \neg t_m(\bar{y}) \approx 0 \right);$$

$$t \equiv 0 \Leftrightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^n t_i(\bar{y}) \approx 0 \right);$$

$$\tau_m t \Leftrightarrow t_m(\bar{y})x^m + \dots + t_0(\bar{y}).$$

Заметим, что $\text{Deg}_x t = m$ и $t \equiv 0$ — формулы со свободными переменными из \bar{y} и не содержат переменную x .

Ниже вместо записи $\text{Deg}_x t = m$ будем писать $\text{Deg } t = m$.

Следующие замечания справедливы для любого полинома t .

1. Формула $\left(\bigvee_{i=0}^{\partial t} \text{Deg } t = i \right) \vee t \equiv 0$ тождественно истинна (поскольку каждый полином t тождественно равен нулю или равны нулю его коэффициенты $t_i(\bar{y})$, начиная с некоторого i).

2. Формула $t \approx 0$ эквивалентна формуле

$$t \approx 0 \wedge \left(\left(\bigvee_{i=0}^{\partial t} \text{Deg } t = i \right) \vee t \equiv 0 \right)$$

(так как вторая формула получается из первой конъюнктивным добавлением тождественно истинной формулы).

3. Формула $t \approx 0 \wedge \text{Deg } t = 0$ тождественно ложна (поскольку не может равняться нулю полином нулевой степени с ненулевым коэффициентом $t_0(\bar{y})$).

4. Формула $t \approx 0 \wedge t \equiv 0$ эквивалентна формуле $t \equiv 0$ (так как из $t \equiv 0$ следует $t \approx 0$).

5. Формула $t \approx 0 \wedge \text{Deg } t = m$ эквивалентна формуле $\text{Deg } t = m \wedge \tau_m t \approx 0$ (поскольку для полинома t с условием $\text{Deg } t = m$ запись $t \approx 0$ означает, что $\tau_m t \approx 0$).

Будем говорить, что формула Φ находится в *нормальной форме*, если Φ имеет вид

$$\exists x \left(\bigwedge_{i=1}^k f_i \approx 0 \wedge \text{Deg } f_i = \partial f_i \wedge \neg g \approx 0 \right).$$

В силу приведенных выше замечаний достаточно показать, что бескванторной формуле эквивалентна всякая формула Φ , находящаяся в нормальной форме. *Мерой сложности* такой формулы Φ будем называть пару $\langle k, \sum_{i=1}^k \partial f_i \rangle$.

Для сведения меры сложности к минимальному значению $k = 1$ будем использовать деление с остатком в $Z[x, \bar{y}]$.

Для многочленов $s, t \in Z[x, \bar{y}]$ остаток от деления s на t , $\text{Res}(s, t) \in Z[x, \bar{y}]$ определяется следующим образом. Пусть $\partial s = n$, $\partial t = m$ $s = s_n(\bar{y})x^n + \dots + s_0(\bar{y})$ и $t = t_m(\bar{y})x^m + \dots + t_0(\bar{y})$. Если $n \geq m$, то полагаем $D(s, t) \rightleftharpoons t_m(\bar{y}) \cdot s - s_n(\bar{y}) \cdot x^{n-m} \cdot t$; заметим, что $\partial D(s, t) < n$. Если $n < m$, то $\text{Res}(s, t) \rightleftharpoons s$; если $n \geq m$, то $\text{Res}(s, t) \rightleftharpoons \text{Res}(D(s, t), t)$. Заметим, что $\partial \text{Res}(s, t) < m$ и существуют $l \leq n - m$, $h \in Z[x, \bar{y}]$ такие, что $t_m(\bar{y})^l \cdot s = h \cdot t + \text{Res}(s, t)$.

Лемма 8.2.2. *Если $\partial t \leq \partial s$, то формула $t \approx 0 \wedge \text{Deg } t = \partial t \wedge s \approx 0$ эквивалентна формуле $t \approx 0 \wedge \text{Deg } t = \partial t \wedge \text{Res}(s, t) \approx 0$.*

Доказательство очевидно, поскольку при равном нулю делильце равенство нулю делимого равносильно равенству нулю остатка. \square

В силу леммы 8.2.2 общий случай с формулой Φ , находящейся в нормальной форме, сводится к формуле со значением $k = 1$, и тем самым остается рассмотреть следующие три вида формул:

1) $\exists x f \approx 0$;

2) $\exists x \neg g \approx 0$;

3) $\exists x (f \approx 0 \wedge \text{Deg } f = \partial f \wedge \neg g \approx 0)$, где $\partial f > 0$ и $\partial g > 0$.

Формула $\exists x f \approx 0$ эквивалентна бескванторной формуле $f \equiv 0 \vee \bigvee_{i=1}^{\partial f} \text{Deg } f = i$, поскольку в алгебраически замкнутом поле

каждый многочлен положительной степени имеет корень, а для нулевой степени имеются корни лишь у нулевого многочлена.

Формула $\exists x \neg g \approx 0$ эквивалентна формуле $\neg g \equiv 0$, так как наличие ненулевого значения g для некоторого аргумента x равносильно тому, что полином g не является нулевым.

Наконец, формула $\Phi \Leftrightarrow \exists x (f \approx 0 \wedge \text{Deg } f = \partial f \wedge \neg g \approx 0)$ при $\partial f > 0$ и $\partial g > 0$ эквивалентна формуле $\exists x \text{Res}(g^{\partial f}, f) \approx 0$, которая в свою очередь эквивалентна бесквантторной формуле $\neg(\text{Res}(g^{\partial f}, f) \equiv 0)$. Действительно, если рассматриваемая формула Φ неверна, то любой корень многочлена f является корнем многочлена g и с учетом возможной кратности корней многочлен $g^{\partial f}$ без остатка делится на f , т. е. $\text{Res}(g^{\partial f}, f) \equiv 0$. Обратно, если $g^{\partial f}$ без остатка делится на f , то любой корень для f является корнем для g и ни для какого x одновременно не выполняется условия $f = 0$ и $g \neq 0$. \square

Обратимся к вопросу об истинности бесквантторных предложений сигнатуры σ_f в алгебраически замкнутых полях.

Пусть \mathcal{P} — множество всех простых чисел, $\mathcal{P}_* \Leftrightarrow \{0\} \cup \mathcal{P}$ — множество всех возможных характеристик полей.

Для любой характеристики $\chi \in \mathcal{P}_*$ пусть F_χ — простое (минимальное) поле характеристики χ ($F_0 \Leftrightarrow Q$ — поле рациональных чисел, $F_p = Z/pZ$ — поле из p элементов для $p \in \mathcal{P}$).

Пусть T_0 — множество всех термов сигнатуры σ_f , не имеющих вхождений переменных.

Определим индукцией отображение $\alpha_\chi : T_0 \rightarrow F_\chi$ ($= \langle F_\chi, 0_\chi, 1_\chi, +_\chi, -_\chi, \cdot_\chi \rangle$) для всех $\chi \in \mathcal{P}_*$. Полагаем

$$\alpha_\chi(0) = 0_\chi, \quad \alpha_\chi(1) = 1_\chi,$$

$$\alpha_\chi(t_0 + t_1) \Leftrightarrow \alpha_\chi(t_0) +_\chi \alpha_\chi(t_1),$$

$$\alpha_\chi(t_0 - t_1) \Leftrightarrow \alpha_\chi(t_0) -_\chi \alpha_\chi(t_1),$$

$$\alpha_\chi(t_0 \cdot t_1) \Leftrightarrow \alpha_\chi(t_0) \cdot_\chi \alpha_\chi(t_1).$$

Заметим, что если $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon_p : Z \rightarrow F_p$ — естественный эпиморфизм колец, то $\alpha_p = \varepsilon_p \alpha_0$.

Из определения следует, что $\alpha_\chi(t) = t^{F_\chi}$ — значение терма t в поле F_χ .

Замечание 8.2.3. Для любых терма $t \in T_0$ и поля F характеристики $\chi \in \mathcal{P}_*$ поле F содержит подполе, изоморфное F_χ , и $t^F = t^{F_\chi} = \alpha_\chi(t)$.

Пусть Φ — атомарное предложение сигнатуры σ_f . Не уменьшая общности, можно считать, что Φ имеет вид $t \approx 0$ для подходящего $t \in T_0$.

Полагаем $\theta(\Phi)(= \theta(t \approx 0)) \rightleftharpoons \{\chi \mid \chi \in \mathcal{P}_*, \alpha_\chi(t) = 0\}$. Имеет место равенство $\theta(\Phi) = \{\chi \mid \chi \in \mathcal{P}_*, \alpha_0(t) \in \chi \cdot Z\}$. Заметим, что последнее множество совпадает с множеством всех простых делителей числа $\alpha_0(t)$, если $\alpha_0(t) \neq 0$, и с множеством \mathcal{P}_* , если $\alpha_0(t) = 0$.

Из определения множества $\theta(\Phi)$ видно, что для любого поля F характеристики χ справедливы эквивалентности

$$F \models \Phi \iff t^F = 0 \iff \chi \in \theta(\Phi).$$

Для любого бескванторного предложения Φ сигнатуры σ_f , не содержащего знака \rightarrow импликации, определим по индукции множество $\theta(\Phi) \subseteq \mathcal{P}_*$ так:

- i) если Φ — атомарное предложение, то $\theta(\Phi)$ уже определено выше;
- ii) если $\Phi = \Phi_0 \wedge \Phi_1$, то $\theta(\Phi) = \theta(\Phi_0) \cap \theta(\Phi_1)$;
- iii) если $\Phi = \Phi_0 \vee \Phi_1$, то $\theta(\Phi) = \theta(\Phi_0) \cup \theta(\Phi_1)$;
- iv) если $\Phi = \neg \Phi_0$, то $\theta(\Phi) = \mathcal{P}_* \setminus \theta(\Phi_0)$.

Из определения видно, что по предложению Φ и характеристике $\chi \in \mathcal{P}_*$ можно эффективно узнать, будет ли χ принадлежать множеству $\theta(\Phi)$ и будет ли справедливо равенство $\theta(\Phi) = \mathcal{P}_*$.

Замечание 8.2.4. Нетрудно проверить, что для любого бескванторного предложения Φ сигнатуры σ_f одно из множеств $\theta(\Phi)$ и $\theta(\neg \Phi)$ является конечным, $\theta(\Phi) \cap \theta(\neg \Phi) = \emptyset$, $\theta(\Phi) \cup \theta(\neg \Phi) = \mathcal{P}_*$, и если $\theta(\Phi)$ бесконечно, то $0 \in \theta(\Phi)$.

Используя определение множества $\theta(\Phi)$, индукцией по длине предложения Φ без труда устанавливается справедливость следующего предложения.

Предложение 8.2.5. Пусть Φ — бескванторное предложение сигнатуры σ_f , F — поле характеристики $\chi \in \mathcal{P}_*$. Тогда имеет место эквивалентность

$$F \models \Phi \iff \chi \in \theta(\Phi).$$

Важнейшим следствием этого предложения и свойства элиминации кванторов для теории алгебраически замкнутых полей является

Теорема 8.2.6. 1). Теория АЗП всех алгебраически замкнутых полей разрешима.

2). Для любой характеристики $\chi \in \mathcal{P}_*$ теория АЗП $_{\chi}$ алгебраически замкнутых полей характеристики χ полна и разрешима.

Доказательство. 1). Пусть Φ — предложение сигнатуры σ_f . Эффективно находим бескванторное предложение Φ_0 сигнатуры σ_f такое, что $\Phi \equiv_{АЗП} \Phi_0$. Далее, эффективно проверяем, справедливо ли

равенство $\theta(\Phi_0) = \mathcal{P}_*$. Если $\theta(\Phi_0) = \mathcal{P}_*$, то Φ_0 (и Φ) принадлежит АЗП, а если $\theta(\Phi_0) \neq \mathcal{P}_*$, то $\Phi_0, \Phi \notin$ АЗП.

2). Пусть Φ_0 — эффективно найденное бескванторное предложение сигнатуры σ_f , соответствующее предложению Φ как выше. Тогда имеет место $\Phi \in \text{АЗП}_\chi \iff \chi \in \theta(\Phi_0)$. Так как $\theta(\Phi_0) \cup \theta(\neg\Phi_0) = \mathcal{P}_*$, то $\Phi \in \text{АЗП}_\chi$ или $\neg\Phi \in \text{АЗП}_\chi$. Отсюда и следует заключение 2). \square

В силу теоремы 8.2.6, в частности, элементарная теория АЗП₀ поля $\langle C, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ комплексных чисел разрешима.

Упражнение

- Для каждой характеристики χ доказать разрешимость теории алгебраически замкнутых полей характеристики χ без использования элиминации кванторов. (Указание. Воспользоваться категоричностью данных теорий в несчетных мощностях.)

§ 8.3. Элиминация кванторов и разрешимость теории вещественно замкнутых полей

Установим сначала следующее утверждение.

Предложение 8.3.1. Элементарная теория ПЛП плотных линейных порядков без наименьшего и наибольшего элемента (см. пример 3.1.6) разрешима.

Доказательство. По предложению 3.1.7 теория ПЛП ω -категорична, следовательно, по предложению 5.6.1 она полна. Так как ПЛП имеет конечное множество аксиом, то по предложению 7.5.9 она перечислима. Предложение 7.5.8 дает разрешимость ПЛП. \square

Теория ПЛП, разрешимость которой установлена в предложении 8.3.1, совпадает с $\text{Th}(\langle R, \leq \rangle)$, где R — множество действительных чисел. Имеется, однако, значительно более сильный результат: теория $\text{Th}(\langle R, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle)$ разрешима. Для доказательства этой теоремы нам будут нужны некоторые общие факты.

Предложение 8.3.2. Пусть элементарная теория T имеет по крайней мере одну константу в сигнатуре. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) в T имеется элиминация кванторов;
- 2) для любой модели \mathfrak{A} теории T , любой ω -насыщенной (см. § 5.5) модели \mathfrak{B} теории T , любых $a_1, \dots, a_n, b \in A$ и любого изоморфного вложения φ подсистемы $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ (см. § 3.1) в \mathfrak{B} найдется продолжение φ до изоморфного вложения φ' подсистемы $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n, b)$ в \mathfrak{B} .

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть выполнено 1) и выбраны $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, a_1, \dots, a_n, b$ и φ , как в 2). Рассмотрим множество

$$V = \{\Phi(x, \varphi a_1, \dots, \varphi a_n) \mid \mathfrak{A} \models \Phi(b, a_1, \dots, a_n), \Phi \text{ бескванторная}\}.$$

Для доказательства 2) достаточно показать, что V реализуется в \mathfrak{B} . В силу ω -насыщенности \mathfrak{B} и замкнутости V относительно конъюнкции достаточно показать, что

$$\mathfrak{B} \models \exists x \Phi(x, \varphi a_1, \dots, \varphi a_n) \quad (8.1)$$

для любой $\Phi(x, \varphi a_1, \dots, \varphi a_n) \in V$. Пусть $\Phi^*(x_1, \dots, x_n)$ — бескванторная формула, эквивалентная в T формуле $\exists x \Phi(x, x_1, \dots, x_n)$. Так как $\mathfrak{A} \models \exists x \Phi(x, a_1, \dots, a_n)$, то $\mathfrak{A} \models \Phi^*(a_1, \dots, a_n)$. Из того, что φ — изоморфное вложение и Φ^* бескванторная, вытекает $\mathfrak{B} \models \Phi^*(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n)$. Из эквивалентности в T формул Φ^* и $\exists x \Phi$ получаем (8.1).

2) \Rightarrow 1). Пусть выполнено 2). Индукцией по числу кванторов в Φ будем находить бескванторную формулу Φ^* , эквивалентную в T формуле Φ . В силу эквивалентности $\forall x \Psi \equiv \neg \exists x \neg \Psi$ для любой формулы Ψ , достаточно рассмотреть случай, когда

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \exists x \Psi(x, x_1, \dots, x_n),$$

где Ψ — бескванторная формула. Если $T \cup \{\Phi\}$ несовместно, то в качестве Φ^* можно взять $\neg c \approx c$, где c — некоторая константа. Пусть теперь $T \cup \{\Phi\}$ совместно. Рассмотрим множество

$$U = \{\Theta(x_1, \dots, x_n) \mid T \triangleright \Phi \rightarrow \Theta, \Theta \text{ бескванторная}\}.$$

Покажем, что $T \cup U \triangleright \Phi$. Предположим, что это не так, т. е. существуют модель \mathfrak{B} теории T и элементы $b_1, \dots, b_n \in B$ такие, что $\mathfrak{B} \models \Theta(b_1, \dots, b_n)$ для всех $\Theta(x_1, \dots, x_n) \in U$ и $\mathfrak{B} \models \neg \Phi(b_1, \dots, b_n)$. Пусть

$$Y = \{X(x_1, \dots, x_n) \mid \mathfrak{B} \models X(b_1, \dots, b_n), X \text{ бескванторная}\}.$$

Если бы множество $T \cup Y \cup \{\Phi\}$ было несовместным, то в силу замкнутости Y относительно конъюнкции выполнялось бы $T \triangleright \Phi \rightarrow \neg X_0$ для некоторого $X_0 \in Y$. Тогда $\neg X_0 \in U$ и в силу $U \subseteq Y$ это противоречило бы выполнимости Y . Итак, $T \cup Y \cup \{\Phi\}$ совместно, и пусть \mathfrak{A} — модель теории T , $a_1, \dots, a_n, b \in A$,

$$\mathfrak{A} \models X(a_1, \dots, a_n), X(x_1, \dots, x_n) \in Y, \quad (8.2)$$

и $\mathfrak{A} \models \Psi(b, a_1, \dots, a_n)$. Взяв, если нужно, ультрастепень \mathfrak{B} по неглавному ультрафильтру на ω , можно считать, что \mathfrak{B} ω -насыщена (тео-

рема 5.5.6). Из (8.2) вытекает, что отображение $\varphi_0: \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow B$, для которого $\varphi_0 a_i = b_i$, продолжается до изоморфного вложения φ подсистемы $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ в \mathfrak{B} . (Если $n = 0$, то в качестве φ берем изоморфизм подсистем значений термов без переменных.) По 2) φ продолжается до изоморфного вложения φ' подсистемы $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n, b)$ в \mathfrak{B} . Так как Ψ бесквантторная, то $\mathfrak{B} \models \Psi(\varphi' b, b_1, \dots, b_n)$, следовательно, $\mathfrak{B} \models \exists x \Psi(x, b_1, \dots, b_n)$. Это противоречит условию $\mathfrak{B} \models \neg \Phi(b_1, \dots, b_n)$.

Так как множество U замкнуто относительно конъюнкции, то из $T \cup U \triangleright \Phi$ следует $T \cup \{\Phi^*\} \triangleright \Phi$ для некоторой $\Phi^* \in U$. Ясно, что Φ^* эквивалентна в T формуле Φ . \square

Следующая система аксиом определяет теорию ВЗП (*вещественно замкнутых полей*):

- 1) аксиомы полей,
- 2) $\neg x < x$,
- 3) $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$,
- 4) $x < y \vee x \approx y \vee y < x$,
- 5) $(0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow 0 < x \cdot y$,
- 6) $x < y \rightarrow x + z < y + z$,
- 7) $0 < x \rightarrow \exists y x \approx y^2$,
- 8) $\exists y (y^{2n+1} + \sum_{i \leq 2n} x_i y^i) \approx 0$, $n \in \omega$.

Заметим, что если $\langle F, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ — вещественно замкнутое поле, то поле $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ имеет нулевую характеристику, а $\langle F, < \rangle$ — плотный строгий порядок (т. е. $\langle F, < \rangle \models \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$). В самом деле, из аксиом 6) и 3) мы получаем $x < 0 \rightarrow nx < 0$ и $0 < x \rightarrow 0 < nx$, $n \in \omega \setminus \{0\}$, что вместе с 2) и 4) дает $\neg x \approx 0 \rightarrow \neg nx \approx 0$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Из аксиом 1)–6) легко выводится также $x < y \rightarrow \left(x < \frac{x+y}{2} < y \right)$, что доказывает плотность $\langle F, < \rangle$.

Предложение 8.3.3. В теории ВЗП имеется элиминация кванторов.

Доказательство. Применим критерий предложения 8.3.2. Пусть \mathfrak{A} , \mathfrak{B} — вещественно замкнутые поля, \mathfrak{B} ω -насыщено, $a_1, \dots, a_n, b \in A$ и φ_0 — изоморфное вложение $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ в \mathfrak{B} . Система $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ не является полем, однако аксиомы 1)–6) позволяют единственным образом продолжить φ_0 до изоморфного вложения φ минимального подполя $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$, содержащего $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$, в \mathfrak{B} .

Случай 1: b алгебраичен над \mathfrak{A}_0 в \mathfrak{A} , т. е. $\mathfrak{A} \models f(b) \approx 0$, где $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из \mathfrak{A}_0 . Существование требуемого в 2) предложения 8.3.2 вложения φ' вытекает из следующей леммы курса

алгебры: если K — упорядоченное поле и K_1, K_2 — его вещественные замыкания, индуцирующие заданное упорядочение на K , то существует изоморфизм K_1 на K_2 , тождественный на K .

Случай 2: b не алгебраичен над \mathfrak{A}_0 в \mathfrak{A} . Пусть

$$A_1 = \{a \in A_0 \mid \mathfrak{A}_0 \models a < b\}, \quad A_2 = \{a \in A_0 \mid \mathfrak{A}_0 \models b < a\}.$$

Обозначим через $p(x)$ множество всех формул вида $\varphi a < x$, $a \in A_1$, $x < \varphi a$, $a \in A_2$ и $\sum_{i < n} \varphi(c_i)x^i \approx 0$ для всех многочленов $\sum_{i < n} c_i x^i$, $c_i \in A_0$, не равных тождественно нулю в \mathfrak{A}_0 . Из плотности порядка в \mathfrak{A}_0 вытекает, что для любых $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$ множество $\{a \mid \mathfrak{A}_0 \models a_1 < a \wedge a < a_2\}$ бесконечно. Так как корней любого многочлена в любом поле конечное число, то $p(x)$ локально выполнимо в \mathfrak{B} . Ввиду ω -насыщенности \mathfrak{B} тип $p(x)$ реализуется в \mathfrak{B} некоторым элементом b' . Так как b не алгебраичен над \mathfrak{A}_0 , то отображение $\varphi \cup \{\langle b, b' \rangle\}$ однозначно продолжается до изоморфного вложения $\mathfrak{A}(A_0 \cup \{b\})$ в \mathfrak{B} . \square

Следствие 8.3.4. *Теория ВЗП разрешима и совпадает с теорией $\text{Th}(\langle R, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle)$ упорядоченного поля действительных чисел.*

Доказательство. Атомарные предложения теории ВЗП эквивалентны $n \approx m$ и $n < m$, где через n мы обозначаем терм $1 + \dots + 1$, являющийся суммой n единиц, если $n \in \omega \setminus \{0\}$, и 0 совпадает с константой 0. Из аксиом ВЗП легко вытекают свойства

$$n \neq m \implies \text{ВЗП} \triangleright \neg(n \approx m),$$

$$n < m \implies \text{ВЗП} \triangleright n < m,$$

$$m \leq n \implies \text{ВЗП} \triangleright \neg(n < m).$$

Отсюда мы получаем, что для любой замкнутой бескванторной формулы Φ сигнатуры $\langle +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ мы имеем $\text{ВЗП} \triangleright \Phi$ или $\text{ВЗП} \triangleright \neg\Phi$. В силу предложения 8.3.3 теория ВЗП полна. Так как $\langle R, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ является моделью теории ВЗП, то из полноты ВЗП получаем совпадение ВЗП и $\text{Th}(\langle R, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle)$. Так как ВЗП имеет перечислимое множество аксиом, то по предложению 7.5.8, 7.5.9 теория ВЗП разрешима. \square

§ 8.4. Разрешимые теории абелевых групп

В отличие от полей действительных и комплексных чисел, теории поля рациональных чисел и кольца целых чисел являются неразрешимыми. Наша следующая цель — показать разрешимость теорий $\text{Th}(\langle Z, +, 0 \rangle)$ и $\text{Th}(\langle Q, +, 0 \rangle)$ сложения целых и рациональных чисел.

Для этого сначала докажем некоторые утверждения, касающиеся произвольных абелевых групп.

Пусть H — абелева группа, H_1 — подгруппа H . Множество вида $H_1 + a = \{h + a \mid h \in H_1\}$, где $a \in H$, называется, как известно, *классом смежности* подгруппы H_1 в группе H . Если κ — мощность множества классов смежности H_1 в H , то мощность $\min\{\kappa, \omega\}$ называется *индексом* H_1 в H и обозначается через $[H : H_1]$. Если индекс $[H : H_1]$ бесконечен, то пишем $[H : H_1] = \infty$. Если H_2 — еще одна подгруппа в H , то индекс $H_1 \cap H_2$ в H_1 также будем называть *индексом* H_2 в H_1 и обозначать $[H_1 : H_2]$.

Лемма 8.4.1. *Пусть H — абелева группа, H_1, H_2 — подгруппы H . Тогда*

- $[(H_1 + H_2) : H_2] = [H_1 : H_2]$;
- $[H_1 : H_2] \cdot [H : H_1] \geq [H : H_2]$;
- если $a \in H$, то число классов смежности по H_2 , имеющих непустое пересечение с $H_1 + a$, равно $H_1 : H_2$.

Доказательство легко получается из определения индексов. \square

Лемма 8.4.2. *Пусть H_0, \dots, H_n — подгруппы некоторой абелевой группы A , $a_0, \dots, a_n \in A$, $H_0 + a_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} (H_i + a_i)$ и $[H_0 : H_n] > n!$. Тогда $H_0 + a_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (H_i + a_i)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если для подгрупп K_0, \dots, K_m группы A и $a_0, \dots, a_m \in A$ мы имеем $[K_0 : K_i] = \infty$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, то включение

$$K_0 + a_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq m} (K_i + a_i) \quad (8.3)$$

не выполняется. Будем доказывать этот факт индукцией по числу l различных подгрупп среди $K_0 \cap K_1, \dots, K_0 \cap K_m$. Если $K_0 \cap K_1 = \dots = K_0 \cap K_m = K^*$, то (8.3) не выполняется, так как $K_0 + a_0$ содержит бесконечное число классов смежности по K^* . Пусть $l > 1$ и $K'_i = K_i \cap K_0$.

Случай 1: $1 < [(K_0 \cap K_1) : K_{i_0}] < \infty$ для некоторого $i_0 \in \{2, \dots, m\}$. Из леммы 8.4.1, а), б) вытекает $[K_0 : (K'_1 + K'_{i_0})] = \infty$. Заменяя в последовательности K_1, \dots, K_m все подгруппы, совпадающие с K_1 или K_{i_0} , на $K'_1 + K'_{i_0}$, мы уменьшим l и воспользуемся индукционным предположением.

Случай 2: отрицание случая 1. Пусть

$$s = \{i \mid i \in \{1, \dots, m\}, K_0 \cap K_i = K_0 \cap K_1\}.$$

Так как $[K_0 : K_1] = \infty$, то найдется такое $a \in K_0 + a_0$, что $K_0 \cap K_1 + a \neq K_0 \cap K_i + a_i$ для всех $i \in s$. Если выполнено (8.3), то

$$K_0 \cap K_1 + a \subseteq \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus s} (K_0 \cap K_i + a_i),$$

что противоречит индукционному предположению.

Теперь покажем, что в условиях леммы найдется $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, для которого $[H_0 : H_{i_0}] \leq n$. Предположим, что это не так. Пусть H_{i_1}, \dots, H_{i_k} — все подгруппы из последовательности H_1, \dots, H_n , имеющие конечный индекс в H_0 . Пусть $H^* = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}$. По лемме 8.4.1, б) $[H_0 : H^*] = m < \infty$. По предположению и лемме 8.4.1, в) множество $(H_0 + a_0) \cap (H_{i_s} + a_{i_s})$, где $1 \leq s \leq k$, содержит менее m/n классов смежности по подгруппе H^* . Следовательно, найдется $a \in (H_0 + a_0) \setminus \bigcup_{i \in r} (H_i + a_i)$, где $r = \{i_1, \dots, i_k\}$. Тогда

$$H_0 \cap H^* + a \subseteq \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus r} (H_i + a_i). \quad (8.4)$$

Так как $[(H_0 \cap H^*) : H_i] = \infty$ для любого $i \in \{1, \dots, n\} \setminus r$, то (8.4) противоречит факту, установленному в начале доказательства.

Докажем теперь утверждение леммы индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение тривиально, так как условие леммы не выполняется. Пусть утверждение верно для $n - 1$. Так как $[H_0 : H_n] > n!$ и $[H_0 : H_{i_0}] \leq n$, то по лемме 8.4.1, б) $[(H_0 \cap H_{i_0}) : H_n] > (n - 1)!$. По индукционному предположению для любого $a \in (H_0 + a_0) \setminus (H_{i_0} + a_{i_0})$ имеем

$$(H_0 \cap H_{i_0}) + a \subseteq \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0, n\}} (H_i + a_i),$$

откуда получаем утверждение леммы. \square

Для формулировки следующей леммы напомним, что для множества X через $|X|$ обозначается его мощность, и если $I = \emptyset$, то множество $A \cap \bigcap_{i \in I} A_i$ будем считать совпадающим с A .

Лемма 8.4.3. *Пусть A_0, \dots, A_n — конечные множества. Тогда*

$$A_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \iff \sum_{r \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|r|} \cdot \left| A_0 \cap \bigcap_{i \in r} A_i \right| = 0. \quad (8.5)$$

Доказательство. Пусть $A_0 = \{a\}$ и $r_0 = \{i \mid a \in A_i\}$. Тогда

$$\left(A_0 \cap \bigcap_{i \in r} A_i \right) \neq \emptyset \iff \left| A_0 \cap \bigcap_{i \in r} A_i \right| = 1 \iff r \subseteq r_0. \quad (8.6)$$

Правая часть (8.5) в случае одноэлементного A_0 тогда и только тогда равна нулю, когда имеется одинаковое число четных и нечетных $|r|$ с условием $(A_0 \cap \bigcap_{i \in r} A_i) \neq \emptyset$. В силу (8.6) это равносильно $r_0 \neq \emptyset$, т. е. $A_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$. Итак, (8.5) для одноэлементных A_0 доказано.

Заметим, что функция

$$F(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{r \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|r|} \cdot |X_0 \cap \bigcap_{i \in r} X_i|$$

аддитивна по X_0 , т. е. если $A_0 = A_0^1 \cup A_0^2$ и $A_0^1 \cap A_0^2 = \emptyset$, то $F(A_0, A_1, \dots, A_n) = F(A_0^1, A_1, \dots, A_n) + F(A_0^2, A_1, \dots, A_n)$. Из справедливости (8.5) для одноэлементного A_0 и аддитивности F получаем

$$F(A_0, A_1, \dots, A_n) = F\left(A_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i, A_1, \dots, A_n\right). \quad (8.7)$$

Так как $F\left(A_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i, A_1, \dots, A_n\right) = |A_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i|$, то (8.5) выполнено для любого конечного A_0 . \square

Формула вида $\exists x_1 \dots \exists x_n \Theta$, где Θ — конъюнкция атомарных формул, называется *позитивно примитивной формулой*. Сигнатура *абелевых групп* мы называем сигнатуру $\Sigma^+ = \langle +, -, 0 \rangle$, где $+$, $-$ являются двухместной и одноместной операциями, 0 — константой.

Предложение 8.4.4. Пусть $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — позитивно примитивная формула сигнатуры Σ^+ и A — абелева группа. Тогда:

- a) $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ определяет подгруппу в декартовой степени A^n группы A , т. е. множество

$$\{(a_1, \dots, a_n) \mid A \models \Phi(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n \in A\}$$

непусто и замкнуто относительно операций $+$ и $-$ в системе A^n ;

- б) для любого $l \geq 1$ и любых $a_1, \dots, a_n \in A$ формула $\Phi(x_1, \dots, x_{l-1}, a_l, \dots, a_n)$ либо не выполняется в A , либо определяет в A^{l-1} смежный класс по подгруппе, определяемой в A^{l-1} позитивно примитивной формулой $\Phi(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, \dots, 0)$.

Доказательство сразу следует из выполнимости в A свойства $t(0, \dots, 0) = 0$ и

$$t(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = t(a_1, \dots, a_n) + t(b_1, \dots, b_n)$$

для любого терма $t(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ^+ и любых $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$. \square

Если $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ — позитивно примитивные формулы сигнатуры Σ^+ , A — абелева группа, то через $[\Phi_1 : \Phi_2, A]$ будем обозначать индекс $[H_1 : H_2]$, где H_i — подгруппа $\Phi_i(A)$ определяемая в A формулой $\Phi_i(x)$.

Будем говорить, что абелева группа A имеет *разрешимую проблему элементарных индексов*, если существует алгоритм, который по любым позитивно примитивным формулам $\Phi(x), \Psi(x)$ сигнатуры Σ^+ и любому $n \in \omega$ определяет, выполняется ли условие $[\Phi : \Psi, A] \geq n$.

Будем называть формулу Φ *булевой комбинацией* формул множества X , если Φ получается из формул множества X с помощью связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ и \neg .

Лемма 8.4.5. *Пусть A — абелева группа. Любая формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ^+ эквивалентна в $\text{Th}(A)$ булевой комбинации $\Phi^*(x_1, \dots, x_n)$ позитивно примитивных формул. При этом если в A разрешима проблема элементарных индексов, то существует алгоритм, дающий по Φ формулу Φ^* .*

Доказательство проводится индукцией по числу кванторов в Φ . В силу эквивалентностей § 4.2 достаточно рассмотреть случай $\Phi = \forall x(\Theta_1 \vee \dots \vee \Theta_n)$, где $\Theta_i, i \in \{1, \dots, n\}$, — позитивно примитивные формулы или их отрицания. Так как дизъюнкция отрицаний позитивно примитивных формул эквивалентна отрицанию одной позитивно примитивной формулы, то, добавив, если нужно, тождественно ложную формулу $\neg \exists x \approx x$, можно считать, что $\Phi = \forall x(\neg \Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_n)$, где $\Phi_i, i \leq n$, — позитивно примитивные формулы. Так как $\forall x \neg \Phi_0$ эквивалентна отрицанию позитивно примитивной формулы, то можно считать $n > 0$. Итак, достаточно рассмотреть случай, когда Φ есть

$$\forall x(\Phi_0(x, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\Phi_1(x, x_1, \dots, x_n) \vee \dots \vee \Phi_n(x, x_1, \dots, x_n))).$$

Пусть $B_i, i \leq n$, — подгруппы группы A , определенные соответственно формулами $\Phi_i(x, 0, \dots, 0)$, $i \leq n$. В силу леммы 8.4.2 и предложения 8.4.4 можно считать, что $[B_0 : B_i] \leq n!$, $i \in \{1, \dots, n\}$. По лемме 8.4.1, в) и предложению 8.4.4, б) для $b_1, \dots, b_n \in A$ и $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ позитивно примитивная формула

$$\Phi_0(x, b_1, \dots, b_n) \wedge \bigwedge_{i \in \alpha} \Phi_i(x, b_1, \dots, b_n)$$

определяет в A либо пустое множество, либо множество, содержащее $n(\alpha) = \left[B_0 \cap \bigcap_{i \in \alpha} B_i : B^* \right]$ классов смежности по подгруппе $B^* = B_0 \cap \dots \cap B_n$. Рассмотрим множество

$$V = \left\{ S \mid S \subseteq P(\{1, \dots, n\}), \sum_{\alpha \in S} (-1)^{|\alpha|} \cdot n(\alpha) = 0 \right\}.$$

Для любого $S \subseteq P(\{1, \dots, n\})$ определим формулу

$$\begin{aligned} \Phi^S(x_1, \dots, x_n) = & \left(\bigwedge_{\alpha \in S} \exists x \bigwedge_{i \in \alpha \cup \{0\}} \Phi_i(x, x_1, \dots, x_n) \right) \wedge \\ & \wedge \left(\bigwedge_{\alpha \in \{1, \dots, n\} \setminus S} \neg \exists x \bigwedge_{i \in \alpha \cup \{0\}} \Phi_i(x, x_1, \dots, x_n) \right). \end{aligned}$$

По лемме 8.4.3 и лемме 8.4.1в) формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ эквивалентна в $\text{Th}(A)$ формуле $\bigvee_{S \in V} \Phi^S(x_1, \dots, x_n)$. Заменяя в формуле $\bigvee_{S \in V} \Phi^S(x_1, \dots, x_n)$ формулы $\exists x \bigwedge_{i \in \alpha} \Phi_i$ на эквивалентные им позитивно примитивные формулы, получим требуемую Φ^* .

Ясно, что позитивно примитивные формулы Φ_0, \dots, Φ_n эффективно находятся по Φ , и если в A разрешима проблема элементарных индексов, то по Φ_0, \dots, Φ_n эффективно находится множество V , а значит, и формула Φ^* . \square

Для позитивно примитивных формул $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ и натурального числа $n > 0$ через $[\Phi : \Psi] \geq n$ будем обозначать предложение

$$A \models \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Phi(x_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg \Psi(x_i - x_j) \right).$$

Следствие 8.4.6. Для того чтобы элементарная теория $\text{Th}(A)$ абелевой группы A была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы в A была разрешима проблема элементарных индексов.

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что условие $[\Phi : \Psi, A] \geq n$ равносильно истинности в группе A предложения $[\Phi : \Psi] \geq n$. Так как в любой абелевой группе истинно $t(0, 0, \dots, 0) \approx 0$ для любого терма $t(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ^+ , то любое позитивно примитивное предложение истинно в любой абелевой группе. Поэтому

существует алгоритм, определяющий для любой булевой комбинации позитивно примитивных предложений Φ^* , истинно или ложно Φ^* в A . Отсюда по лемме 8.4.5 вытекает достаточность. \square

Элементарную теорию класса всех абелевых групп в дальнейшем будем обозначать через АГ.

Лемма 8.4.7. *Любая позитивно примитивная формула $\Phi(v_1, \dots, v_n)$ сигнатуры Σ^+ эквивалентна относительно теории АГ конъюнкции формул вида $\exists v_0 \sum_{i=1}^n m_i v_i \approx p^k v_0$ и $\sum_{i=1}^n m_i v_i \approx 0$, где $m_i \in Z$, $k \in \omega$ и p — простое число. При этом такая конъюнкция находится эффективно.*

Доказательство. Пусть даны матрицы

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} \dots n_{1k} \\ \dots \dots \dots \\ n_{t1} \dots n_{tk} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} \dots m_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ m_{t1} \dots m_{tn} \end{pmatrix}$$

над Z . Тогда через $\langle N, M \rangle$ будем обозначать позитивно примитивную формулу $\exists v_{n+1} \dots \exists v_{n+k} \Theta$, где Θ есть конъюнкция равенств системы

$$\begin{aligned} n_{11}v_{n+1} + \dots + n_{1k}v_{n+k} &= \sum_{1 \leq s \leq n} m_{1s}v_s, \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ n_{t1}v_{n+1} + \dots + n_{tk}v_{n+k} &= \sum_{1 \leq s \leq n} m_{ts}v_s. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Пусть даны $i, j \in \{1, \dots, t\}$. Ясно, что если N' и M' получаются соответственно из N и M перестановкой i -й и j -й строк или умножением элементов i -й строки на целое число $k \neq 0$, то формула $\langle N', M' \rangle$ эквивалентна формуле $\langle N, M \rangle$. Из коммутативности операции $+$ вытекает, что если N' получается из N перестановкой столбцов, то формула $\langle N', M \rangle$ эквивалентна относительно АГ формуле $\langle N, M \rangle$. Ясно также, что если даны $i, j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j$, и $k \in Z$, то формула $\langle N', M' \rangle$ эквивалентна в АГ формуле $\langle N, M \rangle$ где N' и M' получаются из N и M заменой элементов n_{il} и m_{is} ($l \in \{1, \dots, k\}$, $s \in \{1, \dots, n\}$) на $n_{il} + kn_{jl}$ и $m_{is} + km_{js}$ соответственно. Пусть теперь даны $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, и $k \in Z$. Рассмотрим систему S , полученную из (8.8) заменой чисел n_{1i}, \dots, n_{ti} соответственно на числа $n_{1i} + kn_{1j}, \dots, n_{ti} + kn_{tj}$. Ясно, что для любой абелевой группы A , если набор $\langle b_1, \dots, b_k, a_1, \dots, a_n \rangle$ является решением в A системы (8.8), то набор

$$\langle b_1, \dots, b_{j-1}, b_j - kb_i, b_{j+1}, \dots, b_k, a_1, \dots, a_n \rangle$$

будет решением в A системы S , и если $\langle b_1, \dots, b_k, a_1, \dots, a_n \rangle$ — решение в A системы S , то

$$\langle b_1, \dots, b_{j-1}, b_j + kb_i, b_{j+1}, \dots, b_k, a_1, \dots, a_n \rangle$$

— решение в A системы (8.8). Таким образом, если матрица N' получается из N заменой элементов n_{1i}, \dots, n_{ti} соответственно на числа $n_{1i} + kn_{1j}, \dots, n_{ti} + kn_{tj}$, то формула $\langle N', M \rangle$ эквивалентна относительно теории АГ формуле $\langle N, M \rangle$.

С помощью описанных выше преобразований матриц N и M мы можем эффективно найти такие матрицы N^* и M^* , что формула $\langle N, M \rangle$ эквивалентна формуле $\langle N^*, M^* \rangle$, а матрица N^* имеет вид $\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$, где $A = (D, O)$, D — диагональная или пустая матрица, а O — нулевая или пустая матрица. Из вида матрицы N^* получаем, что формула $\langle N^*, M^* \rangle$ эквивалентна конъюнкции формул вида $\exists v_0 \sum_{i=1}^n m_i v_i \approx kv_0$ при $k \neq 0$ и $\sum_{i=1}^n m_i v_i \approx 0$. Так как формула $\exists v_0 \sum_{i=1}^n m_i v_i \approx v_0$ эквивалентна в АГ формуле $0 \approx 0$, то для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что формула $\exists v_0 \sum_{i=1}^n m_i v_i \approx kv_0$ при $k \notin \{0, 1\}$ эквивалентна относительно АГ конъюнкции формул $\exists v_0 \sum_{i=1}^n m_i v_i \approx p_j^{k_j} v_0$, $j \in \{1, \dots, r\}$, где p_1, \dots, p_r — попарно различные простые числа, k_j — положительные натуральные числа и $k = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$. Для доказательства последнего утверждения предположим, что для некоторой абелевой группы A и элементов $a_1, \dots, a_r, b \in A$ мы имеем

$$p_1^{k_1} a_1 = p_2^{k_2} a_2 = \dots = p_r^{k_r} a_r = b.$$

Обозначим через n_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, числа $p_1^{k_1} \dots p_{i-1}^{k_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{k_{i+1}} \dots p_r^{k_r}$. Так как наибольший общий делитель чисел n_1, \dots, n_r равен 1, то найдутся такие числа l_1, \dots, l_r , что $n_1 l_1 + \dots + n_r l_r = 1$. Тогда для элемента $c = l_1 a_1 + \dots + l_r a_r$ мы имеем $kc = b$. \square

Следствие 8.4.8. Теория $\text{Th}(\langle Q, +, -, 0 \rangle)$ сложения рациональных чисел разрешима.

Доказательство. Ясно, что формулы вида $\exists y nx \approx p^k y$ определяют в $\mathbb{Q} = \langle Q, +, -, 0 \rangle$ всю группу Q , а формулы вида $nx \approx 0$ — нулевую подгруппу. Применяя лемму 8.4.7 и следствие 8.4.6, получаем требуемое утверждение. \square

Следствие 8.4.9. Теория $\text{Th}(\langle Z, +, -, 0 \rangle)$ сложения целых чисел разрешима.

Доказательство. Ясно, что формула $\exists y nx \approx ky$ эквивалентна относительно $T_0 = \text{Th}(\langle Z, +, -, 0 \rangle)$ формуле $\exists y x \approx \frac{k}{(n, k)}y$, а конъюнкция $\exists y x \approx ky \wedge \exists y x \approx ny$ эквивалентна относительно T_0 формуле $\exists y x \approx [n, k]y$, где (n, k) — наибольший общий делитель, а $[n, k]$ — наименьшее общее кратное чисел n, k . Ясно, что индекс $\delta = [\exists y x \approx \approx ky : \exists y x \approx my, \mathbb{Z}]$, где $\mathbb{Z} = \langle Z, +, -, 0 \rangle$, равен $\frac{m}{(m, k)}$, если $m \neq 0$ и $k \neq 0$. Если $k = 0$, то $\delta = 1$. Если $k \neq 0$ и $m = 0$, то $\delta = \infty$. Следовательно, в силу леммы 8.4.7, \mathbb{Z} имеет разрешимую проблему элементарных индексов. По следствию 8.4.6 получаем разрешимость теории T_0 . \square

Наша следующая цель — показать разрешимость теории АГ класса всех абелевых групп (сигнатуры $\Sigma^+ = \langle +, -, 0 \rangle$). Важную роль в этом доказательстве играют инварианты, введенные В. Шмелевой. В дальнейшем под группой мы будем подразумевать абелеву группу.

Пусть A — группа. Напомним, что через kA обозначается подгруппа $\{ka \mid a \in A\}$, а через $A[k]$ мы обозначаем подгруппу $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Если p — простое число и $pA = 0$, то $\dim A$ обозначает *размерность* группы A , рассматриваемой как векторное пространство над полем из p элементов. В дальнейшем через p и q будут обозначаться простые числа, а через n, k, m, s — натуральные числа. Следующие числа для произвольных p и n будем называть *инвариантами Шмелевой группы* A :

$$\begin{aligned}\alpha_{p,n}(A) &= \min\{\dim((p^n A)[p]/(p^{n+1} A)[p]), \omega\}, \\ \beta_p(A) &= \min\{\inf\{\dim(p^n A)[p] \mid n \in \omega\}, \omega\}, \\ \gamma_p(A) &= \min\{\inf\{\dim((A/A[p^n])/p(A/A[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\}, \\ \varepsilon(A) &\in \{0, 1\} \text{ и } \varepsilon(A) = 0 \Leftrightarrow (nA = \{0\} \text{ для некоторого } n \in \omega, n \neq 0).\end{aligned}$$

Мы будем говорить, что у абелевых групп A_1 и A_2 совпадают инварианты Шмелевой (обозначаем $\text{Sh}(A_1) = \text{Sh}(A_2)$), если для любых p и n выполнено $\alpha_{p,n}(A_1) = \alpha_{p,n}(A_2)$, $\beta_p(A_1) = \beta_p(A_2)$, $\gamma_p(A_1) = \gamma_p(A_2)$ и $\varepsilon(A_1) = \varepsilon(A_2)$.

Обозначим через $\alpha_{p,n,k}$, $\beta_{p,n,k}$, $\gamma_{p,n,k}$ и ε_n предложения сигнатуры Σ^+ , истинности которых в группе A равносильны соответственно условиям:

- а) $\dim((p^n A)[p]/(p^{n+1} A)[p]) \geq k$;
- б) $\dim(p^n A)[p] \geq k$;
- в) $\dim((A/A[p^n])/p(A/A[p^n])) \geq k$;
- г) $nA = \{0\}$.

Следующая теорема дает классификацию полных расширений теории АГ.

Теорема 8.4.10. Следующие условия для любых абелевых групп A_1 и A_2 равносильны:

- 1) у A_1 и A_2 совпадают элементарные индексы, т. е. для любых позитивно примитивных формул $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ выполнено $[\Phi : \Psi, A_1] = [\Phi : \Psi, A_2]$;
- 2) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны, т. е. $\text{Th}(A_1) = \text{Th}(A_2)$;
- 3) $\text{Sh}(A_1) = \text{Sh}(A_2)$, т. е. у A_1 и A_2 совпадают инварианты Шмеливой.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Заметим, что если у A_1 и A_2 совпадают элементарные индексы, то формула Φ^* , построенная в доказательстве леммы 8.4.5 для A_1 совпадает с Φ^* , построенной для группы A_2 . Если Φ — предложение сигнатуры Σ^+ , то Φ^* будет булевой комбинацией позитивно примитивных предложений. Так как любое позитивно примитивное предложение истинно в любой абелевой группе, то теории $\text{Th}(A_1)$ и $\text{Th}(A_2)$ совпадают.

2) \Rightarrow 3). Пусть группы A_1 и A_2 элементарно эквивалентны. Тогда для них равносильна истинность предложений $\alpha_{p,n,k}$, $\beta_{p,n,k}$, $\gamma_{p,n,k}$ и ε_n . Отсюда получаем $\text{Sh}(A_1) = \text{Sh}(A_2)$.

3) \Rightarrow 1). Пусть у групп A_1 и A_2 совпадают инварианты Шмеливой. Нужно показать, что $[\Phi : \Psi, A_1] = [\Phi : \Psi, A_2]$ для произвольных позитивно примитивных формул $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$. По лемме 8.4.7 можно считать, что Φ и Ψ являются конъюнкциями формул вида $tx \approx 0$ и $\exists y ux \approx p^k y$, где p — простое число, t, n, k — натуральные числа и $n \neq 0$. Пусть $n = n'p^l$, где n' не делится на p . Если $l \geq k$, то формула $\exists y ux \approx p^k y$ эквивалентна в АГ формуле $0x \approx 0$. Пусть $l < k$. Возьмем такие целые числа s и t , что $sn'p^l + tp^k = p^l$. Тогда для любой группы A и любых $a, b \in A$ из равенства $na \approx p^k b$ вытекает равенство $p^l a = p^l (sb + ta)$. Отсюда получаем, что формула $\exists y ux \approx p^k y$ эквивалентна в АГ формуле $\exists y p^l x \approx p^k y$. Таким образом, можно считать, что формулы Φ и Ψ являются конъюнкциями формул вида $tx \approx 0$ и $\exists y p^l x \approx p^k y$ для простых чисел p , чисел $t, m, k, l \in \omega$ с условием $l < k$. Такие формулы назовем *базисными формулами* соответственно *первого рода* и *второго рода*. При этом базисную формулу вида $\exists y p^l x \approx p^k y$ будем называть *базисной формулой второго рода с p -коэффициентами*, а формулу $0x \approx 0$ — *вырожденной базисной формулой первого рода*.

Так как для любой группы A и ее произвольных подгрупп H_1, H_2, H_3 мы имеем

$$[H_1 : (H_2 \cap H_3)] = [H_1 : H_2] \cdot [(H_2 \cap H_1) : H_3],$$

то можно считать, что Ψ является базисной формулой. Так как $[(\Phi(A) + \Psi(A)) : \Psi(A)] = [\Phi(A) : \Psi(A)]$ и существует позитивно прими-

тивная формула $\Theta(x)$, для которой выполнено условие $\Theta(A) = \Phi(A) + \Psi(A)$ для любой группы A , то в дальнейшем будем считать, что $\Psi(A) \subseteq \Phi(A)$ для любой группы A .

Так как индексы $[\Phi: \Psi, A]$ и инварианты Шмелевой сохраняются при переходе от A к $A' \equiv A$, то можно считать, что $|A_i| \leq \omega$, $i \in \{1, 2\}$. Если $\varepsilon(A_1) = 0$, то A_1 является прямой суммой циклических групп порядков вида p^n для конечного множества простых p и конечного множества натуральных чисел n . Ясно, что число прямых слагаемых порядка p^{n+1} совпадает с $\alpha_{p,n}(A)$. Следовательно, при $\varepsilon(A_1) = 0$ группы A_1 и A_2 изоморфны, в частности, $[\Phi: \Psi, A_1] = [\Phi: \Psi, A_2]$. Поэтому в дальнейшем можно предполагать, что $\varepsilon(A_i) = 1$, $i \in \{1, 2\}$.

Напомним, что подгруппа H группы A называется p -базисной для A , если выполнены следующие условия:

- H является прямой суммой циклических p -групп и бесконечных циклических групп;
- H — p -сервантная подгруппа A , т. е. для любого $a \in H$ и $k \in \omega$ имеет место

$$A \models \exists y a \approx p^k y \iff H \models \exists y a \approx p^k y;$$

- A/H — p -делимая группа, т. е. $p(A/H) = A/H$.

Известно, что для любой абелевой группы A и любого p существуют p -базисные подгруппы для A . Отметим некоторые простые факты.

1). Пусть p и q — различные простые числа, m, n — натуральные числа, A — группа. Тогда $p^m A + q^n A = A$. Если A — p -группа, то A являются q -делимой и $A[q] = \{0\}$.

2). Для группы A и формулы $\Theta(x) = \exists y p^l x \approx p^k y$, где p — простое число, $l \leq k$, имеет место равенство $\Theta(A) = (A[p^l] + p^{(k-l)} A)$.

Из свойств 1), 2) и условия $\Psi(A_i) \subseteq \Phi(A_i)$ для любой группы A получаем следующее свойство.

3). Если Ψ является базисной формулой второго рода с p -коэффициентами, то формула Φ не может содержать невырожденных базисных формул первого рода, а также базисных формул второго рода с q -коэффициентами для $q \neq p$.

Из факта 2) получается следующее утверждение.

4). Пусть $\Theta(x) = \exists y p^l x \approx p^k y$ для простого числа p и натуральных чисел $l \leq k$, A — циклическая группа порядка p^s , где $s \geq k$, или A — бесконечная циклическая группа. Тогда $\Theta(A) = p^{(k-l)} A$.

5). Если H является p -сервантной подгруппой группы A , то для любой базисной формулы $\Theta(x) = \exists y p^l x \approx p^k y$ выполняется равенство $\Theta(A) \cap H = \Theta(H)$. Это равенство выполняется также для любой подгруппы H группы A и любой базисной формулы $\Theta(x)$ первого рода.

Из свойств б) и в) p -базисных подгрупп получается следующий факт.

6). Если H — p -базисная подгруппа группы A , то $\alpha_{p,n}(A) = \alpha_{p,n}(H)$, $\gamma_p(A) = \gamma_p(H)$.

7). Если H — p -базисная подгруппа группы A и Ψ — базисная формула второго рода с p -коэффициентами, то $[\Phi : \Psi, A] = [\Phi : \Psi, H]$.

Для доказательства этого факта заметим, что из 2) и свойства в) p -базисных подгрупп вытекает условие $\Psi(A) + H = A$. Из этого равенства и условия $\Psi(A) \subseteq \Phi(A)$ получаем $(\Phi(A) \cap H) + \Psi(A) = \Phi(A)$, следовательно, $[\Phi : \Psi, A] = [(\Phi(A) \cap H) : (\Psi(A) \cap H)]$. Из свойств 3) и 5) получаем равенство $[\Phi : \Psi, A] = [\Phi : \Psi, H]$.

Отметим еще несколько простых фактов.

8). Если A является прямой суммой $\bigoplus_{i \in \omega} \langle a_i \rangle$ циклических p -групп и бесконечных циклических групп, то

$$\alpha_{p,n}(A) = |\{i \in \omega \mid o(a_i) = p^{n+1}\}|$$

и условие $\gamma_p(A) = n \in \omega$ равносильно тому, что периодическая часть $T(A)$ группы A ограничена и $|\{i \in \omega \mid o(a_i) = \infty\}| = n$, где $o(a)$ — порядок элемента a .

9). $\alpha_{p,n}(A) = \alpha_{p,n}(A^p)$ и $\beta_p(A) = \beta_p(A^p)$, где A^p — p -компоненты группы A , т. е. подгруппа элементов $a \in A$ порядков $o(a) = p^k$, $k \in \omega$.

Для группы A через $T(A)$ обозначается ее периодическая часть, т. е. подгруппа элементов конечного порядка. Пусть H_1^p, H_2^p — p -базисные подгруппы групп A_1 и A_2 соответственно. Пусть $T_i^p = T(H_i^p)$. Из 6), 8) и 9) вытекает

10). $T_1^p \simeq T_2^p$, и если T_1^p ограничена, то $H_1^p \simeq H_2^p$.

Легко проверяется также следующие 2 свойства.

11). Для базисных формул $\Theta(x)$ и любой группы A выполняется равенство $\Theta(A) \cap T(A) = \Theta(T(A))$.

12). Для любых групп A и B и любой позитивно примитивной формулы $\Theta(x)$ мы имеем $\Theta(A \oplus B) = (\Theta(A) \oplus \Theta(B))$.

Случай 1: $\Psi = \exists y p^{l_0}x \approx p^{k_0}y$ для простого числа p и натуральных чисел $l_0 < k_0$.

В силу свойства 7) достаточно доказать равенство:

(*) $[\Phi : \Psi, H_1] = [\Phi : \Psi, H_2]$.

Если периодическая часть T_1^p p -базисной подгруппы H_1^p группы A ограничена, то равенство (*) получается из свойства 10). Пусть теперь T_1^p неограничена.

Пусть r — максимальное натуральное число, для которого p^r является коэффициентом в формулах Φ и Ψ . Пусть m_0 — максимальное число вида $k - l$ для таких $l < k$, что $\exists y p^l x \approx p^k y$ входит в Φ , если

такие числа есть, и $m_0 = 0$, если таких чисел нет. Для бесконечной циклической группы Z по свойству 2) мы имеем $\Phi(Z) = p^{m_0}Z$ и $\Psi(Z) = p^{(k_0-l_0)}Z$. Из включения $\Psi(Z) \subseteq \Phi(Z)$ мы получаем условие $k_0 - l_0 \geq m_0$. Если $k_0 - l_0 > m_0$, то по свойству 4) для любой циклической подгруппы A порядка $\geq p^r$ выполнено $[\Phi: \Psi, A] > 1$. Из неограниченности T_1^p и свойству 12) получаем $[\Phi: \Psi, T_1^p] = \infty$. Так как $T_1^p \cong T_2^p$, то $[\Phi: \Psi, T_2^p] = \infty$. Подгруппа T_i^p является прямым слагаемым группы H_i , поэтому $[\Phi: \Psi, H_i] = \infty$, $i \in \{1, 2\}$.

Если $k_0 - l_0 = m_0$, то из свойства 4) вытекает равенство $[\Phi: \Psi, A] = 1$ для каждой циклической группы порядка $\geq p^r$. Пусть $H_i = K_i \oplus G_i$, где G_i прямая сумма циклических групп порядка $\geq p^r$ и $p^{r-1}K_i = \{0\}$. Тогда по свойству 12) мы имеем $[\Phi: \Psi, G_i] = 1$, следовательно, $[\Phi: \Psi, H_i] = [\Phi: \Psi, K_i]$. Из условия $T_1^p \cong T_2^p$ вытекает $K_1^p \cong K_2^p$. Отсюда получаем равенство (*).

Случай 2: $\Psi = k_0x \approx 0$. Предположим, что Φ не содержит невырожденных базисных формул первого рода. Пусть n_0 будет произведением всех ненулевых коэффициентов в формуле Φ , если такие есть; в противном случае полагаем $n_0 = 1$. Так как $\varepsilon(A_i) = 1$, то для любого $i \in \{1, 2\}$ найдутся такие $a_n \in A_i$, $n \in \omega$, что $n!k_0n_0a_n \neq 0$. Так как Φ не содержит невырожденных базисных формул первого рода, то по выбору n_0 получаем $A_1 \models \Phi(n_0a_n)$. Так как $k_0n_0a_n \neq 0$, то $n_0a_n, 2n_0a_n, \dots, pn_0a_n$ будут принадлежать различным смежным классам по подгруппе $\Psi(A_i)$. Следовательно, $[\Phi: \Psi, A_i] = \infty$, $i \in \{1, 2\}$.

Далее будем предполагать, что Φ содержит некоторую невырожденную базисную формулу первого рода. Тогда $\Phi(A_i) \subseteq T(A_i)$ и по свойству 11) получаем равенство $\Phi(A_i) = \Phi(T(A_i))$. Так как $\Psi(A_i) \subseteq T(A_i)$, то выполнено также равенство $\Psi(A_i) = \Psi(T(A_i))$. Заметим, что $T(A_i) = \bigoplus_p A_i^p$. Пусть π — множество всех простых делителей коэффициентов в невырожденных базисных подформулах Φ первого рода. Если простое число p не принадлежит множеству π , то $\Phi(A^p) = \{0\}$. Из предыдущих замечаний и свойства 12) получаем

$$[\Phi: \Psi, A_i] = [\Phi: \Psi, T(A_i)] = \prod_{p \in \pi} [\Phi: \Psi, A_i^p].$$

Таким образом, доказательство сводится к установлению равенства $[\Phi: \Psi, A_1^p] = [\Phi: \Psi, A_2^p]$ для p -компонент A_1^p и A_2^p . Ясно, что в p -группе A формула $nx \approx 0$ определяет то же множество, что и формула $p^s x \approx 0$, где p^s — наибольшая степень p , делящая число n . В силу этого факта и свойства 1), можно считать, что все коэффициенты в формулах Φ и Ψ являются степенями числа p . Так как в p -группе A формула $(p^s x \approx 0 \wedge p^r x \approx 0)$ определяет то же множество,

что и формула $p^u x \approx 0$, где $u = \min\{s, r\}$, то можно считать, что Φ содержит единственную базисную подформулу $p^m x \approx 0$ первого рода. Пусть $\Psi(x) = p^k x \approx 0$. В силу включения $\Psi(A) \subseteq \Phi(A)$ для любой группы A имеем $k \leq m$. Если $k = m$, то $[\Phi : \Psi, A] = 1$ для любой p -группы A и доказывать нечего. Пусть $k < m$ и s — максимальное натуральное число, для которого формула $\exists y p^l x \approx p^t y$ входит в Φ и $s = t - l$ (если таких формул в Φ нет, то $s = 0$).

Рассмотрим группу $B_i = A_i^p[p^{(s+m)}]$, где $i \in \{1, 2\}$. Так как группа B_i ограничена, то она будет прямой суммой циклических p -групп. Пусть порядок циклической группы $\langle a \rangle$ равен p^{s+m} . По свойству 2) и выбору числа s мы имеем $p^s a \in \Phi(\langle a \rangle)$. Так как $k < m$, то $p^s a \notin \Psi(\langle a \rangle)$. Таким образом, $[\Phi : \Psi, \langle a \rangle] > 1$. Если p -базисные подгруппы T_i^p p -группы A_i^p , $i \in \{1, 2\}$, неограничены, то среди прямых слагаемых группы B_i будет бесконечное число циклических групп порядка $p^{(s+m)}$, следовательно, $[\Phi : \Psi, B_i] = \infty$. Так как Ψ бесквантторная и Φ , как \exists -формула, сохраняется при расширениях, то $[\Phi : \Psi, A_i^p] = \infty$, $i \in \{1, 2\}$.

Пусть теперь одна из групп T_1^p, T_2^p ограничена. По свойству 10) они обе ограничены. Так как группа T_i^p p -серванта, то $A_i^p = T_i^p \oplus B_i$ для некоторой группы B_i . В силу p -делимости группы A_i^p/T_i^p , группа B_i делимая, т. е. $B_i = \bigoplus_{j \in J_i} C_j$ где C_j — квазициклические группы. Из ограниченности групп T_i^p , $i \in \{1, 2\}$, получаем $|J_i| = \beta_p(A_i^p)$. В силу равенства $\beta_p(A_1^p) = \beta_p(A_2^p)$, группы A_1^p и A_2^p изоморфны, следовательно, $[\Phi : \Psi, A_1^p] = [\Phi : \Psi, A_2^p]$. \square

Пусть Γ_0 — множество всех предложений, являющихся булевыми комбинациями предложений вида $\alpha_{p,n,k}$, $\beta_{p,n,k}$, $\gamma_{p,n,k}$ и ε_n , где p — простое число, n, k — натуральные числа.

Следствие 8.4.11. *Любое предложение Φ сигнатуры Σ^+ эквивалентно в АГ предложению Φ^* из множества Γ_0 . При этом такое предложение находится по Φ эффективно.*

Доказательство. Ясно, что если на группах A_1, A_2 истинны одни и те же предложения из множества Γ_0 , то у них совпадают инварианты Шмелевой. В силу эквивалентности условий 2) и 3) из предыдущей теоремы, мы получаем истинность условий предложения 8.1.1, откуда вытекает существование предложения Φ^* . Так как теория АГ имеет конечное множество аксиом, то теория АГ алгоритмически перечислима, следовательно, по 8.1.1 предложение Φ^* находится эффективно. \square

Размерности

$\dim((p^n A)[p]/(p^{n+1} A)[p])$, $\dim(p^n A)[p]$ и $\dim((A/A[p^n])/p(A/A[p^n]))$

будем называть *базисными размерностями* или, более точно, *базисными (p, n) -размерностями* соответственно *первого, второго и третьего рода*. Легко проверить следующее свойство базисных размерностей.

(1) Если $A = B \oplus C$, то базисные размерности группы A равны сумме этих размерностей групп B и C .

Пусть C_{p^∞} — квазициклическая p -группа, Q — аддитивная группа рациональных чисел, R_p — подгруппа Q , состоящая из несократимых дробей с взаимно простыми с p знаменателями. Группы Q , циклические p -группы, квазициклические p -группы и группы R_p называются *базисными группами*. Отметим некоторые простые свойства базисных размерностей базисных групп.

(2) Базисные размерности базисных групп принадлежат множеству $\{0, 1\}$.

(3) Любая базисная размерность группы Q равна нулю.

(4) Если q — простое число и $q \neq p$, то базисные (p, n) -размерности q -групп и группы R_q равны нулю.

(5) Базисная (p, n) -размерность первого рода базисной группы A тогда и только тогда равна 1, когда A является циклической группой порядка p^{n+1} .

(6) Если B — циклическая подгруппа порядка p^m , то (p, n) -размерности второго и третьего рода тогда и только тогда равны нулю, когда $m \leq n$.

(7) Базисная (p, n) -размерность второго рода равна 1 в квазициклической группе и равна нулю в группе R_p .

(8) Базисная (p, n) -размерность третьего рода равна 1 в группе R_p и равна нулю в квазициклической p -группе.

Инварианты Шмелевой более удобны, чем элементарные индексы $[\Phi : \Psi, A]$, так как они обладают большей независимостью друг от друга. Единственная их зависимость выражается в следующем предложении.

Предложение 8.4.12. *Пусть для каждого p и n даны кардиналы $\alpha_{p,n}$, β_p , $\gamma_p \leq \omega$ и $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Для того чтобы существовала абелева группа A , для которой инварианты Шмелевой $\alpha_{p,n}(A)$, $\beta_p(A)$, $\gamma_p(A)$ и $\varepsilon(A)$ совпадали соответственно с $\alpha_{p,n}$, β_p , γ_p и ε , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) если для простого p множество $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ бесконечно, то $\beta_p = \gamma_p = \omega$;
- 2) если $\varepsilon = 0$, то для любого простого p выполнены равенства $\beta_p = \gamma_p = 0$ и множество $\{\langle p, n \rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ конечно.

Доказательство. Необходимость вытекает из определения инвариантов Шмелевой и свойств (1)–(8) базисных размерностей. Если

же условия 1) и 2) выполняются, то из свойств (1)–(8) базисных размерностей легко вытекает, что в качестве искомой группы A подходит группа

$$A = \bigoplus_{p,n} C_{p^{n+1}}^{(\alpha_{p,n})} \oplus C_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus R_p^{(\gamma_p)} \oplus Q^{(\varepsilon)},$$

где, как обычно, $B^{(k)}$ обозначает прямую сумму k подгрупп, изоморфных группе B . \square

Теорема 8.4.13. Теория АГ разрешима.

Доказательство. В силу следствия 8.4.11 и теоремы о полноте исчисления ИП^{Σ^+} , получаем, что достаточно показать, что проблема установления для любого предложения Φ^* из множества Γ_0 его выполнимости на классе всех групп, т. е. истинности на некоторой группе, является алгоритмически разрешимой. Предложения вида $\alpha_{p,n,k}$, $\beta_{p,n,k}$ и $\gamma_{p,n,k}$ будем называть *базисными* и обозначать через $\varkappa_{p,n,k}$. Так как выполнимость дизъюнкции равносильна выполнимости одного из ее членов, то можно считать, что Φ^* является конъюнкцией базисных предложений и их отрицаний, а также предложений ε_n и их отрицаний. Пусть n^* и k^* — максимальные числа соответственно среди чисел n и k , для которых базисные предложения $\varkappa_{p,n,k}$ являются подформулами предложения Φ^* .

Случай 1: для некоторого n предложение ε_n является конъюнктивным членом предложения Φ^* . Если $n = 0$, то ε_n является истинной в любой группе и, если Φ^* содержит другие конъюнктивные члены, то ε_n можно убрать из Φ^* . Если $\Phi^* = \varepsilon_0$, то Φ^* истинна на любой группе A . При $n = 1$ предложение Φ^* может быть истинно только на нулевой группе, поэтому проверка выполнимости Φ^* на группах разрешима. Пусть $n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$, где p_1, \dots, p_r — попарно различные простые числа. Ясно, что в этом случае истинность предложения Φ^* в некоторой группе A равносильно истинности Φ^* в некоторой группе $A^* = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_r}$, где A_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, — прямая сумма циклических групп порядков p_i^j для $j \leq s_i$, причем в таком разложении для каждого $j \leq s_i$ существует не более, чем k^* прямых слагаемых порядка p_i^j . Заметим, что групп A^* с такими условиями существует с точностью до изоморфизма лишь конечное число. Граница этого числа эффективно вычисляется по Φ^* , поэтому проверка выполнимости в группах предложений Φ^* , для которых выполняется условие данного случая, алгоритмически разрешима.

Случай 2: отрицание случая 1. Из свойств (1) и (3) базисных размерностей получаем, что для любого базисного предложения $\varkappa_{p,n,k}$ и любой группы A истинность $\varkappa_{p,n,k}$ в A равносильно его истинности

в группе $A \oplus Q$, где Q — аддитивная группа рациональных чисел. Так как в группе $A \oplus Q$ ложны все предложения ε_n , $n \neq 0$, то в условиях данного случая в силу предыдущего замечания можно считать, что Φ^* является конъюнкцией базисных предложений и их отрицаний.

Предположим, что предложение Φ^* истинно в некоторой группе A . Пусть $\alpha_{p,n} = \alpha_{p,n}(A)$, $\beta_p = \beta_p(A)$, $\gamma_p = \gamma_p(A)$ и

$$A_1 = \bigoplus_{p,n} C_{p^{n+1}}^{(\alpha_{p,n})} \oplus C_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus R_p^{(\gamma_p)}.$$

Ясно, что группы $A \oplus Q$ и $A_1 \oplus Q$ имеют одни и те же инварианты Шмелевой, следовательно, по теореме 8.4.10 в них истинны одни и те же базисные предложения. Тогда также в группах A и A_1 истинны одни и те же базисные предложения, поэтому предложение Φ^* истинно в группе A_1 . Пусть π^* — множество простых чисел p , для которых некоторая базисная формула $\varkappa_{p,n,k}$ входит в Φ^* . Ясно, что предложение Φ^* истинно в группе

$$A_2 = \bigoplus_{p \in \pi^*, n} C_{p^{n+1}}^{(\alpha_{p,n}^*)} \oplus C_{p^\infty}^{(\beta_p^*)} \oplus R_p^{(\gamma_p^*)},$$

где $\alpha_{p,n}^* = \min\{\alpha_{p,n}, k^*\}$, $\beta_p^* = \min\{\beta_p, k^*\}$ и $\gamma_p^* = \min\{\gamma_p, k^*\}$.

Из свойств (1) и (6) базисных размерностей, получаем, что предложение Φ^* истинно в группе A^* , имеющей вид

$$\bigoplus_{p \in \pi^*, n \leq n^*} C_{p^{n+1}}^{(\alpha_{p,n}^*)} \oplus C_{p^{n^*+2}}^{(\tilde{s})} \oplus C_{p^\infty}^{(\beta_p^*)} \oplus R_p^{(\gamma_p^*)},$$

где $\tilde{s} = \min\{\sum_{n > n^*} \alpha_{p,n}^*, k^*\}$.

При фиксированных множестве π и числах n^*, k^* имеется лишь конечное число типов изоморфизма групп такого вида. Используя свойства (1), (2) и (4)–(8), легко вычисляются базисные размерности таких групп, следовательно, проверяется истинность предложения Φ^* . Так как множество π и числа n^*, k^* эффективно находятся по предложению Φ^* , то проблема выполнимости в классе всех групп предложений из множества Γ_0 , для которых выполняется условие случая 2, разрешима. Учитывая результат рассмотрения случая 1, получаем, что проблема выполнимости предложений из множества Γ_0 на классе всех групп разрешима. В силу замечания в начале доказательства, теория АГ разрешима. \square

Заметим, что из предложения 8.4.12 и теоремы 8.4.10 вытекает, что мощность множества различных пополнений теории АГ равна континууму, т. е. 2^ω . Отсюда, в частности, вытекает, что существуют абелевые группы A , элементарная теория $\text{Th}(A)$ которых неразрешима.

В заключение отметим, что разрешимы теории сложения натуральных чисел, поля p -адических чисел, а также теория всех конечных полей.

§ 8.5. Теории декартовых произведений

В этом параграфе мы покажем сохранение разрешимости теории при операции взятия конечного декартова произведения и любой декартовой степени. На самом деле мы будем рассматривать фильтрованные произведения, что, учитывая разрешимость любой булевой алгебры, дает разрешимость теории любой фильтрованной степени системы с разрешимой теорией.

В дальнейшем мы будем рассматривать булевые алгебры в сигнатуре $(\cup, \cap, -, 0, 1)$. Через 2^I мы будем обозначать булеву алгебру всех подмножеств множества I . Если D — фильтр на I , то через $2^I/D$ будем обозначать гомоморфный образ алгебры 2^I по конгруэнции

$$\left\{ \langle I_1, I_2 \rangle \mid \overline{(I_1 \cap I_2)} \cup \overline{(I_1 \cap I_2)} \in D \right\}.$$

Класс этой конгруэнции, содержащий множество I_1 будем обозначать через I_1/D . Нетрудно проверить, что $2^I/D$ будет изоморфна фильтрованной степени (см. упражнение 3 к § 3.3) 2^D , где 2 обозначает двухэлементную булеву алгебру. Когда D равен $\{I\}$, мы будем отождествлять $2^I/D$ с 2^I .

В дальнейшем под сигнатурой Σ мы будем понимать эффективно заданную сигнатуру, т. е. такую сигнатуру, что множество гёделевских номеров формул сигнатуры Σ является рекурсивным.

Предложение 8.5.1. *Существует алгоритм, который по любой формуле $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ строит формулу $\Phi^*(y_1, \dots, y_{k_\Phi})$ сигнатуры булевых алгебр и формулы $\Phi^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi^{k_\Phi}(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры Σ , для которых выполнено следующее условие: если D — фильтр на множестве I , $\mathfrak{A}_i, i \in I$ — алгебраические системы сигнатуры Σ и $f_1, \dots, f_n \in I\text{-prod } A_i$, то*

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi(Df_1, \dots, Df_n) \iff 2^I/D \models \Phi^*(I_1/D, \dots, I_{k_\Phi}/D), \quad (8.9)$$

где $I_j = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi^j(f_1i, \dots, f_ni)\}, j \in \{1, \dots, k_\Phi\}$.

Доказательство. Переходя к эквивалентной формуле, можно считать, что Φ не содержит квантора \forall . Построение будем вести индукцией по длине Φ . Если Φ — атомарная формула, то по лемме 3.3.4 в качестве Φ^* можно взять $y_1 \approx 1$, а в качестве Φ^1 — формулу Φ . Если $\Phi = \neg\Phi_1$, то в качестве Φ^* берем $\neg\Phi_1^*$, а в качестве $\Phi^1, \dots, \Phi^{k_\Phi}$ — послед-

довательность формул $\Phi_1^1, \dots, \Phi_1^{k_\Phi}$. Если $\Phi = \Phi_1 \tau \Phi_2$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то в качестве Φ^* берем $\Phi_1^*(y_1, \dots, y_{k_\Phi}) \tau \Phi_2^*(y_{k_\Phi+1}, \dots, y_{k_\Phi+k_\Phi})$, а в качестве $\Phi^1, \dots, \Phi^{k_\Phi}$ — последовательность $\Phi_1^1, \dots, \Phi_1^{k_\Phi}, \Phi_2^1, \dots, \Phi_2^{k_\Phi}$.

Пусть теперь $\Phi = \exists x \alpha(x, x_1, \dots, x_n)$. Зафиксируем некоторое взаимно однозначное отображение

$$\delta: \{1, \dots, 2^{k_\alpha}\} \rightarrow P(\{1, \dots, k_\alpha\}).$$

Рассмотрим формулы

$$\Phi'(y_1, \dots, y_{2^{k_\alpha}}) = \alpha^* \left(\bigcup_{i \in \delta(i)} y_i, \dots, \bigcup_{k_\alpha \in \delta(i)} y_i \right),$$

$$\Theta_i = \bigwedge_{j \in \delta(i)} \alpha^j \wedge \bigwedge_{\substack{j \in \{1, \dots, k_\alpha\} \\ j \notin \delta(i)}} \neg \alpha^j, \quad i \in \{1, \dots, 2^{k_\alpha}\}.$$

Нетрудно проверить следующие свойства:

1) для любых $f, f_1, \dots, f_n \in I\text{-prod } A_i$ выполнено

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \alpha(Df, Df_1, \dots, Df_n) \iff 2^I/D \models \Phi'(S_1/D, \dots, S_{2^{k_\alpha}}/D),$$

где $S_j = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Theta_j(f_i, f_1i, \dots, f_ni)\}, 1 \leq j \leq 2^{k_\alpha}$;

2) $\triangleright \Theta_i \rightarrow \neg \Theta_j, i, j \in \{1, \dots, 2^{k_\alpha}\}, i \neq j$;

3) $\triangleright \Theta_1 \vee \dots \vee \Theta_{2^{k_\alpha}}$.

Полагаем $k_\Phi = 2^{k_\alpha}$. Обозначим через $\Phi^*(y_1, \dots, y_{k_\Phi})$ формулу

$$\begin{aligned} \exists z_1 \dots \exists z_{k_\Phi} & \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k_\Phi} z_i \cap z_j \approx 0 \wedge (z_1 \cup \dots \cup z_{k_\Phi}) \approx 1 \right) \wedge \right. \\ & \left. \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq k_\Phi} z_i \cap y_i \approx z_i \wedge \Phi'(z_1, \dots, z_{k_\Phi}) \right) \right), \end{aligned}$$

и пусть $\Phi^i = \exists x \Theta_i, i \in \{1, \dots, k_\Phi\}$. Докажем свойство (8.9). Пусть $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi(Df_1, \dots, Df_n)$. Тогда найдется $f \in I\text{-prod } A_i$, для которого выполнено $D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \alpha(Df, Df_1, \dots, Df_n)$. По свойству 1) имеем $2^I/D \models \Phi'(I'_1/D, \dots, I'_{k_\Phi}/D)$ для

$$I'_j = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Theta_j(f_i, f_1i, \dots, f_ni)\}, 1 \leq j \leq k_\Phi.$$

Тогда

$$I'_j \subseteq I_j = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Phi^j(f_1i, \dots, f_ni)\}, 1 \leq j \leq k_\Phi.$$

В силу свойств 2) и 3) имеем $I'_i \cap I'_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k_\Phi$, и $I'_1 \cup \dots \cup I'_{k_\Phi} = I$. Так как отображение $D: 2^I \rightarrow 2^I/D$ является гомо-

морфизмом, то в $2^I/D$ истинны $I'_i/D \cap I_i/D \approx I'_i/D$, $I'_i/D \cap I'_j/D \approx 0$ для $i, j \in \{1, \dots, k_\Phi\}$, $i \neq j$, и $I'_1/D \cup \dots \cup I'_{k_\Phi}/D \approx 1$. Таким образом,

$$2^I/D \models \Phi^*(I_1/D, \dots, I_{k_\Phi}/D). \quad (8.10)$$

Пусть теперь выполнено (8.10). Тогда найдутся такие $I'_i \subseteq I$, $1 \leq i \leq k_\Phi$, что $I \setminus (I'_i \cap I'_j) \in D$ для $i, j \in \{1, \dots, k_\Phi\}$, $i \neq j$, $I'_1 \cup \dots \cup I'_{k_\Phi} \in D$, $I \setminus (I'_i \setminus I_i) \in D$ и выполнено

$$2^I/D \models \Phi'(I'_1/D, \dots, I'_{k_\Phi}/D). \quad (8.11)$$

Из условия 3) вытекает $I_1 \cup \dots \cup I_{k_\Phi} = I$. Поэтому найдутся такие $I''_i \subseteq I$, $1 \leq i \leq k_\Phi$, что выполнены условия:

- 4) $I''_i/D = I'_i/D$ для всех $i \in \{1, \dots, k_\Phi\}$;
- 5) $I''_1 \cup \dots \cup I''_{k_\Phi} = I$,
- 6) $I''_i \subseteq I_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k_\Phi\}$;
- 7) $I''_i \cap I''_j = \emptyset$ для всех $i, j \in \{1, \dots, k_\Phi\}$, $i \neq j$.

В силу условий 5), 6), 7) и 2) найдется такой $f \in I\text{-prod } A_i$, что для всех $j \in \{1, \dots, k_\Phi\}$ выполнено

$$I''_j = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \Theta_j(f_i, f_1i, \dots, f_ni)\}.$$

Поэтому из условий 4), (8.11) и 1) получаем

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \alpha(Df, Df_1, \dots, Df_n).$$

Следовательно,

$$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i \models \Phi(Df_1, \dots, Df_n). \quad \square$$

Следствие 8.5.2. *Если алгебраические системы $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ сигнатуры Σ имеют разрешимые теории, то декартово произведение $\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_n$ также имеет разрешимую теорию.*

Доказательство. По предыдущему предложению проверка условия $\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_n \models \Phi$ сводится к проверке условия $2^{\{1, \dots, n\}} \models \Phi^*(I_1, \dots, I_{k_\Phi})$ для некоторых $I_1, \dots, I_{k_\Phi} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Из разрешимости теорий $\text{Th}(\mathfrak{A}_1), \dots, \text{Th}(\mathfrak{A}_n)$ получаем, что I_1, \dots, I_{k_Φ} эффективно находятся по Φ . Так как $2^{\{1, \dots, n\}}$ — конечная система, то существует алгоритм проверки истинности формул $\Phi^*(I_1, \dots, I_{k_\Phi})$ на этой системе. \square

Булева алгебра \mathfrak{A} называется *атомной*, если для любого $a \in A$ либо $a = 0$, либо в \mathfrak{A} находится атом (см. § 2.3) b , для которого $b \leq a$.

Лемма 8.5.3. *Если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — бесконечные атомные булевы алгебры, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Воспользуемся следствием 5.1.2. Пусть $n \in \omega$. Для $i \in \{1, \dots, n\}$ в качестве $F_i(n)$ возьмем все такие $f \in P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) f — изоморфное вложение конечной подалгебры $\mathfrak{A}_f \subseteq \mathfrak{A}$ в \mathfrak{B} ;
- 2) если $a \in A_f$ содержит $k < 2^{n-i}$ атомов в \mathfrak{A} , то $f(a)$ содержит k атомов в \mathfrak{B} ;
- 3) если $a \in A_f$ содержит $\geq 2^{n-i}$ атомов в \mathfrak{A} , то $f(a)$ содержит $\geq 2^{n-i}$ атомов в \mathfrak{B} .

Так как отображение, состоящее из единственной пары нулей соответствующих алгебр, принадлежит всем множествам $F_i(n)$, то все эти множества непустые.

Покажем, что выполнено условие *) следствия 5.1.2. Пусть $a \in A$, $f \in F_i(n)$, $1 \leq i < n$. Так как A_f конечно, то найдутся такие попарно различные элементы $a_1, \dots, a_k \in A_f$, что $a_1 \cup \dots \cup a_k = 1$ и для любого $b \in A_j$ и любого $i \in \{1, \dots, k\}$ выполняется $b \cap a_i = 0$ или $a_i \leq b$. Пусть $a_i^1 = a_i \cap a$, $a_i^2 = a_i \cap \bar{a}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. В силу свойств 1)–3) для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ найдутся такие $b_i^1, b_i^2 \in B$, что выполнены условия:

- 4) $b_i^1 \cap b_i^2 = 0$, $f(a_i) = b_i^1 \cup b_i^2$;
- 5) для каждого $j \in \{1, 2\}$, если a_i^j содержит $m < 2^{n-i-1}$ атомов в \mathfrak{A} , то b_i^j содержит m атомов в \mathfrak{B} ;
- 6) для каждого $j \in \{1, 2\}$, если a_i^j содержит $\geq 2^{n-i-1}$ атомов в \mathfrak{A} , то b_i^j содержит $\geq 2^{n-i-1}$ атомов в \mathfrak{B} .

Нетрудно понять, что для любого элемента e алгебры $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k, a)$ найдутся такие $s(e), r(e) \subseteq \{1, \dots, k\}$, что

$$e = \bigcup_{i \in s(e)} a_i^1 \cup \bigcup_{i \in r(e)} a_i^2.$$

Следовательно, $a \in \text{dom } g$, и в силу 4), $f \subseteq g$, где

$$g = \left\{ \left\langle \bigcup_{i \in s} a_i^1 \cup \bigcup_{i \in r} a_i^2, \bigcup_{i \in s} b_i^1 \cup \bigcup_{i \in r} b_i^2 \right\rangle \mid s, r \subseteq \{1, \dots, k\} \right\}.$$

Так как пересечение различных элементов вида a_i^j (вида b_i^j) в \mathfrak{A} (в \mathfrak{B}) равно нулю, то из условий 1)–6) вытекает $g \in F_{i+1}(n)$.

Случай $b \in B$ в условии *) рассматривается аналогично, если вместо f рассмотреть f^{-1} . \square

Следствие 8.5.4. Теория любой атомной булевой алгебры \mathfrak{A} разрешима.

Доказательство. Так как для любой конечной алгебраической системы конечной сигнатуры существует алгоритм проверки истинности в ней предложений этой сигнатуры, то теория любой конечной

булевой алгебры разрешима. Так как условие атомности булевой алгебры записывается одним предложением, а условие бесконечности записывается бесконечным множеством аксиом

$$\left\{ \alpha_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i \approx x_j \right) \middle| 2 \leq n \in \omega \right\},$$

то теория бесконечных атомных булевых алгебр перечислима. В силу предыдущей леммы теория бесконечных атомных булевых алгебр полна. Из этих фактов в силу предложения 7.5.8 получаем требуемое утверждение. \square

Следствие 8.5.5. *Если \mathfrak{A} — алгебраическая система и $\text{Th}(\mathfrak{A})$ разрешима, то для любого непустого I теория декартовой степени \mathfrak{A}^I разрешима.*

Доказательство. Пусть Φ — предложение сигнатуры \mathfrak{A} . Применяя предложение 8.5.1, найдем $\Phi^*(y_1, \dots, y_{k_\Phi})$ и $\Phi^1, \dots, \Phi^{k_\Phi}$, для которых

$$\mathfrak{A}^I \models \Phi \iff 2^I \models \Phi^*(I_1, \dots, I_{k_\Phi}), \quad (8.12)$$

где $I_j = \{i \in I \mid \mathfrak{A} \models \Phi^i\}$. Так как $I_j \in \{\emptyset, I\}$, то

$$2^I \models \Phi^*(I_1, \dots, I_{k_\Phi}) \iff 2^I \models \Phi^*(c_1^\Phi, \dots, c_{k_\Phi}^\Phi), \quad (8.13)$$

где $c_i^\Phi \in \{0, 1\}$. Если $\text{Th}(\mathfrak{A})$ разрешима, то существует алгоритм, находящий по Φ константы c_i^Φ , $i \in \{1, \dots, k_\Phi\}$. Из (8.12), (8.13), атомности булевой алгебры 2^I и предыдущего следствия получаем тогда разрешимость $\text{Th}(\mathfrak{A}^I)$. \square

В заключение отметим, что разрешимы теории всех булевых алгебр и любой булевой алгебры. Из последнего результата и предложения 8.5.1 вытекает обобщение следствия 8.5.5: если \mathfrak{A} — алгебраическая система с разрешимой теорией, то любая ее фильтрованная степень \mathfrak{A}^D имеет разрешимую теорию.

§ 8.6. Неразрешимые теории

В настоящем параграфе будет указан один общий метод доказательства неразрешимости элементарных теорий — метод относительной элементарной определимости — и будут даны примеры применений этого метода.

Элементарную теорию T назовем *наследственно неразрешимой*, если любая ее подтеория $T_0 \subseteq T$ является неразрешимой.

Заметим, что если T наследственно неразрешима и $T_0 \subseteq T$ — подтеория, то и T_0 наследственно неразрешима. В терминах классов моделей это свойство может быть сформулировано так: если $K_0 \subseteq K_1$, где K_0 и K_1 — классы моделей одной и той же сигнатуры, и $\text{Th}(K_0)$ наследственно неразрешима, то и $\text{Th}(K_1)$ наследственно неразрешима.

Пусть K_0 — класс алгебраических систем (чисто предикатной конечной) сигнатуры $\sigma_0 = \langle P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k} \rangle$, K_1 — класс алгебраических систем сигнатуры σ_1 . Будем говорить, что класс K_0 относительно элементарно определим в классе K_1 , если существуют такие формулы $\mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{y})$, $\mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^1; \bar{y}^2)$, $\mathfrak{C}_0(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^{n_0}), \dots, \mathfrak{C}_k(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^{n_k})$ сигнатуры σ_1 (здесь и далее $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y}^i = (y_1^i, \dots, y_m^i)$), что для любой алгебраической системы $\mathfrak{M} \in K_0$ найдутся алгебраическая система $\mathfrak{N} \in K_1$ и элементы $a_1, \dots, a_n \in N$, удовлетворяющие условиям:

(1) множество $L = \{\bar{b} \mid \bar{b} \in N^m, \mathfrak{N} \models \mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{b})\}$ непусто;

(2) формула $\mathfrak{B}(\bar{a}; \bar{y}^1; \bar{y}^2)$ задает конгруэнтность η на алгебраической системе \mathfrak{L} сигнатуры σ_0 , основное множество которой есть L , а предикаты определены формулами $\mathfrak{C}_i(\bar{a}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^{n_i})$ (т. е. $\nu^{\mathfrak{L}}(P_i) = \left\{ \langle \bar{b}^1, \dots, \bar{b}^{n_i} \rangle \mid \bar{b}^j \in L, j = 1, \dots, n_i, \mathfrak{N} \models \mathfrak{C}_i(\bar{a}; \bar{b}^1; \dots; \bar{b}^{n_i}) \right\}$);

(3) факторсистема \mathfrak{L}/η изоморфна \mathfrak{M} .

Если формулы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0, \dots, \mathfrak{C}_k$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, то будем говорить, что они относительно элементарно определяют \mathfrak{M} в \mathfrak{N} (класс K_0 в классе K_1).

Если класс K_0 относительно элементарно определим в классе K_1 , то обозначать это будем так: $K_0 \leq_{\text{RED}} K_1$.

Отметим следующие простые свойства введенного понятия:

1. Если $K'_0 \subseteq K_0$, $K_1 \subseteq K'_1$ и $K_0 \leq_{\text{RED}} K_1$, то $K'_0 \leq_{\text{RED}} K'_1$.
2. Если $K_0 \leq_{\text{RED}} K_1$ и $K_1 \leq_{\text{RED}} K_2$, то $K_0 \leq_{\text{RED}} K_2$.

Основой метода доказательства неразрешимости — метода относительно элементарной определимости — является следующая

Теорема 8.6.1. *Если элементарная теория $\text{Th}(K_0)$ класса K_0 наследственно неразрешима и $K_0 \leq_{\text{RED}} K_1$, то и теория $\text{Th}(K_1)$ класса K_1 также наследственно неразрешима.*

Доказательство. Пусть формулы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0, \dots, \mathfrak{C}_k$ относительно элементарно определяют класс K_0 в K_1 и $\text{Th}(K_0)$ наследственно неразрешима..

Для любой формулы $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ сигнатуры σ_0 эффективно построим формулу $\bar{\varphi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s)$ сигнатуры σ_1 по следующим правилам:

если $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ есть $y_i \approx y_j$, то $\bar{\varphi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s) = \mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^i; \bar{y}^j)$;

если $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ есть $P_i(y_{l_1}, \dots, y_{l_{n_i}})$, то $\overline{\varphi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s) = \mathfrak{C}_i(\bar{x}; \bar{y}^{l_1}; \dots; \bar{y}^{l_{n_i}});$

если $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ есть $\varphi_0(y_1, \dots, y_s)\tau\varphi_1(y_1, \dots, y_s)$ ($\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$), то $\overline{\varphi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s) = (\overline{\varphi_0}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s)\tau\overline{\varphi_1}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s));$

если $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ есть $\neg\psi(y_1, \dots, y_s)$, то $\overline{\varphi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s) = \neg\psi(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s);$

если $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ есть $\exists y_{s+1}\psi(y_1, \dots, y_s, y_{s+1})$ ($\forall y_{s+1}\psi(y_1, \dots, y_s, y_{s+1})$), то $\overline{\varphi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s) = \exists y_1^{s+1} \dots \exists y_m^{s+1}(\mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{y}^{s+1}) \wedge \overline{\psi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s; \bar{y}^{s+1}))$ ($\forall y_1^{s+1} \dots \forall y_m^{s+1}(\mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{y}^{s+1}) \rightarrow \overline{\psi}(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^s; \bar{y}^{s+1}))$).

Пусть $\mathfrak{D}(\bar{x}) = \mathfrak{D}(x_1, \dots, x_n)$ — следующая формула:

$$\begin{aligned} & \exists \bar{y} \mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{y}) \wedge \forall \bar{y}^0 \forall \bar{y}^1 \forall \bar{y}^2 \left[\left(\bigwedge_{i \leq 2} \mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{y}^i) \rightarrow \mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^0, \bar{y}^0) \right) \wedge \right. \\ & \wedge (\mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^0; \bar{y}^1) \rightarrow \mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^1; \bar{y}^0)) \wedge (\mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^0; \bar{y}^1) \wedge \\ & \wedge \mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^1; \bar{y}^2)) \rightarrow \mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^0; \bar{y}^2)) \Big] \wedge \bigwedge_{i \leq k} \left[\forall \bar{y}^1 \dots \forall \bar{y}^{n_i} \forall \bar{z}^1 \dots \right. \\ & \dots \forall \bar{z}^{n_i} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} (\mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{y}^j) \wedge \mathfrak{A}(\bar{x}; \bar{z}^j) \wedge \mathfrak{B}(\bar{x}; \bar{y}^j; \bar{z}^j)) \wedge \right. \right. \\ & \left. \left. \wedge \mathfrak{C}_i(\bar{x}; \bar{y}^1; \dots; \bar{y}^{n_i}) \right) \rightarrow \mathfrak{C}_i(\bar{x}; \bar{z}^1; \dots; \bar{z}^{n_i}) \right) \Big], \end{aligned}$$

где $\forall \bar{y}$ ($\exists \bar{y}$) означает $\forall y_1 \dots \forall y_m$ ($\exists y_1 \dots \exists y_m$). Формула \mathfrak{D} выражает требования на «параметры» \bar{x} удовлетворять условиям (1) и (2) из определения относительной элементарной определимости.

Для любого предложения φ сигнатуры σ_0 пусть $\varphi^* = \forall x_1 \dots \forall x_n(\mathfrak{D}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \overline{\varphi}(\bar{x}))$. Установим следующий факт.

Множество $T^* = \{\varphi \mid \varphi — \text{предложение сигнатуры } \sigma_0, \varphi^* \in \text{Th}(K_1)\}$ является такой теорией сигнатуры σ_0 , что $T^* \subseteq \text{Th}(K_0)$.

Действительно, обозначим через K_0^* класс таких алгебраических систем \mathfrak{M} сигнатуры σ_0 , что для \mathfrak{M} существуют алгебраическая система $\mathfrak{N} \in K_1$ и элементы $a_1, \dots, a_n \in N$, удовлетворяющие условиям (1)–(3) в определении относительной элементарной определимости. Тогда по условию теоремы $K_0 \subseteq K_0^*$. А из определения отображения $*$ следует, что $\varphi \in \text{Th}(K_0^*) \iff \varphi^* \in \text{Th}(K_1)$ для любого предложения φ сигнатуры σ_0 .

Отмеченная эквивалентность вытекает из следующего общего утверждения, проверяемого индукцией по сложности формулы φ :

Пусть $\mathfrak{N} \in K_1$ и $a_1, \dots, a_n \in N$ таковы, что $\mathfrak{N} \models \mathfrak{D}(\bar{a})$. Пусть алгебраическая система \mathfrak{L} и конгруэнтность η определены, как в (2). Тогда для любых $\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^s \in L$ и формулы $\varphi(y_1, \dots, y_s)$ сигнатуры σ_0 имеет место эквивалентность

$$\mathfrak{L}/\eta \models \varphi\left(\bar{b}^1/\eta, \dots, \bar{b}^s/\eta\right) \iff \mathfrak{N} \models \bar{\varphi}\left(\bar{a}; \bar{b}^1; \dots; \bar{b}^s\right).$$

Поэтому $T^* = \text{Th}(K_0^*)$, и так как $K_0 \subseteq K_0^*$, то $T^* \subseteq \text{Th}(K_0)$.

Если бы теория $\text{Th}(K_1)$ была разрешима, то эквивалентность $\varphi \in T^* \iff \varphi^* \in \text{Th}(K_1)$ и эффективность отображения $\varphi \mapsto \varphi^*$ дали бы нам эффективную процедуру разрешимости для теории T^* . Но наследственная неразрешимость теории $\text{Th}(K_0)$ и включение $T^* \subseteq \text{Th}(K_0)$ влекут неразрешимость T^* и, следовательно, неразрешимость $\text{Th}(K_1)$.

Если теория T_1^* сигнатуры σ_1 содержится в $\text{Th}(K_1)$ и K_1^* — класс всех систем \mathfrak{M} таких, что $\mathfrak{M} \models T_1^*$, то $K_1 \subseteq K_1^*$. Согласно замечанию выше из $K_0 \leq_{\text{RED}} K_1$ следует $K_0 \leq_{\text{RED}} K_1^*$, тогда в силу доказанного выше (заменив K_1 на K_1^*) теория $T_1^* = \text{Th}(K_1^*)$ неразрешима. Итак, $\text{Th}(K_1)$ наследственно неразрешима. \square

Доказанная теорема является весьма мощным редукционным методом доказательства неразрешимости. Последующие примеры демонстрируют возможности этого метода применительно к различным классам теорий.

Теорию T_G сигнатуры $\langle \Pi^2 \rangle$, определенную аксиомой $\forall x (\neg \Pi(x, x) \wedge \forall y (\Pi(x, y) \rightarrow \Pi(y, x)))$, назовем *теорией графов* (без петель). Модели теории T_G назовем *графами*. Если $\mathfrak{G} = \langle G, P \rangle \models T_G$ — граф, то элементы G называются *вершинами* графа, а пары $\langle g_1, g_2 \rangle \in P$ — *ребрами*.

Предложение 8.6.2. Для любых натуральных чисел $n > 3$ и $k > 0$ существует конечный граф $\mathfrak{G}_{n,k} = \langle G, Q \rangle$, в котором относительно элементарно определима любая модель \mathfrak{M} мощности n и конечной предикатной сигнатуре σ такой, что все предикатные символы в σ не более чем k -местные.

Доказательство. Пусть $S = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $K = \bigcup_{i=1}^k S^i$ — множество всех непустых кортежей над S длины, не превосходящей k ; $R = \bigcup_{i=1}^k P(S^i)$ — множество всех не более чем k -местных предикатов над S положительной местности; $G = S \cup K \cup R$ — множество вершин искомого графа $\mathfrak{G}_{n,k}$.

Если $\kappa = \langle j_1, j_2, \dots, j_i \rangle \in S^i \subset K$ ($1 \leq i \leq k$) — кортеж длины $|\kappa| = i$, то положим $h(\kappa) = j_1$, $t(\kappa) = \langle j_2, \dots, j_i \rangle$ (значение $t(\kappa)$ не определено, если $i = 1$). Пусть

$$Q_0 = \{ \langle i, j \rangle \mid i \neq j, 0 \leq i, j < n \},$$

$$Q_1 = \{ \langle \kappa, h(\kappa) \rangle, \langle h(\kappa), \kappa \rangle \mid \kappa \in K \} \cup \{ \langle \kappa, t(\kappa) \rangle, \langle t(\kappa), \kappa \rangle \mid \kappa \in K, |\kappa| > 1 \},$$

$$Q_2 = \{ \langle P, \kappa \rangle, \langle \kappa, P \rangle \mid P \in P(S^i), \kappa \in P, 1 \leq i \leq k \};$$

$$Q = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 — множество ребер графа \mathfrak{G}_{n,k}.$$

Из определения видно, что $\mathfrak{G}_{n,k} \models T_G$.

Отметим ряд свойств графа $\mathfrak{G}_{n,k}$, легко вытекающих из определения.

1. Если $\kappa, \kappa' \in K$ и $|\kappa| = |\kappa'|$, то $\langle \kappa, \kappa' \rangle \notin Q$.

2. Если $P \in R$, $g, g' \in G$ и $\langle P, g \rangle, \langle P, g' \rangle \in Q$, то $g, g' \in K$ и $|g| = |g'|$.

3. Если $g_0, g_1, g_2 \in G$ и $\langle g_i, g_j \rangle \in Q$ для всех $0 \leq i < j < 3$, то $g_0, g_1, g_2 \notin R$.

Действительно, если, например, $g_0 \in R$, то по свойству 2 справедливо $g_1, g_2 \in K$ и $|g_1| = |g_2|$, а это противоречит свойству 1 в силу $\langle g_1, g_2 \rangle \in Q$.

4. Если $\kappa \in K$, $g \in G \setminus R = S \cup K$ и $\langle \kappa, g \rangle \in Q$, то либо $g = h(\kappa)$ ($g \in S$), либо $g = t(\kappa)$, либо $\kappa = t(g)$ ($g \in K$).

Лемма 8.6.3. Если $g_0, g_1, g_2, g_3 \in G$ и $\langle g_i, g_j \rangle \in Q$ для всех $0 \leq i < j < 4$, то $g_0, g_1, g_2, g_3 \in S$.

Доказательство. Предположим, что вершины $g_0, g_1, g_2, g_3 \in G$ таковы, что $\langle g_i, g_j \rangle \in Q$ для всех $0 \leq i < j < 4$. В силу свойства 3 справедливо $g_i \notin R$, $i < 4$. Предположим, что $g_0 \in K$. Не уменьшая общности, можно считать, что $|g_0| \geq |g_i|$ при $g_i \in K$, $0 < i < 4$. По свойству 4 имеем либо $g_i = h(g_0)$, либо $g_i = t(g_0)$ (случай $g_0 = t(g_i)$ невозможен по предположению $|g_0| \geq |g_i|$), $i = 1, 2, 3$, т. е. $g_1, g_2, g_3 \in \{h(g_0), t(g_0)\}$. Отсюда $g_i = g_j$ для некоторых $0 < i < j < 4$, но это противоречит предположению $\langle g_i, g_j \rangle \in Q$. Лемма доказана. \square

Следствие 8.6.4. Формула $\mathfrak{A}(x_0) \Rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \left(\bigwedge_{0 \leq i < j < 4} \Pi(x_i, x_j) \right)$ истинна в $\mathfrak{G}_{n,k}$ в точности на элементах множества S . \square

Заметим, что формула $\mathfrak{B}(x_0, x_1) \Rightarrow \neg \Pi(x_0, x_1)$ определяет на S отношение равенства.

Для $1 \leq l < k$ рассмотрим формулу

$$\mathfrak{C}_l(x_1, \dots, x_l; y_0, y_1, \dots, y_{l-1}) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^l \mathfrak{A}(x_i) \wedge$$

$$\wedge \exists z_0 \dots \exists z_{l-1} \left(\bigwedge_{i < l} \Pi(y_i, z_i) \wedge \bigwedge_{i < l-1} \Pi(z_i, z_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i < l} \Pi(z_i, x_{i+1}) \right).$$

Лемма 8.6.5. Для любых $P \in P(S^l)$, $i_1, \dots, i_l \in S$, $1 \leq l < k$, справедлива следующая эквивалентность:

$$\mathfrak{G}_{n,k} \models \mathfrak{C}_l(i_1, \dots, i_l; P, S^{l-1}, \dots, S^1) \Leftrightarrow \kappa = \langle i_1, \dots, i_l \rangle \in P.$$

Доказательство. Предположим, что $i_1, \dots, i_l \in S$, $P \in P(S^l)$ и $\mathfrak{G}_{n,k} \models \mathfrak{C}_l(i_1, \dots, i_l; P, S^{l-1}, \dots, S^1)$. Пусть вершины $g_0, \dots, g_{l-1} \in G$ таковы, что

$$\mathfrak{G}_{n,k} \models \Pi(P, g_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-1} \Pi(S^{l-i}, g_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-1} \Pi(g_{i-1}, g_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{l-1} \Pi(g_j, i_{j+1}).$$

Так как $\langle P, g_0 \rangle \in Q$, то $g_0 \in P$; так как $\langle g_0, i_1 \rangle \in Q$, $g_0 \in K$, $i_1 \in S$, то $i_1 = h(g_0)$; так как $g_1 \in S^{l-1}$ и $\langle g_1, g_0 \rangle \in Q$, то $g_1 = t(g_0)$; из $\langle g_1, i_2 \rangle \in Q$ следует, что $i_2 = h(g_1) = h(t(g_0))$. Далее аналогично доказывается, что для любого $0 < j < l - 1$ справедливо $g_{j+1} = t(g_j)$ и $i_{j+1} = h(g_j)$. Итак, $g_0 \in P$, $g_1 = t(g_0), \dots, g_{l-1} = t(g_{l-2})$; $i_1 = h(g_0), i_2 = h(g_1), \dots, i_l = h(g_{l-1})$. Отсюда, как нетрудно видеть, следует, что $g_0 = \langle i_1, i_2, \dots, i_l \rangle$ и $\kappa = \langle i_1, \dots, i_l \rangle = g_0 \in P$.

Обратно, если $\kappa = \langle i_1, \dots, i_l \rangle \in P$, то, полагая $g_0 = \kappa$, $g_1 = t(g_0), \dots, g_{l-1} = t(g_{l-2})$, получаем

$$\mathfrak{G}_{n,k} \models \bigwedge_{j=1}^l \mathfrak{A}(i_j) \wedge \Pi(P, g_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-1} \Pi(S^{l-i}, g_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-1} \Pi(g_{i-1}, g_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{l-1} \Pi(g_j, i_{j+1}),$$

т. е. $\mathfrak{G}_{n,k} \models \mathfrak{C}_l(i_1, \dots, i_l; P, S^{l-1}, \dots, S^1)$. Лемма доказана. \square

Пусть $\sigma = \langle \Pi_0^{l_0}, \dots, \Pi_s^{l_s} \rangle$, $l_i \leq k$, $i \leq s$, — некоторая предикатная сигнатура, $\mathfrak{M} = \langle S, P_0, \dots, P_s \rangle$ — модель сигнатуры σ ($S = \{0, 1, \dots, n-1\}$). Тогда легко проверить, используя лемму 8.6.5, что формулы $\mathfrak{A}(x_0)$, $\mathfrak{B}(x_0, x_1)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_i(x_0, \dots, x_{l_i-1}, z_0, \dots, z_s, y_1, \dots, y_{k-1}) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{C}_{l_i}(x_0, \dots, x_{l_i-1}; z_i, y_{l_i-1}, y_{l_i-2}, \dots, y_1), \end{aligned}$$

$0 \leq i \leq s$, относительно элементарно определяют модель \mathfrak{M} в графе $\mathfrak{G}_{n,k}$, если в качестве параметров взять предикаты $P_0, \dots, P_s, S^1, \dots, S^{k-1} \in R$. \square

Равномерный характер относительной элементарной определимости, указанный в доказательстве предложения 8.6.2, позволяет получить в виде следствия

Предложение 8.6.6. Любой класс K конечных моделей мощности ≥ 4 конечной предикатной сигнатуры относительно элементарно определим в классе G_{fin} конечных графов (даже в классе $\{\mathfrak{G}_{n,k} \mid n \geq 4, k \geq 0\}$). \square

В качестве следствия предложения 8.6.6 установим важную для дальнейших приложений теорему.

Теорема 8.6.7. Класс G_{fin} всех конечных графов имеет наследственно неразрешимую теорию (даже в языке без равенства).

Доказательство. По предложению 7.5.13 класс $K_4 = \{\Omega_n^\pi \mid n \geq 4\}$ имеет наследственно неразрешимую теорию. Тогда теорема 8.6.1 и предложение 8.6.9, примененные к классу K_4 , дают заключение теоремы. \square

Теорема 8.6.7 будет использована далее для доказательства неразрешимости ряда интересных алгебраических теорий.

Отметим также одно несложное, но принципиальное следствие теоремы 8.6.7.

Теорема 8.6.8. Если сигнатура σ содержит по крайней мере один предикатный символ местности ≥ 2 или по крайней мере один функциональный символ местности ≥ 2 , то исчисление предикатов сигнатуры σ неразрешимо.

Доказательство. Неразрешимость исчисления предикатов сигнатуры $\langle \Pi^2 \rangle$ следует из наследственной неразрешимости теории конечных графов (теорема 8.6.7).

Пусть $P \in \sigma$ — k -местный предикатный символ, $k > 2$. Тогда класс K_2 всех моделей сигнатуры $\langle \Pi^2 \rangle$ относительно элементарно определим в классе K_σ всех моделей сигнатуры σ формулами

$$\mathfrak{A}(y) \rightleftharpoons y \approx y,$$

$$\mathfrak{B}(y_1, y_2) \rightleftharpoons y_1 \approx y_2,$$

$$\mathfrak{C}(y_1, y_2) \rightleftharpoons P(y_1, y_2, y_2, \dots, y_2).$$

Пусть $f \in \sigma$ — k -местный функциональный символ, $k \geq 2$. Тогда класс K_2 относительно элементарно определим в классе K_σ всех моделей сигнатуры σ формулами

$$\mathfrak{A}(x, y) \rightleftharpoons \neg x \approx y,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(x, y_1, y_2) &\rightleftharpoons y_1 \approx y_2, \\ \mathfrak{C}(x, y_1, y_2) &\rightleftharpoons f(y_1, y_2, y_2, \dots, y_2) \approx x.\end{aligned}$$

Действительно, пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P \rangle$ — модель из класса K_2 , и предположим, что элемент $*$ не принадлежит M . На множестве $M' = M \cup \{*\}$ определим модель \mathfrak{M}' сигнатуры σ , полагая

$$f^{\mathfrak{M}'}(a_1, a_2, \dots, a_k) \rightleftharpoons \begin{cases} *, & \text{если } \langle a_1, a_2 \rangle \in \Pi^{\mathfrak{M}}, \\ a_1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$g^{\mathfrak{M}'}(a_1, a_2, \dots, a_l) \rightleftharpoons *$ для любого функционального символа $g \in \sigma \setminus \{f\}$, $Q^{\mathfrak{M}'} \rightleftharpoons \emptyset$ для любого предикатного символа Q из σ . Легко проверить, что формулы $\mathfrak{A}(x, y)$, $\mathfrak{B}(x, y_1, y_2)$ и $\mathfrak{C}(x, y_1, y_2)$ определяют модель \mathfrak{M} в модели \mathfrak{M}' при подстановке вместо x параметра $*$. \square

Предложение 8.6.9. Класс Eq_2 всех конечных моделей теории T_1 двух эквивалентностей, т. е. теории сигнатуры $\langle \eta_0^2, \eta_1^2 \rangle$ определенной аксиомой, утверждающей, что η_0 и η_1 являются отношениями эквивалентности, имеет наследственно неразрешимую теорию (в языке без равенства).

Докажем это, установив, что класс G_{fin} (из теоремы 8.6.7) относительно элементарно определим в Eq_2 .

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P \rangle \in G_{\text{fin}}$; определим по \mathfrak{M} алгебраическую систему $\mathfrak{N} = \langle N, \eta_0, \eta_1 \rangle \in \text{Eq}_2$ так:

$$N = M \cup P;$$

$$\begin{aligned}\eta_0^{\mathfrak{N}} &= \{ \langle x, x \rangle \mid x \in N \} \cup \{ \langle x, \langle x, y \rangle \rangle \mid x \in M, \langle x, y \rangle \in P \} \cup \\ &\quad \cup \{ \langle \langle x, y \rangle, x \rangle \mid x \in M, \langle x, y \rangle \in P \} \cup \\ &\quad \cup \{ \langle \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \rangle \mid x \in M, \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in P \}; \\ \eta_1^{\mathfrak{N}} &= \{ \langle x, x \rangle \mid x \in N \} \cup \{ \langle \langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \rangle \mid \langle x, y \rangle \in P \}.\end{aligned}$$

Полагаем

$$\mathfrak{A}(y) = \eta_0(y, y); \quad \mathfrak{B}(y_1, y_2) = \eta_0(y_1, y_2);$$

$$\mathfrak{C}(y_1, y_2) = \neg \eta_0(y_1, y_2) \wedge \exists z_1 \exists z_2 (\eta_0(y_1, z_1) \wedge \eta_0(y_2, z_2) \wedge \eta_1(z_1, z_2)).$$

Тогда, как нетрудно проверить, формулы \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} относительно элементарно определяют \mathfrak{M} в \mathfrak{N} и, следовательно, G_{fin} в Eq_2 . \square

Предложение 8.6.10. Класс LEq всех конечных моделей теории T_2 отношения линейного порядка и эквивалентности (сигнатуры $\langle \leqslant, \eta \rangle$) имеет наследственно неразрешимую теорию.

Докажем это, установив, что Eq_2 относительно элементарно определим в LEq .

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \eta_0, \eta_1 \rangle \in \text{Eq}_2$; определим по \mathfrak{M} алгебраическую систему $\mathfrak{N} = \langle N, \leq, \eta \rangle \in \text{LEq}$ так:

Пусть M_1, \dots, M_k — все попарно различные классы η_1 -эквивалентных элементов из M . Пусть $N = M \cup \{a_0, \dots, a_k\}$, $a_i \notin M$, $i \leq k$; зададим на N линейный порядок \leq так, чтобы было выполнено условие $M_i = \{a \mid a \in M, a_{i-1} \leq a \leq a_i\}$, $i = 1, \dots, k$; отношение эквивалентности η на N задаем так, что $\{a_0, \dots, a_k\}$ образует один класс η -эквивалентных элементов, а ограничение η на M совпадает с η_0 .

Полагаем

$$\mathfrak{A}(x, y) = \neg \eta(x, y);$$

$$\mathfrak{B}(x, y_1, y_2) = y_1 \leq y_2 \wedge y_2 \leq y_1;$$

$$\mathfrak{C}_0(x, y_1, y_2) = \eta(y_1, y_2);$$

$$\mathfrak{C}_1(x, y_1, y_2) = \forall u(\eta(x, u) \rightarrow (u \leq y_1 \leftrightarrow u \leq y_2)).$$

Тогда легко проверить, что \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C}_0 , \mathfrak{C}_1 определяют \mathfrak{M} в \mathfrak{N} , когда в качестве значения параметра x взято a_0 . Отсюда $\text{Eq}_2 \leq_{\text{RED}} \text{LEq}$. \square

Предложение 8.6.11. Класс L_2 всех конечных моделей теории T_2 двух линейных порядков (сигнатура $\langle \leq_0, \leq_1 \rangle$) имеет наследственно неразрешимую теорию.

Покажем, что $\text{LEq} \leq_{\text{RED}} L_2$. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \leq, \eta \rangle \in \text{LEq}$; определим по \mathfrak{M} алгебраическую систему $\mathfrak{N} = \langle N, \leq_0, \leq_1 \rangle \in L_2$ так:

Пусть M_1, \dots, M_k — все попарно различные классы η -эквивалентных элементов из M . Пусть $N = M \cup \{a_0, \dots, a_k\}$, $a_i \notin M$, и \leq_1 — линейный порядок на N такой, что $M_i = \{a \mid a \in M, a_{i-1} \leq_1 a \leq_1 a_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Линейный порядок \leq_0 на N таков, что любой элемент из $\{a_0, \dots, a_k\}$ меньше любого элемента из M , а на M порядок \leq_0 совпадает с \leq . Пусть b — наименьший элемент в M относительно порядка \leq .

Полагаем

$$\mathfrak{A}(x, y) = x \leq_0 y;$$

$$\mathfrak{B}(x, y_1, y_2) = y_1 \leq_0 y_2 \wedge y_2 \leq_0 y_1;$$

$$\mathfrak{C}_0(x, y_1, y_2) = y_1 \leq_0 y_2;$$

$$\mathfrak{C}_1(x, y_1, y_2) = \forall u((u \leq_0 x \wedge \neg(x \leq_0 u)) \rightarrow (u \leq_1 y_1 \leftrightarrow u \leq_1 y_2)).$$

Если в качестве значения параметра x взять элемент b , то \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C}_0 , \mathfrak{C}_1 относительно элементарно определяют \mathfrak{M} в \mathfrak{N} , следовательно, и $\text{LEq} \leq_{\text{RED}} L_2$. \square

Предложение 8.6.12. Класс Sym всех конечных симметрических групп имеет наследственно неразрешимую теорию.

Докажем это, установив, что Eq_2 относительно элементарно определим в Sym.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \eta_0, \eta_1 \rangle \in \text{Eq}_2$, и предположим, что $|M| \geq 3$. Пусть m_0, \dots, m_k — все различные элементы из M , а $\mathfrak{N} = \text{Sym}(M)$ — группа всех перестановок множества M .

Возьмем $a_0 = (m_0, m_1)$, $a_1 = (m_0, m_2) \in N$; a_2 и a_3 выбираем в \mathfrak{N} так, что циклы подстановок a_2 и a_3 отвечают классам эквивалентных элементов η_0 и η_1 соответственно.

Рассмотрим множество $L = \{\langle a, b \rangle \mid \text{существует } h \in N \text{ такой, что } a = a_0^h \text{ и } b = a_1^h\}$. Нетрудно проверить, что L состоит из всех пар транспозиций, имеющих общий элемент.

Сопоставим паре $\langle a, b \rangle \in L$ элемент $\varphi(a, b) \in M$, являющийся общим элементом транспозиции: например, $\varphi((m_0, m_1), (m_0, m_2)) = m_0$. Заметим, что отношение эквивалентности \sim на L , определенное отображением φ (т. е. $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \iff \varphi(a, b) = \varphi(c, d)$), может быть определено и так:

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \iff \forall h (a^h = a \rightarrow (cb^h)^3 = (db^h)^3 = e).$$

Заметим, что если $\langle a, b \rangle \in L$, $m = \varphi(a, b)$, $h \in N$, то $\varphi(a^h, b^h) = h(m)$ (где $z^h = h^{-1}zh$).

Определим на $\text{Sym}(M)$ отношение частичного порядка \leqslant так:

$$h_0 \leqslant h_1 \iff \forall m \in M (h_0(m) = m \vee h_0(m) = h_1(m)).$$

Единица e группы \mathfrak{N} является наименьшим элементом; минимальными элементами множества $N \setminus \{e\}$ являются в точности циклические подстановки.

С каждым элементом $h \in N$ можно связать следующее отношение эквивалентности η_h на M : $\eta_h = \{\langle m, m \rangle \mid m \in M\} \cup \{\langle m_0, m_1 \rangle \mid m_0, m_1 \in M\}$, существует минимальный элемент h_0 в $N \setminus \{e\}$ такой, что $h_0 \leqslant h$ и $h_0(m_0) \neq m_0$, $h_0(m_1) \neq m_1$.

Из выбора элементов a_2, a_3 следует, что $\eta_{a_2} = \eta_0$, $\eta_{a_3} = \eta_1$.

Запишем теперь следующие формулы в языке теории групп:

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) = \exists z (y_1 \approx z^{-1}x_1z \wedge y_2 \approx z^{-1}x_2z);$$

$$\mathfrak{B}(\bar{x}, y_1, y_2, y_3, y_4) = \forall h (h^{-1}y_1h \approx y_1 \rightarrow (y_3h^{-1}y_2h)^3 \approx (y_4h^{-1}y_2h)^3 \approx e);$$

$$\mathfrak{C}_0(\bar{x}, y_1, y_2, y_3, y_4) = \exists z (z \leqslant x_3 \wedge \neg z \approx e \wedge \forall u (u \leqslant z \rightarrow (u \approx e \vee u \approx z)) \wedge$$

$$\wedge (\mathfrak{B}(\bar{x}, y_1, y_2, y_3, y_4) \vee (\neg \mathfrak{B}(\bar{x}, y_1, y_2, y_1^z, y_2^z) \wedge \neg \mathfrak{B}(\bar{x}, y_3, y_4, y_3^z, y_4^z)))),$$

где $z \leqslant x$ означает

$$\forall y_1 \forall y_2 (\mathfrak{A}(\bar{x}, y_1, y_2) \rightarrow \mathfrak{B}(\bar{x}, y_1, y_2, y_1^z, y_2^z) \vee \mathfrak{B}(\bar{x}, y_1^z, y_2^z, y_1^x, y_2^x));$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1(\bar{x}, y_1, y_2, y_3, y_4) = & \exists z (z \leqslant x_4 \wedge \neg z \approx e \wedge \forall u (u \leqslant z \rightarrow (u \approx e \vee u \approx z)) \wedge \\ & \wedge (\mathfrak{B}(\bar{x}, y_1, y_2, y_3, y_4) \vee (\neg \mathfrak{B}(\bar{x}, y_1, y_2, y_1^z, y_2^z) \wedge \neg \mathfrak{B}(\bar{x}, y_3, y_1, y_3^z, y_4^z))). \end{aligned}$$

Если «параметрам» x_1, x_2, x_3, x_4 присвоить значения a_0, a_1, a_2, a_3 соответственно, то формула \mathfrak{A} определит множество L ; \mathfrak{B} задает на L отношение \sim , а \mathfrak{C}_0 и \mathfrak{C}_1 определят на L/\sim отношения эквивалентности $\varphi^{-1}(\eta_0)$ и $\varphi^{-1}(\eta_1)$ соответственно. Проведенное рассмотрение показывает, что формулы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1$ относительно элементарно определяют класс Eq₂ в Sym. \square

Следствие 8.6.13. Класс конечных групп имеет наследственно неразрешимую теорию.

Следствие 8.6.14. Класс всех групп имеет наследственно неразрешимую теорию.

Другие примеры разрешимых и неразрешимых теорий приведены в обзоре: Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории // Успехи математических наук. — 1965. — Т. 20, № 4. С. 37–108. В этом обзоре, в частности, отмечено, что исчисление предикатов для сигнатуры одной одноместной функции разрешимо, а если сигнатуре σ содержит по крайней мере два одноместных функциональных символа, то исчисление предикатов сигнатуры σ неразрешимо.

Предметный указатель

- АГ** 317
Автоморфизм 95
Аксиома 22
 - ИП $^\Sigma$ 114
 - ИП $^\Sigma_1$ 135
 - ИПЧ 140
 - выбора 70, 90
 - исчисления 17
 - исчисления G 215
 - регулярности 81
 - экстенсиональности 60**Аксиомы булевых алгебр** 68
Алгебра булева 68
 - атомная 330
 - — всех подмножеств 68**Алгебраическая система** 94
 - \varkappa -насыщенная 181
 - каноническая 165
 - насыщенная 178
 - ограниченная 198
 - однородная 176
 - универсальная 178**Алгебраические системы изоморфные** 95
 - элементарно эквивалентные 144**Алгоритм** 11
 - не применимый к объекту 251**Алфавит** 14
 - ИВ 19
 - исчисления 17
 - исчисления G 215
 - исчисления LG 54**Антецедент** 216
Арифметика 97
 - натуральных чисел 97**Ассоциативность** 16
Атом булевой алгебры 78

Базис для системы 189
Буква 13
- Буква алфавита** 14
 - входящая в слово 15**Булева алгебра** 68
 - — атомная 330
 - — всех подмножеств 68
 - комбинация 301, 315
 - сложность формулы 217
Вершина 335
Вхождение буквы в слово 15
 - переменной
 - — свободное 102
 - — связанное 102
 - подслова 15
 - секвенции I_1 в дереве выше секвенции I_2 217
 - секвенции в дерево 24
 - символа в формулу
 - — отрицательное 169
 - — положительное 169
 - слова первое 15
 - — последнее 15**Выход формулы из множества формул**
 - в ИП $^\Sigma_1$ 136
 - в ИВ $_1$ 47**Высказывание** 18
Высота дерева 25
 - секвенции в дереве 25
Главная формула правила 216
Гомоморфизм 94
Грань верхняя 65
 - — наименьшая 65
 - — нижняя 65
 - — наибольшая 66**Граф** 97, 335
График 16
Группа 97
 - p -делимая 321

- Группа абелева 97
 — базисная 325
 — подстановок 97
- Д.** н. ф. 35, 126
- Декартова n -степень множества 61
- Декартово произведение множеств 61
 — семейства множеств 107
 — систем 108
- Дерево 24
 — вывода 25
 — доказательства секвенции в ИП $^\Sigma$ 116
- Диагональ 62
- Диаграмма алгебраической системы 150
 — полная 150
 — множества в алгебраической системе 150
 — полная 150
- Дизъюнктивная нормальная форма 35, 126
- Дизъюнкция 19
 — элементарная 35
- Дистрибутивность 16
- Длина абстрактного слова 15
 — кортежа 61
 — последовательности 15
 — слова 14
- Доказательство 10
 — в ИП $^\Gamma$ 136
 — в ИПЧ 140
 — в виде дерева 25, 245
 — — в ИП $^\Sigma$ 116
 — закодированное парой чисел 289
 — из множества предложений 289
 — линейное в ИП $^\Sigma$ 115
 — — в ИВ 24
 — формулы в ИВ₁ 47
- Дополнение элемента 66
- З**аключение 216
 — правила 18
- Замена вхождения подслова 15
- Значение алгоритма на объекте 251
 — истинности формулы на наборе 40
 — отображения на элементе 16, 64
 — терма 100
- И**В 19
- ИПЧ 139
- Идемпотентность 16
- Изоморфизм 73, 95
 — частичный 144
 — — конечный 145
- Импликация 19
- Инварианты Шмелевой 319
 — совпадающие 319
- Индекс группы в группе 312
 — подгруппы 312
- Интерпретация ИВ 38
 — — в булевой алгебре 75
 — — главная 39
 — — переменных 100
 — — сигнатуры в сигнатуре 141
- Истинность формулы на алгебраической системе при интерпретации 103
- Исчисление 17
 — G 215
 — G_0 54
 — ИВ $^{(\rightarrow)}$ 50
 — ИВ $^{(\rightarrow,\vee)}$ 52
 — высказываний (ИВ) 19
 — высказываний гильбертовского типа (ИВ₁) 46
 — независимое 45
 — непротиворечивое 38
 — — по отношению к семантике 44
 — неразрешимое 44
 — полное по отношению к семантике 44
 — предикатов гильбертовского типа 135
 — — сигнатуры Σ 114
 — — чистое 139
 — разрешимое 44
 — резольвент 245

Исчисление резольвент для исчисления предикатов 247
 — — пропозициональное 245

К. н. ф. 35

Кардинал 83

Квазивывод в ИВ₁ формулы из множества гипотез 48

— секвенции в ИВ в виде дерева 26
 — — линейный 26

Квазимногообразие 157

Квазитождество 157

Квантор всеобщности 101

— существования 101

Класс 109

— алгебраических систем

 Э-аксиоматизируемый 155

— — \forall -аксиоматизируемый 155

— — $\forall\exists$ -аксиоматизируемый 155

— — χ -категоричный 183

— — аксиоматизируемый 152

— — замкнутый 110, 153

— — категоричный в мощности 183

— конечно аксиоматизируемый 154

— относительно элементарно определимый 333
 — смежности подгруппы 312

— эквивалентности 63

Кольцо целых чисел 97

Команда 294

Комбинация булева 301, 315

Коммутативность 16

Композиция отношений 62

Конгруэнтность 172

Константа 93

— логическая 19

— на множестве 64

Континуум 327

Конъюнктивная нормальная форма 35

Конъюнкция 19

— элементарная 35

Кортеж 15, 61

Линейные порядки, имеющие одинаковые концы 98

Матрица 126

Машина Тьюринга 294

— вычисляющая функцию 296

— не применимая к слову 296

— переводящая слово α в слово β 295

— преобразующая слово α в слово β 295

Мера сложности формулы 305

Местность операции 16

— частичной функции 253

Метаязык 30

Механизм совместности 164

— сигнатуры Σ 164

— — без равенства 167

Многообразие 157

Множества линейно упорядоченные изоморфные 73

— равномощные 80

Множество 13

— m -сводящееся 282

— аксиом для класса 153

— исчисления 17

— алгебраических систем направленное 96

— — элементарно направленное 149

— атомно минимальное 189

— бесконечное 85

— вполне упорядоченное 71

— выражений исчисления 17

— гипотез 47, 136

— доказуемых выражений 18

— замкнутое относительно операции 64

— кардинально упорядоченное 72

— конечное 14, 84

— линейно упорядоченное 65, 97

— натуральных чисел 60

— предложений перечислимое 283

— — полное 133

— регулярное 87

- Множество свободных переменных
секвенции 118
— формулы 102
— счетное 84
— теорем исчисления 18
— транзитивное 81
— формул выполнимое 112
— локально выполнимое 112
— непротиворечивое 128
— несовместное 128
— противоречивое 128
— совместное 128
— центрированное 77
— в булевой алгебре 77
— частично упорядоченное 65, 97
— фундированное 68
- Множество-степень 17**
- Модель множества формул 112
— теории 176
- Монотонность $\Phi^{(u)}$ 196
- Мощности множеств равные 80
- Мощность алгебраической системы
94
- множества 84
- Н. в. г. 65**
- Н. н. г. 66**
- Набор упорядоченный 60, 61
- Надсистема 95
- Натуральное число 82
- Начало слова 15
- Носитель 94
- Нумерация гёделева 267
— множества 85
- Обеднение системы 96**
- Область действия вхождения квантора 102
— значений 63
— определения 63
- Обогащение системы 96
- Образ гомоморфный 94
— множества при отображении 64
- Объединение множеств 16, 17
— систем 96
- Ограничение отношения на множество 63
— отображения на множество 64
— сигнатуры на множество 94
- Оператор минимизации 298
— примитивной рекурсии 298
— регулярной суперпозиции 297
- Операция n -местная 16, 63
— частичная 16
— тождественная на множестве 64
- Ординал 81
— конечный 82
— меньший ординала 83
— предельный 82
- Основа тавтологии 116
- Остаток от деления 305
- Отношение 61
— n -местное 61
— антисимметричное 62
— обратное 61
— рефлексивное 62
— симметричное 62
— транзитивное 62
- Отображение 16, 63
— арности 93
— биективное 63
— взаимно однозначное 63
— инъективное 63
— местности 93
— множества в множество 63
— — на множество 63
— разнозначное 63
— сюръективное 63
- Отрезок начальный 69
— замкнутый 69
— открытый 69
— собственный 69
- Отрицание 19
- Пара 16**
- упорядоченная 61
- Парadox Рассела 8
— лжеца 12
- Переменная 99

- Переменная входящая в формулу
 — свободно 102
 — — связанно 102
 — для формул 22
 — исчезающая в переходе 218
 — — правильно 218
 — пропозициональная 19
- Пересечение множеств 16, 17
- Перестановка 216
- Переход 24
 — существенный 55
- Периодическая часть 322
- Подгруппа p -базисная 321
 — p -сервантная 321
- Поддерево 218
- Подмножество 14
- Подсистема 95
 — порожденная множеством 95
 — собственная 95
 — элементарная 147
- Подслово 15
- Подстановка 29
- Подформула 19, 101
 — обобщенная 217
- Поле алгебраически замкнутое 303
- Порядок линейный 65, 97
 — плотный 98
 — частичный 65, 97
- Последовательность 15
 — определяющая 298
 — пустая 15
- Посылка 216
- Посылка правила 18
- Потомок 217
- Правило n -посыпочное 18
 — вывода ИП $^\Sigma$ 115
 — — ИП $^\Sigma_1$ 136
 — — ИВ 22
 — — исчисления 17
 — — исчисления резольвент 247
 — — независимое 45
 — — основное 24, 216
 — — структурное 24, 216
 — перестановки 216
 — утончения 216
- Предикат 61
 — σ -формульный 202
- Предложение 104
 — n -общезначимое 105
 — интерполирующее для пары 170
 — сохраняющееся при гомоморфиз-
 — — мах 172
- Предок 217
- Представитель абстрактной буквы
 13
 — слова 14
- Пренексная н. ф. 128
- Пренексная нормальная форма 126
- Приведенная н. ф. 128
- Приведенная нормальная форма 127
- Применение правила 24
- Принцип Δ_0 -ограниченности 198
 — Σ -ограниченности 200
 — Σ -параметризации 213
 — Σ -рефлексии 198
 — кардинального упорядочения 73
 — максимума 70, 90
 — полного упорядочения 71, 90
 — потенциальной осуществимости
 — 251
 — трансфинитной индукции 68
- Приставка кванторная 126
- Проблема разрешимости исчисления
 44
- Программа 294
- Проекция 61
 — декартова произведения 107
- Произведение множеств декартово
 61
 — — фильтрованное 107
 — отношений 62
 — семейства множеств декартово
 — 107
 — систем декартово 108, 109
 — — — прямое 108, 109
 — — — фильтрованное 108
- Пропозициональная форма формулы
 244
- Прямое произведение систем 108

- Равенство** 101
Разбиение множества 63
Размерность базисная 325
— группы 319
Разность множеств 16
Разрешимая проблема элементарных индексов 315
Ранг множества 87
Расширение *LG* 54
— исчисления консервативное 50
— концевое 192
— языка 18
Ребро 335
Решетка 66
— булева 66
— дистрибутивная 66
- Свойство чистоты переменных** 217
Связка логическая 19
Секвенция ИП $^\Sigma$ 114
— — тождественно истинная 119
— ИВ 21
— ИПЧ 140
— доказуемая 122
— — в ИП $^\Sigma$ 116
— — в ИВ 24
— — в исчислении предикатов 122
— истинная в алгебраической системе при интерпретации 119
— исчисления *G* 215
— — *LG* 54
— ложная в алгебраической системе 119
— получаемая из секвенций по правилу 24, 115
— тождественно истинная 40
Семантика исчисления 39
Сигнатура 93
— абелевых групп 314
— групповая 97
— класса 153
— колец с единицей 97
— предикатная 94
— пустая 94
— содержащаяся в сигнатуре 94
- Сигнатура функциональная** 94
Символ 13
— вспомогательный 19
— константы 93
— логический 19
— операции 93
— отношения 93
— предиката 93
— предикатный *n*-местный 93
— — позитивно входящий в формулу 209
— пропозициональной переменной 99
— равенства 101
— следования 19
— функции 93
— функциональный *n*-местный 93
— — имеющий связанное вхождение в формулу 234
Синтаксис исчисления 39
Система 94
— аксиом Цермело–Френкеля 89
— — для теории 161, 283
— алгебраическая 94
— единичная 158
— порожденная множеством 96
Системы изоморфные 95
Скулемизация сигнатуры 162
— — полная 163
— системы 162
— — полная 163
— теории 162
— — полная 163
Следствие формулы на алгебраической системе 194
— семантическое 195
Слова равные 14
Слово 15
— абстрактное 14
— в алфавите 14
— конкретное 14
— машинное 295
— — тупиковое 295
— пустое 14
Сложность булева 217

- Совершенная д. н. ф. 36
 — к. н. ф. 36
- Соединение абстрактных слов 15
- Список формул 245
- Степень полинома 304
 — фильтрованная 108
- Стратегия поиска 250
- Сукцедент 216
- Схема аксиом ИВ 22
 — — независимая 45
 — секвенций ИВ 22
 — секвенций, доказуемая в ИВ 26
 — формул ИВ 22
- Тавтология** 116
- Тезис Тьюринга 297
 — Черча 298
- Теорема ИП $^\Sigma$ 116
 — ИП $^\Sigma_1$ 136
 — Гёделя о неполноте 283, 290
 — — о полноте 132
 — Ганди 261
 — — общая форма 264
 — ИВ 24
 — Кантора 80
 — Кантора — Бернштейна 80
 — Рыль-Нардзевского 183
 — Тарского о неопределимости истиности в Ω 276
 — Чёрча 283
 — Эбррана 243
 — интерполяционная Крейга–Линдона 170
 — компактности 112
 — о Σ -определимости истинности Σ -формул 268
 — о Σ_n -определимости истинности Σ_n -формул 276
 — о дедукции 137
 — о существовании модели 129
 — об иерархии 276
 — об опускании типов 168
 — об униформизации 279
 — об устранении сечения 225
- Теорема полноты исчисления предикатов 119
- Теория 144, 161, 283
 — Э-аксиоматизируемая 161
 — \forall -аксиоматизируемая 161
 — $\forall\exists$ -аксиоматизируемая 161
 — АЗП 303
 — ВЗП 310
 — вещественно замкнутых полей 310
 — графов 335
 — доказательств 11
 — категоричная в мощности 183
 — класса 153, 283
 — моделей 11
 — модельно полная 161
 — наследственно неразрешимая 283, 332
 — непротиворечивая 283
 — неразрешимая 283
 — полная 161, 283
 — разрешимая 283
 — с элиминацией квантов 161
 — сигнатуры Σ 161
 — универсально аксиоматизируемая 161
 — элементарная 144, 161
 — — класса 153
- Терм 99, 100
 — базисный 164
 — замкнутый 99
 — константный 99
 — свободный для переменной 217
- Тип вполне упорядоченного множества 83
 — набора 176
- Тождество 157
- Тройка 16
- Ультрафильтр** 77
- Условие несмешанности переменных 215
- Утончение 216
- Факторсистема** 172

- Фильтр Фреше 76
 — булевой алгебры 76
 — главный 78
 — на множестве 76
 — счетно полный 79, 181
 Формула 100, 101
 — ИП $^\Sigma$ 114
 — ИП $^\Sigma_1$ 135
 — ИВ 19
 — ИПЧ 140
 — атомарная 19, 101
 — атомная 101
 — базисная второго рода 320
 — — первого рода 320
 — бескванторная 101
 — выводимая из множества гипотез в ИП $^\Sigma_1$ 136
 — — в ИВ $_1$ 47
 — выполнимая в системе 104
 — главная 216
 — доказуемая в ИП $^\Sigma$ 116
 — — в ИП $^\Sigma_1$ 136
 — — в ИВ $_1$ 47
 — — в ИВ 24
 — замкнутая 104
 — истинная в алгебраической системе 103
 — — на наборе 40
 — исчисления G 215
 — исчисления резольвент 247
 — ложная в алгебраической системе 103
 — — на наборе 40
 — находящаяся в нормальной форме 305
 — общезначимая 104
 — отмеченная 237
 — отрицательная 175
 — позитивно примитивная 314
 — положительная 172
 — получаемая заменой связанной переменной 125
 — пропозиционального исчисления резольвент 245
 — специальная 238
- Формула тождественно истинная 40, 104
 — тождественно ложная 40
 — фильтрующаяся 110
 — — условно 110
 — элементарная 19
 Формулы \mathcal{A} -эквивалентные 195
 — конгруэнтные 125
 — относительно элементарно определяющие класс в классе 333
 — — систему в системе 333
 — пропозиционально эквивалентные 123
 — семантически эквивалентные 195
 — эквивалентные 30, 122
 — — в ИП $^\Sigma_1$ 137
 — — относительно теории 161
 Функция 63
 — σ -формульная 203
 — базисная 298
 — истинностная 40
 — полученная минимизацией 259, 298
 — — примитивной рекурсией 259, 298
 — — регулярной суперпозицией 297
 — рекурсивная 298
 — характеристическая 260
 — — частичная 260
 — частичная 252
 — — k -местная 253
 — — всюду определенная 253
 — — вычислимая по Тьюрингу 296
 — — не определенная на наборе 253
 — — нигде не определенная 253
 — частично рекурсивная 298
- Характеризация вполне упорядоченных множеств 72**
 — дедуктивная 43
 — семантическая 43
- Цепь 70**
 — отмеченная 70

- Ч. у. м. 65
Частный случай
— правила 24
— схемы 22
Часть периодическая 322
Число натуральное 60, 82
Член дизъюнктивный 33
— конъюнктивный 33
— последовательности 15
- Эквивалентность 62
Элемент 13
— класса 109
— наибольший 65
— наименьший 65
— последовательности 15
— принадлежащий классу 109
Эрбранова форма 243
- Язык исчисления 18**

Указатель обозначений

$\text{Deg}_x t$	304	$D\text{-prod } \mathfrak{A}_i$	108
(BC)	62	$D^*(\mathfrak{A})$	150
(BCD)	62	$D^*(\mathfrak{A}, X)$ множества X в \mathfrak{A}	150
$(\Phi)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$	114	$E(I)$	17
$(\Phi)_X^\Psi$	21	E_R	63
$(\Phi)_{s(P_0), \dots, s(P_n)}^{P_0, \dots, P_n}$	29	E_Σ	158
$(\Phi \wedge \Psi)$	19	E_x	63
$(\Phi \vee \Psi)$	19	F	93
$(\Phi \rightarrow \Psi)$	19	$F(\Sigma)$	100
(n, m) -изоморфизм	146	$FV(C)$	118
(p, n) -размерность базисная второго рода	325	$FV(\Phi)$	102, 191
— первого рода	325	$FV(t)$	99
— третьего рода	325	$F^{(\rightarrow)}$	52
$(t)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$	119	F_0	29
+ 97		F_x	306
— 97		$F_n(\Sigma)$	175
$0^\mathfrak{A}$	66	F_{Σ_n}	277
$1^\mathfrak{A}$	66	G	267
2	328	$G \triangleright \Phi$	136
2^I	328	G_0	54
$2^I/D$	328	$H \triangleright \Phi$	47
< 83		$H_1 + a$	312
$A(I)$	17	$I\text{-prod } X_i$	107
$A[k]$	319	$I\text{-prod } \mathfrak{A}_i$	108
$A \leqslant_m B$	282	I_m^n	298
A^n	61	$I_0 < I_1$	50
A_1	284	I_1/D	328
$A_1 \times \dots \times A_n$	61	$I_k^n(i_0, \dots, i_{n-1})$	253
A_1^*	283, 284	K -система	185
A_1^π	290	$K(\Phi)$	33, 110
$B(x, y, z)$	256	K_+	185
$B \cdot C$	62	K_+ -система	185
B^{-1}	61	$K_0 \leqslant_{\text{RED}} K_1$	333
$B^{\Omega_1}[x, y, z]$	256	K_S	294
$D(\Phi)$	33	$K_\Sigma(Z)$	153
$D(\gamma)$	110	$K_\Sigma(\emptyset)$	154
$D(\mathfrak{A})$	150	K_∞	160, 183
$D(\mathfrak{A}, X)$	150	K_∞ -система	185
$D\text{-prod } X_i$	107	$L(I)$	18
		$L(I_1) \subseteq L(I_2)$	18

LG	54	$[\Phi_1 : \Phi_2, A]$	315
$M(\alpha) = \beta$	295	X	19
$M^n(f)$	298	$\bigwedge^n \Gamma$	245
$O(a_0)$	69	$\bigwedge_{i=1}^n \Phi_i$	34
$O(a_0, \mathfrak{A})$	69	Δ -предикат	206
$O[a_0, \mathfrak{A}]$	69	Δ_0 -формула	191
$O[a_0]$	69	Δ_n -предикат	276
$P(B)$	68	Δ_{n+1} -формула	275
$P(X)$	17	\sim^D	107
$P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	145	Γ	21
R	93	$\Gamma(x, y)$	257
$R(I)$	17	$\Gamma \vdash \Psi$	21
$R(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$	248	$\Gamma \vdash \Theta$	215
$R(f, g)$	298	Γ_g	253
$R^{n+1}(f, g)$	298	Λ	14, 15
R_E	63	$Mod(A)$	283
$R_P(\Gamma_0; \dots; \Gamma_n)$	245	Ω	252
$S(P_1, \dots, P_k)$	40	Ω^*	261
$S(X)$	97	Ω^π	290
$S(\mathfrak{A})$	99	Ω_1	256
$S[P_1, \dots, P_k]$	40	Ω'_1	257
$S^{k,n}(f, g_0, \dots, g_n)$	297	Ω_2	257
$T(A)$	322	Φ	19
$T(I)$	18	$\Phi(P^+)$	209
$T(\Sigma)$	99	$\Phi(P_1, \dots, P_k)$	40
$T(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n)$	176	$\Phi(\mathfrak{A}, \overline{a})$	185
T^S	162	$\Phi(t_1, \dots, t_n)$	114
T^{cS}	163	$\Phi(x_1, \dots, x_n)$	103
T_∞	183	$\Phi[P_1, \dots, P_k]$	40
U^{k+1}	278	$\Phi[\delta_1, \dots, \delta_k] = \delta$	40
V	29, 99	$\Phi \equiv \Psi$	30, 122
$X = Y$	14	$\Phi \equiv_S \Psi$	195
$X = \{a_1, \dots, a_n\}$	14	$\Phi \equiv_{\mathfrak{A}} \Psi$	195
$X \cap Y$	16	Φ^\neg	164
$X \cup Y$	16	$\Phi \equiv^{\perp} \Psi$	137
$X \setminus Y$	16	$\Phi \equiv^s \Psi$	123
$X \subseteq Y$	14	$\Phi \sim \Psi$	125
X_1^n	16	$\Phi \equiv^T \Psi$	161
$X_1, \dots, X_n \rightarrow Y$	38	$\Phi \implies_S \Psi$	194
$X_1 \times \dots \times X_n$	16	$\Phi \implies_{\mathfrak{A}} \Psi$	195
$[H : H_1]$	312	Φ^0	41
$[H : H_1] = \infty$	312	Φ^1	41
$[H_1 : H_2]$	312	Φ^*	245
$[\Phi : \Psi] \geq n$	316	Φ^δ	26
$[\Phi]_y^x$	114		

- $\Phi^{\mathfrak{A}}[\bar{y}]$ 202
 $\Phi^{(u)}$ 196
 $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ 21
 $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n$ 34
 $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_n$ 34
 Φ_H 243
 Φ_P 244
 $\Phi_n, \dots, \Phi_n \vdash \Psi$ 114
 Ψ 19
 Ψ_{Φ} 266
 RQ-формула 191
 — позитивная 209
 $\text{Sh}(A_1) = \text{Sh}(A_2)$ 319
 Σ 93
 Σ -подмножества Δ -нетривиальные 282
 Σ -предикат 206
 — универсальный для k -местных Σ -предикатов 278
 Σ -формула 192
 Σ -функция 206
 — частичная 253
 — — универсальная для k -местных частичных Σ -функций 278
 $\Sigma(\Phi)$ 101
 $\Sigma \upharpoonright X$ 94
 $\Sigma \subseteq \Sigma_1$ 94
 Σ^+ 314
 $\Sigma^+(\Phi)$ 169
 $\Sigma^-(\Phi)$ 169
 Σ^C 164
 Σ^S 162
 Σ^{cS} 163
 Σ_0 -формула 275
 Σ_n -предикат 276
 Σ_{n+1} -формула 275
 $\text{Th}(K)$ 153, 283
 $\text{Th}(\mathfrak{A})$ 144
 Tr 276
 Tr_{Φ} 265
 Tr_{Σ} 268
 Tr_{Σ_n} 276
 $\alpha(\mathfrak{A})$ 83
 $\alpha + 1$ 82
 $\alpha\beta$ 15
- $\alpha \xrightarrow{M} \beta$ 295
 α/b 295
 α^a 295
 α_a 295
 $\alpha_{p,n,k}$ 319
 $\alpha_{p,n}(A)$ 319
 ≈ 101
 β 256
 $\beta(\Phi)$ 217
 $\beta < \alpha$ 83
 $\beta \leqslant \alpha$ 83
 $\beta_p(A)$ 319
 $\beta_{p,n,k}$ 319
 $\bigcap X$ 17
 $\bigcap_{i \in J} X_i$ 17
 $\bigcup X$ 17
 $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ 96
 $\bigcup_{i \in J} X_i$ 17
 $\bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$ 94
 $\bigvee_{i=1}^n \Phi_i$ 34
 $\bigcap_{i=1}^6$ 66
 ch 260
 χ_Q^* 260
 χ_Q 260
 \wedge 19, 39
 $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ 15
 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ 61
 $\langle \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n \rangle$ 176
 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ 61
 \cup 66
 \Leftarrow 191
 δ_Q 278
 δ_g 253
 $\dim A$ 319
 \vee 19, 39
 $\text{dom } f$ 63
 \emptyset 14, 15, 245
 $\exists x$ 101
 \exists 101
 \exists -формула 154
 $\exists \bar{x}$ 237
 $\exists_m x \Phi(x)$ 301

$\forall x$	101	\neg	19, 39
\forall	101	$\neg\Phi$	19
\forall -формула	154	$\neg\Theta$	57
$\forall\exists$ -формула	154	$\nu(f)$	253
$\gamma_p(A)$	319	$\nu^{\mathfrak{A}}$	94
$\gamma_{p,n,k}$	319	ω	14, 60
id_A	62	ω_1	181
\iff	7	\overline{K}	154
$\rightarrow Y$	38	\bar{a}	66
\rightarrow	19, 38, 39	\bar{t}	237
$\inf(A_1, \mathfrak{A})$	66	\overline{w}	185
ИП^Σ	114	$\overline{w} \in A$	185
ИП_1^Σ	135	\overline{z}	237
$\lambda x\Gamma(n_0, x)$	265	$\overline{\text{sg}}$	265
\leqslant	68, 191	$\overline{X_i}$	17
\mathfrak{A}	94	$\overline{\delta}$	41
$\mathfrak{A} \restriction \Sigma_1$	96	∂t	304
$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$	144	$\partial_x t$	304
$\mathfrak{A} \leqslant_{\text{end}} \mathfrak{B}$	192	$\pi_i^n X$	61
$\mathfrak{A} \models C[\gamma]$	119	$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$	109
$\mathfrak{A} \models \Phi$	104	$\text{rang } f$	63
$\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n)$	104	$\triangleright \Phi$	136
$\mathfrak{A} \models \Phi[\gamma]$	103	sg	265
$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$	95	σ^*	261
\mathfrak{A}/E	172	σ_0	252
$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$	95	σ_0^π	290
\mathfrak{A}^S	162	σ_1	256
\mathfrak{A}^{cs}	163	σ_2	257
\mathfrak{A}_X	150	\square	7
$\mathfrak{A}_{i_1} \times \dots \times \mathfrak{A}_{i_n}$	109	$\sup(A_1, \mathfrak{A})$	65
\mathfrak{B}	94	$\tau(\Psi)$	302
$\mathfrak{B}(X)$	95	$\text{ИВ}^{(\rightarrow)}$	50
$\mathfrak{B}(a_1, \dots, a_n)$	96	$\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee)}$	52
$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$	147	$\text{ИВ}^{(\rightarrow, \vee, \neg)}$	59
\mathfrak{B}^D	108	ИВ_1	46
\mathfrak{B}^I	108	ИВ_2	50
$\mathfrak{B}_n(T)$	175	\implies	7
\mathfrak{F}	19, 100	$\theta(i)$	253
Fr_F	277	\underline{c}_m	96
Sub	277	\underline{f}_k	96
Sen	277	\underline{r}_n	96
$\max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$	83	$\varepsilon(A)$	319
\models	103	$\varepsilon(X)$	81
$\mu y H(\bar{x}, y))$	259	ε_n	319
μ	94		