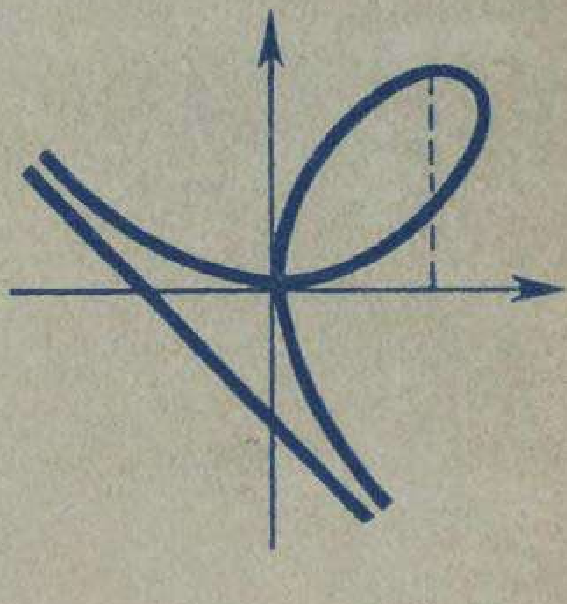
Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА



ТОМ 1

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для механико-математических факультетов
государственных университетов и учебного пособия
для физико-математических факультетов
педагогических институтов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Предел функции

§ 2. Теоремы о пределах

§ 3. Монотонная функция

§ 4. Число *e*

§ 5. Принцип сходимости

§ 6. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших величин

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОСНОВНЫХ ИДЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Основы математического анализа» задуманы как учебник анализа для студентов первого и второго курсов математических отделений университетов; в соответствии с этим и книга делится на два тома. При составлении ее был широко использован мой трехтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления», но содержащийся в нем материал подвергся сокращению и переработке в целях приближения книги к официальной программе по математическому анализу и к фактическим возможностям лекционного курса.

Мои установки и задачи, которые я перед собой ставил, характеризуются следующим.

1. Главную свою задачу я видел в *систематическом* и — по возможности — *строгом* изложении основ математического анализа. Я считаю изложение материала в *логической* последовательности обязательным для учебника, для того чтобы перед глазами учащихся знания располагались в определенной системе.

Такое построение учебника, впрочем, не исключает возможности для лектора в отдельных случаях — по соображениям педагогическим — отступать от строгой систематичности (а, может быть, даже облегчает ему эту возможность). Я сам, например, в лекционном курсе обычно несколько отодвигаю такие трудные для начинающего вещи, как теория вещественных чисел, принцип сходимости или свойства непрерывных функций.

2. Вместе с тем курс математического анализа не должен представляться учащемуся лишь длинной цепью «определений» и «теорем», но должен служить руководством к действию. Студентов нужно научить применять эти теоремы на практике, помочь им овладеть вычислительным аппаратом анализа. Хотя эта задача в большей мере падает на упражнения по анализу, но и изложение теоретического материала я сопровождаю примерами, по необходимости — в небольшом

числе, но подобранными так, чтобы подготовить учащихся к сознательной работе над упражнениями.

3. Известно, какие замечательные и разнообразные приложения имеет математический анализ как в самой математике, так и в смежных областях знания; с этим студенты много раз будут сталкиваться впоследствии. Но самая мысль о связи математического анализа с другими математическими дисциплинами и с потребностями практики должна быть усвоена учащимися уже при изучении основ анализа. Вот почему везде, где это представляется возможным, я привожу примеры применения анализа не только в геометрии, но и в механике, физике и технике.

4. Вопрос о доведении аналитических выкладок до числа имеет в равной мере принципиальное и прикладное значение. Так как «точное» или «в конечном виде» решение задач анализа возможно лишь в простейших случаях, то приобретает важность ознакомление учащихся с использованием приближенных методов и с составлением приближенных формул. Этому в книге также уделено внимание.

5. Хотелось бы сделать немногие пояснения относительно самого изложения. Прежде всего коснусь понятия предела, которое занимает центральное место среди основных понятий анализа и проходит буквально через весь курс, появляясь притом в различных формах. Последнее обстоятельство выдвигает задачу — установить единство всех разновидностей предела. Это не только принципиально важно, но и практически необходимо, дабы не строить всякий раз наново теории пределов. Для достижения этой цели есть два пути: либо сразу дать самое общее определение предела «направленной переменной» (например, следуя Шатуновскому и Муру — Смиту), либо же сводить всякий предел к простейшему случаю — пределу переменной, пробегающей занумерованную последовательность значений. Первая точка зрения недоступна начинающему, поэтому я остановился на второй: определение каждого нового вида предела дается, прежде всего, с помощью предела последовательности и лишь затем — «на языке ε-δ».

6. Отмечу еще одну деталь изложения: во втором томе, говоря о криволинейных и поверхностных интегралах, я провожу различие между криволинейными и поверхностными «интегралами первого типа» (точные аналоги обыкновенного и двойного интегралов по неориенти-

рованным областям) и такими же «интегралами второго типа» (где аналогия уже частично исчезает). На опыте я многократно убеждался в том, что такое различение способствует лучшему усвоению и удобно для приложений.

7. В виде небольшого дополнения к программе я включил в книгу краткое ознакомление с эллиптическими интегралами (так часто встречающимися на практике) и в нескольких случаях даю задачи, приводящие именно к эллиптическим интегралам. Пусть этим будет разрушена вредная иллюзия, воспитываемая решением одних лишь простых задач, будто результаты аналитических выкладок непременно должны быть «элементарными»!

8. В разных местах книги читатель найдет замечания историко-математического характера. Кроме того, первый том завершается «Историческим очерком возникновения основных идей математического анализа», а в конце второго тома помещен «Очерк дальнейшего развития математического анализа». Конечно, все это вовсе не призвано подменить историю математического анализа, с которой учащиеся ознакомятся впоследствии в общем курсе «истории математики». Если в первом из упомянутых очерков затрагивается самый генезис понятий, то исторические замечания имеют целью создать у читателей хотя бы общую ориентацию в хронологии важнейших событий из истории анализа.

В тесной связи с только что сказанным, я обращаюсь теперь с предупреждением непосредственно к читателю — учащемуся. Дело в том, что порядок изложения в книге связан с современными требованиями к математической строгости, созревавшими в течение длительного времени, и поэтому, естественно, отклоняется от того пути, по которому исторически математический анализ развивался. Как говорит Маркс: «...историческое развитие всех наук только через множество перекрещивающихся и окольных путей приводит к их действительной исходной точке. В отличие от других архитекторов, наука... возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем она заложила его фундамент» *).

С подобным положением вещей читатель столкнется при изучении анализа с самого же начала: первая глава книги посвящена

*) К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения (изд. 1935 г.), т. XII, ч. I, стр. 44.

«вещественным числам», третья — «теории пределов», и лишь с пятой главы начинается систематическое изложение дифференциального и интегрального исчисления. Исторически же порядок был как раз обратным: дифференциальное и интегральное исчисление зародилось в XVII веке и развивалось в XVIII веке, находя себе многочисленные и важные приложения; теория пределов стала фундаментом для математического анализа в начале XIX века, а лишь во второй его половине была создана отчетливая концепция вещественного числа, обосновывающая наиболее тонкие положения самой теории пределов.

Эта книга подытоживает мой многолетний опыт преподавания математического анализа в Ленинградском университете. Да будет она полезна советской молодежи!

Г. М. Фихтенгольц

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. МНОЖЕСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО УПОРЯДОЧЕНИЕ

1. Предварительные замечания. Из школьного курса читателю хорошо знакомы рациональные числа и их свойства. В то же время уже потребности элементарной математики приводят к необходимости расширения этой числовой области. Действительно, среди рациональных чисел не существует зачастую корней даже из целых положительных (натуральных) чисел, например $\sqrt{2}$, т. е. *нет такой рациональной дроби* $\frac{p}{q}$, *где* p *и* q — *натуральные числа, квадрат которой был бы равен* 2.

Для доказательства этого допустим противное: пусть существует такая дробь $\frac{p}{q}$, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Мы вправе считать эту дробь несократимой, т. е. p и q лишенными общих множителей. Так как $p^2 = 2q^2$, то p есть число четное: $p = 2r$ (r — целое) и, следовательно, q — нечетное. Подставляя вместо p его выражение, найдем $q^2 = 2r^2$, откуда следует, что q — четное число. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Одновременно с этим, если бы мы оставались в области одних лишь рациональных чисел, в геометрии заведомо не все отрезки могли бы быть снабжены длинами. В самом деле, рассмотрим квадрат со стороной, равной единице длины. *Его диагональ не может иметь рациональной длины* $\frac{p}{q}$, ибо в противном случае по теореме Пифагора квадрат этой длины был бы равен 2, что, как мы видели, невозможно.

В настоящей главе мы ставим себе задачей расширить область рациональных чисел, присоединив к ним числа новой природы — иррациональные.

В математической практике иррациональные числа фактически начинают появляться — под видом выражений, содержащих радикалы, — еще в средние века, но настоящими числами их не считали. В XVII веке метод координат, созданный Декартом *), с новой силой поднял вопрос о численном

*) Рене Декарт (1596—1650) — знаменитый французский философ и ученый.

выражении геометрических величин. Под влиянием этого постепенно стала созревать идея о равноправии иррациональных и рациональных чисел; она нашла себе окончательную формулировку в определении (положительного) числа, которое дал Ньютон *) в своей «Всеобщей арифметике» (1707) **):

«Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

При этом целые и дробные числа выражают величины, соизмеримые с единицей, а иррациональные — несоизмеримые с единицей.

Математический анализ, зародившийся в XVII веке и бурно развивавшийся в течение всего XVIII века, долго довольствовался этим определением, несмотря на то, что оно было чуждо арифметике и оставляло в тени важнейшее свойство расширенной числовой области — ее непрерывность (см. ниже n° 5). Критическое направление в математике, которое возникло в конце XVIII и в начале XIX века, выдвинуло требование точного определения основных понятий анализа и строгого доказательства его основных положений. Это, в свою очередь, скоро сделало необходимым построение логически безупречной теории иррациональных чисел на основе чисто арифметического их определения. В семидесятых годах прошлого столетия было создано несколько таких теорий, различных по форме, но по существу равносильных. Все они определяют иррациональное число, ставя его в связь с тем или другим бесконечным множеством рациональных чисел.

2. Определение иррационального числа. Мы изложим теорию иррациональных чисел, следуя Дедекинду ***). В основе этой теории лежит понятие о сечении в области рациональных чисел. Рассмотрим разбиение множества всех рациональных чисел на два непустых (т. е. действительно содержащих хоть по одному числу) множества A, A'; иными словами, мы предполагаем, что:

1°. *Каждое рациональное число попадает в одно, и только в одно из множеств A или A'.*

Мы будем называть такое разбиение сечением, если выполняется еще условие:

2°. *Каждое число a множества A меньше каждого числа a' множества A'.*

Множество A называется нижним классом сечения, множество A' — верхним классом. Сечение будем обозначать $A|A'$.

Из определения сечения следует, что всякое рациональное число, меньшее числа a нижнего класса, также принадлежит нижнему классу. Аналогично всякое рациональное число, большее числа a' верхнего класса, и само принадлежит верхнему классу.

Примеры. 1) Определим A как множество всех рациональных чисел a, удовлетворяющих неравенству $a < 1$, а к множеству A' отнесем все числа a', для которых $a' \geqslant 1$.

---

*) Исаак Ньютон (1642—1727) — величайший английский физик и математик.

**) Имеется русский перевод: «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе» (АН СССР, 1948); см. стр. 8.

***) Рихард Дедекинд (1831—1916) — немецкий математик.

Легко проверить, что таким образом мы действительно получим сечение. Число единица принадлежит классу A' и является, очевидно, в нем наименьшим числом. С другой стороны, нет наибольшего числа в классе A, так как, какое бы число a из A мы ни взяли, всегда можно указать рациональное число a_1, лежащее между ним и единицей, следовательно, бóльшее a и тоже принадлежащее классу A.

2) К нижнему классу A отнесем все рациональные числа a, меньшие или равные единице: $a \leqslant 1$; к верхнему — рациональные числа a', бóльшие единицы: $a' > 1$.

Это также будет сечение, причем здесь в верхнем классе нет наименьшего числа, а в нижнем есть наибольшее (именно, единица).

3) Отнесем к классу A все положительные рациональные числа a, для которых $a^2 < 2$, число нуль и все отрицательные рациональные числа, а к классу A' — все положительные рациональные числа a', для которых $a'^2 > 2$.

Как легко убедиться, мы опять получили сечение. Здесь ни в классе A нет наибольшего числа, ни в классе A' — наименьшего. Докажем, например, первое из этих утверждений (второе доказывается аналогично). Пусть a — любое положительное число класса A, тогда $a^2 < 2$. Покажем, что можно подобрать такое целое положительное n, что

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

так что и число $a+\frac{1}{n}$ будет принадлежать классу A.

Это неравенство равносильно таким:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < 2,$$

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < 2-a^2.$$

Последнее неравенство и подавно будет выполнено, если n удовлетворит неравенству $\frac{2a+1}{n} < 2-a^2$, для чего достаточно взять

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

Итак, каково бы ни было положительное число a из класса A, в этом же классе A найдется большее его число; так как для чисел $a \leqslant 0$ это утверждение непосредственно очевидно, то никакое число класса A не является в нем наибольшим.

Легко понять, что *не может существовать сечение, для которого одновременно в нижнем классе нашлось бы наибольшее число a_0, а в верхнем классе — наименьшее a'_0.* Пусть, в самом деле, такое сечение существует. Возьмем тогда любое рациональное число c, заключающееся между a_0 и a'_0, $a_0 < c < a'_0$. Число c не может принадлежать классу A, ибо иначе a_0 не было бы наименьшим числом в этом классе, и по аналогичной причине c не может принадлежать классу A', а это противоречит свойству 1° сечения, входящему в определение этого понятия.

Таким образом, сечения могут быть только трех видов, иллюстрируемых как раз примерами 1), 2), 3):

1) либо в нижнем классе A нет наибольшего числа, а в верхнем классе A' есть наименьшее число r;

2) либо в нижнем классе A имеется наибольшее число r, а в верхнем классе A' нет наименьшего;

3) либо, наконец, ни в нижнем классе нет наибольшего числа, ни в верхнем классе — наименьшего.

В первых двух случаях мы говорим, что сечение производится рациональным числом r (которое является пограничным между классами A и A') или что сечение определяет рациональное число r. В примерах 1), 2) таким числом r была единица. В третьем случае пограничного числа не существует, сечение не определяет никакого рационального числа. Введем теперь новые объекты — иррациональные числа, условившись говорить, что *всякое сечение вида* 3) *определяет некоторое иррациональное число* α. Это число α заменяет недостающее пограничное число, мы как бы вставляем его между всеми числами a класса A и всеми числами a' класса A'. В примере 3) это вновь созданное число, как легко догадаться, и будет $\sqrt{2}$.

Не вводя для иррациональных чисел никаких однотипных обозначений*), мы неизменно будем связывать иррациональное число α с тем сечением $A|A'$ в области рациональных чисел, которое его определяет.

Для однообразия нам часто удобно будет то же сделать и по отношению к рациональному числу r. Но для каждого числа r существуют два определяющих его сечения: в обоих случаях числа $a < r$ относятся к нижнему классу, числа же $a' > r$ — к верхнему, но само число r можно по произволу включить либо в нижний класс (тогда r там будет наибольшим), либо в верхний (и r там будет наименьшим). Для определенности мы условимся раз навсегда, говоря о сечении, определяющем рациональное число r, включать это число в верхний класс.

Числа рациональные и иррациональные получили общее название вещественных (или действительных) чисел. Понятие веще-

*) Речь идет о конечных обозначениях; со своего рода бесконечными обозначениями иррациональных чисел читатель познакомится в n° 4. Чаще всего индивидуально заданные иррациональные числа обозначают в зависимости от их происхождения и роли: $\sqrt{2}$, $\lg 5$, $\sin 10°$ и т. п.

ственного числа является одним из основных понятий математического анализа, как и всей математики вообще.

3. Упорядочение множества вещественных чисел. *Два иррациональных числа α и β, определяемых, соответственно, сечениями $A|A'$ и $B|B'$, считаются равными в том и только в том случае, если эти сечения тождественны;* впрочем, достаточно потребовать совпадения нижних классов A и B, ибо верхние классы A' и B' тогда совпадут сами собой. Это определение можно сохранить и в случае, когда числа α и β рациональны. Иными словами, *если два рациональных числа α и β равны, то определяющие их сечения совпадают, и, обратно, из совпадения сечений вытекает равенство чисел* α и β. При этом, разумеется, следует учесть условие, заключенное выше насчет рациональных чисел.

Перейдем теперь к установлению понятия «больше» по отношению к вещественным числам. Для рациональных чисел это понятие уже известно из школьного курса. Для рационального числа r и иррационального числа α понятие «больше» было, собственно, установлено в n°**2**: именно, если α определяется сечением $A|A'$, мы считаем, что α больше всех рациональных чисел, входящих в класс A, и в то же время все числа класса A' больше α.

Пусть теперь имеем два иррациональных числа α и β, причем α определяется сечением $A|A'$, а β — сечением $B|B'$. Мы будем считать то число бо́льшим, у которого нижний класс больше. Точнее говоря, *мы будем считать $\alpha > \beta$, если класс A целиком содержит в себе класс B, не совпадая с ним.* (Это условие, очевидно, равносильно тому, что класс B' целиком содержит в себе класс A', не совпадая с ним). Легко проверить, что это определение может быть сохранено и для случаев, когда одно из чисел α, β или даже оба — рациональны.

Понятие «меньше» вводится уже как производное. Именно, говорят, что $\alpha < \beta$ в том и только в том случае, если $\beta > \alpha$.

Из наших определений можно вывести, что

для каждой пары вещественных чисел α и β имеет место одно и только одно из соотношений

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha < \beta.$$

Далее,

из $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ следует, что $\alpha > \gamma$.

Очевидно также, что

из $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ следует, что $\alpha < \gamma$.

Установим, наконец, два вспомогательных утверждения, которые не раз будут нам полезны в последующем изложении.

Лемма 1. *Каковы бы ни были два вещественных числа α и β, причем $\alpha > \beta$, всегда найдется такое вещественное — и даже, в частности, рациональное — число r, которое содержится* *между ними:* $\alpha > r > \beta$ (а следовательно, и бесчисленное множество таких рациональных чисел).

Так как $\alpha > \beta$, то нижний класс A сечения, определяющего число α, целиком содержит в себе нижний класс B для числа β, не совпадая с B. Поэтому в A найдется такое рациональное число r, которое не содержится в B и, следовательно, принадлежит B'; для него

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(равенство могло бы иметь место, лишь если β было рационально), Но так как в A нет наибольшего числа, то, в случае надобности увеличив r, можно равенство исключить.

Лемма 2. *Пусть даны два вещественных числа α и β. Если, какое бы ни взять рациональное число $e > 0$, числа α и β могут быть заключены между одними и теми же рациональными границами:*

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \quad s' \geqslant \beta \geqslant s,$$

разность которых меньше e:

$$s' - s < e,$$

то числа α и β необходимо равны.

Доказательство будем вести от противного. Пусть, например, $\alpha > \beta$. По лемме 1, между α и β можно вставить два рациональных числа r и $r' > r$:

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

Тогда для любых двух чисел s и s', между которыми содержатся α и β, будут, очевидно, выполняться неравенства

$$s' > r' > r > s, \quad \text{откуда} \quad s' - s > r' - r > 0,$$

так что разность $s' - s$, вопреки условию леммы, не может быть сделана, например, меньшей числа $e = r' - r$. Это противоречие доказывает лемму.

4. Представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью. Мы имеем в виду такое представление, при котором дробная часть (мантисса) положительна, в то время как целая часть может оказаться как положительной, так и отрицательной или нулем.

Предположим сначала, что рассматриваемое вещественное число α не является ни целым числом, ни какой-либо конечной десятичной дробью. Станем искать его десятичные приближения. Если оно определяется сечением $A \mid A'$, то прежде всего легко убедиться, что в классе A найдется целое число M, а в классе A' — целое же число $N > M$. Прибавляя к M по единице, необходимо придем к таким двум последовательным целым числам C и $C+1$, что

$$C < \alpha < C + 1.$$

При этом число C может оказаться положительным, отрицательным или нулем.

Далее, если разделить промежуток между C и $C+1$ на десять равных частей числами

$$C{,}1;\ C{,}2;\ \ldots;\ C{,}9,$$

то α попадет в один (и только в один) из частичных промежутков, и мы придем к двум числам, разнящимся на $\frac{1}{10}$: $C{,}c_1$ и $C{,}c_1+\frac{1}{10}$, для которых

$$C{,}c_1 < \alpha < C{,}c_1+\frac{1}{10}.$$

Продолжая этот процесс дальше, после определения $n-1$ цифр $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, мы n-ю цифру c_n определим неравенствами

$$C{,}c_1c_2\ldots c_n < \alpha < C{,}c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

Таким образом, в процессе нахождения десятичных приближений числа α мы построили целое число C и бесконечный ряд цифр $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ Составленную из них *бесконечную десятичную дробь, т. е. символ*

$$C{,}c_1c_2\ldots c_n\ldots,$$

можно рассматривать как представление вещественного числа α.

В исключенном случае, когда α само является целым числом или, вообще, конечной десятичной дробью, можно подобным же образом последовательно определить число C и цифры $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, но лишь исходя из более общих чем (1) соотношений

$$C{,}c_1c_2\ldots c_n \leqslant \alpha \leqslant C{,}c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}. \tag{1a}$$

Дело в том, что в некий момент число α совпадет с одним из концов промежутка, в который мы его заключаем, с левым или с правым — по нашему произволу; начиная с этого момента, соответственно слева или справа в (1a) уже постоянно будет иметь место равенство. Смотря по тому, какая из этих возможностей осуществляется, последующие цифры окажутся все нулями или все девятками. Таким образом, на этот раз число α имеет двоякое представление: одно — с нулем в периоде, а другое — с девяткой в периоде, например,

$$2{,}718 = 2{,}718000\ldots = 2{,}717999\ldots,$$

$$-2{,}718 = \bar{3}{,}282 = \bar{3}{,}282000\ldots = \bar{3}{,}281999\ldots$$

Разность между десятичными приближениями

$$C,c_1c_2\ldots c_n \quad \text{и} \quad C,c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n}$$

по избытку и по недостатку, равная $\frac{1}{10^n}$, с возрастанием n может быть сделана меньшей любого рационального числа $e>0$. Действительно, так как натуральных чисел, не превосходящих числа $\frac{1}{e}$, существует лишь конечное число, то неравенство $10^n\leqslant\frac{1}{e}$, или равносильное ему $\frac{1}{10^n}\geqslant e$, может выполняться лишь для конечного числа значений n; для всех же остальных будет

$$\frac{1}{10^n}<e.$$

Это замечание, ввиду леммы 2, позволяет заключить, что число β, отличное от α, не может удовлетворять всем тем же неравенствам (1) или (1a), что и α, и, следовательно, имеет представление в виде бесконечной десятичной дроби, отличное от представления числа α.

Отсюда, в частности, явствует, что представление числа, не равного никакой конечной десятичной дроби, не имеет ни нуля, ни девятки в периоде, поскольку каждая дробь с нулем или девяткой в периоде явно выражает конечную десятичную дробь.

Можно доказать, что если взять *по произволу* бесконечную дробь (2), то существует вещественное число α, для которого именно дробь (2) служит представлением. Очевидно, достаточно построить число α так, чтобы выполнялись все неравенства (1a). С этой целью, вводя для краткости обозначения

$$C_n=C,c_1c_2\ldots c_n \quad \text{и} \quad C_n'=C,c_1c_2\ldots c_n+\frac{1}{10^n},$$

заметим, что каждая дробь C_n меньше каждой дроби C_m' (не только при $m=n$, но и при $m\gtreqless n$). Произведем теперь сечение в области рациональных чисел: к верхнему классу A' отнесем такие рациональные числа a', которые больше всех C_n (например, все числа C_m'), а к нижнему A — все остальные (например, сами числа C_n). Легко проверить, что это действительно сечение; оно определяет вещественное число α, которое и будет искомым.

Действительно, так как α является пограничным числом между двумя классами, то, в частности,

$$C_n\leqslant\alpha\leqslant C_n'.$$

Отныне читатель может представлять себе вещественные числа как бесконечные десятичные дроби. Из школьного курса известно, что периодическая бесконечная дробь изображает рациональное число и, обратно, каждое рациональное число разлагается именно в периодическую дробь. Таким образом, изображениями вновь введенных нами иррациональных чисел служат непериодические бесконечные дроби. Это представление также может быть отправной точкой для построения теории иррациональных чисел.

Замечание. В последующем нам придется пользоваться приближенными рациональными значениями a и a' к вещественному числу α:

$$a < \alpha < a',$$

разность которых меньше произвольно малого рационального числа $e > 0$. Для рационального α существование чисел a и a' очевидно; для иррационального же α в качестве a и a' можно было бы, например, использовать десятичные приближения C_n и C'_n при достаточно большом n.

5. Непрерывность множества вещественных чисел. Обратимся теперь к рассмотрению одного весьма важного свойства множества всех вещественных чисел, которое его существенно отличает от множества чисел рациональных. Рассматривая сечения в множестве рациональных чисел, мы видели, что иной раз для такого сечения в этом множестве не находилось пограничного числа, про которое можно было бы сказать, что оно производит сечение. Именно эта неполнота множества рациональных чисел, наличие в ней этих пробелов и послужили основанием для введения новых чисел — иррациональных. Станем теперь рассматривать сечения в множестве всех вещественных чисел. Под таким сечением мы понимаем разбиение этого множества на два непустых множества A, A', при котором:

1°. *Каждое вещественное число попадает в одно и только одно из множеств A, A'* и, сверх того:

2°. *Каждое число α множества A меньше каждого числа α' множества A'.*

Возникает вопрос: всегда ли для такого сечения найдется — в множестве вещественных чисел — пограничное число, производящее это сечение, или и в этом множестве существуют пробелы (которые могли бы послужить основанием для введения еще новых чисел)?

Оказывается, что на деле таких пробелов уже нет.

Основная теорема (Дедекинда). *Для всякого сечения $A|A'$ в множестве вещественных чисел существует вещественное число β, которое производит это сечение. Это число β будет:* 1) *либо наибольшим в нижнем классе A,* 2) *либо наименьшим в верхнем классе A'.*

Это свойство множества вещественных чисел называют его полнотой, а также — непрерывностью или сплошностью.

Доказательство. Обозначим через A множество всех рациональных чисел, принадлежащих A, а через A' — множество всех рациональных чисел, принадлежащих A'. Легко убедиться, что множества A и A' образуют сечение в множестве всех рациональных чисел.

Это сечение $A \mid A'$ определяет некоторое вещественное число β. Оно должно попасть в один из классов A, A'; предположим, что β попадает, например, в нижний класс A, и докажем, что тогда осуществляется случай 1), а именно, β является в классе A наибольшим. В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы другое число α_0 этого класса, бо́льшее β. Вставим (опираясь на лемму 1) между α_0 и β рациональное число r:

$$\alpha_0 > r > \beta;$$

r принадлежит классу A, а следовательно, также и классу A. Мы пришли к противоречию: рациональное число r, принадлежащее нижнему классу сечения, определяющего число β, больше этого числа! Этим доказано наше утверждение.

Аналогичное рассуждение показывает, что если β попадает в верхний класс A', то осуществится случай 2).

Замечание. Одновременное существование в классе A наибольшего числа и в классе A' наименьшего — невозможно; это устанавливается так же, как и для сечений в области рациональных чисел (с помощью леммы 1).

6. Границы числовых множеств. Мы используем основную теорему [5], чтобы здесь же установить некоторые понятия, играющие важную роль в современном анализе. Они понадобятся нам уже при рассмотрении арифметических действий над вещественными числами.

Представим себе произвольное бесконечное множество*) вещественных чисел; оно может быть задано любым образом. Такими множествами являются, например, множество натуральных чисел, множество всех правильных дробей, множество всех вещественных чисел между числами 0 и 1, множество корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и т. п.

Любое из чисел множества обозначим через x, так что x есть типовое обозначение чисел множества; само же множество чисел x будем обозначать через $\mathscr{X} = \{x\}$.

Если для рассматриваемого множества $\{x\}$ существует такое число M, что все $x \leqslant M$, то будем говорить, что наше множество ограничено сверху (числом M); само число M в этом случае есть верхняя граница множества $\{x\}$. Например, множество правильных дробей ограничено сверху числом единица или любым числом, бо́льшим единицы; натуральный ряд сверху не ограничен.

Аналогично этому: если найдется такое число m, что все $x \geqslant m$, то говорят, что множество $\{x\}$ ограничено снизу (числом m),

*) Все сказанное ниже сохраняет силу и для конечных множеств, но этот случай не представляет интереса.

а само число m называют нижней границей множества $\{x\}$. Например, натуральный ряд ограничен снизу числом 1 или любым числом, меньшим его; множество правильных дробей ограничено снизу числом 0 или любым отрицательным числом.

Ограниченное сверху (снизу) множество может быть при этом ограничено и снизу (сверху) или нет. Так, множество правильных дробей ограничено и сверху и снизу, а натуральный ряд ограничен снизу, но не ограничен сверху.

Если множество сверху (снизу) не ограничено, то за его верхнюю (нижнюю) границу принимают «несобственное число» $+\infty$ ($-\infty$). Знаки $+\infty$ и $-\infty$ читаются так: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность». Относительно этих «несобственных» или «бесконечных» чисел мы считаем, что

$$-\infty < +\infty \quad \text{и} \quad -\infty < a < +\infty,$$

каково бы ни было вещественное («конечное») число a.

Если множество ограничено сверху, т. е. имеет конечную верхнюю границу M, то одновременно оно имеет и бесконечное множество верхних границ (так как, например, любое число, большее M, очевидно, также будет верхней границей). Из всех верхних границ особый интерес представляет наименьшая, которую мы будем называть *точной верхней границей*. Аналогично, если множество ограничено снизу, то наибольшую из всех нижних границ будем называть *точной нижней границей*. Так, для множества всех правильных дробей точными границами будут соответственно числа 0 и 1.

Возникает вопрос: всегда ли для ограниченного сверху (снизу) множества существует точная верхняя (нижняя) граница? Действительно, так как верхних (нижних) границ в этом случае бесконечное множество, а среди бесконечного множества чисел не всегда найдется наименьшее или наибольшее *), то самое существование такого наименьшего (наибольшего) числа из всех верхних (нижних) границ рассматриваемого множества требует доказательства.

Теорема. *Если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ ограничено сверху (снизу), то оно имеет и точную верхнюю (нижнюю) границу* **).

Доказательство. Проведем рассуждение по отношению к верхней границе. Рассмотрим два случая:

1°. Предположим сначала, что среди чисел x множества $\mathscr{X}$ найдется наибольшее $\bar{x}$. Тогда все числа множества будут удовлетворять неравенству $x \leqslant \bar{x}$, т. е. $\bar{x}$ будет верхней границей

---

*) Как их нет, например, среди всех правильных дробей.

**) Эту теорему — лишь в других терминах — впервые в 1817 г. высказал чешский философ и математик Бернгард Больцано (1781—1848). Строгое доказательство ее стало возможным лишь после уточнения понятия вещественного числа.

для $\mathscr{X}$. С другой стороны, $\bar{x}$ принадлежит $\mathscr{X}$; следовательно, для любой верхней границы M выполняется неравенство $\bar{x} \leqslant M$. Отсюда заключаем, что $\bar{x}$ есть *точная* верхняя граница множества $\mathscr{X}$.

2°. Пусть теперь *среди чисел* x *множества* $\mathscr{X}$ *нет наибольшего*. Произведем сечение в области всех *вещественных* чисел следующим образом. К верхнему классу A' отнесем все верхние границы α' множества $\mathscr{X}$, а к нижнему классу A — все остальные вещественные числа α. При этом разбиении все числа x множества $\mathscr{X}$ попадут в класс A, ибо ни одно из них — по допущению — не будет наибольшим. Таким образом, оба класса A, A' непусты. Это разбиение действительно является сечением, так как все вещественные числа распределены по классам, и каждое число из класса A' больше любого числа из класса A. По основной теореме Дедекинда [**5**], должно существовать вещественное число β, производящее сечение. Все числа x, как принадлежащие классу A, не превосходят этого «пограничного» числа β, т. е. β служит верхней границей для x, следовательно, само принадлежит классу A' и является там наименьшим. Таким образом, β, как наименьшая из всех верхних границ, и есть искомая *точная* верхняя граница множества $\mathscr{X} = \{x\}$.

Совершенно так же доказывается и вторая половина теоремы (относящаяся к существованию *точной* нижней границы).

Если M^* есть *точная* верхняя граница числового множества $\mathscr{X} = \{x\}$, то для всех x будет

$$x \leqslant M^*.$$

Возьмем теперь произвольное число α, меньшее M^*. Так как M^* — наименьшая из верхних границ, то число α наверное не будет верхней границей для множества $\mathscr{X}$, т. е. найдется такое число x' из $\mathscr{X}$, что

$$x' > \alpha.$$

Этими двумя неравенствами вполне характеризуется точная верхняя граница M^* множества $\mathscr{X}$.

Аналогично, точная нижняя граница m^* множества $\mathscr{X}$ характеризуется тем, что для *всех* x

$$x \geqslant m^*,$$

и, каково бы ни было число β, бо́льшее m^*, найдется число x'' из $\mathscr{X}$ такое, что

$$x'' < \beta.$$

Для обозначения точной верхней границы M^* и точной нижней границы m^* множества чисел $\mathscr{X}$ употребляют символы

$$M^* = \sup \mathscr{X} = \sup \{x\}, \qquad m^* = \inf \mathscr{X} = \inf \{x\}$$

(по латыни: supremum — наивысшее, infimum — наинизшее).

Отметим одно очевидное умозаключение, которое часто будет встречаться в дальнейшем:

если все числа x некоторого множества удовлетворяют неравенству $x \leqslant M$, то и $\sup\{x\} \leqslant M$.

Действительно, число M оказывается одной из верхних границ множества, а потому наименьшая из всех верхних границ его не превосходит.

Аналогично, *из неравенства $x \geqslant m$ следует, что и* $\inf\{x\} \geqslant m$.

Условимся, наконец, если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ не ограничено сверху, говорить, что его точная верхняя граница есть $+\infty$: $\sup\{x\} = +\infty$. Аналогично, если множество $\mathscr{X} = \{x\}$ не ограничено снизу, то говорят, что его точная нижняя граница есть $-\infty$: $\inf\{x\} = -\infty$.

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

7. Определение и свойства суммы вещественных чисел. Пусть имеем два вещественных числа α и β. Станем рассматривать рациональные числа a, a' и b, b', удовлетворяющие неравенствам

$$a < \alpha < a', \qquad b < \beta < b'. \tag{1}$$

Суммой $\alpha + \beta$ *чисел α и β назовем такое вещественное число γ, которое содержится между всеми суммами вида $a + b$, с одной стороны, и всеми суммами вида $a' + b'$ — с другой:*

$$a + b < \gamma < a' + b'. \tag{2}$$

Удостоверимся, прежде всего, что такое число γ существует для любой пары вещественных чисел α, β.

Рассмотрим множество всевозможных сумм $a + b$. Это множество ограничено сверху, например, любой суммой вида $a' + b'$. Положим же [6]

$$\gamma = \sup\{a + b\}.$$

Тогда $a + b \leqslant \gamma$ и, в то же время, $\gamma \leqslant a' + b'$.

Так как, каковы бы ни были рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие условиям (1), всегда можно числа a, b увеличить, а числа a', b' уменьшить с сохранением этих условий, то в полученных только что неравенствах, соединенных с равенствами, на деле ни в одном случае равенства быть не может. Таким образом, число γ удовлетворяет определению суммы.

Возникает, однако, вопрос, однозначно ли сумма $\gamma = \alpha + \beta$ определяется неравенствами (2). Для того чтобы убедиться в единственности суммы, подберем (по замечанию в n° 4) рациональные числа a, a', b, b' так, чтобы было

$$a' - a < e \quad \text{и} \quad b' - b < e,$$

где e — произвольно малое рациональное положительное число. Отсюда

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2e,$$

т. е. и эта разность может быть сделана сколь угодно малой *). А тогда,

---

*) Число $2e$ становится меньше любого числа $e' > 0$, если взять $e < \frac{e'}{2}$.

по лемме 2, существует только одно число, содержащееся между суммами $a+b$ и $a'+b'$.

Наконец, заметим, что если числа α и β оба рациональны, то их обычная сумма $\gamma=\alpha+\beta$, очевидно, удовлетворяет неравенствам (2). Таким образом, данное выше общее определение суммы двух вещественных чисел не противоречит старому определению суммы двух рациональных чисел.

Для вещественных чисел сохраняются все основные свойства сложения:

$$1)\ \alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad 2)\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad 3)\ \alpha+0=\alpha$$

и, наконец,

$$4)\ \textit{из}\ \alpha>\beta\ \textit{следует}\ \alpha+\gamma>\beta+\gamma.$$

Их нетрудно доказать, опираясь на определение суммы, данное выше, и, разумеется, на известные свойства рациональных чисел; останавливаться на этом не будем. С помощью последнего свойства оправдывается почленное складывание двух неравенств.

8. Симметричные числа. Абсолютная величина. Докажем теперь, что *для каждого вещественного числа α существует (симметричное ему) число $-\alpha$, удовлетворяющее условию $\alpha+(-\alpha)=0$.*

При этом достаточно ограничиться случаем иррационального числа α.

Предполагая, что число α определяется сечением $A|A'$, мы определим число $-\alpha$ следующим образом. К нижнему классу $\bar{A}$ числа $-\alpha$ мы отнесем все рациональные числа $-a'$, где a' — любое число класса A', а к верхнему классу $\bar{A}'$ этого числа отнесем все числа $-a$, где a — любое число класса A. Нетрудно видеть, что построенное разбиение есть сечение и, действительно, определяет вещественное (в данном случае — иррациональное) число; это число обозначим $-\alpha$.

Установим теперь, что оно удовлетворяет указанному выше условию. Пользуясь самим определением числа $-\alpha$, видим, что сумма $\alpha+(-\alpha)$ есть вещественное число, заключенное между числами вида $a-a'$ и $a'-a$, где a и a' рациональны и $a<\alpha<a'$. Но, очевидно,

$$a-a'<0<a'-a,$$

так что и число 0 заключено между только что упомянутыми числами. Ввиду единственности числа, обладающего этим свойством, имеем

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

что и требовалось доказать.

Добавим к этому, что число, симметричное данному числу, единственно и обладает свойствами

$$-(-\alpha)=\alpha,\qquad -(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta).$$

С помощью понятия симметричного числа исчерпывается вопрос о вычитании вещественных чисел, как о действии, обратном сложению. Назовем разностью α и β (и будем обозначать через $\alpha-\beta$) число γ, удовлетворяющее условию

$$\gamma+\beta=\alpha\quad(\text{или } \beta+\gamma=\alpha).$$

Опираясь на свойства сложения, легко показать, что таким числом будет $\gamma=\alpha+(-\beta)$; действительно,

$$\gamma+\beta=[\alpha+(-\beta)]+\beta=\alpha+[(-\beta)+\beta]=\alpha+[\beta+(-\beta)]=\alpha+0=\alpha.$$

Так же устанавливается и единственность разности.

Свойство 4) из n° 7 позволяет теперь сделать полезное замечание о равносильности неравенств

$$\alpha > \beta \quad \text{и} \quad \alpha - \beta > 0,$$

а это дает возможность установить, что $\alpha > \beta$ влечет за собой $-\alpha < -\beta$.

Наконец, с понятием симметричного числа связано и понятие абсолютной величины числа. Из самого построения симметричного числа явствует, что при $\alpha > 0$ необходимо будет $-\alpha < 0$, а из $\alpha < 0$ следует $-\alpha > 0$. Иными словами, если только $\alpha \neq 0$, то из двух чисел α и $-\alpha$ одно (и только одно) будет больше нуля; его именно и называют абсолютной величиной как числа α, так и числа $-\alpha$, и обозначают символом

$$|\alpha| = |-\alpha|.$$

Абсолютную величину числа нуль полагают равной нулю: $|0| = 0$.

Сделаем в интересах дальнейшего еще два замечания об абсолютных величинах.

Прежде всего, установим, что неравенство $|\alpha| < \beta$ (где, конечно, $\beta > 0$) равносильно двойному неравенству: $-\beta < \alpha < \beta$.

Действительно, из $|\alpha| < \beta$ следует, что одновременно $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$, т. е. $\alpha > -\beta$. Обратно, если дано, что $\alpha < \beta$ и $\alpha > -\beta$, то имеем одновременно: $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$; но одно из этих чисел α, $-\alpha$ и есть $|\alpha|$, так что наверное $|\alpha| < \beta$.

Аналогично оказываются равносильными и неравенства

$$|\alpha| \leqslant \beta \quad \text{и} \quad -\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta.$$

Докажем, далее, полезное неравенство

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Складывая почленно очевидные неравенства

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad \text{и} \quad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|,$$

получим

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leqslant \alpha + \beta \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

откуда, в силу сделанного выше замечания, и вытекает требуемое неравенство.

Доказанное неравенство с помощью математической индукции распространяется на случай любого числа слагаемых. Кроме того, из него легко получается

$$|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|,$$

а также

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Так как одновременно и

$$|\beta| - |\alpha| \leqslant |\alpha - \beta|,$$

то, очевидно,

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha - \beta|.$$

Все эти неравенства не раз будут полезны впоследствии.

9. Определение и свойства произведения вещественных чисел. Перейдем к умножению вещественных чисел, ограничиваясь сначала положительными числами. Пусть даны два таких числа α и β. Мы здесь также станем рассматривать всевозможные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (1), но и эти числа предположим положительными.

Произведением $\alpha\beta$ *двух положительных вещественных чисел* α *и* β *назовем такое вещественное число* γ, *которое содержится между всеми произведениями вида* ab, *с одной стороны, и всеми произведениями вида* $a'b'$ — *с другой:*

$$ab < \gamma < a'b'. \tag{3}$$

Для доказательства существования такого числа γ возьмем множество всевозможных произведений ab; оно ограничено сверху любым из произведений вида $a'b'$. Если положить

$$\gamma = \sup\{ab\},$$

то, конечно, $ab \leqslant \gamma$, но одновременно и $\gamma \leqslant a'b'$.

Возможность увеличить числа a, b и уменьшить числа a', b' (как и в случае суммы) позволяет исключить здесь знак равенства, так что число γ удовлетворяет определению произведения.

Единственность произведения вытекает из следующих соображений. Подберем рациональные числа a, a' и b, b' так, чтобы было (см. n° **4**, замечание)

$$a' - a < e \quad \text{и} \quad b' - b < e,$$

где e — произвольно малое рациональное положительное число. При этом можно считать, что числа a и b положительны, а числа a' и b' не превосходят соответственно некоторых наперед фиксированных чисел a'_0 и b'_0. Тогда разность

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a'_0 + b'_0)\,e,$$

т. е. также может быть сделана сколь угодно малой *), а этого, по лемме 2, достаточно для утверждения, что неравенствам (3) может удовлетворять только одно число γ.

Если положительные числа α и β оба рациональны, то их обычное произведение $\alpha\beta$ удовлетворяет, очевидно, неравенствам (3), т. е. получается таким же и по общему определению произведения двух вещественных чисел — противоречия нет.

Наконец, для того чтобы определить произведение произвольной пары вещественных чисел (не обязательно положительных), заключим следующие соглашения.

Прежде всего условимся, что

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

каково бы ни было α.

Если же оба множителя отличны от нуля, то положим в основу обычное «правило знаков»:

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ одного знака},$$
$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ разных знаков}$$

(что означает произведение положительных чисел $|\alpha|$ и $|\beta|$ — мы уже знаем).

---

*) Заметим, что $(a'_0 + b'_0)\,e$ становится меньшим любого числа $e' > 0$, если взять $e < \dfrac{e'}{a'_0 + b'_0}$.

Как и в случае рациональных чисел, для любых вещественных чисел сохраняются свойства

$$1)\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha,\qquad 2)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma),\qquad 3)\ \alpha\cdot 1=\alpha,$$

$$4)\ (\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma,$$

а также

5) *из* $\alpha>\beta$ *и* $\gamma>0$ *следует* $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$.

С помощью последнего свойства оправдывается почленное умножение двух неравенств с положительными членами.

Если определить частное $\frac{\alpha}{\beta}$ чисел α и β как такое число γ, которое удовлетворяет условию

$$\gamma\cdot\beta=\alpha \quad (\text{или } \beta\cdot\gamma=\alpha),$$

то можно установить существование и единственность частного, *лишь бы только делитель* β *был отличен от нуля.*

Заканчивая этим обзор арифметических действий над вещественными числами, мы еще раз подчеркнем, что все основные свойства рациональных чисел, на которых строится элементарная алгебра, имеют место и для вещественных чисел. Следовательно, *для вещественных чисел сохраняют силу все правила алгебры, относящиеся к арифметическим действиям и к сочетанию равенств и неравенств.*

§ 3. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

10. Существование корня. Степень с рациональным показателем. Определение умножения (и деления) вещественных чисел непосредственно приводит, как и обычно, к определению степени с целым положительным (и отрицательным) показателем. Переходя к степени с вообще рациональным показателем, остановимся прежде всего на вопросе о существовании корня.

Как мы помним, отсутствие в области рациональных чисел простейших корней послужило одним из поводов к расширению этой области; проверим же, в какой мере произведенное расширение заполнило старые пробелы (не создав при этом новых).

Пусть α — любое вещественное число, n — натуральное число.

Как известно, корнем n-й степени из числа α называют такое вещественное число ξ, что

$$\xi^n=\alpha.$$

Мы ограничимся случаем, когда α положительно, и будем искать положительное же ξ, удовлетворяющее этому соотношению, т. е. так называемое арифметическое значение корня. Мы докажем, что такое число ξ всегда существует, и притом только одно.

Последнее утверждение относительно единственности числа ξ, впрочем, сразу следует из того, что разным положительным числам соответствуют и разные степени их: если $0<\xi<\xi'$, то $\xi^n<\xi'^n$.

Если существует такое положительное рациональное число r, n-я степень которого равна α, то оно и будет искомым числом ξ. Поэтому впредь достаточно ограничиться предположением, что такого рационального числа нет.

Построим теперь сечение $X|X'$ в области всех рациональных чисел следующим образом. К классу X отнесем все отрицательные рациональные числа и нуль, а также те из положительных рациональных чисел x, для которых

$x^n < \alpha$. К классу X' отнесем положительные рациональные числа x', для которых $x'^n > \alpha$.

Легко видеть, что классы эти не пустые и что X содержит и положительные числа. Если взять, например, натуральное число m так, чтобы было $\frac{1}{m} < \alpha < m$, то и подавно $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$, так что число $\frac{1}{m}$ входит в X, а число m — в X'.

Прочие требования, предъявляемые к сечению, проверяются непосредственно.

Пусть теперь ξ будет число, определяемое сечением $X|X'$; докажем, что $\xi^n = \alpha$, т. е. что $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$.

Рассматривая ξ^n как произведение n сомножителей, равных ξ, на основании определения произведения положительных вещественных чисел заключаем, что, если x и x' суть рациональные числа, для которых

$$0 < x < \xi < x',$$

то

$$x^n < \xi^n < x'^n.$$

Так как, очевидно, x принадлежит классу X, а x' — классу X', то, по определению этих классов, одновременно и

$$x^n < \alpha < x'^n.$$

Но разность $x' - x$ может быть сделана меньшей любого числа $e > 0$ (n° 4, замечание), причем ничто не мешает считать x' меньшим некоторого наперед фиксированного числа x_0'. В таком случае разность

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \ldots + x^{n-1}) < e \cdot n x_0'^{n-1},$$

т. е. также может быть сделана сколь угодно малой *). Отсюда, по лемме 2, и следует равенство чисел ξ^n и α.

После того как доказано существование корня, обычным путем устанавливается понятие степени с любым рациональным показателем r и проверяется, что для таких степеней справедливы обычные правила, выводимые в курсе элементарной алгебры:

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \qquad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$
$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'}, \qquad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r} \text{ и др.}$$

Подчеркнем еще, что при $\alpha > 1$ степень α^r возрастает с возрастанием рационального показателя r.

11. Степень с любым вещественным показателем. Обратимся к определению степени любого вещественного (положительного) числа α с любым вещественным показателем β.

Введем в рассмотрение степени числа α

$$\alpha^b \text{ и } \alpha^{b'}$$

с рациональными показателями b и b', удовлетворяющими неравенствам

$$b < \beta < b'.$$

---

*) Заметим, что число $e \cdot n x_0'^{n-1}$ становится меньшим любого числа $e' > 0$, если взять $e < \frac{e'}{n x_0'^{n-1}}$.

Степенью числа $\alpha>1$ *) *с показателем* β *называют (и обозначают символом* α^β) *вещественное число* γ, *содержащееся между степенями* α^b *и* $\alpha^{b'}$:

$$\alpha^b<\gamma<\alpha^{b'}. \tag{1}$$

Легко убедиться в том, что такое число всегда существует. Действительно, множество степеней $\{\alpha^b\}$ ограничено сверху, например, любой степенью $\alpha^{b'}$. Возьмем тогда [6]

$$\gamma=\sup_{b<\beta}\{\alpha^b\}.$$

Для этого числа будем иметь

$$\alpha^b\leqslant\gamma\leqslant\alpha^{b'}.$$

На деле же знак равенства здесь не нужен, ввиду возможности увеличить b и уменьшить b', так что построенное число γ удовлетворяет условиям (1).

Обратимся теперь к доказательству единственности числа, определяемого этими условиями.

Для этого, прежде всего, заметим, что лемма 2 n° 3 сохраняет свою силу и в том случае, если опустить требование, чтобы числа s, s' и e были непременно рациональными; доказательство остается то же.

Затем установим одно весьма простое, но часто полезное неравенство: если n — натуральное число, большее единицы, и $\gamma>1$, то

$$\gamma^n>1+n(\gamma-1). \tag{2}$$

Действительно, положив $\gamma=1+\lambda$, где $\lambda>0$, по формуле бинома Ньютона будем иметь

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\ldots;$$

так как ненаписанные члены положительны, то

$$(1+\lambda)^n>1+n\lambda,$$

что равносильно неравенству (2).

Положив в этом неравенстве $\gamma=\alpha^{\frac{1}{n}}$ $(\alpha>1)$, получим неравенство

$$\alpha^{\frac{1}{n}}-1<\frac{\alpha-1}{n}, \tag{3}$$

которым мы сейчас и воспользуемся.

Мы знаем (n° 4, замечание), что числа b и b' можно выбрать так, чтобы разность $b'-b$ была меньше $\frac{1}{n}$ при любом наперед заданном натуральном n; тогда, по неравенству (3),

$$\alpha^{b'}-\alpha^b=\alpha^b\,(\alpha^{b'-b}-1)<\alpha^b(\alpha^{\frac{1}{n}}-1)<\alpha^b\cdot\frac{\alpha-1}{n};$$

окончательно, если через b'_0 обозначить какое-либо из чисел b',

$$\alpha^{b'}-\alpha^b<\alpha^{b'_0}\cdot\frac{\alpha-1}{n}.$$

---

*) Этим случаем можно ограничиться: при $\alpha<1$ полагаем, например, $\alpha^\beta=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$.

Последнее выражение за счет n может быть сделано меньшим произвольно малого положительного числа ε: для этого достаточно взять

$$n > \frac{\alpha^{b'_0}(\alpha - 1)}{\varepsilon}.$$

В таком случае, по обобщенной выше лемме 2, между границами α^b и $\alpha^{b'}$ не может быть двух различных чисел γ.

Если β рационально, то данное выше определение возвращает нас к обычному пониманию символа α^β.

Легко проверить, что для степени с любым вещественным показателем выполняются все обычные для степени правила, а также, что при $\alpha > 1$ степень α^β возрастает с возрастанием вещественного показателя β.

12. Логарифмы. Пользуясь данным определением степени с любым вещественным показателем, теперь легко установить существование логарифма для любого положительного вещественного числа γ при положительном основании α, отличном от единицы (мы будем, например, считать $\alpha > 1$).

Если существует такое рациональное число r, что

$$\alpha^r = \gamma,$$

то r и есть искомый логарифм. Предположим же, что такого рационального числа r нет.

Тогда можно произвести сечение $B \mid B'$ в области всех рациональных чисел по следующему правилу. К классу B отнесем рациональные числа b, для которых $\alpha^b < \gamma$, а к классу B' — рациональные числа b', для которых $\alpha^{b'} > \gamma$.

Покажем, что классы B и B' — не пустые. В силу неравенства (2)

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

и достаточно взять

$$n > \frac{\gamma}{\alpha - 1},$$

чтобы было $\alpha^n > \gamma$; такое натуральное число n относится к классу B'. В то же время имеем:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha - 1)},$$

и достаточно взять

$$n > \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)},$$

чтобы было $\alpha^{-n} < \gamma$ и число $-n$ попало в класс B.

Остальные требования, предъявляемые к сечению, здесь также выполнены.

Построенное сечение $B|B'$ определяет вещественное число β, которое является «пограничным» между числами обоих классов. По определению степени имеем

$$\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

причем α^β есть единственное число, удовлетворяющее всем подобным неравенствам. Но для числа γ имеем (по самому построению сечения)

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}.$$

Следовательно,

$$\alpha^\beta = \gamma \text{ и } \beta = \log_\alpha \gamma;$$

существование логарифма доказано.

13. Измерение отрезков. Невозможность снабдить, оставаясь в множестве рациональных чисел, все отрезки длинами также была важнейшим поводом к введению иррациональных чисел. Покажем теперь, что произведенного расширения понятия числа достаточно для решения задачи измерения отрезков.

Прежде всего сформулируем самую задачу.

Требуется с каждым прямолинейным отрезком A связать некоторое положительное вещественное число $l(A)$, которое будем называть «длиной отрезка A», так, чтобы

1) *некоторый наперед выбранный отрезок E («эталон длины») имел длину единица: $l(E)=1$;*

2) *равные отрезки имели одну и ту же длину;*

3) *при сложении отрезков длина суммы всегда была равна сумме длин складываемых отрезков:*

$$l(A+B)=l(A)+l(B)$$

(«свойство аддитивности»).

Поставленные условия приводят к однозначному решению задачи.

Из 2) и 3) следует, что q-я часть эталона должна иметь длину $\frac{1}{q}$; если же эта часть повторена слагаемым p раз, то полученный отрезок, в силу 3), должен иметь длину $\frac{p}{q}$. Таким образом, если отрезок A соизмерим с эталоном длины и общая мера отрезков A и E укладывается в них соответственно p и q раз, то необходимо

$$l(A)=\frac{p}{q}.$$

Легко видеть, что это число не зависит от взятой общей меры и что, если отрезкам, соизмеримым с эталоном, приписать рациональные длины по этому правилу, то (для этих отрезков) задача измерения будет полностью решена.

Обращаясь к общему случаю, заметим, что если отрезок A больше отрезка B, так что $A=B+C$, где C есть также некоторый отрезок, то, в силу 3), должно быть

$$l(A)=l(B)+l(C),$$

и так как $l(C)>0$, то $l(A)>l(B)$. Итак, неравные отрезки должны иметь неравные длины, а именно, больший отрезок — бо́льшую длину.

Так как каждое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ является длиной некоторого отрезка, соизмеримого с эталоном длины E, то из сказанного, между прочим, ясно, что ни один отрезок, несоизмеримый с эталоном, не может иметь рациональную длину.

Пусть же Σ будет такой отрезок, несоизмеримый с E. Найдется бесчисленное множество отрезков S и S', соизмеримых с E и соответственно меньших или бо́льших Σ. Если положить $l(S)=s$, $l(S')=s'$, то искомая длина $l(\Sigma)$ должна удовлетворять неравенствам

$$s<l(\Sigma)<s'\ ^{*}).$$

Если распределить все рациональные числа на два класса S и S', отнеся к нижнему классу S числа s (и кроме них — все отрицательные числа и нуль),

---

*) Разумеется, и для длины отрезка Σ, соизмеримого с E, также выполняются эти неравенства.

а к верхнему классу S' — числа s', то получится сечение в множестве рациональных чисел. Так как в нижнем классе, очевидно, нет наибольшего числа, а в верхнем — наименьшего, то этим сечением определяется иррациональное число σ, которое и будет единственным вещественным числом, удовлетворяющим неравенствам $s < \sigma < s'$. Именно этому числу необходимо положить равной длину $l(\Sigma)$.

Предположим теперь, что всем отрезкам, как соизмеримым с E, так и несоизмеримым, приписаны длины в согласии с указанными правилами. Выполнение условий 1), 2) очевидно.

Рассмотрим два отрезка Р, Σ с длинами

$$\rho = l(P), \quad \sigma = l(\Sigma)$$

и их сумму $\mathrm{T} = \mathrm{P} + \Sigma$, длину которой обозначим через $\tau = l(\mathrm{T})$. Взяв любые положительные рациональные числа r, r', s, s' такие, что

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s',$$

построим отрезки R, R', S, S', для которых именно эти числа соответственно служат длинами. Отрезок $R + S$ (длины $r + s$) будет меньше Т, а отрезок $R' + S'$ (длины $r' + s'$) — больше Т. Поэтому

$$r + s < \tau < r' + s'.$$

Но [7] единственным вещественным числом, содержащимся между числами вида $r + s$ *) и числами $r' + s'$, является сумма $\rho + \sigma$. Следовательно, $\tau = \rho + \sigma$, что и требовалось доказать.

Распространение «свойства аддитивности» на случай любого конечного числа слагаемых производится по методу математической индукции.

Если на оси (направленной прямой) (рис. 1) выбрать начальную точку O и эталон длины E, то *каждой точке X этой прямой отвечает*

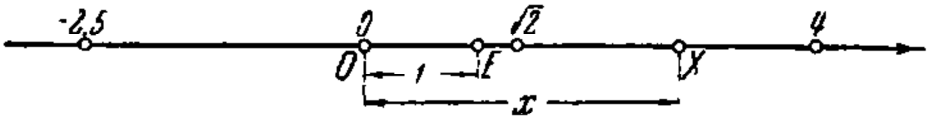


Рис. 1.

некоторое вещественное число — ее абсцисса x, равная длине отрезка OX, если X лежит в положительном направлении от O, или этой длине со знаком минус — в противном случае.

Естественно встает вопрос, будет ли верно и обратное: *каждое ли вещественное число x отвечает при этом некоторой точке прямой?* Вопрос этот в геометрии решается в утвердительном смысле, именно с помощью аксиомы о непрерывности прямой, устанавливающей для прямой, как множества точек, свойство, аналогичное свойству непрерывности множества вещественных чисел [n° 5].

Таким образом, между всеми вещественными числами и точками направленной прямой (оси) можно установить взаимно однозначное соответствие. Вещественные числа можно изображать точками на оси, которую в связи с этим называют числовой осью. Подобным изображением мы впредь постоянно будем пользоваться.

---

*) Ограничение положительными числами r и s, конечно, несущественно.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

14. Переменная величина. При исследовании явлений природы и в своей практической деятельности человек сталкивается с множеством различных физических величин; сюда относятся время, длина, объем, скорость, масса, сила, и т. п. Каждая из них, в зависимости от условий вопроса, в котором она рассматривается, принимает либо различные значения, либо лишь одно. В первом случае мы имеем дело с переменной величиной, а во втором — с постоянной.

Если выбрать определенную единицу измерения (как мы это делали, например, в n° **13**, говоря о длине), каждое значение величины можно выразить числом. Математика обычно отвлекается от физического смысла рассматриваемых величин, интересуясь лишь именно их численными значениями. Вот что говорит об этом закономерном процессе отвлечения Ф. Энгельс *). Констатируя, что «математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира», Энгельс продолжает далее:

«Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины...»

Введение в математику переменной величины — его обычно связывают с именем Декарта — было событием огромной важности. Математика получила возможность не только устанавливать количественные соотношения между постоянными величинами, но и изучать протекающие в природе процессы, в которых участвуют и переменные величины. Ф. Энгельс **) подчеркивает это в следующих словах:

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и

*) Ф. Энгельс, «Анти-Дюринг», изд. 1952 г., стр. 37.

**) Ф. Энгельс, «Диалектика природы», изд. 1952 г., стр. 206.

диалектика и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление...»*

15. Область изменения переменной величины. В математическом анализе — если только речь не идет об его приложениях — под *переменной величиной* (или короче — *переменной*) разумеется отвлеченная или числовая переменная. Ее обозначают каким-либо символом (буквой, например x), которому приписываются числовые значения. Переменная x считается заданной, если указано множество $\mathscr{X}=\{x\}$ значений, которые она может принимать. Это множество и называется *областью изменения* переменной x. Вообще, областью изменения переменной может служить любое числовое множество.

Постоянную величину (короче — *постоянную*) удобно рассматривать как частный случай переменной: он отвечает предположению, что множество $\mathscr{X}=\{x\}$ состоит из одного элемента.

Мы видели в n° 13, что числа геометрически истолковываются как точки на оси. Область $\mathscr{X}$ изменения переменной x на этой оси изображается в виде некоторого множества точек. В связи с этим обычно сами числовые значения переменной называют точками.

Часто приходится иметь дело с переменной n, принимающей всевозможные натуральные значения

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100,\ 101,\ \ldots;$$

область изменения этой переменной, т. е. множество $\{n\}$ всех натуральных чисел, мы будем всегда обозначать через $\mathscr{N}$.

Однако обычно в анализе изучаются переменные, изменяющиеся, как говорят, непрерывным или сплошным образом: их прообразом являются физические величины — время, путь, проходимый движущейся точкой, и т. п. Областью изменения подобной переменной служит числовой промежуток. Чаще всего это будет конечный промежуток, ограниченный двумя вещественными числами a и b ($a<b$) — его концами, которые сами могут быть включены в его состав или нет. В зависимости от этого мы будем различать

замкнутый промежуток $[a, b]$: $a\leqslant x\leqslant b$ (оба конца включены);

полуоткрытые промежутки $\begin{cases} (a, b]: & a<x\leqslant b \\ [a, b): & a\leqslant x<b \end{cases}$ (лишь один конец включен);

открытый промежуток (a, b): $a<x<b$ (ни один конец не включен).

Длиной промежутка во всех случаях называется число $b-a$. Геометрическим аналогом числового промежутка является, как легко понять, отрезок числовой оси, причем — в зависимости от типа промежутка — и к отрезку концы его приключаются или нет.

Приходится рассматривать и бесконечные промежутки, у которых одним из концов или обоими служат «несобственные» числа — ∞,

$+\infty$. Обозначения их аналогичны приведенным выше. Например, $(-\infty, +\infty)$ есть множество всех вещественных чисел; $(a, +\infty)$ означает множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$; промежуток $(-\infty, b]$ определяется неравенством $x \leqslant b$. Геометрически бесконечные промежутки изображаются в виде бесконечной в обе стороны прямой или луча.

16. Функциональная зависимость между переменными. Примеры. Предметом изучения в математическом анализе является, однако, не изменение одной переменной самой по себе, а *зависимость* между двумя или несколькими переменными при их *совместном изменении*. Здесь мы ограничимся простейшим случаем двух переменных.

В различных областях науки и жизни — в самой математике, в физике, в технике — читатель не раз встречал такие *совместно изменяющиеся* переменные. Они не могут одновременно принимать любые значения (из своих областей изменения): если одной из них (*независимой переменной*) придано конкретное значение, то этим уже определяется и значение другой (*зависимой переменной*, или *функции*). Приведем несколько *примеров*.

1) Площадь Q круга есть функция от его радиуса R; ее значение может быть вычислено по заданному значению радиуса с помощью известной формулы

$$Q = \pi R^2.$$

2) В случае свободного падения тяжелой материальной точки — при отсутствии сопротивления — время t (*сек*), отсчитываемое от начала движения, и пройденный за это время путь s (*м*) связаны уравнением

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2} есть ускорение силы тяжести. Отсюда и определяется значение s, соответствующее взятому моменту t: путь s является функцией от протекшего времени t.

3) Рассмотрим некоторую массу (идеального) газа, содержащуюся под поршнем цилиндра. В предположении, что температура сохраняется неизменной, объем V (*л*) и давление p (*атм*) этой массы газа подчиняются закону Бойля — Мариотта:

$$pV = c = \text{const}.$$

Если произвольно изменять V, то p как функция от V будет всякий раз однозначно определяться по формуле

$$p = \frac{c}{V}.$$

Заметим тут же, что самый выбор независимой переменной из числа двух рассматриваемых иногда бывает безразличен или связан с соображениями простого удобства. В большинстве же случаев он диктуется целенаправленностью производимого исследования. Так, в последнем примере мы могли бы быть заинтересованы в зависимости объема V от переменного внешнего давления p на поршень (передающегося газу); тогда ее естественно было бы написать в виде

$$V=\frac{c}{p},$$

считая p независимой переменной, а V — функцией от p.

Функциональная зависимость в иных случаях характеризует процесс, реально протекающий во времени, — особенно, если, как в примере 2), само время является независимой переменной. Однако было бы ошибкой думать, что всегда изменение переменных связано с течением времени. В примере 1), изучая зависимость площади круга от его радиуса, мы не имели перед собой никакого временно́го процесса.

17. Определение понятия функции. Отвлечемся теперь, как обычно, от физического смысла рассматриваемых величин и дадим точное общее определение понятия функции — одного из основных понятий математического анализа.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Предположим, что по условиям вопроса переменной x может быть приписано произвольное значение из области $\mathscr{X}$ без каких-либо ограничений. Тогда *переменная y называется функцией от переменной x в области ее изменения $\mathscr{X}$, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из $\mathscr{X}$ ставится в соответствие одно определенное значение y (из $\mathscr{Y}$).*

Независимая переменная x называется также *аргументом* функции.

В этом определении существенны два момента: во-первых, указание области $\mathscr{X}$ изменения аргумента x (ее называют также *областью определения* функции) и, во-вторых, установление правила или закона соответствия между значениями x и y. (Область $\mathscr{Y}$ изменения функции y обычно не указывается, поскольку самый закон соответствия уже определяет множество принимаемых функцией значений.)

Можно в определении понятия функции стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению x из $\mathscr{X}$ отвечало не одно, а несколько значений y (и даже бесконечное множество их). В подобных случаях функцию называют многозначной, в отличие от однозначной функции, определенной выше. Впрочем, в курсе анализа, стоящем на точке зрения вещественной переменной, избегают многозначных функций, и впредь, говоря о функции, если не оговорено противное, мы будем разуметь однозначную функцию.

Для указания того факта, что y есть функция от x, пишут:

$$y=f(x),\quad y=\varphi(x),\quad y=F(x) \text{ и т. п.*)}$$

*) Произносится эта запись следующим образом: «игрек равно эф от икс», «игрек равно фи от икс» и т. д.

Буквы f, φ, F, ... характеризуют именно то правило, по которому получается значение y, отвечающее заданному x. Поэтому, если одновременно рассматриваются различные функции от одного и того же аргумента x, связанные с различными законами соответствия, их не следует обозначать одной и той же буквой.

Хотя именно буква «эф» (в различных алфавитах) связана со словом «функция», но для обозначения функциональной зависимости, разумеется, может применяться и любая другая буква; иногда даже повторяют ту же букву y: $y=y(x)$. В некоторых случаях пишут аргумент и в виде значка при функции, например y_x.

Если, рассматривая функцию, скажем, $y=f(x)$, мы хотим отметить ее частное значение, которое отвечает выбранному частному значению x, равному x_0, то для обозначения его употребляют символ $f(x_0)$. Например, если

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad g(t)=\frac{10}{t}, \quad h(u)=\sqrt{1-u^2},$$

то $f(1)$ означает численное значение функции $f(x)$ при $x=1$, т. е. попросту число $\frac{1}{2}$, аналогично, $g(5)$ означает число 2, $h\left(\frac{3}{5}\right)$ — число $\frac{4}{5}$ и т. п.

Обратимся теперь к самому правилу, или закону соответствия между значениями переменных, которое составляет сущность понятия функциональной зависимости. Правило это может быть весьма разнообразной природы, поскольку оно ничем не было ограничено.

Наиболее просто и естественно осуществление этого правила с помощью формулы, которая представляет функцию в виде аналитического выражения, указывающего те аналитические операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо произвести, чтобы получить соответствующее значение y. Этот аналитический способ задания функции является наиболее важным для математического анализа (мы еще вернемся к нему в следующем номере). С ним читатель всего лучше знаком из школьного курса математики; наконец, именно аналитическим способом мы пользовались в приведенных в n°**16** примерах.

Однако было бы ошибочным думать, что это — единственный способ, которым может быть задана функция. В самой математике нередки случаи, когда функция определяется без помощи формулы. Такова, например, функция $E(x)$ — «целая часть числа x» *). Легко сообразить, что

$$E(1)=1, \quad E(2{,}5)=2, \quad E(\sqrt{13})=3, \quad E(-\pi)=-4 \text{ и т. д.},$$

хотя никакой формулы, выражающей $E(x)$, у нас нет.

---

*) Или точнее — наибольшее целое число, не превосходящее x (E есть начальная буква от французского слова entier, обозначающего «целый»).

В естественных науках и в технике зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Например, если подвергнуть воду произвольно выбранному давлению p (*атм*), то на опыте можно определить соответствующую ему температуру $\theta°$ С кипения воды: θ есть функция от p. Однако эта функциональная зависимость задается не какой-либо формулой, а лишь таблицей, где просто сопоставлены полученные из опыта данные. Примеры табличного способа задания функции легко найти в любом техническом справочнике. Неудобство его заключается в том, что он дает значения функции лишь для некоторых значений аргумента.

Наконец, упомянем еще, что в некоторых случаях — при помощи самопишущих приборов — функциональная зависимость между физическими величинами задается непосредственно графиком. Например, «индикаторная диаграмма», снимаемая при помощи индикатора, дает зависимость между объемом V и давлением p пара в цилиндре работающей паровой машины; «барограмма», доставляемая барографом, представляет суточный ход атмосферного давления и т. п. Разумеется, такой способ задания позволяет определять значения функции лишь приближенно.

Мы не входим в подробности относительно табличного и графического способов задания функциональной зависимости, так как ими в математическом анализе не приходится пользоваться.

18. Аналитический способ задания функции. Сделаем ряд разъяснительных замечаний в связи со способом задания функции аналитическим выражением или формулой, который играет в математическом анализе исключительно важную роль.

1°. Прежде всего, какие аналитические операции или действия могут входить в эти формулы? На первом месте здесь разумеются все изученные в элементарной алгебре и тригонометрии операции: арифметические действия, возвышение в степень (и извлечение корня), логарифмирование, переход от углов к их тригонометрическим величинам и обратно (см. ниже § 2). Однако, и это важно подчеркнуть, к их числу по мере развития наших сведений по анализу будут присоединяться и другие операции, в первую голову — предельный переход, которому посвящена глава III.

Таким образом, полное содержание термина «аналитическое выражение» или «формула» будет раскрываться лишь постепенно.

2°. Второе замечание относится к области определения функции аналитическим выражением или формулой.

Каждое аналитическое выражение, содержащее аргумент x, имеет, так сказать, естественную область применения: это множество всех тех значений x, для которых оно сохраняет смысл, т. е. имеет *вполне определенное, конечное, вещественное значение.* Разъясним это на простейших примерах.

Так, для выражения $\frac{1}{1+x^2}$ такой областью будет все множество вещественных чисел. Для выражения $\sqrt{1-x^2}$ эта область сведется к замкнутому промежутку $[-1, 1]$, за пределами которого значение его перестает быть вещественным. Напротив, выражению $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ придется в качестве естественной области применения отнести открытый промежуток $(-1, 1)$, ибо на концах его знаменатель обращается в нуль. Иногда область значений, для которых выражение сохраняет смысл, состоит из разрозненных промежутков: для $\sqrt{x^2-1}$ это будут промежутки $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, для $\frac{1}{x^2-1}$ — промежутки $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ и т. д.*).

В последующем изложении нам придется рассматривать как более сложные, так и более общие аналитические выражения, и мы не раз будем заниматься исследованием свойств функций, задаваемых подобным выражением во всей области, где оно сохраняет смысл, т. е. изучением самого аналитического аппарата.

Однако возможно и другое положение вещей, на что мы считаем нужным заранее обратить внимание читателя. Представим себе, что какой-либо конкретный вопрос, в котором переменная x по существу дела ограничена областью изменения $\mathscr{X}$, привел к рассмотрению функции $f(x)$, допускающей аналитическое выражение. Хотя может случиться, что это выражение имеет смысл и вне области $\mathscr{X}$, выходить за ее пределы, разумеется, все же нельзя. Здесь аналитическое выражение играет подчиненную, вспомогательную роль.

Например, если, исследуя свободное падение тяжелой точки с высоты h над поверхностью Земли, мы прибегнем к формуле

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

[16,2)], то нелепо было бы рассматривать отрицательные значения t или значения t, бо́льшие, чем $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$, ибо, как легко видеть, при $t=T$ точка уже упадет на Землю. И это несмотря на то, что само выражение $\frac{gt^2}{2}$ сохраняет смысл для всех вещественных t.

3°. Может случиться, что функция определяется не одной и той же формулой для всех значений аргумента, но для одних — одной формулой, а для других — другой. Примером такой функции в

---

*) Для нас, разумеется, не представляют интереса такие выражения, которые ни при одном значении x вообще не имеют смысла.

промежутке $(-\infty, +\infty)$ может служить функция, определяемая следующими тремя формулами:

$$f(x)=1, \text{ если } |x|>1 \text{ (т. е. если } x>1 \text{ или } x<-1),$$
$$f(x)=-1, \text{ если } |x|<1 \text{ (т. е. если } -1<x<1)$$

и, наконец,

$$f(x)=0, \quad \text{если} \quad x=\pm 1.$$

Впрочем, не следует думать, что есть принципиальная разница между функцией, задаваемой одной формулой для всех значений x, и функцией, определение которой использует несколько формул. Обычно функция, задаваемая несколькими формулами (правда, ценой некоторого усложнения выражения), может быть задана и одной. В частности, это справедливо относительно приведенной выше функции [см. n°43,5)]. В последующем мы не раз будем встречать примеры того же рода.

19. График функции. Хотя в математическом анализе функции графически не задают, но к графической иллюстрации функции прибегают всегда. Легкая обозримость и наглядность графика делают его незаменимым вспомогательным средством исследования свойств функции.

Пусть в некотором промежутке $\mathscr{X}$ задана функция $y=f(x)$. Представим себе на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось x и ось y. Рассмотрим пару соответствующих значений x и y, где x взято из промежутка $\mathscr{X}$, а $y=f(x)$; образом этой пары на плоскости служит точка $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y. Совокупность всех таких точек, получающихся при изменении x в пределах своего промежутка, составляет график функции, который и является ее геометрическим образом. Обыкновенно график представляет собой кривую вроде кривой AB на рис. 2. В этих условиях само уравнение $y=f(x)$ называют уравнением кривой AB.

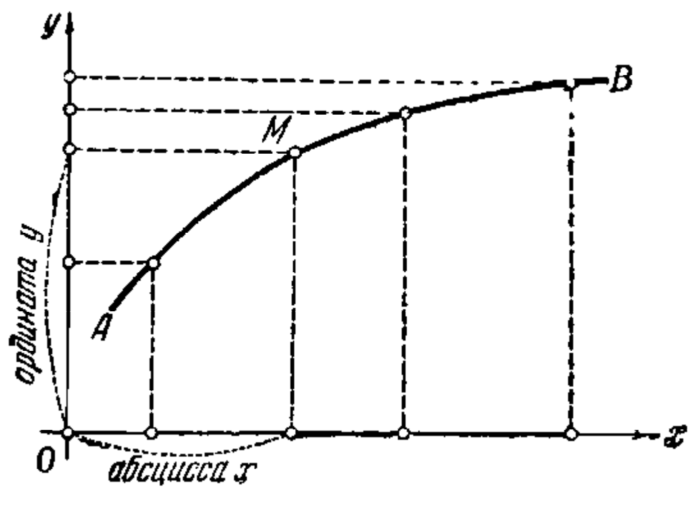


Рис. 2.

Например, на рис. 3 и 4 изображены графики функций

$$y=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad y=\pm\sqrt{x^2-1};$$
$$(|x|\leqslant 1) \qquad\qquad (|x|\geqslant 1)$$

читатель узнает в них окружность и равнобочную гиперболу. Много других примеров графического изображения функций читатель найдет в ближайших номерах.

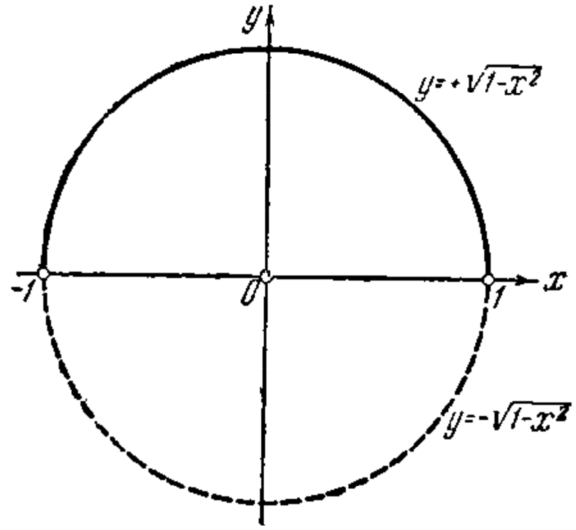


Рис. 3.

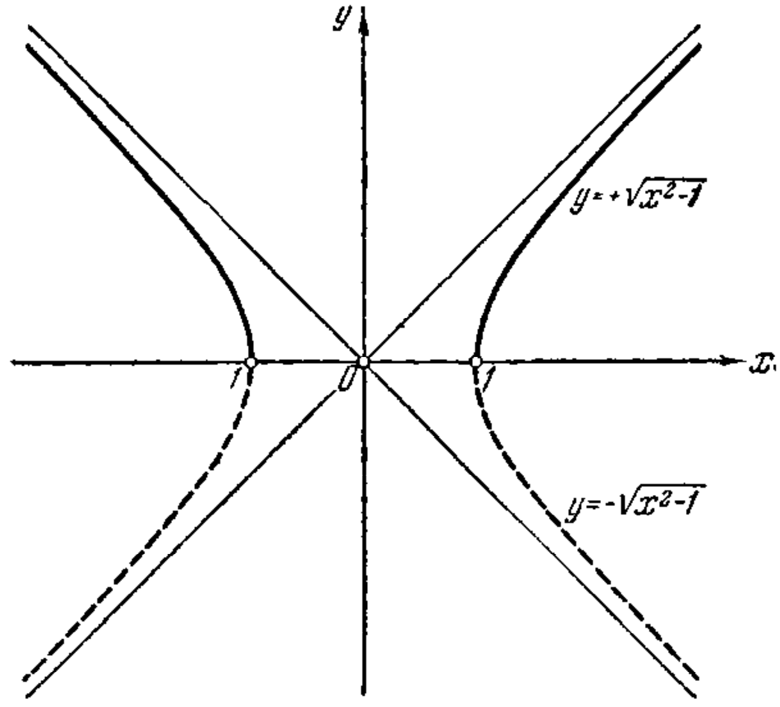


Рис. 4.

Строится график обычно по точкам. Берут в промежутке $\mathscr{X}$ ряд близких между собой значений x, вычисляют по формуле $y=f(x)$ соответствующие значения y:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x=x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline y=y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{array}$$

и наносят на чертеж точки

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Через эти точки от руки или с помощью лекала проводят кривую, которая (конечно, лишь с некоторым приближением) и дает искомый график. Чем плавнее ход графика и чем гуще взяты точки на нем, тем точнее начерченная кривая воспроизводит этот график.

Следует заметить, что хотя геометрический образ функции всегда можно себе «представить», но не всегда этот образ будет кривой в обычном, интуитивном смысле.

Построим, например, график функции $y=E(x)$. Так как в промежутках ..., $[-2, \quad -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, ...

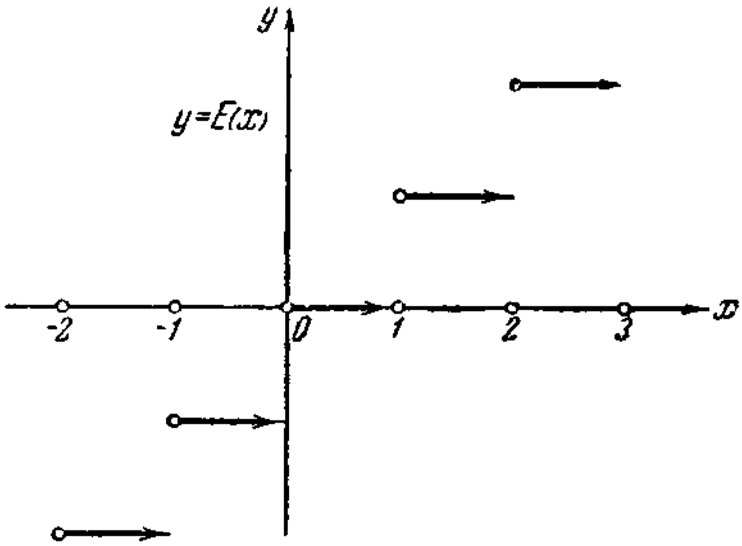


Рис. 5.

функция сохраняет постоянные значения ..., $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, то график будет состоять из ряда отдельных горизонтальных отрезков, лишенных своих правых концов (рис. 5) *).

20. Функции натурального аргумента. До сих пор мы рассматривали исключительно примеры функций непрерывно изменяющегося аргумента, значения которого заполняли сплошной промежуток. Остановимся теперь на принципиально более простом (но не менее важном) случае функции $f(n)$ аргумента n, пробегающего лишь ряд $\mathcal{N}$ натуральных значений. Функции натурального аргумента будут играть в дальнейшем особую роль.

В обозначении такой функции часто отступают от обычного функционального обозначения и вместо $f(n)$ пишут какую-нибудь букву с указателем n внизу, например x_n. Если заменить этот указатель (который — напомним это — является здесь независимой переменной) конкретным натуральным числом, например 1, 23, 518 ..., то x_1, x_{23}, x_{518}, ... будут соответствующими числовыми значениями функции x_n — наподобие того, как $f(1)$, $f(23)$, $f(518)$, ... означали числовые значения функции $f(n)$.

*) Это обстоятельство символизируется стрелками, которые своими остриями указывают на точки, не принадлежащие графику.

В согласии с общим определением, *функция x_n считается заданной, если мы владеем правилом, по которому может быть вычислено любое ее значение, лишь только указано значение n.*

Обычный случай — это тот, когда функция x_n задается формулой, устанавливающей, какие аналитические операции надлежит произвести над переменным натуральным числом n (и над постоянными), чтобы получить соответствующее значение функции. Примеры:

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}, \qquad a_n = q^n, \qquad y_n = \log n \quad \text{и т. п.}$$

Но, разумеется, и в рассматриваемом здесь случае функция может быть задана любым другим правилом. В виде примера упомянем о «факториале числа n»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

а также о функции $\tau(n)$, представляющей число делителей числа n, или о функции $\varphi(n)$, указывающей, сколько в ряду $1, 2, 3, \ldots, n$ имеется чисел, взаимно простых с n. Несмотря на своеобразный характер правил, которыми задаются эти функции, они позволяют вычислять значения функций с такой же определенностью, как и формулы:

$$\tau(10) = 4, \quad \tau(12) = 6, \quad \tau(16) = 5, \ldots$$
$$\varphi(10) = 4, \quad \varphi(12) = 4, \quad \varphi(16) = 8, \ldots$$

Еще пример: представим себе десятичные приближения (скажем, по недостатку) для $\sqrt{2}$ со все возрастающей точностью:

$$1{,}4; \quad 1{,}41; \quad 1{,}414; \quad 1{,}4142; \ldots$$

Зная правило для приближенного вычисления корней, мы вправе считать вполне определенной функцию, равную приближенному значению упомянутого корня с точностью до $\frac{1}{10^n}$, хотя общего выражения для этого приближения мы не имеем.

В школьном курсе математики читателю не раз приходилось встречаться с функциями натурального указателя. Если задана бесконечная геометрическая прогрессия

$$\div\!\div\, a, \quad aq, \quad aq^2, \ldots,$$

то функцией указателя n является и о б щ и й ч л е н этой прогрессии

$$a_n = aq^{n-1}$$

и сумма n членов прогрессии

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1).$$

В связи с определением длины окружности и площади круга, обычно рассматриваются правильные вписанные в окружность многоугольники, получаемые из вписанного шестиугольника последовательным удвоением числа сторон. Сторона такого многоугольника, его апофема, периметр и площадь — все являются функциями натурального указателя n, если за n принять попросту число повторений процесса удвоения.

21. Исторические замечания. Самый термин «функция» появился в одной работе Лейбница *) в 1692 г., а затем применялся братьями Якобом и Иоганном Бернулли **) для характеристики различных отрезков, так или иначе связанных с точками некоторой кривой. В 1718 г. Иоганн Бернулли впервые дает определение функции, свободное от геометрических представлений. Его ученик Эйлер ***) в своем учебнике «Введение в анализ бесконечно малых» (1748), по которому учились целые поколения математиков, воспроизводит определение Бернулли, несколько его уточняя:

«Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и из чисел или постоянных количеств» ****).

Как видим, в этом определении функция попросту отождествляется с тем аналитическим выражением, которым она задается.

Наряду с «явными» функциями, Эйлер рассматривал и «неявные», определяемые неразрешенными уравнениями. В то же время — в связи с знаменитой задачей о колебании струны (о которой подробно будет рассказано во втором томе) — Эйлер считал возможным *допустить в анализ* не только «смешанные» функции, которые в разных частях промежутка задаются различными аналитическими выражениями [ср. п° **18**, 3°], но даже функции, определяемые произвольно начерченными графиками. В предисловии к его «Дифференциальному исчислению» (1755 г.) мы находим еще более общую, *хотя и менее определенную* формулировку:

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых» *****).

В течение ряда десятилетий существенного прогресса в определении понятия функции не было. Обычно приписывают Дирихле ******) заслугу выдвижения на первый план *идеи соответствия*, которая единственно и лежит в основе этого понятия.

---

*) Готфрид Вильгельм *Лейбниц* (1646—1716) — знаменитый немецкий философ и математик. Он разделяет с Ньютоном заслугу создания дифференциального и интегрального исчисления (см. исторический очерк в главе XIV).

**) Якоб *Бернулли* (1654—1705) и Иоганн *Бернулли* (1667—1748) принадлежали знаменитой в истории математики семье голландского происхождения; оба были сподвижниками Лейбница и много способствовали (особенно младший из них) распространению нового исчисления.

***) Леонард *Эйлер* (1707—1783) — выдающийся математик; швейцарец по происхождению, он бо́льшую часть своей сознательной жизни провел в России и состоял членом Петербургской Академии наук.

****) Имеется русский перевод тома I упомянутого сочинения (в оригинале написанного по-латыни), 1936 г.; см. стр. 30.

*****) См. русский перевод «Дифференциального исчисления», 1949 г., стр. 38.

******) Петер Густав *Лежен-Дирихле* (1805—1859) — выдающийся немецкий математик.

В 1837 г. он дал такое определение функции y от переменной x (в предположении, что последняя принимает все значения в некотором промежутке):

«Если каждому x отвечает единственное конечное y ..., то y называется ... функцией от x для этого промежутка. При этом вовсе нет необходимости, чтобы y во всем этом промежутке зависело от x по одному и тому же закону, и даже не обязательно представлять себе зависимость, выражаемую с помощью математических операций».

Это определение (несмотря на умаляющие его общность оговорки автора) сыграло важную роль в истории математического анализа.

Долгое время оставалось незамеченным, что Лобачевский *) высказал эту идею не только раньше, но и в безупречной форме. Примыкая поначалу к точке зрения Эйлера, Лобачевский постепенно отходит от нее и в своей работе «Об исчезании тригонометрических строк» (1834 г.) уже определенно говорит:

«Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной» **).

Заметим в заключение, что привычное для нас обозначение функции — $f(x)$ — принадлежит Эйлеру.

§ 2. ВАЖНЕЙШИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

22. Элементарные функции. Перечислим здесь некоторые классы функций, получивших название *элементарных*.

1°. *Целая и дробная рациональные функции.* Функция, представляемая целым относительно буквы x многочленом

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

(a_0, a_1, a_2, ... — постоянные), называется **целой рациональной функцией**.

Отношение двух таких многочленов

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

представляет **дробную рациональную функцию**. Она определена для всех значений x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

Для примера на рис. 6 даны графики функции $y=ax^2$ (параболы) при различных значениях коэффициента a, а на рис. 7 — графики функции $y=\frac{a}{x}$ (равнобочные гиперболы) также при различных значениях a.

---

*) Николай Иванович Лобачевский (1793—1856) — великий русский математик, прославившийся созданием неэвклидовой геометрии.

**) Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, т. V (1951), стр. 43.

2°. *Степенная функция.* Так называется функция вида

$$y = x^{\mu},$$

где μ — любое постоянное вещественное число. При целом μ получается рациональная функция. При μ дробном мы имеем здесь р а д и к а л. Например, пусть m — натуральное число и

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}.$$

Эта функция определена для всех значений x, если m — нечетное, и лишь для неотрицательных значений — при m четном (в этом случае мы имеем в виду арифметическое значение радикала). Наконец, если μ — иррациональное число, мы будем предполагать $x > 0$ ($x = 0$ допускается лишь при $\mu > 0$).

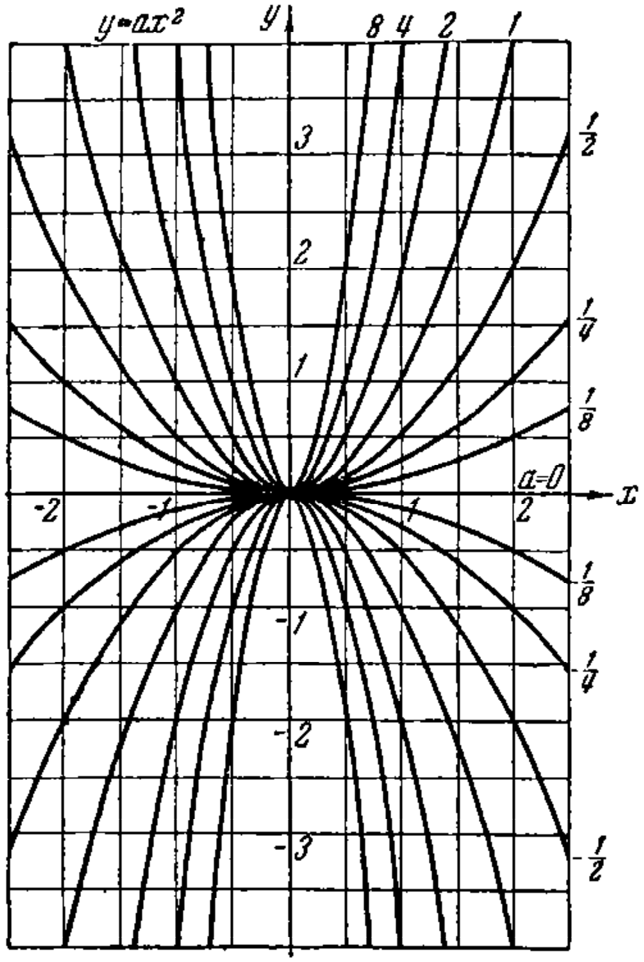


Рис. 6.

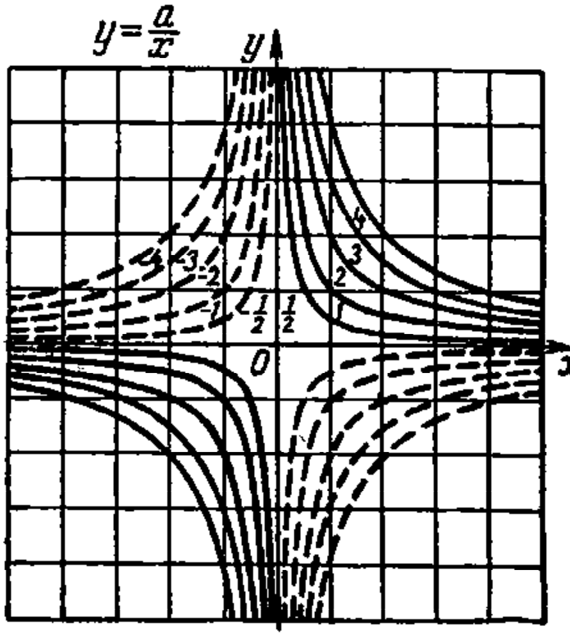


Рис. 7.

На рис. 8 и 9 даны графики степенной функции при различных значениях μ.

3°. *Показательная функция,* т. е. функция вида

$$y = a^{x},$$

где a — положительное число, отличное от единицы; x принимает любое вещественное значение.

Графики показательной функции при различных значениях a даны на рис. 10.

4°. *Логарифмическая функция*, т. е. функция вида

$$y = \log_a x \, ^{*}),$$

где a, как и выше, — положительное число (отличное от единицы); x принимает лишь положительные значения.

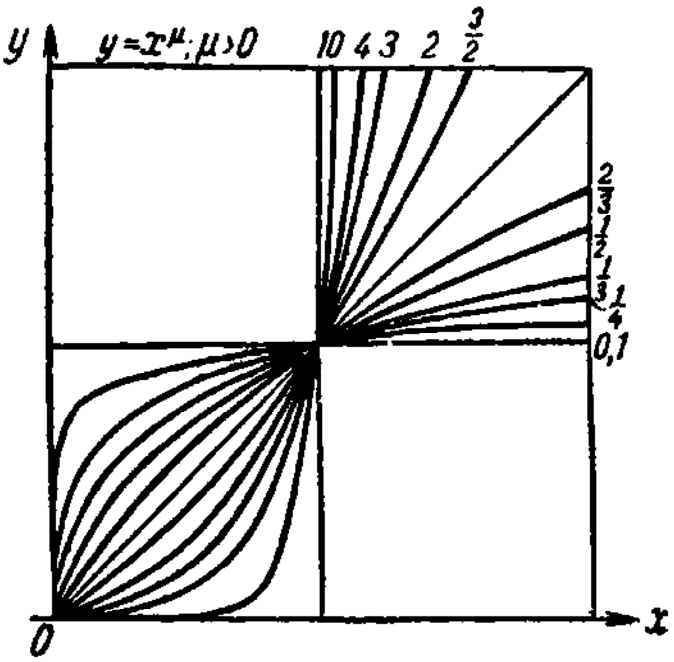


Рис. 8.

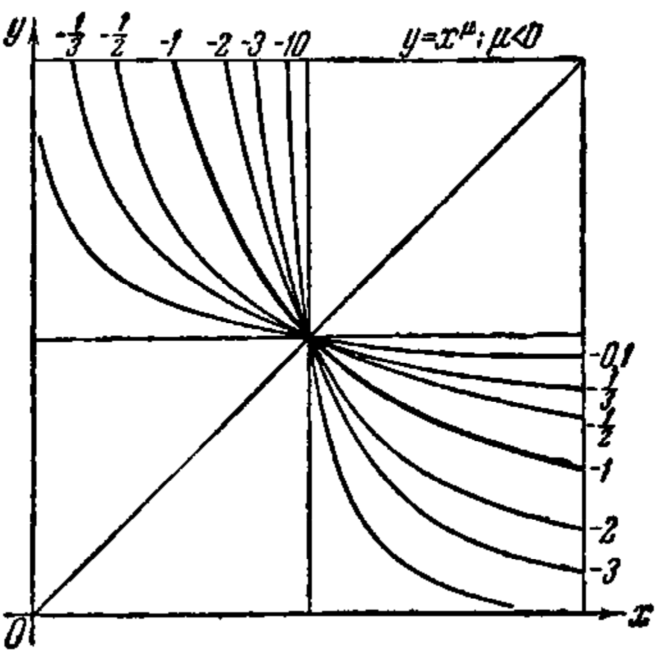


Рис. 9.

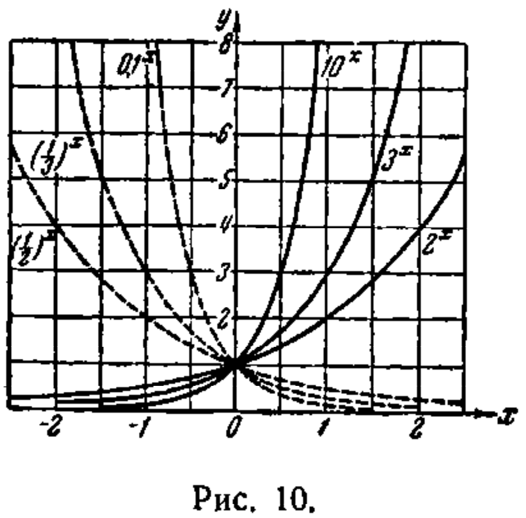


Рис. 10.

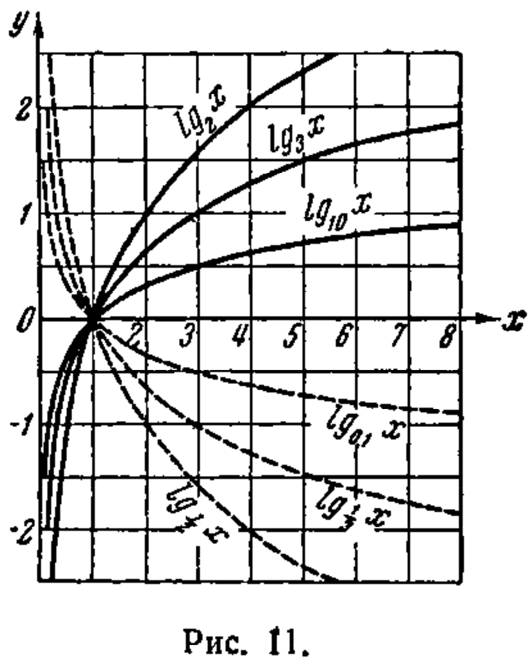


Рис. 11.

На рис. 11 даны графики этой функции при различных значениях a.

---

*) Обозначение $\log x$ мы сохраняем для десятичных логарифмов: $\log x = \log_{10} x$.

5°. *Тригонометрические функции:*

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg} x,\quad y=\operatorname{ctg} x,$$
$$y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

Очень важно раз навсегда усвоить, что *аргументы тригонометрических функций, если их рассматривать как меры углов,*

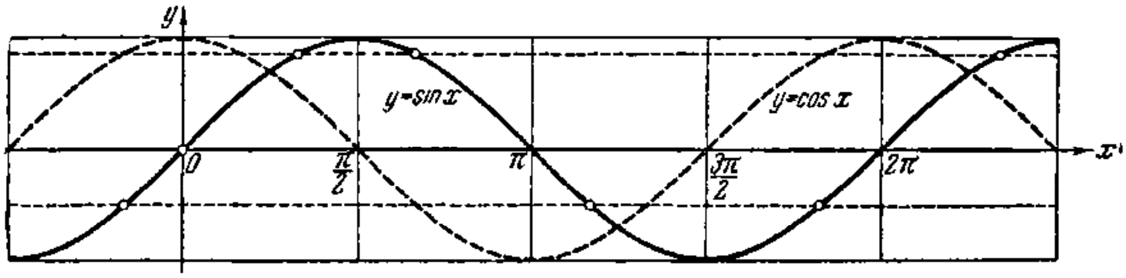


Рис. 12.

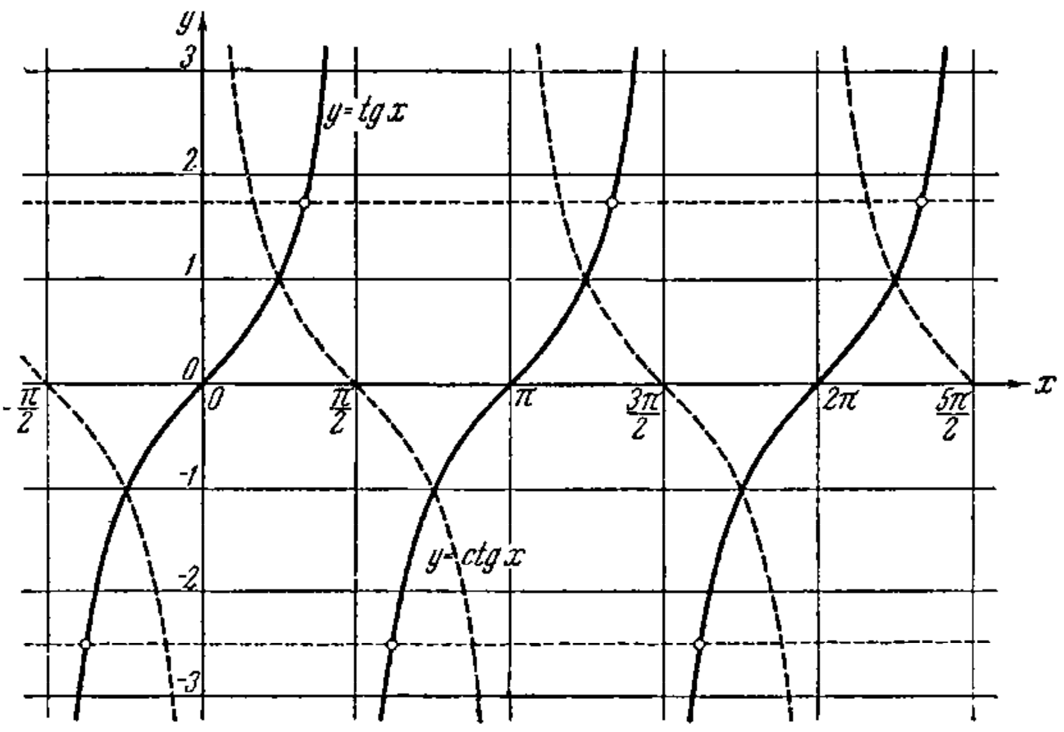


Рис. 13.

всегда выражают эти углы в ***радианах*** (поскольку не оговорено противное). Для $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ исключаются значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, а для $\operatorname{ctg} x$ и $\csc x$ — значения вида $k\pi$ (k — целое).

Графики функций $y=\sin x$ ($\cos x$) и $y=\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{ctg} x$) даны на рис. 12 и 13. График синуса обычно называют *синусоидой*.

23. Понятие обратной функции. Прежде чем перейти к обратным тригонометрическим функциям, сделаем пояснение относительно обратных функций вообще.

Предположим, что функция $y=f(x)$ задана в некоторой области $\mathscr{X}$, и пусть $\mathscr{Y}$ будет множество всех значений, которые эта функция принимает, когда x изменяется в пределах области $\mathscr{X}$. В нашей практике как $\mathscr{X}$, так и $\mathscr{Y}$ обычно будут представлять собою промежутки.

Выберем какое-нибудь значение $y=y_0$ из области $\mathscr{Y}$; тогда в области $\mathscr{X}$ необходимо найдется такое значение $x=x_0$, при котором наша функция принимает именно значение y_0, так что

$$f(x_0)=y_0;$$

подобных значений x_0 может оказаться и несколько. Таким образом, каждому значению y из $\mathscr{Y}$ ставится в соответствие одно или несколько значений x; этим определяется в области $\mathscr{Y}$ однозначная или многозначная функция $x=g(y)$, которая и называется обратной для функции $y=f(x)$.

Рассмотрим примеры.

1. Пусть $y=a^x$ $(a>1)$, где x изменяется в промежутке $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$. Значения y заполняют промежуток $\mathscr{Y}=(0, +\infty)$, причем каждому y из этого промежутка отвечает, как мы знаем [**12**], в $\mathscr{X}$ одно определенное $x=\log_a y$. В этом случае обратная функция оказывается однозначной.

2. Наоборот, для функции $y=x^2$, если x изменять в промежутке $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$, обратная функция будет двузначной: каждому значению y из промежутка $\mathscr{Y}=[0, +\infty)$ отвечают два значения $x=\pm\sqrt{y}$ из $\mathscr{X}$. Вместо этой двузначной функции обычно рассматривают раздельно две однозначные функции $x=+\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$ («ветви» двузначной функции). Их можно порознь также считать обратными для функции $y=x^2$, в предположении лишь, что область изменения x ограничена соответственно промежутком $[0, +\infty)$ или промежутком $(-\infty, 0]$.

Заметим, что по графику функции $y=f(x)$ легко сообразить, будет ли обратная для нее функция $x=g(y)$ однозначной или нет. Первый случай представится, если любая прямая, параллельная оси x, пересекает этот график разве лишь в одной точке. Наоборот, если некоторые из таких прямых пересекают график в нескольких точках, обратная функция будет многозначной. В этом случае по графику же легко разбить промежуток изменения x на части так, чтобы каждой части уже отвечала однозначная «ветвь» этой функции. Например, по одному взгляду на параболу рис. 14, которая служит графиком функции $y=x^2$, ясно, что обратная ей функция двузначна и что для получения однозначных «ветвей» достаточно раздельно рассматривать правую и левую части этой параболы, т. е. положительные и отрицательные значения x *).

---

*) Ниже [71] мы вернемся еще к вопросу о существовании и однозначности обратной функции.

Если функция $x = g(y)$ является обратной для функции $y = f(x)$, то, очевидно, графики обеих функций совпадают. Можно, однако, потребовать, чтобы и аргумент обратной функции обозначался буквой x, т. е. вместо функции $x = g(y)$ рассматривать $y = g(x)$. Тогда лишь придется горизонтальную ось назвать осью y, а вертикальную — осью x; график все еще останется прежним. Если же пожелать, чтобы (новая) ось x была бы, как привычно, горизонтальной, а (новая) ось y — вертикальной, то эти оси нужно будет переставить одну на место другой, что уже изменит и график. Для осуществления этого проще всего повернуть плоскость чертежа xOy на $180°$ вокруг биссектрисы первого координатного угла (рис. 15).

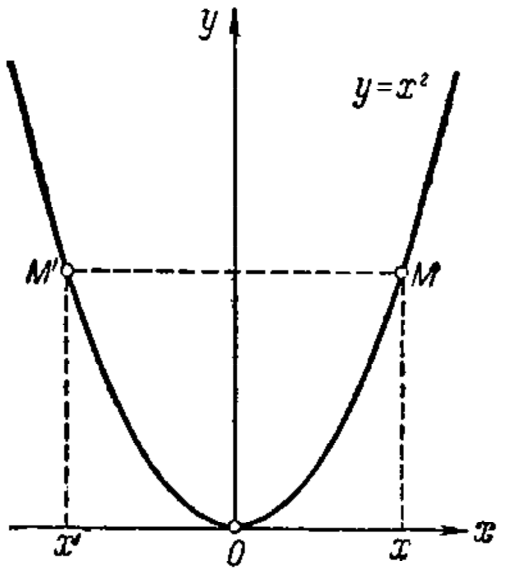


Рис. 14.

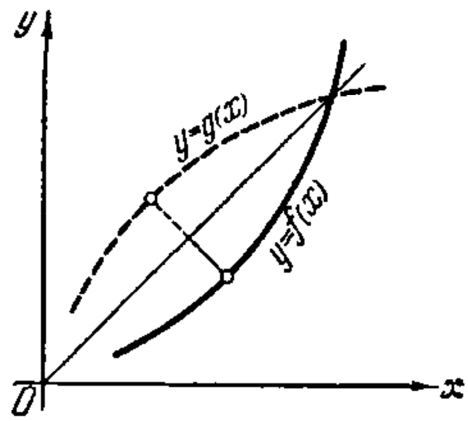


Рис. 15.

Таким образом, окончательно, график $y = g(x)$ получается как зеркальное отражение графика $y = f(x)$ относительно этой биссектрисы. По рис. 10 и 11, например, сразу видно, что они именно так получены один из другого. Точно так же, исходя из высказанных соображений, легко объяснить симметричность (относительно биссектрисы) каждого из рис. 8 и 9.

24. Обратные тригонометрические функции. В дополнение к тем классам элементарных функций, которые были упомянуты в n°**22**, рассмотрим теперь

6°. *Обратные тригонометрические функции:*

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x,$$
$$y = \operatorname{arcctg} x \quad (y = \operatorname{arcsc} x, \quad y = \operatorname{arccsc} x).$$

Остановимся сначала на первой из них. Функция $y = \sin x$ определена в промежутке $\mathscr{X} = (-\infty, +\infty)$, причем ее значения заполняют сплошь промежуток $\mathscr{Y} = [-1, 1]$. Параллель оси x пересекает синусоиду, т. е. график функции $y = \sin x$ (рис. 12), в б е с к о н е ч н о м м н о ж е с т в е точек; иначе говоря, каждому значению y из промежутка $[-1, 1]$ отвечает бесконечное множество значений x. Поэтому обратная функция, которую обозначают так:

$$x = \operatorname{Arcsin} y^{*}),$$

будет (бесконечно-) многозначной.

Обычно рассматривают лишь одну «ветвь» этой функции, отвечающую изменению x между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Каждому y из $[-1, 1]$ в этих пределах отвечает одно значение x; его обозначают через

$$x = \arcsin y$$

и называют главным значением арксинуса.

Поворачивая синусоиду около биссектрисы первого координатного угла, получаем график (рис. 16) многозначной функции $y = \operatorname{Arcsin} x$; жирно выделен график главной ветви ее $y = \arcsin x$, которая однозначно определена в промежутке $[-1, 1]$ значений x и притом удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

которое характеризует ее среди других ветвей.

Вспоминая из элементарной тригонометрии, как выражаются все значения угла, имеющего данный синус, через одно из этих значений, легко написать формулы, дающие все значения арксинуса:

$$\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2k\pi$$
$$\text{или } (2k+1)\pi - \arcsin x$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

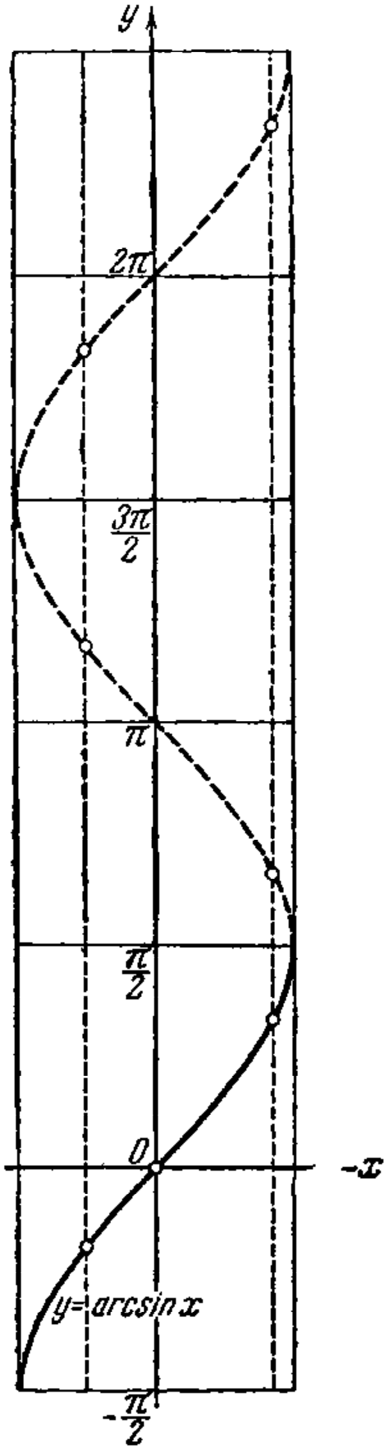


Рис. 16.

Подобные же рассуждения применимы к функции $y = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$. И здесь обратная функция

$$y = \operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

*) Мы уже подчеркивали в свое время [22, 5°], что аргумент x тригонометрической функции выражает угол в радианах; разумеется, и здесь значения обратных тригонометрических функций — если их рассматривать как меры углов — все выражены в радианах.

оказывается (бесконечно-) многозначной (см. рис. 12). Для выделения однозначной ветви ее подчиняют условию

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

это есть главная ветвь арккосинуса.

Функция $\arccos x$ связана с $\arcsin x$ очевидным соотношением

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

действительно, не только косинус угла $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ равен $\sin(\arcsin x) = x$, но и сам угол содержится именно между 0 и π. Остальные значения $\operatorname{Arccos} x$ выражаются через главное значение по формуле

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x$$
$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

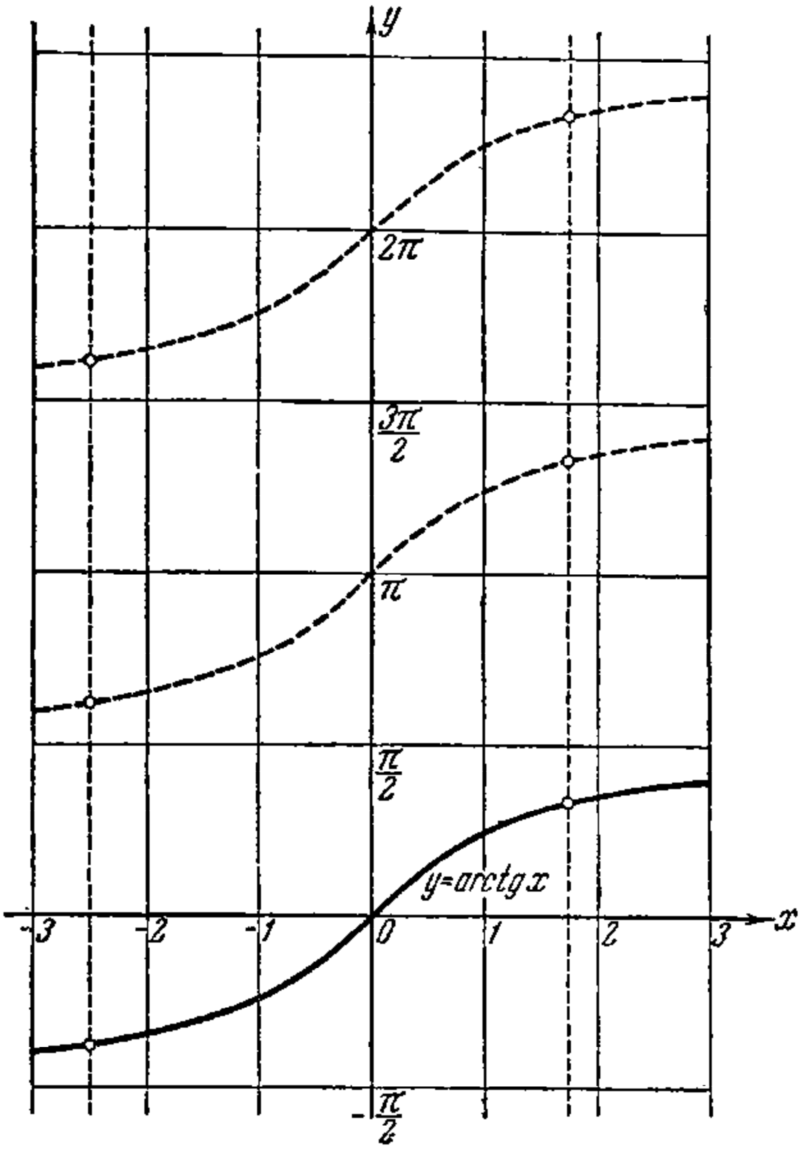


Рис. 17.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех значений x, кроме значений

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$
$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Значения y заполняют здесь промежуток $(-\infty, +\infty)$, причем каждому y снова соответствует бесконечное множество значений x (см. рис. 13). Поэтому обратная функция $x = \operatorname{Arctg} y$, заданная в промежутке $(-\infty, +\infty)$, будет (бесконечно-) многозначной. На рис. 17 изображен график функции $y = \operatorname{Arctg} x$, полученный поворотом на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла графика функции $y = \operatorname{tg} x$. За главное значение арктангенса, $\operatorname{arctg} x$, принимают то из значений этой многозначной функции, которое удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Таким путем определяется однозначная функция — **главная ветвь** арктангенса, заданная для всех значений x. Остальные значения арктангенса, как легко показать, получаются так:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Нетрудно установить прямую связь между функциями $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$:

$$\underset{(-\infty < x < +\infty)}{\operatorname{arctg} x = \arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{или} \quad \underset{(-1 < x < +1)}{\arcsin x = \operatorname{arctg}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Например, если положить $\alpha = \operatorname{arctg} x$, так что $\operatorname{tg} \alpha = x$, то $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, причем корень берется со знаком плюс, потому что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; отсюда и вытекает, что $\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Упомянем еще о функции $\operatorname{Arcctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$; ее **главное значение** определяется неравенствами

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

и связано с $\operatorname{arctg} x$ соотношением

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Остальные значения арккотангенса имеют вид

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

На функциях $\operatorname{arcsc} x$ $(-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty)$ и $\operatorname{arccsc} x$ (те же промежутки изменения) останавливаться не будем, предоставляя читателю самому в них разобраться.

25. Суперпозиция функций. Заключительные замечания. Познакомимся с понятием **суперпозиции** (или **наложения**) функций, которая состоит в том, что вместо аргумента данной функции подставляется другая функция (от другого аргумента). Например, суперпозиция функций $y = \sin x$ и $z = \log y$ дает функцию $z = \log \sin x$; аналогично получаются и функции

$$\sqrt{1-x^2}, \ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \ \text{и т. п.}$$

В общем виде предположим, что функция $z = \varphi(y)$ определена в некоторой области $\mathscr{Y} = \{y\}$, а функция $y = f(x)$ определена для x в области $\mathscr{X} = \{x\}$, **причем значения ее все содержатся в области** $\mathscr{Y}$. Тогда переменная z, как говорят, **через посредство** y и сама является функцией от x:

$$z = \varphi(f(x)).$$

По заданному x из $\mathscr{X}$ сначала находят соответствующее ему (по правилу, характеризуемому знаком f) значение y из $\mathscr{Y}$, а затем устанавливают соответствующее этому значению y (по правилу, характеризуемому знаком φ) значение z; его и считают соответствующим выбранному x. Полученная *функция от функции*, или *сложная функция*, и есть результат *суперпозиции* функций $f(x)$ и $\varphi(y)$.

Предположение, что значения функции $f(x)$ не выходят за пределы той области $\mathscr{Y}$, в которой определена функция $\varphi(y)$, весьма существенно: если его опустить, то может получиться и нелепость. Например, полагая $z = \log y$, а $y = \sin x$, мы можем рассматривать лишь такие значения x, для которых $\sin x > 0$, ибо иначе выражение $\log \sin x$ не имело бы смысла.

Мы считаем полезным здесь же подчеркнуть, что характеристика функции, как сложной, связана не с природой функциональной зависимости z от x, а лишь со способом задания этой зависимости. Например, пусть $z = \sqrt{1 - y^2}$ для y в $[-1, 1]$, а $y = \sin x$ для x в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

Здесь функция $\cos x$ оказалась заданной в виде сложной функции.

Теперь, когда полностью выяснено понятие суперпозиции, мы можем точно охарактеризовать простейший из тех классов функций, которые изучаются в анализе: это, прежде всего, перечисленные выше элементарные функции 1°—6°, а затем — все те, которые из них получаются с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз. Про них говорят, что они выражаются через элементарные в конечном виде; иногда их все также называют элементарными.

Впоследствии, овладев более сложным аналитическим аппаратом (бесконечные ряды, интегралы), мы познакомимся и с другими функциями, также играющими важную роль в анализе, но уже выходящими за пределы класса элементарных функций.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

26. Исторические замечания. Понятие предела ныне пронизывает весь математический анализ, да и в других областях математики также играет важную роль. Однако (как читатель увидит в главе XIV) это понятие вовсе не лежало в основе дифференциального и интегрального исчисления при его возникновении. Впервые определение понятия предела появляется (по существу в той же форме, как это будет изложено ниже в n° 28) у Валлиса *) в «Арифметике бесконечных величин» (1655). Ньютон в знаменитых «Математических началах натуральной философии» (1686—1687) опубликовал свой метод первых и последних отношений (или сумм), в котором можно усмотреть зачатки теории пределов. Однако никому из великих математиков XVIII века не приходило в голову обосновать новое исчисление на понятии предела и тем ответить на справедливые нападки, которым оно подвергалось **). В этом смысле характерна позиция Эйлера, который в предисловии к трактату по «Дифференциальному исчислению» (1755) отчетливо говорит о пределе, но нигде во всей книге этим понятием не пользуется.

Перелом в указанном вопросе был создан «Алгебраическим анализом» Коши ***) (1821) и дальнейшими его публикациями, где впервые развита была теория пределов, послужившая в руках Коши действенным орудием для строгого построения всего математического анализа. Позиция Коши, развеявшая мистический туман, которым до него были покрыты начала анализа, получила всеобщее признание.

Впрочем, заслугу Коши разделяют и другие ученые, среди которых особое место занимает Больцано, в ряде случаев своими работами предупредивший не только Коши, но и позднейших математиков. Эти работы не получили распространения, и о них вспомнили лишь спустя много десятилетий.

27. Числовая последовательность. Установление основного в анализе понятия *предел* мы начнем с простейшего частного случая (известного даже из курса средней школы), именно — с предела функции x_n от натурального аргумента. Как увидим, к этому случаю принципиально сводятся и все более сложные случаи.

Аргумент n принимает все значения из натурального ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ n',\ \ldots, \tag{1}$$

---

*) Джон Валлис (1616—1703) — английский математик.

**) Подробнее об этом см. в главе XIV.

***) Огюстен Луи Коши (1789—1857) — знаменитый французский аналист.

члены которого мы представляем себе упорядоченными по возрастанию, так что большее число n' следует за меньшим числом n, меньшее число n предшествует большему числу n'.

Если задана функция x_n, то ее аргумент, или указатель n, можно рассматривать как номер соответствующего значения переменной. Таким образом, x_1 есть первое ее значение, x_2 — второе, x_3 — третье и т. д. Мы всегда будем представлять себе это множество значений $\{x_n\}$ упорядоченным, наподобие натурального ряда (1), по возрастанию номеров, т. е. в виде *числовой последовательности*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, x_{n'}, \ldots {}^{*}). \tag{2}$$

При $n' > n$ значение $x_{n'}$ следует за x_n (x_n предшествует $x_{n'}$) *независимо от того, будет ли само число $x_{n'}$ больше, меньше или даже равно x_n.*

Например, если задать функцию x_n одной из формул

$$x_n = 1, \qquad x_n = (-1)^{n+1}, \qquad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n},$$

то соответствующие последовательности будут:

$$\underset{1}{1}, \quad \underset{2}{1}, \quad \underset{3}{1}, \quad \underset{4}{1}, \quad \underset{5}{1}, \quad \underset{6}{1}, \ldots$$

$$\underset{1}{1}, \quad \underset{2}{-1}, \quad \underset{3}{1}, \quad \underset{4}{-1}, \quad \underset{5}{1}, \quad \underset{6}{-1}, \ldots$$

$$\underset{1}{0}, \quad \underset{2}{1}, \quad \underset{3}{0}, \quad \underset{4}{\frac{1}{2}}, \quad \underset{5}{0}, \quad \underset{6}{\frac{1}{3}}, \ldots$$

В первом случае мы имеем просто постоянную величину: все «множество» принимаемых ею значений сводится к одному; во втором — это множество состоит из двух значений, принимаемых поочередно. Наконец, в третьем случае множество различных значений, принимаемых функцией x_n, бесконечно, но это не мешает значениям этой функции через одно равняться нулю. Таким образом, область изменения $\mathscr{X}$ функции x_n, как переменной величины, и последовательность (2) существенно отличаются одна от другой. Первое отличие в том, что в множестве $\mathscr{X}$ каждый элемент встречается по разу, а в последовательности (2) один и тот же элемент может повторяться несколько (и даже бесконечное множество) раз. Второе же — и самое существенное — отличие заключается в том, что множество $\mathscr{X}$ «аморфно», лишено порядка, а для элементов последовательности (2) установлен определенный порядок.

*) Аналогично можно было бы говорить и о последовательности точек прямой или каких-нибудь других объектов, занумерованных натуральными указателями.

Привычный способ записи последовательности [см. (2)] как бы предполагает пространственное расположение элементов последовательности. Но такая запись применяется лишь для удобства и с существом дела не связана. Если мы будем говорить, что переменная «пробегает» такую-то последовательность значений, то у читателя может возникнуть представление о прохождении переменной своих значений в последовательные моменты времени, но на деле и время тут не при чем. Лишь для образности языка употребляют иной раз и выражения: «далекие» значения переменной, начиная с некоторого «места» или с некоторого «момента» изменения, и т. п.

28. Определение предела последовательности. Упорядочение значений переменной x_n по возрастанию их номеров, приведшее к рассмотрению последовательности (2) этих значений, облегчает понимание самого «процесса» приближения переменной x_n — при безграничном возрастании n — к ее пределу a.

Число a называется пределом переменной x_n, если последняя отличается от a сколь угодно мало, начиная с некоторого места, т. е. для всех достаточно больших номеров n.

Этим суть дела выражена ярко, но что значит «сколь угодно мало» и «достаточно большие» — еще подлежит уточнению. Приведем теперь более длинное, но уже исчерпывающе строгое определение предела:

Число a называется пределом переменной x_n, если для каждого положительного числа ε, сколько бы мало оно ни было, существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

Тот факт, что a является пределом переменной x_n, записывают так:

$$\lim x_n = a$$

(lim есть сокращение латинского слова limes, означающего «предел»). Говорят еще, что переменная стремится к a, и пишут

$$x_n \to a.$$

Наконец, *число a называют также пределом последовательности* (2), и говорят, что эта последовательность сходится к a.

Неравенство (3), где ε произвольно, и есть точная запись утверждения, что x_n от a «отличается сколь угодно мало», а номер N как раз и указывает то «место», начиная с которого это обстоятельство осуществляется, так что «достаточно большими» будут все номера $n > N$.

Важно дать себе отчет в том, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз навсегда; он зависит от выбора числа ε.

Для того чтобы подчеркнуть это, мы иной раз вместо N будем писать N_ε. При уменьшении числа ε соответствующий номер $N=N_\varepsilon$, вообще говоря, увеличивается: чем большей близости значений переменной x_n к a мы требуем, тем «более далекие» значения ее в ряду (2) приходится рассматривать.

Исключение представляет тот случай, когда все значения переменной x_n равны постоянному числу a. Очевидно, что тогда $a=\lim x_n$, но на этот раз неравенство (3) будет выполняться для любого $\varepsilon>0$ одновременно при всех значениях x_n *).

Неравенство (3), как мы знаем [8], равносильно следующим:

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$

или

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon; \tag{4}$$

этим мы часто будем пользоваться впоследствии.

Открытый промежуток $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, с центром в точке a, принято называть окрестностью этой точки. Таким образом, *какую бы малую окрестность точки a ни взять, все значения x_n, начиная с некоторого из них, должны попасть в эту окрестность* (так что вне ее может остаться разве лишь конечное

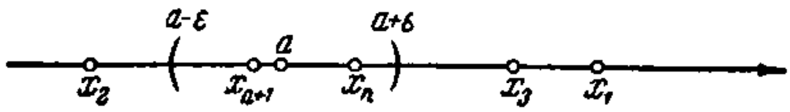


Рис. 18.

число этих значений). Если изобразить число a и значения переменной x_n точками на числовой оси [n°13] (рис. 18), то точка, изображающая число a, окажется как бы средоточием сгустка точек, изображающих значения x_n.

29. Бесконечно малые величины. Случай, когда переменная стремится к нулю: $x_n\to 0$, представляет особый интерес.

Переменная x_n, имеющая своим пределом нуль, называется бесконечно малой величиной, или просто **бесконечно малой**.

Если в определении предела переменной x_n [28] положить $a=0$, то неравенство (3) примет вид

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon \quad (\text{для } n>N_\varepsilon).$$

Таким образом, данное выше определение бесконечно малой можно подробнее сформулировать без упоминания термина «предел»:

---

*) Аналогичное обстоятельство имеет место для переменной x_n, значения которой становятся равными a, начиная с некоторого места.

Переменная x_n называется бесконечно малой, если она для достаточно больших номеров становится и остается по абсолютной величине меньшей сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Не вполне удачный (исторически сложившийся) термин «бесконечно малая» величина не должен вводить читателя в заблуждение: ни одно в отдельности взятое значение этой величины, если оно не нуль, не может квалифицироваться как «малое». Суть дела в том, что это — переменная величина*), которая лишь в процессе своего изменения способна в конце концов сделаться меньшей произвольно взятого числа ε.

Если вернуться к общему случаю переменной x_n, имеющей предел a, то разность

$$\alpha_n = x_n - a$$

между переменной и ее пределом, очевидно, будет бесконечно малой: ведь, в силу (3),

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (\text{для } n > N_\varepsilon).$$

Обратно, если α_n есть бесконечно малая, то $x_n \to a$. Это приводит нас к следующему утверждению:

Для того чтобы переменная x_n имела своим пределом постоянное число a, необходимо и достаточно, чтобы разность между ними $\alpha_n = x_n - a$ была бесконечно малой.

В связи с этим можно было бы дать и для понятия «предел» другое определение (равносильное старому):

Постоянное число a называется пределом переменной x_n, если разность между ними есть бесконечно малая величина.

Разумеется, если исходить из этого определения предела, то для бесконечно малой нужно использовать второе из приведенных выше определений. Иначе получился бы порочный круг: предел определялся бы через бесконечно малую, а бесконечно малая — через предел!

Итак, если переменная $x_n \to a$, то она может быть представлена в виде

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n есть бесконечно малая, и обратно, если переменная допускает такое представление, то она имеет пределом a. Этим часто пользуются на практике для установления предела переменной.

30. Примеры. 1) Рассмотрим переменные

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad x_n = -\frac{1}{n}, \qquad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

---

*) Исключая неинтересный случай, когда она тождественно равна нулю.

им отвечают такие последовательности значений:

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\ldots,$$
$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\ldots,$$
$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\ldots,$$

Все три переменные представляют собой бесконечно малые, т. е. имеют пределом нуль. Действительно, для них

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в качестве N_ε можно, например, взять наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ *).

Отметим, что первая переменная все время больше своего предела нуль, вторая — все время меньше его, третья же — попеременно становится то больше, то меньше его.

2) Если положить

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n},$$

то переменная пробегает такую последовательность значений:

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{3}{6},\ldots$$

И в этом случае $x_n \to 0$, так как

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon$$

для $n > \frac{3}{\varepsilon}$, так что за N_ε можно принять $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$.

Мы сталкиваемся здесь с любопытной особенностью: переменная поочередно то *приближается* к своему пределу нуль, то *удаляется* от него.

3) Пусть теперь

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

с этой переменной мы уже имели дело в n° 27. Здесь также $x_n \to 0$, ибо

$$|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

Отметим, что для всех нечетных значений n переменная оказывается *равной своему пределу*.

---

*) См. стр. 41.

Эти простые примеры интересны тем, что они характеризуют многообразие тех возможностей, которые охватываются данным выше определением предела. Несущественно, лежат ли значения переменной с одной стороны от предела или нет; несущественно, приближается ли переменная с каждым шагом к своему пределу; несущественно, наконец, достигает ли переменная своего предела, т. е. принимает ли значения, равные пределу. Существенно лишь то, о чем говорится в определении: переменная должна отличаться от предела сколь угодно мало в конце концов, т. е. для достаточно далеких своих значений.

4) Определим переменную формулой

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a > 1)$$

и докажем, что $x_n \to 1$.

Если воспользоваться неравенством (3) в n° 11, то можно написать:

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon, \text{ лишь только } n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

Можно, однако, рассуждать иначе. Неравенство

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

равносильно такому:

$$\frac{1}{n} < \log_a (1+\varepsilon) \quad \text{или} \quad n > \frac{1}{\log_a (1+\varepsilon)},$$

так что оно выполняется при $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a (1+\varepsilon)}\right)$.

В соответствии с выбранным способом рассуждения мы пришли к различным выражениям для N_ε. Например, при $a = 10$, $\varepsilon = 0{,}01$ получаем $N_{0{,}01} = \frac{9}{0{,}01} = 900$ по первому способу и $N_{0{,}01} = E\left(\frac{1}{0{,}00432\ldots}\right) = 231$ — по второму. По второму способу мы получили наименьшее из возможных значений для $N_{0{,}01}$, ибо уже $10^{\frac{1}{231}} = 1{,}010017\ldots$ отличается от числа 1 больше чем на $\varepsilon = 0{,}01$. То же будет и в общем случае.

Заметим по этому поводу, что мы вовсе не заинтересованы именно в наименьшем возможном значении N_ε, если речь идет только об установлении факта стремления к пределу. Должно быть гарантировано выполнение неравенства (3), начиная хоть с какого-нибудь места, далекого или близкого — безразлично.

5) Важный пример бесконечно малой дает переменная

$$\alpha_n = q^n, \text{ где } |q| < 1.$$

Для доказательства того, что $\alpha_n \to 0$, рассмотрим неравенство

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon;$$

оно равносильно таким:

$$n \cdot \log|q| < \log \varepsilon \quad \text{или} \quad n > \frac{\log \varepsilon}{\log|q|}\,^{*)}.$$

---

*) Следует иметь в виду, что $|q| < 1$ и $\log|q| < 0$; поэтому при делении обеих частей неравенства на это число знак неравенства должен быть изменен на обратный.

Таким образом, если положить (считая $\varepsilon < 1$)

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}\right),$$

то при $n > N_\varepsilon$ упомянутое неравенство наверное выполнится.

Аналогично легко убедиться в том, что и переменная

$$\beta_n = Aq^n,$$

где по-прежнему $|q| < 1$, а A — постоянное число, также есть бесконечно малая.

6) Рассмотрим, далее, бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$\div\!\div\, a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \qquad (|q| < 1)$$

и поставим вопрос об определении ее *суммы*.

Под суммой бесконечной прогрессии, как известно, разумеется предел, к которому стремится сумма s_n ее n членов при безграничном возрастании n. Но

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n,$$

так что переменная s_n разнится от постоянного числа $\frac{a}{1-q}$ на величину $\alpha_n = -\frac{a}{1-q}\cdot q^n$, которая, как мы только что видели, является бесконечно малой. Следовательно, по второму определению предела искомая сумма прогрессии

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}.$$

31. Бесконечно большие величины. Бесконечно малым величинам, в некотором смысле, противопоставляются *бесконечно большие величины* (или просто *бесконечно большие*).

Переменная x_n называется бесконечно большой, если она для достаточно больших значений n становится и остается по абсолютной величине бо́льшей сколь угодно большого наперед заданного числа $\mathrm{E} > 0$:

$$|x_n| > \mathrm{E} \quad (\textit{для } n > N_{\mathrm{E}}).$$

Как и в случае бесконечно малых, здесь также следует подчеркнуть, что ни одно в отдельности взятое значение бесконечно большой величины не может быть квалифицировано как «большое»; мы имеем здесь дело с *переменной* величиной, которая *лишь в процессе своего изменения* способна в конце концов сделаться бо́льшей произвольно взятого числа E.

Примерами бесконечно больших могут служить переменные

$$x_n = n, \quad x_n = -n, \quad x_n = (-1)^{n+1} n,$$

которые пробегают натуральный ряд чисел, но первая со знаком плюс, вторая со знаком минус, третья же — с чередующимися знаками.

Вот еще один пример бесконечно большой величины:

$$x_n = Q^n \text{ при } |Q| > 1.$$

Действительно, каково бы ни было $E > 0$, неравенство

$$|x_n| = |Q|^n > E$$

выполняется, лишь только

$$n \cdot \log|Q| > \log E \quad \text{или} \quad n > \frac{\log E}{\log|Q|} \text{ *)},$$

так что за N_E можно взять число

$$E\left(\frac{\log E}{\log|Q|}\right).$$

Особенно важны те случаи, когда бесконечно большая величина x_n (по крайней мере, для достаточно больших n) сохраняет определенный знак ($+$ или $-$); *тогда, в соответствии со знаком, говорят, что переменная x_n имеет предел $+\infty$ или $-\infty$, а также что она стремится к $+\infty$ или $-\infty$*; при этом пишут

$$\lim x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty \quad \text{или} \quad \lim x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty.$$

Можно было бы дать для этих случаев и независимое определение, заменив неравенство $|x_n| > E$, смотря по случаю, неравенством

$$x_n > E \quad \text{или} \quad x_n < -E,$$

откуда уже вытекает, соответственно, что $x_n > 0$ или $x_n < 0$.

Очевидно, что бесконечно большая величина x_n в общем случае характеризуется соотношением $|x_n| \to +\infty$.

Из приведенных выше примеров бесконечно больших величин, очевидно, переменная $x_n = n$ стремится к $+\infty$, переменная $x_n = -n$ стремится к $-\infty$. Что же касается третьей переменной: $x_n = (-1)^{n+1} n$, то про нее нельзя сказать ни что она стремится к $+\infty$, ни что она стремится к $-\infty$.

Наконец, относительно переменной $x_n = Q^n$ лишь при $Q > 1$ можно сказать, что она стремится к $+\infty$; при $Q < -1$ у нее предела нет.

С «несобственными числами» $\pm\infty$ мы уже сталкивались в n° 6; следует помнить, что их применение имеет совершенно условный смысл, и остерегаться производить над этими числами арифметические операции. Вместо $+\infty$ часто пишут просто ∞.

В заключение упомянем о простой связи, которая существует между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.

Если переменная x_n является бесконечно большой, то ее обратная величина $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. По определению бесконечно большой, для числа $E = \frac{1}{\varepsilon}$ найдется такой номер N, что

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{лишь только } n > N.$$

*) Так как $|Q| > 1$, то $\log|Q| > 0$.

Тогда для тех же значений n, очевидно, будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Аналогично можно доказать и обратное утверждение:

Если переменная α_n (не обращающаяся в нуль) является бесконечно малой, то обратная для нее величина $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ будет бесконечно большой.

32. Определение предела функции. Рассмотрим числовое множество $\mathscr{X} = \{x\}$. *Точка a называется* ***точкой сгущения*** *этого множества, если в любой окрестности* $(a - \delta, a + \delta)$ [n° **28**] *этой точки содержатся значения x из $\mathscr{X}$, отличные от a.* Сама точка сгущения при этом может принадлежать $\mathscr{X}$ или нет. Например, если $\mathscr{X} = [a, b]$ или $\mathscr{X} = (a, b]$, то a в обоих случаях является точкой сгущения для $\mathscr{X}$, но в первом случае она сама содержится в $\mathscr{X}$, а во втором — нет.

В предположении, что a есть точка сгущения для $\mathscr{X}$, можно извлечь из $\mathscr{X}$ — и притом бесчисленным множеством способов — такую последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

значений x, отличных от a, которая имела бы своим **пределом** a. Действительно, задавшись последовательностью положительных чисел δ_n, сходящейся к нулю, в каждой окрестности $(a - \delta_n, a + \delta_n)$ точки a (при $n = 1, 2, 3, \ldots$) найдем по точке $x = x_n$ из $\mathscr{X}$, отличной от a; так как $\delta_n \to 0$ и $|x_n - a| < \delta_n$, то $x_n \to a$.

Пусть теперь в области $\mathscr{X}$, для которой a является точкой сгущения, задана некоторая функция $f(x)$. Представляет интерес поведение этой функции при приближении x к a. Говорят, что *функция $f(x)$ имеет предел A, конечный или нет, при* ***стремлении*** *x к a* (или, короче, — *в точке a*), *если,* ***какую бы последовательность*** (2) *с пределом a, извлеченную из $\mathscr{X}$, ни пробегала независимая переменная x, соответствующая последовательность значений функции*

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{5}$$

всегда имеет предел A. Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{6}$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to a. \tag{7}$$

Предположим теперь, что множество $\mathscr{X} = \{x\}$ содержит сколь угодно большие положительные значения x; тогда говорят, что $+\infty$ *является точкой сгущения этого множества.* Если под окрестностью точки $+\infty$ разуметь промежуток $(\Delta, +\infty)$, то можно высказанное предположение представить и в такой форме: *в каждой окрестности точки $+\infty$ должны содержаться числа из множества $\mathscr{X}$.*

Если это предположение выполнено, то можно из $\mathscr{X}$ выделить последовательность (2), имеющую пределом $+\infty$. Действительно, взяв любую положительную переменную Δ_n, стремящуюся к $+\infty$, для каждого Δ_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ найдем в $\mathscr{X}$ значение $x_n > \Delta_n$; очевидно, $x_n \to +\infty$.

В предположении, что $+\infty$ является точкой сгущения для $\mathscr{X}$, рассмотрим определенную в этой области функцию $f(x)$. Для нее можно установить понятие *предела при* $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

совершенно так же, как и выше, заменив лишь a на $+\infty$.

Аналогично устанавливается и понятие *предела функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Здесь нужно лишь заранее предположить, что $-\infty$ *есть точка сгущения множества* $\mathscr{X}$ — смысл этого ясен сам собой.

Скажем в заключение о переносе на рассматриваемый общий случай предела функции терминологии, установленной в n° **29** и **31** для функции от натурального аргумента. Пусть при определенном предельном переходе по x функция $f(x)$ стремится к нулю; тогда эту функцию называют бесконечно малой величиной. Если функция $f(x)$ стремится к конечному пределу A, то разность $f(x) - A$ будет бесконечно малой, и наоборот. При стремлении $|f(x)|$ к $+\infty$ функцию называют бесконечно большой величиной*). Наконец, легко перенести на рассматриваемый общий случай и теоремы в конце n° **31**, устанавливающие связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.

33. Другое определение предела функции. Понятие предела функции $f(x)$ при стремлении x к a мы построили на ранее изученном и более элементарном понятии предела последовательности. Можно, однако, дать другое определение предела функции, вовсе не использующее предела последовательности.

Ограничимся сначала случаем, когда оба числа a и A конечны. Тогда — в предположении, что a является точкой сгущения области $\mathscr{X}$, где задана функция $f(x)$, — новое определение предела можно дать в такой форме:

---

*) Если это обстоятельство имеет место при $x \to a$, где a — конечно, то говорят также, что в точке a функция обращается в бесконечность.

Функция $f(x)$ имеет пределом число A при стремлении x к a, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{лишь только} \quad |x - a| < \delta \tag{8}$$

(где x взято из $\mathscr{X}$ и отлично от a)*).

Это определение совершенно равносильно данному выше в n° 32. Для доказательства предположим сначала, что выполнено только что сформулированное условие, и по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ найдено соответствующее ему в указанном смысле число $\delta > 0$. Извлечем из $\mathscr{X}$ произвольную последовательность (2), сходящуюся к a (причем все x_n отличны от a). По определению предела последовательности, числу $\delta > 0$ отвечает такой номер N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \delta$, а следовательно [см. (8)], и $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Этим и доказана сходимость последовательности (5) к A. Таким образом, выполнено условие, которое содержится в прежнем определении.

Предположим теперь, что предел функции существует в согласии с прежним определением. Для доказательства того, что одновременно выполняется и условие, содержащееся в новом определении, допустим противное. Тогда для н е к о т о р о г о числа $\varepsilon > 0$ уже не существовало бы соответствующего δ, т. е. какое бы малое δ ни взять, всегда найдется хоть одно значение переменной $x = x'$ (отличное от a), для которого

$$|x' - a| < \delta, \text{ но тем не менее } |f(x') - A| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем последовательность положительных чисел δ_n, сходящуюся к нулю. На основании только что сказанного для к а ж д о г о числа $\delta = \delta_n$ найдется такое значение $x' = x'_n$, что

$$|x'_n - a| < \delta_n, \quad \text{но тем не менее} \quad |f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Из этих значений, таким образом, составляется некоторая последовательность

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots,\ x'_n \ldots,$$

для которой

$$|x'_n - a| < \delta_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

так как $\delta_n \to 0$, то $x'_n \to a$.

По предположению, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ f(x'_3),\ \ldots,\ f(x'_n),\ \ldots$$

*) Именно из того, что a есть точка сгущения для $\mathscr{X}$, явствует, что такие значения x в окрестности $(a - \delta,\ a + \delta)$ точки a наверное существуют.

должна сходиться к A, а это невозможно ввиду того, что при всех $n=1, 2, 3, \ldots$ имеем $|f(x'_n)-A| \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Легко указать новую форму определения предела и для тех случаев, когда одно из чисел a, A или оба они равны $+\infty$ или $-\infty$. Приведем для примера в развернутом виде определение, относящееся к случаю $a=+\infty$ и A конечного (или тоже равного $+\infty$):

Функция $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ имеет пределом конечное число A (или $+\infty$), если для каждого числа $\varepsilon>0$ $(E>0)$ *найдется такое число* $\Delta>0$, *что*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad (f(x)>E), \text{ лишь только } x>\Delta \qquad (x \text{ из } \mathscr{X}).$$

Доказательство равносильности этого определения с определением «на языке последовательностей» проводится так же, как и выше.

Если применить это определение к переменной x_n, как функции от независимой переменной n, при $n \to +\infty$, то мы вернемся к исходному определению предела такой функции, или — что то же — предела последовательности, данному в n° **28** и **31** (роль числа Δ там играет N). Таким образом, в то время как прежнее определение предела функции сводило это понятие к пределу последовательности, в свою очередь *определение предела последовательности оказывается попросту частным случаем определения предела функции вообще* — в его новой форме. Тот предел, который мы раньше обозначили через

$$\lim x_n,$$

по-новому должен был бы быть записан в виде

$$\lim_{n \to +\infty} x_n.$$

Впрочем, на деле указание $n \to +\infty$ всегда может быть опущено без опасности недоразумения, ибо никакого другого предельного перехода здесь не может подразумеваться: область $\mathscr{N}$ изменения натурального указателя n имеет единственную точку сгущения $+\infty$.

Несмотря на различие в определениях предела функции (в новой форме) применительно к различным предположениям относительно a и A, сущность их одна и та же: функция должна содержаться в произвольной «окрестности» своего предела A, лишь только независимая переменная содержится в надлежаще выбранной «окрестности» своего предела a.

Итак, для важного в анализе понятия предела функции мы имеем два равносильных определения; в зависимости от удобства мы будем пользоваться то тем, то другим из них.

34. Примеры. 1) Аналогично доказанному в n° **30**, 5) предельному соотношению

$$\lim a^{\frac{1}{n}}=1 \qquad (a>1)$$

можно получить более общее:

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \qquad (a > 1).$$

Требуется для заданного $\varepsilon > 0$ *) найти такое $\delta > 0$, что

$$|a^x - 1| < \varepsilon, \text{ лишь только } |x| < \delta.$$

Но первое из этих неравенств или равносильные ему неравенства

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$$

выполнятся, если

$$\log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon).$$

Так как

$$\log_a(1-\varepsilon) + \log_a(1+\varepsilon) = \log_a(1-\varepsilon^2) < 0 \quad \text{и} \quad \log_a(1-\varepsilon) < -\log_a(1+\varepsilon),$$

то упомянутые неравенства и подавно выполнятся, если

$$-\log_a(1+\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon) \text{ или } |x| < \log_a(1+\varepsilon).$$

Итак, стоит лишь положить $\delta = \log_a(1+\varepsilon)$, чтобы при $|x| < \delta$ было $|a^x - 1| < \varepsilon$. Этим завершается доказательство.

2) Докажем, что

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty \quad (\text{при } a > 1).$$

При любом $E > 0$ достаточно взять $\Delta = \log_a E$, чтобы

$$x > \Delta \text{ влекло за собой } a^x > E,$$

что и доказывает наше утверждение **).

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = 0 \qquad (\text{при } a > 1).$$

Именно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$), если взять

$$\Delta = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a \varepsilon,$$

то при $x < -\Delta$ необходимо $a^x < \varepsilon$.

Если же $0 < a < 1$, то с помощью преобразования

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

легко установить результаты

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (\text{при } 0 < a < 1).$$

3) Установим, что при $a > 1$ и $x > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty.$$

---

*) Причем ничто не мешает нам считать $\varepsilon < 1$.

**) С более частным результатом

$$\lim a^n = +\infty$$

мы уже имели дело в n° **31**.

При любом заданном $E>0$, лишь только $x>a^E$, будем иметь: $\log_a x > E$ и, аналогично, лишь только $0<x<a^{-E}$, выполняется неравенство $\log_a x < -E$. Этим и доказаны оба соотношения.

4) Имеем, далее,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Остановимся для примера на первом пределе. При любом $\varepsilon>0$, достаточно взять $x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, чтобы было: $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2}-\varepsilon$, так что

$$0<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x<\varepsilon.$$

5) Теперь мы установим следующий (важный и для дальнейшего) результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{9}$$

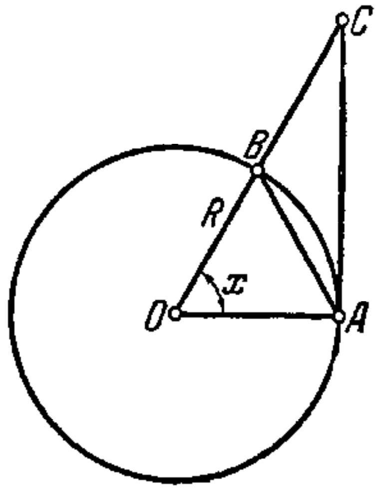


Рис. 19.

Предварительно, однако, нам придется доказать некоторые полезные неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

С этой целью в круге радиуса R рассмотрим острый угол AOB, хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (рис. 19). Тогда имеем: площадь $\triangle AOB <$ площади сектора $AOB <$ площади $\triangle AOC$ *).

Если через x обозначить радианную меру угла AOB, так что длина дуги $\smile{AB}$ выразится произведением Rx, то эти неравенства перепишутся так:

$$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}R^2\cdot x<\frac{1}{2}R^2\cdot\operatorname{tg} x.$$

Отсюда — по сокращении на $\frac{1}{2}R^2$ — и приходим к неравенствам (10).

В предположении, что $0<x<\frac{\pi}{2}$, разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенств (10). Мы получим

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

откуда

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

*) При этом мы пользуемся теми сведениями о площадях элементарных фигур, которые излагаются в школьном курсе.

Но

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

[в силу (10)], так что

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|,$$

которое, очевидно, сохранится и при изменении знака x, т. е. будет справедливо для всех $x \neq 0$, лишь только $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Полученное неравенство и решает вопрос. Действительно, если по произволу задано число $\varepsilon > 0$, то за δ достаточно выбрать наименьшее чисел ε, $\frac{\pi}{2}$: при $|x| < \delta$, прежде всего, применимо это неравенство $\left(\text{ведь } \delta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, и именно в силу него (так как $\delta \leqslant \varepsilon$)

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

6) Интересен, наконец, и пример, когда предел функции не существует: функция $\sin x$ при стремлении x к $+\infty$ $(-\infty)$ вовсе не имеет предела.

В отсутствии предела всего проще убедиться, стоя на «точке зрения последовательностей». Достаточно заметить, что двум последовательностям

$$\left\{\frac{2n-1}{2}\pi\right\} \text{ и } \left\{\frac{2n+1}{2}\pi\right\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

значений x, имеющим пределом $+\infty$, отвечают последовательности значений функции, стремящиеся к различным пределам:

$$\sin\frac{2n-1}{2}\pi = -1 \to -1, \qquad \sin\frac{2n+1}{2}\pi = 1 \to 1.$$

Если вспомнить «колебательный» характер синусоиды, то отсутствие предела в рассматриваемом случае станет наглядным.

Аналогично, и функция $\sin\frac{1}{\alpha}$ при стремлении α к нулю (как при $\alpha > 0$, так и при $\alpha < 0$) предела не имеет. Это, в сущности, лишь другая форма приведенного выше примера: стоит лишь в функции $\sin x$ заменить x на $\frac{1}{\alpha}$. Очевидно, если α пробегает последовательность положительных (отрицательных) значений, приближающихся к нулю, то $x = \frac{1}{\alpha}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, и обратно.

Напишем снова в выражении $\sin\frac{1}{\alpha}$ вместо буквы α букву x (чтобы вернуться к привычному обозначению абсциссы) и рассмотрим поучительный график функции

$$y=\sin\frac{1}{x}\qquad(x\neq 0),$$

ограничиваясь значениями x от 0 до $\frac{2}{\pi}$ $\left(\text{и от } -\frac{2}{\pi} \text{ до } 0\right)$.

Отметим последовательно убывающие до 0 значения x:

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{2}{7\pi},\ldots,\ \frac{2}{(2n-1)\pi},\ \frac{1}{n\pi},\ \frac{2}{(2n+1)\pi},\ldots;$$

им отвечают растущие до $+\infty$ значения $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ n\pi,\ \frac{(2n+1)\pi}{2},\ldots$$

В промежутках между указанными значениями (при убывании x) наша функция попеременно убывает от 1 до 0 и от 0 до -1, затем возрастает от -1 до 0 и от 0 до 1 и т. д. Таким образом, функция $\sin\frac{1}{x}$ производит бесконечное множество колебаний, подобно функции $\sin x$, но, в то время как для последней эти колебания распределяются на бесконечный промежуток, здесь они все умещаются в конечном промежутке, сгущаясь к нулю.

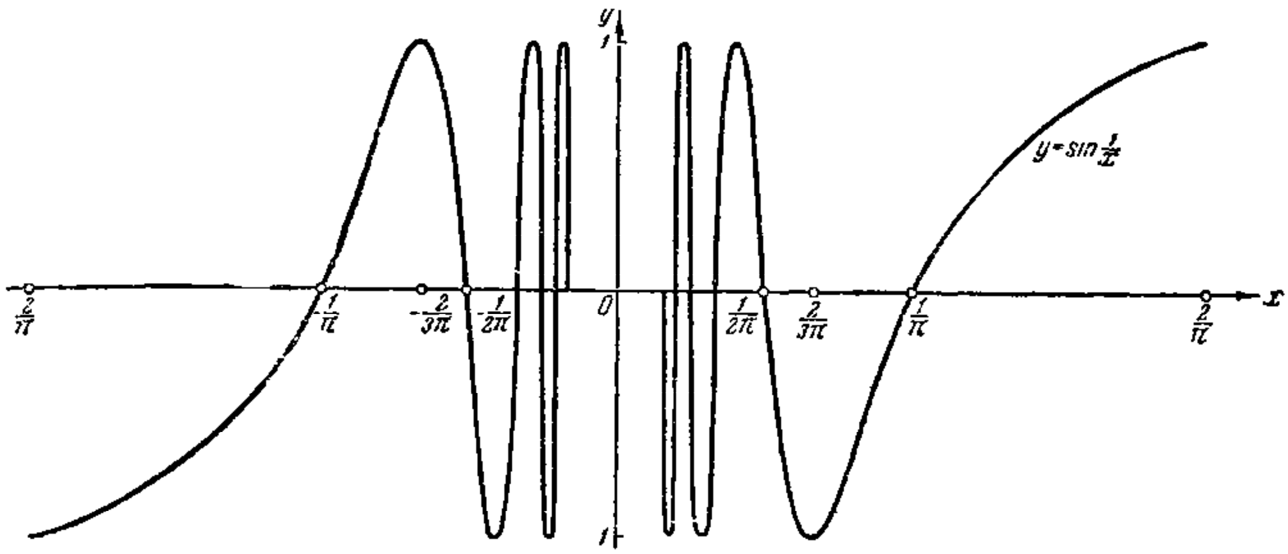


Рис. 20.

График изображен на рис. 20 (разумеется, не полностью — бесконечное множество колебаний воспроизвести невозможно!). Так как при изменении знака x и $\sin\frac{1}{x}$ меняется знак, то левая половина графика симметрична с правой относительно начала.

7) Если для $x\neq 0$ рассмотреть функцию $x\cdot\sin\frac{1}{x}$, которая отличается множителем x от только что изученной функции $\sin\frac{1}{x}$, то на этот раз предел при $x\to 0$ существует:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

что сразу ясно из неравенства

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|.$$

При приближении x к нулю, наша функция по-прежнему производит бесконечное множество колебаний, но их амплитуда (благодаря множителю x) убывает, стремясь к нулю, чем и обеспечивается существование предела.

График функции

$$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

изображен на рис. 21; он умещается между двумя биссектрисами $y = x$ и $y = -x$ координатных углов *).

З а м е ч а н и е. Мы имели пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0,$$

объединенные одной особенностью: ни одна из рассматриваемых здесь функций не о п р е д е л е н а при $x = 0$. Но это нисколько не мешает говорить

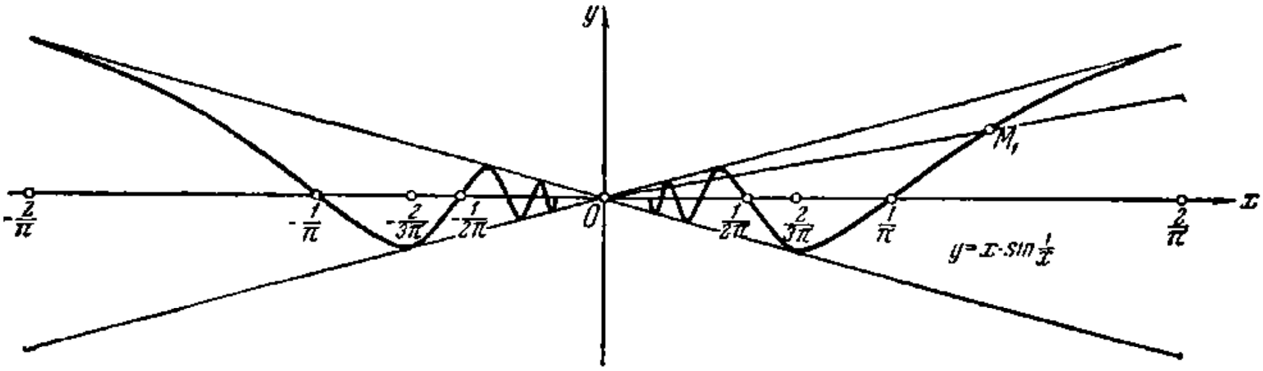


Рис. 21.

об их пределах при $x \to 0$, ибо, согласно точному смыслу данного выше определения, как раз значение $x = 0$ при этом н е р а с с м а т р и в а е т с я.

Аналогично, то обстоятельство, что функция $\sin \frac{1}{x}$ не имеет смысла при $x = 0$, не мешает с т а в и т ь в о п р о с об ее пределе при $x \to 0$; но на этот раз предел оказывается несуществующим.

35. Односторонние пределы. Если область $\mathscr{X}$ такова, что в любой близости от a, *но с п р а в а о т* a, найдутся значения x из $\mathscr{X}$, то можно специализировать данное в n° **32** и **33** определение предела функции, ограничившись лишь значениями $x > a$. В этом случае предел функции, если он существует, называется *пределом функции* $f(x)$ *при стремлении* x *к* a *с п р а в а* (или короче — *в точке* a *с п р а в а*) и обозначается символом

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad f(a+0).$$

*) На рис. 20 и 21 для ясности пришлось по оси x взять бо́льший масштаб, что создает и с к а ж е н и е.

Аналогично определяется понятие *предела функции при стремлении x к a (в точке a)* *с л е в а*

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) \quad \text{или} \quad f(a-0)\,^{*)}.$$

Оба эти предела называются о д н о с т о р о н н и м и.

Если область $\mathscr{X}$ допускает безграничное приближение к a и справа и слева, то можно рассматривать и тот и другой пределы. Легко

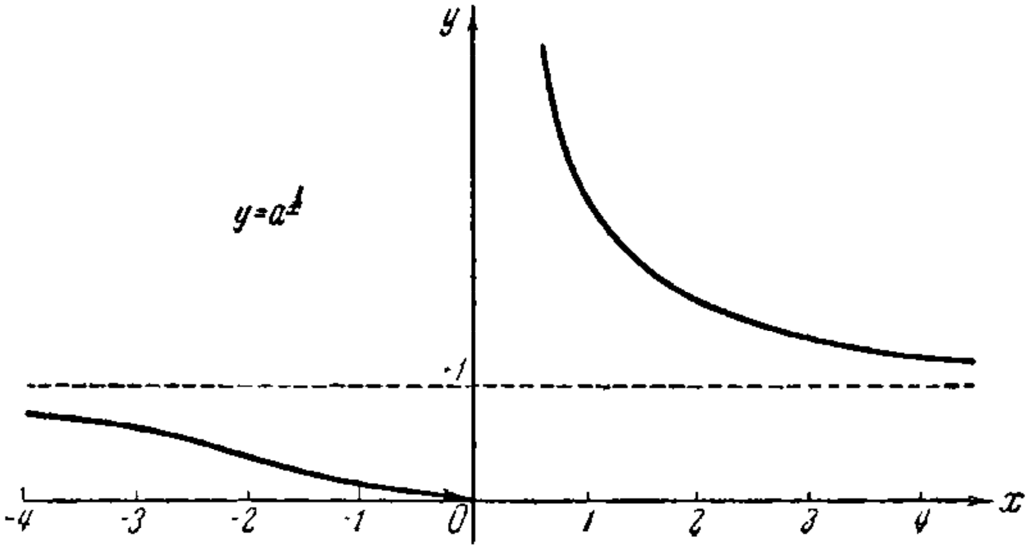


Рис. 22.

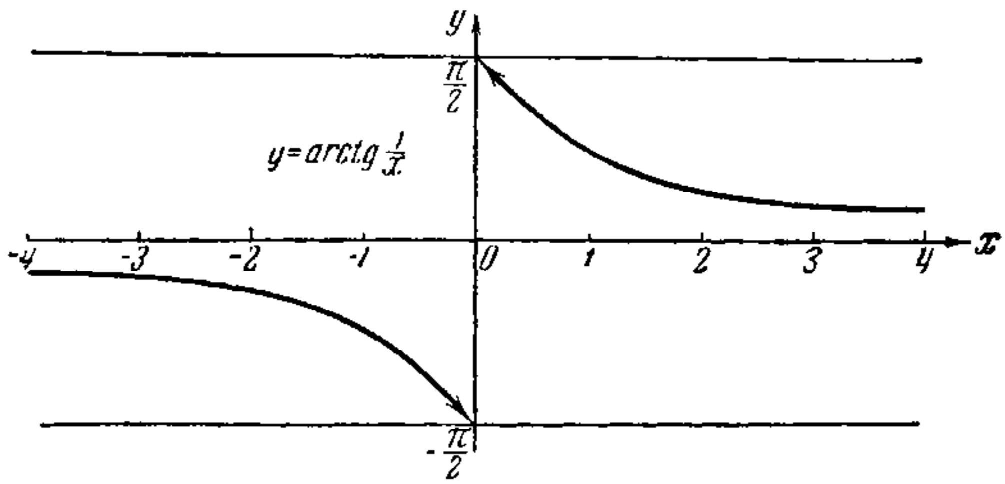


Рис. 23.

установить, что *для существования обыкновенного* («двустороннего») *предела* (6) *необходимо и достаточно существование порознь и* *р а в е н с т в о обоих пределов справа и слева:*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

Отметим, что эти пределы могут оба существовать, но не быть равными. Примеры тому легко построить, исходя из уже рассмотренных в n° **34** примеров 1) и 4).

*) Если само $a=0$, то вместо $0+0$ $(0-0)$ пишут просто $+0$ (-0).

Примеры. Определим две функции для $x \neq 0$ равенствами

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}} \quad (a > 1), \quad f_2(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Для первой из них имеем

$$f_1(+0) = \lim_{x \to +0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} a^z = +\infty,$$

$$f_1(-0) = \lim_{x \to -0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to -\infty} a^z = 0.$$

Для второй же

$$f_2(+0) = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0) = \lim_{x \to -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2}.$$

Графики этих функций даны на рис. 22 и 23.

§ 2. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

36. Свойства функции от натурального аргумента, имеющей конечный предел. Так как формулировка и доказательство теорем, относящихся к функции от натурального аргумента, выглядят проще, чем в случае функции общего вида, то мы всегда сначала будем формулировать и доказывать теоремы для отмеченного частного случая, а затем лишь сделаем указания относительно переноса их на общий случай.

1) *Если переменная x_n стремится к пределу a, и $a > p$ $(a < q)$, то и все значения переменной, начиная с некоторого, тоже будут больше p (меньше q).*

Выбрав положительное число $\varepsilon < a - p$ $(q - a)$, будем иметь

$$a - \varepsilon > p \quad (a + \varepsilon < q).$$

Но, по определению предела переменной x_n [n°28], для этого ε найдется такое N, что при $n > N$ будет

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Для тех же значений и подавно: $x_n > p$ $(x_n < q)$.

Это простое предложение имеет ряд полезных следствий.

2) *Если переменная x_n стремится к пределу $a > 0$ (< 0), то и сама переменная $x_n > 0$ (< 0), начиная с некоторого места.*

Для доказательства достаточно применить предыдущее утверждение, взяв $p = 0$ $(q = 0)$.

3) Если переменная x_n стремится к пределу a, причем всегда

$$x_n \leqslant p \quad (\geqslant q),$$

то и

$$a \leqslant p \quad (\geqslant q).$$

Доказывается от противного, со ссылкой на 1).

Опираясь на предложение 1), докажем теперь единственность предела.

4) *Переменная x_n не может одновременно стремиться к двум различным (конечным) пределам.*

Действительно, допустим противное: пусть одновременно $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причем $a < b$. Возьмем любое число r между a и b:

$$a < r < b.$$

Поскольку $x_n \to a$ и $a < r$, найдется такой номер N', что для $n > N'$ будет выполняться неравенство: $x_n < r$. С другой стороны, раз $x_n \to b$ и $b > r$, найдется и такой номер N'', что для $n > N''$ окажется $x_n > r$. Если взять номер n бо́льшим и N' и N'', то соответствующее значение переменной x_n будет одновременно и меньшим r, и бо́льшим r, что невозможно.

Это противоречие доказывает наше утверждение.

5) *Если переменная x_n имеет конечный предел, то она является ограниченной* в том смысле, что все ее значения содержатся между двумя конечными границами:

$$m \leqslant x_n \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Прежде всего, непосредственно из определения предела ясно, что, какое бы ни взять $\varepsilon > 0$, найдется такое N, что для $n > N$ будет

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Таким образом, для $n = N + 1$, $N + 2, \ldots$ значения x_n уже заключены между границами $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$. Вне этих границ могут лежать лишь некоторые из первых N значений

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_N.$$

Так как таких исключительных значений всего конечное число, то можно раздвинуть указанные границы так, чтобы между новыми границами m и M содержались уже все значения x_n. Например, можно за m взять наименьшее из чисел

$$a - \varepsilon, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_N,$$

а за M — наибольшее из чисел

$$a + \varepsilon, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_N.$$

Замечание. Отсюда ясно, в частности, что переменная, имеющая конечный предел, не может одновременно стремиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. В этом состоит некоторое дополнение к теореме 4) об единственности предела.

37. Распространение на случай функции от произвольной переменной. Легко перефразировать содержание n° **36** на общий случай функции $f(x)$, заданной в некоторой области $\mathscr{X}$ с точкой сгущения a *).

1) *Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, и $A > p$ $(A < q)$, то для достаточно близких к a значений x (отличных от a) и сама функция удовлетворяет неравенству*

$$f(x) > p \quad (f(x) < q). \tag{2}$$

Выбрав положительное число $\varepsilon < A - p$ $(q - A)$, будем иметь

$$A - \varepsilon > p \quad (A + \varepsilon < q).$$

Но, по второму определению предела функции [n° **33**], для этого ε найдется такое δ, что, лишь только $|x-a| < \delta$ (где x взято из $\mathscr{X}$ и отлично от a), тотчас же

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Для тех же значений x и подавно будет выполняться (2).

Читатель видит, что никаких новых идей для доказательства привлекать не пришлось.

Отсюда непосредственно могут быть оправданы и утверждения, аналогичные 2), 3) и 4) из n° **36**. Например, полагая в 1) $p=0$ $(q=0)$, получим:

2) *Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный положительный (отрицательный) предел, то и сама функция положительна (отрицательна), по крайней мере для значений x, достаточно близких к a, но отличных от a.*

Справедливо и утверждение, аналогичное 5), но в более слабой форме:

3) *Если при стремлении x к a функция $f(x)$ имеет конечный предел A, то для значений x, достаточно близких к a, функция будет ограниченной* в том смысле, что ее значения содержатся между двумя конечными границами:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ лишь для } 0 < |x-a| < \delta.$$

Действительно, по определению предела, задавшись числом $\varepsilon > 0$, найдем такое $\delta > 0$, что

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < |x-a| < \delta.$$

Напомним, что аналогичный результат мы первоначально получили и для переменной x_n: неравенства

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

*) Число a может быть $+\infty$ или $-\infty$; но мы для определенности ограничимся случаем конечного a.

выполнялись только для $n>N$. Но в прежнем случае вне этих границ могло оказаться лишь конечное число значений, и легко было найти новые границы, между которыми содержались бы уже все значения без исключения. Здесь же этого, вообще говоря, уже сделать нельзя, ибо значений x, для которых $|x-a|\geqslant\delta$, может оказаться и бесконечное множество. Например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ (для $x>0$) при $x\to 1$ стремится к единице; очевидно, $0<f(x)<2$, если $|x-1|<\frac{1}{2}$, однако для всех рассматриваемых значений x функция $f(x)$ вовсе не будет ограниченной: при $x\to+0$ она стремится к $+\infty$.

38. Предельный переход в равенстве и неравенстве. Соединяя две переменные x_n и y_n знаками равенства или неравенства, мы всегда подразумеваем, что речь идет о соответствующих значениях их, т. е. о значениях с одним и тем же номером.

1) *Если две переменные x_n, y_n при всех их изменениях равны: $x_n=y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n=a,\quad \lim y_n=b,$$

то равны и эти пределы: $a=b$.

Непосредственно следует из единственности предела [36, 4)].

Этой теоремой пользуются обычно в форме предельного перехода в равенстве: из $x_n=y_n$ заключают, что $\lim x_n=\lim y_n$.

2) *Если для двух переменных x_n, y_n всегда выполняется неравенство $x_n\geqslant y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел:*

$$\lim x_n=a,\quad \lim y_n=b,$$

то и $a\geqslant b$.

Допустим противное: пусть $a<b$. Рассуждая так же, как и в n° 36, 4), возьмем число r между a и b, так что $a<r<b$. Тогда, с одной стороны, найдется такой номер N', что для $n>N'$ будет $x_n<r$, с другой же — найдется и такой номер N'', что для $n>N''$ окажется $y_n>r$. Если N больше обоих чисел N', N'', то для номеров $n>N$ будут одновременно выполняться оба неравенства

$$x_n<r,\quad y_n>r,\quad \text{откуда } x_n<y_n,$$

что противоречит предположению. Теорема доказана.

Эта теорема устанавливает допустимость предельного перехода в неравенстве (соединенном с равенством): из $x_n\geqslant y_n$ можно заключить, что $\lim x_n\geqslant\lim y_n$.

Конечно, знак $>$ всюду может быть заменен знаком $<$.

Мы обращаем внимание читателя на то, что из строгого неравенства $x_n>y_n$, вообще говоря, не вытекает строгое же неравенство $\lim x_n > \lim y_n$, а только, по-прежнему: $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. Так, например, $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ при всех n, и тем не менее

$$\lim \frac{1}{n} = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Из теоремы 2), как частный случай, может быть получено утверждение 3) n° **36**.

При установлении существования и величины предела часто бывает полезна теорема:

3) *Если для переменных x_n, y_n, z_n всегда выполняются неравенства*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

причем переменные x_n и z_n стремятся к общему пределу a:

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

то и переменная y_n имеет тот же предел:

$$\lim y_n = a.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По этому ε, прежде всего, найдется такой номер N', что при $n > N'$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Затем найдется такой номер N'', что при $n > N''$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Пусть N будет больше обоих чисел N' и N''; тогда, при $n > N$, выполняются оба предшествующих двойных неравенства, и потому

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Окончательно при $n > N$

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad \text{или} \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

Таким образом, действительно, $\lim y_n = a$.

Из этой теоремы, в частности, следует: *если при всех n*

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

и известно, что $z_n \to a$, то и $y_n \to a$. Впрочем, это очень легко доказать и непосредственно.

Теоремы 1), 2) и 3) легко распространяются и на случай бесконечных пределов.

39. Леммы о бесконечно малых. В дальнейших теоремах нам придется рассматривать одновременно две переменные (или больше), сочетая их между собой знаками арифметических действий. При этом, как и выше, мы относим эти знаки к с о о т в е т с т в у ю щ и м значениям переменных. Например, говоря о сумме двух переменных x_n и y_n, пробегающих порознь последовательности значений

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

и

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,$$

мы имеем в виду переменную $x_n + y_n$, принимающую последовательность значений

$$x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3\ \ldots,\ x_n+y_n,\ \ldots$$

При доказательстве теорем, относящихся к результатам арифметических операций над переменными, будут полезны следующие две леммы о бесконечно малых:

Лемма 1. *Сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.*

Проведем доказательство для случая двух бесконечно малых α_n и β_n (общий случай исчерпывается аналогично).

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ для бесконечно малой α_n найдется такой номер N', что при $n > N'$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точно так же и для бесконечно малой β_n найдется такой номер N'', что при $n > N''$ будет

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять натуральное число N бóльшим обоих чисел N' и N'', то при $n > N$ одновременно выполняются оба эти неравенства, так что

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, величина $\alpha_n + \beta_n$ действительно является бесконечно малой.

Лемма 2. *Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.*

Пусть для всех значений n

$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$

Обозначив через L наибольшую из абсолютных величин $|m|$, $|M|$, будем иметь

$$-L \leqslant m \leqslant x_n \leqslant M \leqslant L \quad \text{или} \quad |x_n| \leqslant L.$$

Если задано произвольное число $\varepsilon > 0$, то по числу $\frac{\varepsilon}{L}$ для бесконечно малой α_n найдется такой номер N, что для $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Тогда для тех же значений n, очевидно,

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Отсюда и следует, что $x_n \cdot \alpha_n$ есть бесконечно малая.

40. Арифметические операции над переменными. Следующие теоремы важны в том отношении, что с их помощью во многих случаях делается ненужным восхождение всякий раз к определению понятия предела — с разысканием по заданному ε соответствующего N и т. д. Этим вычисление пределов значительно облегчается.

1) *Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, причем

$$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Из условия теоремы следует, что

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \tag{3}$$

где α_n и β_n — бесконечно малые. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Здесь $\alpha_n \pm \beta_n$ есть бесконечно малая по лемме 1 n° 39; следовательно, можно утверждать, что переменная $x_n \pm y_n$ имеет предел, равный $a \pm b$, что и требовалось доказать.

Эта теорема и ее доказательство переносятся на случай любого конечного числа слагаемых.

2) *Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то и произведение их также имеет конечный предел, и

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Исходя из тех же равенств (3), имеем на этот раз

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Отсюда и следует, что переменная $x_n y_n$ действительно имеет пределом ab.

Эта теорема может быть распространена на случай любого конечного числа сомножителей (например, методом математической индукции).

3) *Если переменные x_n и y_n имеют конечные пределы:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

причем b отлично от нуля, то и отношение их также имеет конечный предел, а именно,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Пусть, например, $b > 0$; вставим между нулем и b число r. Тогда, согласно утверждению n° **36**, 1), начиная с некоторого места

$$y_n > r > 0,$$

так что во всяком случае $y_n \neq 0$. Ограничимся теми значениями номера n, для которых это выполняется; тогда отношение $\frac{x_n}{y_n}$ заведомо имеет смысл.

Исходя, по-прежнему, из равенств (3), имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Множитель же при нем, на основании сказанного вначале, будет ограниченной переменной:

$$0 < \frac{1}{by_n} < \frac{1}{br}.$$

Следовательно, по лемме 2, все произведение справа будет бесконечно малым, а оно представляет разность между переменной $\frac{x_n}{y_n}$ и числом $\frac{a}{b}$. Итак, предел $\frac{x_n}{y_n}$ есть $\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

41. Неопределенные выражения. В предыдущем номере мы рассматривали выражения

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{4}$$

и, в предположении, что переменные x_n и y_n стремятся к конечным пределам (из которых, в случае частного, предел y_n не должен был равняться нулю), устанавливали пределы каждого из этих выражений.

Оставлены были без рассмотрения случаи, когда пределы переменных x_n и y_n (один или оба) бесконечны или — если речь идет о частном — когда предел знаменателя нуль. Из этих случаев мы здесь остановимся лишь на четырех, представляющих некоторую важную и интересную особенность.

1°. Рассмотрим сначала частное $\frac{x_n}{y_n}$ и предположим, что обе переменные x_n и y_n одновременно стремятся к нулю. Здесь мы впервые сталкиваемся с совсем особым обстоятельством: хотя нам известны пределы x_n и y_n, но о пределе их отношения — не зная самих этих функций от n — никакого общего утверждения мы сделать не можем. *Этот предел, в зависимости от частного закона* *изменения обеих переменных, может иметь различные значения или даже вовсе не существовать.* Следующие простые примеры поясняют это.

Пусть, скажем, $x_n = \frac{1}{n^2}$ и $y_n = \frac{1}{n}$; обе переменные стремятся к нулю. Их отношение $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ также стремится к нулю. Если же, наоборот, положить $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, то, хотя они стремятся к нулю, на этот раз их отношение $\frac{x_n}{y_n} = n$ стремится к $+\infty$! Взяв же любое отличное от нуля число a и построив две бесконечно малые $x_n = \frac{a}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, видим, что отношение их имеет пределом a (так как тождественно равно a).

Наконец, если $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ (обе имеют пределом нуль), то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ оказывается вовсе не имеющим предела.

Таким образом, одно знание пределов переменных x_n и y_n в данном случае не позволяет еще судить о поведении их отношения: необходимо знать сами функции, т. е. закон их изменения вместе с n, и непосредственно исследовать отношение $\frac{x_n}{y_n}$. Для того чтобы характеризовать эту особенность, говорят, что, когда $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, *выражение $\frac{x_n}{y_n}$ представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$.*

2°. В случае, когда одновременно $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$, имеет место подобное же обстоятельство. Не зная самих функций, общего утверждения о поведении их отношения сделать нельзя. Этот факт иллюстрируется примерами, вполне аналогичными приведенным в 1°:

$$x_n = n \to \infty, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = n^2 \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$$

$$x_n = an \to \pm\infty \ (a \gtrless 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$$

$x_n = [2 + (-1)^{n+1}]\, n \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$ вовсе не имеет предела.

И в этом случае говорят, что *выражение $\frac{x_n}{y_n}$ представляет неопределенность,* на этот раз — *вида* $\frac{\infty}{\infty}$.

Обратимся к рассмотрению произведения $x_n y_n$.

3°. Если x_n стремится к нулю, в то время как y_n стремится к $\pm\infty$, то, исследуя поведение произведения $x_n y_n$, мы сталкиваемся с такой же особенностью, как и в пунктах 1° и 2°. Об этом свидетельствуют примеры:

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad x_n y_n = n \to \infty;$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0 \quad (a \gtrless 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = a \to a;$$

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = (-1)^{n+1} \text{ вовсе не имеет}$$

предела.

В связи с этим, при $x_n \to 0$ и $y_n \to \infty$, говорят, что *выражение $x_n y_n$ представляет неопределенность вида* $0 \cdot \infty$.

Рассмотрим, наконец, сумму $x_n + y_n$.

4°. Здесь оказывается особым случай, когда x_n и y_n стремятся к бесконечности разных знаков: именно в этом случае о сумме $x_n + y_n$ ничего определенного сказать нельзя, не зная самих функций x_n и y_n. Различные возможности, представляющиеся здесь, иллюстрируются примерами:

$$x_n = 2n \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = n \to +\infty;$$

$$x_n = n \to +\infty, \quad y_n = -2n \to -\infty, \quad x_n + y_n = -n \to -\infty;$$

$$x_n = n + a \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = a \to a;$$

$$x_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty, \; y_n = -n \to -\infty, \; x_n + y_n = (-1)^{n+1}$$

вовсе не имеет предела.

Ввиду этого, при $x_n \to +\infty$ и $y_n \to -\infty$, говорят, что *выражение $x_n + y_n$ представляет неопределенность вида* $\infty - \infty$.

Таким образом, определить пределы арифметических выражений (4) по пределам переменных x_n и y_n, из которых они составлены, не всегда возможно. Мы нашли четыре случая, когда этого заведомо сделать нельзя: неопределенности вида

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty \, ^{*)}.$$

В этих случаях приходится, учитывая закон изменения x_n и y_n, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование получило название раскрытия неопределенности. Далеко не всегда оно так просто, как в приведенных выше схематических примерах.

---

*) Конечно, символы эти лишены всякого числового смысла. Каждый из них является лишь краткой условной характеристикой для выражений одного из четырех типов неопределенности.

42. Распространение на случай функции от произвольной переменной. Сделаем снова замечание относительно общего случая. Так как здесь мы имеем в виду теоремы, в которых переменные связываются знаками равенства, неравенства или арифметических действий, мы, прежде всего, должны оговорить, что, соединяя две или несколько функций $f(x)$, $g(x)$, ... (определенных в одной и той же области $\mathscr{X}$) такими знаками, мы всегда подразумеваем, что их значения отвечают одному и тому же значению x.

Все эти теоремы можно было бы доказать аналогичным образом наново, как мы это сделали в n° **37**, но — и это важно подчеркнуть — *на деле вовсе нет необходимости их передоказывать.* Если, говоря о пределе функции, стоять на «точке зрения последовательностей», то, поскольку для переменных, зависящих от указателя n, теоремы доказаны, они верны и для функций в общем случае.

Для примера остановимся на теоремах 1), 2), 3) из n° **40.**

Пусть в области $\mathscr{X}$ (с точкой сгущения a) заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$, и при стремлении x к a обе имеют конечные пределы

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

Тогда и функции

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5}$$

также имеют конечные пределы (в случае частного — в предположении, что $B \neq 0$), именно

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B}.$$

На «языке последовательностей» данные соотношения расшифровываются так: если $\{x_n\}$ есть любая последовательность (отличных от a) значений x из $\mathscr{X}$, имеющая пределом a, то

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B.$$

Если к этим двум функциям уже от натурального аргумента n применить доказанные теоремы, то получаем сразу:

$$\lim [f(x_n) \pm g(x_n)] = A \pm B, \quad \lim f(x_n) \cdot g(x_n) = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

а это (на «языке последовательностей») и выражает именно то, что нужно было доказать *).

---

*) В случае частного можно было бы заметить [аналогично тому, как мы это сделали для y_n в n° **40**, 3)], что для x, достаточно близких к a, знаменатель $g(x) \neq 0$, так что дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет смысл по крайней мере для этих значений x.

Таким же образом на общий случай, рассматриваемый нами теперь, переносится и сказанное в n° **41** относительно «неопределенных выражений», условно характеризуемых символами

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty.$$

Как и в простейшем случае, когда мы имели дело с функциями натурального аргумента, здесь для «раскрытия неопределенности» уже недостаточно знать лишь пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, а нужно учесть и самый закон их изменения. Примеры раскрытия неопределенностей читатель найдет в следующем номере.

Мы вернемся к этому вопросу в § 3 главы VII, где будут даны общие методы раскрытия неопределенностей уже с применением дифференциального исчисления.

43. Примеры. 1) Пусть $p(x)$ будет многочлен, целый относительно x, с постоянными коэффициентами:

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k \qquad (a_0\neq 0).$$

Поставим вопрос о пределе его при $x\to+\infty$. Если бы все коэффициенты этого многочлена были положительны (отрицательны), то сразу ясно, что пределом $p(x)$ будет $+\infty$ $(-\infty)$. Но в случае коэффициентов разных знаков одни члены стремятся к $+\infty$, другие к $-\infty$, и налицо неопределенность вида $\infty-\infty$.

Для раскрытия этой неопределенности представим $p(x)$ в виде

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}\right).$$

Так как все слагаемые в скобках, начиная со второго, при безграничном возрастании x будут бесконечно малыми, то выражение в скобках имеет пределом $a_0\neq 0$; первый же множитель стремится к $+\infty$. В таком случае все выражение стремится к $+\infty$ или $-\infty$, в зависимости от знака a_0.

Такой же результат, в частности, получится, если вместо непрерывно изменяющейся переменной x подставить натуральное число n.

Предоставляем читателю установить $\lim p(x)$ при $x\to-\infty$ (учитывая на этот раз четность или нечетность показателя k). Во всех случаях предел многочлена $p(x)$ совпадает с пределом его старшего члена a_0x^k.

Уничтожение «неопределенности» путем преобразования данного выражения, чем мы здесь и воспользовались, часто применяется для раскрытия неопределенности.

2) Если $q(x)$ есть такой же многочлен

$$q(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_{l-1}x+b_l \qquad (b_0\neq 0),$$

то частное $\frac{p(x)}{q(x)}$ при $x\to+\infty$ представит неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Преобразуя каждый из многочленов так, как это было сделано в примере 1), получим:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=x^{k-l}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_k}{x^k}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_l}{x^l}}.$$

Второй множитель здесь имеет конечный предел $\frac{a_0}{b_0} \neq 0$. Если степени обоих полиномов равны: $k = l$, таков же будет и предел отношения $\frac{p(x)}{q(x)}$. При $k > l$ первый множитель при $x \to +\infty$ тоже стремится к $+\infty$, так что рассматриваемое отношение стремится к $\pm\infty$ $\left(\text{с учетом знака } \frac{a_0}{b_0}\right)$. Наконец, при $k < l$ пределом будет нуль. Здесь также вместо x можно подставить натуральное число n.

Легко установить и предел $\frac{p(x)}{q(x)}$ при $x \to -\infty$. Во всех случаях предел отношения многочленов совпадает с пределом отношения их старших членов.

3) Найти площадь Q фигуры OPM, образованной частью OM параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$, отрезком OP оси x и отрезком PM (рис. 24).

Разобьем отрезок OP на n равных частей и построим на них ряд входящих и выходящих прямоугольников. Площади Q_n и Q'_n составленных из них ступенчатых фигур разнятся площадью $\frac{x}{n} \cdot y$ наибольшего прямоугольника. Отсюда разность $Q'_n - Q_n \to 0$ (при $n \to \infty$) и, так как

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

очевидно,

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$

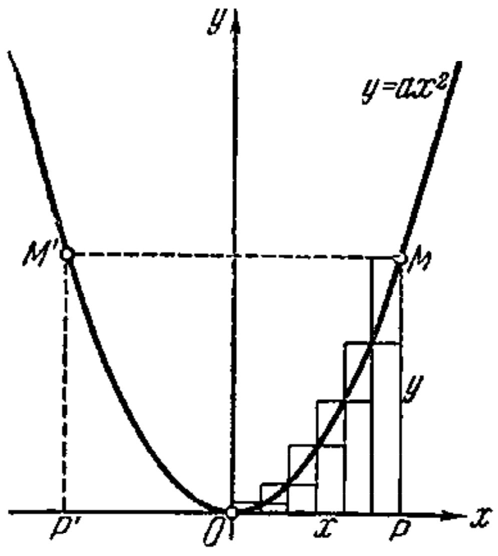


Рис. 24.

Так как высоты отдельных прямоугольников суть ординаты точек параболы с абсциссами

$$\frac{1}{n}x, \quad \frac{2}{n}x, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n}x = x,$$

и — в согласии с уравнением кривой — величины их равны, соответственно,

$$a \cdot \frac{1}{n^2}x^2, \quad a \cdot \frac{2^2}{n^2}x^2, \quad \ldots, \quad a \cdot \frac{n^2}{n^2}x^2,$$

то для Q'_n получаем выражение *)

$$Q'_n = \frac{ax^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \cdot \frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Отсюда, если использовать пример 2,

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

Опираясь на это, легко получить, что площадь параболического сегмента $M'OM$ равна $\frac{4}{3}xy$, т. е. двум третям площади описанного прямоугольника (этот результат был известен еще Архимеду **).

*) Здесь мы используем известную формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел.

**) Архимед — величайший из математиков древности (III в. до нашей эры).

Замечание. Общее определение площади криволинейной фигуры будет дано лишь в главе XII; там же примененный здесь метод вычисления площади будет обобщен на другие криволинейные фигуры [n° 196].

4) Найти пределы переменных:

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},\qquad z_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

и, наконец,

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Выражения x_n и z_n представляют неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ (так как оба корня больше n, то они стремятся к бесконечности). Преобразуем, деля числитель и знаменатель на n:

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},\qquad z_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Так как оба корня в знаменателе имеют пределом единицу *), то $x_n\to 1$ и $z_n\to 1$.

Выражение для y_n имеет своеобразную форму: каждое слагаемое этой суммы зависит от n, но и число их растет вместе с n. Так как каждое слагаемое меньше первого и больше последнего, то

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<y_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},\quad \text{т. е.}\quad x_n<y_n<z_n.$$

Но (согласно уже найденному) переменные x_n и z_n стремятся к общему пределу — единице; следовательно, — по теореме 3) n° 38 — к тому же пределу стремится и переменная y_n.

5) Вернемся к функции $f(x)$, рассмотренной в n° 18, 3° и определенной там тремя различными формулами — для разных x. Положим теперь сразу для всех x:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Если $|x|>1$, то имеем здесь неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, которая легко раскрывается путем деления числителя и знаменателя на x^{2n}; мы получаем $f(x)=1$. При $|x|<1$, очевидно, $x^{2n}\to 0$ и $f(x)=-1$. Наконец, если $x=\pm 1$, то числитель дроби постоянно равен нулю, а с ним и $f(x)=0$. Это — в точности та же функция, но задана она на этот раз одной формулой.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}.$

Действительно,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1};$$

*) Это, например, для первого корня следует из неравенств

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}\quad [\text{n}^\circ\, 38,\ 3),$$

но

$$1-|x|<\sqrt{1+x}<1+|x|,$$

так что

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1,$$

откуда и следует требуемый результат.

7) Предел [34, 5)]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

часто используется для нахождения других пределов.

(а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right).$$

Очевидно,

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2;$$

так как выражение в скобках стремится к единице, то общий предел и будет $\frac{1}{2}$.

(б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right).$$

И здесь преобразование легко приводит к уже изученным пределам:

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Заметим, что $\cos x\to 1$ при $x\to 0$, как это вытекает, например, из предыдущего результата (а).

§ 3. МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ

44. Предел монотонной функции от натурального аргумента. Теоремы о существовании пределов функций, которые приводились до сих пор, имели такой характер: в предположении, что для одних функций пределы существуют, устанавливалось существование пределов для других функций, так или иначе связанных с первыми. Вопрос о признаках существования конечного предела для заданной функции, безотносительно к другим функциям, не ставился. Оставляя решение этого вопроса в общем виде до § 4, мы рассмотрим здесь один простой и важный частный класс функций, для которых он решается легко, причем, как всегда, начнем с простейшего случая — функции x_n от натурального аргумента.

Переменная x_n называется в о з р а с т а ю щ е й, если

$$x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots,$$

т. е. если из $n'>n$ следует $x_{n'}>x_n$. Ее называют неубывающей, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

т. е. если из $n'>n$ следует лишь $x_{n'} \geqslant x_n$. Можно и в последнем случае называть переменную возрастающей, если придать этому термину более широкий смысл.

Аналогично устанавливается понятие об убывающей — в узком или широком смысле слова — функции от n: так называется переменная x_n, для которой соответственно

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$$

или

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots,$$

так что из $n'>n$ следует (смотря по случаю) $x_{n'}<x_n$ или лишь $x_{n'} \leqslant x_n$.

Переменные всех этих типов, изменяющиеся при возрастании n в одном направлении, объединяются под общим названием *монотонных*. Обычно о переменной этого типа говорят, что она «монотонно возрастает» или «монотонно убывает».

Одновременно с переменной x_n, зависящей от натурального указателя, и последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

принимаемых ею значений — в соответствующих случаях — также называется возрастающей или убывающей.

По отношению к монотонным переменным имеет место следующая

Теорема. *Пусть дана монотонно возрастающая переменная x_n. Если она ограничена сверху:*

$$x_n \leqslant M \qquad (M = \text{const};\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то необходимо имеет конечный предел, в противном же случае она стремится к $+\infty$.

Точно так же всегда имеет предел и монотонно убывающая переменная x_n. Ее предел конечен, если она ограничена снизу, в противном же случае ее пределом служит $-\infty$ *).

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей, хотя бы в широком смысле, переменной x_n (случай убывающей переменной исчерпывается аналогично).

---

*) Легко понять, что все заключения остаются в силе и для переменной, которая, лишь начиная с некоторого места, становится монотонной (ибо — без влияния на предел переменной — любое число первых ее значений можно отбросить).

В тексте теоремы, вместо монотонной переменной x_n, можно было бы говорить о монотонной последовательности.

Допустим сначала, что эта переменная ограничена сверху. Тогда, по теореме n° **6**, для множества $\{x_n\}$ ее значений должна существовать и (конечная) точная верхняя граница:

$$a = \sup \{x_n\};$$

как мы покажем, именно это число и будет пределом переменной x_n.

Действительно, вспомним характерные свойства точной верхней границы [**6**]. Во-первых, для всех значений n будет

$$x_n \leqslant a.$$

Во-вторых, какое бы ни взять число $\varepsilon > 0$, найдется такое значение, скажем, x_N нашей переменной, которое превзойдет $a - \varepsilon$:

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Так как, ввиду монотонности переменной x_n (здесь мы впервые на это опираемся), при $n > N$ будет $x_n \geqslant x_N$, т. е. и подавно $x_n > a - \varepsilon$, то для этих значений номера n выполняются неравенства

$$0 \leqslant a - x_n < \varepsilon, \quad \text{так что} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\lim x_n = a$.

Пусть теперь переменная x_n не ограничена сверху. Тогда, сколь велико ни было бы число $E > 0$, найдется хоть одно значение переменной, которое больше E; пусть это будет x_N: $x_N > E$. Ввиду монотонности переменной x_n для $n > N$ и подавно

$$x_n > E,$$

а это и означает, что $\lim x_n = +\infty$.

Замечание. Наличие конечного предела у ограниченной монотонной переменной в первой половине прошлого века считалось чем-то само собою разумеющимся. Потребность в строгом доказательстве этого — фундаментальной важности — утверждения была фактически одним из поводов к созданию арифметической теории иррациональных чисел. Добавим, что упомянутое утверждение вполне эквивалентно свойству непрерывности множества вещественных чисел [n° **5**].

Обратимся к примерам применения теоремы.

45. Примеры. 1) Рассмотрим выражение (считая $c > 0$)

$$x_n = \frac{c^n}{n!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. $\left(\text{Оно при } c > 1 \text{ представляет неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Так как

$$x_{n+1} = \frac{c}{n+1} x_n,$$

то, лишь только $n > c - 1$, переменная становится убывающей; в то же время снизу она ограничена, например, нулем. Следовательно, переменная

x_n — по теореме — имеет конечный предел, который мы обозначим через a.

Для того чтобы найти его, перейдем к пределу в написанном выше равенстве; так как x_{n+1} пробегает ту же последовательность значений, что и x_n (с точностью до первого члена), и имеет тот же предел a, то мы получим

$$a = a \cdot 0,$$

отсюда $a = 0$ и, окончательно,

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) Считая снова $c > 0$, определим теперь x_n так:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ldots$$

и вообще

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ корней}}.$$

Таким образом, x_{n+1} получается из x_n по формуле

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Ясно, что переменная x_n монотонно возрастает. В то же время она ограничена сверху, например, числом $\sqrt{c} + 1$. Действительно, $x_1 = \sqrt{c}$ меньше этого числа; если допустить теперь, что какое-либо значение $x_n < \sqrt{c} + 1$, то и для следующего значения получаем

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Таким образом, наше утверждение оправдывается по методу математической индукции.

По основной теореме переменная x_n имеет некий конечный предел a. Для определения его перейдем к пределу в равенстве

$$x_{n+1}^2 = c + x_n;$$

мы получим, таким образом, что a удовлетворяет квадратному уравнению

$$a^2 = c + a.$$

Уравнение это имеет корни разных знаков; но интересующий нас предел a не может быть отрицательным, следовательно, равен именно положительному корню:

$$a = \frac{\sqrt{4c+1} + 1}{2} \text{ *)}.$$

Оба примера дают повод к следующему замечанию. Доказанная теорема является типичной «теоремой существования»: в ней

---

*) Этот интересный пример по существу принадлежит Якобу Бернулли, который рассматривал его под видом вычисления выражения

$$\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c +}}} \text{ и т. д. до бесконечности.}$$

устанавливается факт существования предела, но не дается никакого приема для его вычисления. Тем не менее, она имеет очень важное значение. С одной стороны, в теоретических вопросах часто только существование предела представляется нужным. С другой же стороны, во многих случаях возможность предварительно удостовериться в существовании предела важна тем, что открывает пути для его фактического вычисления. Так, в приведенных примерах именно знание факта существования предела позволило, с помощью перехода к пределу в некоторых равенствах, установить точное значение предела.

46. Лемма о вложенных промежутках. Остановимся теперь на сопоставлении двух монотонных переменных, изменяющихся «навстречу» одна другой.

Пусть даны монотонно возрастающая переменная x_n и монотонно убывающая переменная y_n, причем всегда

$$x_n < y_n. \tag{1}$$

Если их разность $y_n - x_n$ стремится к нулю, то обе переменные имеют общий конечный предел:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

Действительно, при всех значениях n имеем: $y_n \leqslant y_1$, а значит, ввиду (1), и $x_n < y_1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Возрастающая переменная x_n оказывается ограниченной сверху, следовательно, она имеет конечный предел

$$c = \lim x_n.$$

Аналогично, для убывающей переменной y_n будем иметь

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

так что и она стремится к конечному пределу

$$c' = \lim y_n.$$

Но, по теореме 1) n° **40**, разность обоих пределов

$$c' - c = \lim (y_n - x_n),$$

т. е. по условию равна нулю, так что $c' = c$; это и требовалось доказать.

Доказанному утверждению можно придать другую форму, в которой оно чаще применяется.

Условимся говорить, что промежуток $[a', b']$ содержится в промежутке $[a, b]$ или *вложен* в него, если все точки первого промежутка принадлежат второму или, что то же самое, если

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b.$$

Геометрический смысл этого ясен.

Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных один в другой промежутков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

так что каждый последующий содержится в предыдущем, причем длины этих промежутков стремятся к нулю с возрастанием n:

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда концы a_n и b_n промежутков (с разных сторон) стремятся к общему пределу

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

Это есть лишь перефразировка доказанной выше теоремы: согласно условию,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

так что левый конец a_n и правый конец b_n n-го промежутка играют здесь роль монотонных переменных x_n и y_n.

Впоследствии нам не раз придется опираться на это предложение, которое будем называть «леммой о вложенных промежутках».

47. Предел монотонной функции в общем случае. Перейдем теперь снова к рассмотрению функции $f(x)$ от произвольной переменной. И здесь вопрос о самом существовании предела функции

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

особенно просто решается для функций частного типа, представляющих обобщение понятия монотонной переменной x_n [44].

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой области $\mathscr{X} = \{x\}$. Функция называется возрастающей (убывающей) в этой области, если для любой пары принадлежащих ей значений x и x'

из $x' > x$ следует $f(x') > f(x)$ $[f(x') < f(x)]$.

Если же

из $x' > x$ следует лишь $f(x') \geqslant f(x)$ $[f(x') \leqslant f(x)]$,

то функцию называют неубывающей (невозрастающей). Иногда удобнее и в этом случае называть функцию возрастающей (убывающей) — но в широком смысле.

Функции всех этих типов носят общее название монотонных. Для монотонной функции имеет место теорема, вполне аналогичная той теореме о монотонной переменной x_n, зависящей от n, которая была установлена в n° **44**.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает, хотя бы в широком смысле, в области $\mathscr{X}$, имеющей точкой сгущения число a, бóльшее всех значений x (оно может быть конечным или равным $+\infty$). Если при этом функция ограничена сверху:*

$$f(x) \leqslant M \qquad (\textit{для всех } x \textit{ из } \mathscr{X}),$$

то при $x \to a$ функция имеет конечный предел; в противном случае она стремится к $+\infty$.

Доказательство. Допустим сначала, что функция $f(x)$ ограничена сверху, т. е. ограничено сверху множество $\{f(x)\}$ значений функции, отвечающих изменению x в области $\mathscr{X}$. Тогда для этого множества существует [n° 6] конечная точная верхняя граница A. Докажем, что это число A и будет искомым пределом.

Прежде всего, для всех значений x

$$f(x) \leqslant A.$$

Далее, задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, по свойству точной верхней границы найдем такое значение $x' < a$, что $f(x') > A - \varepsilon$. Ввиду монотонности функции, для $x > x'$ и подавно будет: $f(x) > A - \varepsilon$, так что для упомянутых значений x выполнится неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это и доказывает наше утверждение, стоит лишь при a конечном взять $\delta = a - x'$ (так что неравенство $x > x'$ может быть написано в виде $x > a - \delta$), а при $a = +\infty$ взять $\Delta = x'$.

Если функция $f(x)$ сверху не ограничена, то каково бы ни было число E, найдется такое x', что $f(x') > E$; тогда для $x > x'$ и подавно $f(x) > E$, и т. д.

Предоставляем читателю преобразовать эту теорему для случая, когда предельное значение a меньше всех значений x, равно как и для случая монотонно убывающей функции.

Ясно, что теорема о монотонной переменной x_n в n° **44** есть просто частный случай этой теоремы. Независимой переменной там был указатель n, областью изменения которого служил натуральный ряд $\mathscr{N} = \{n\}$, с точкой сгущения $+\infty$.

В последующем нам чаще придется в качестве области $\mathscr{X}$, в которой рассматривается функция $f(x)$, встречать сплошной промежуток $[a', a)$, где $a' < a$ и a — конечное число или $+\infty$, либо же — промежуток $(a, a']$, где $a' > a$ и a — конечное число или $-\infty$.

§ 4. ЧИСЛО e

48. Число e как предел последовательности. Мы используем здесь предельный переход для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа, которое имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений.

Рассмотрим переменную

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и попытаемся применить к ней теорему n° **44**.

Так как с возрастанием показателя n основание степени здесь убывает, то «монотонный» характер переменной непосредственно не усматривается. Для того чтобы убедиться в нем, прибегнем к разложению по формуле бинома:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

Если от x_n перейти теперь к x_{n+1}, т. е. увеличить n на единицу, то прежде всего добавится новый $(n+2)$-й (положительный) член, каждый же из написанных $n+1$ членов *увеличится*, ибо любой множитель в скобках вида $1 - \frac{s}{n}$ заменится *бо́льшим множителем* $1 - \frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что

$$x_{n+1} > x_n,$$

т. е. переменная x_n оказывается *возрастающей*.

Теперь покажем, что она к тому же *ограничена сверху*. Опустив в выражении (1) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с третьей) числом 2, мы еще увеличим полученное выражение, так что, в свою очередь,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия $\left(\text{начинающаяся членом } \frac{1}{2}\right)$ имеет сумму, меньшую единицы, поэтому $y_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Отсюда уже следует, по теореме n° **44**, что переменная x_n имеет конечный предел. По примеру Эйлера его обозначают всегда буквой e. Это число

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

мы и имели в виду. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ \ldots$$

Хотя последовательность

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2;\ x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25;$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}3703\ \ldots;\ \ldots;\ x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048\ \ldots;\ \ldots$$

и сходится к числу e, но медленно, и ею пользоваться для приближенного вычисления числа e — невыгодно. В следующем номере мы изложим удобный прием для этого вычисления, а также попутно докажем, что e есть число иррациональное.

49. Приближенное вычисление числа e. Вернемся к равенству (1). Если фиксировать k и, считая $n > k$, отбросить все члены последней части, следующие за $(k+1)$-м, то получим неравенство

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Увеличивая здесь n до бесконечности, перейдем к пределу; так как все скобки имеют пределом единицу, то найдем:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Это неравенство имеет место при любом натуральном k. Таким образом, имеем

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

откуда ясно [в силу теоремы 3) n° 38], что и

$$\lim y_n = e.$$

Переменная y_n для приближенного вычисления числа e гораздо удобнее, чем x_n. Оценим степень близости y_n к e. С этой целью рассмотрим сначала разность между любым значением y_{n+m} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, следующим за y_n, и самим y_n. Имеем

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right\}.$$

Если в скобках $\{\ldots\}$ заменить все множители в знаменателях дробей через $n+2$, то получим неравенство

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\},$$

которое лишь усилится, если заменить скобки суммой бесконечной прогрессии:

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Сохраняя здесь n неизменным, станем увеличивать m до бесконечности; переменная y_{n+m} (занумерованная значком m) принимает последовательность значений

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ \ldots,\ y_{n+m},\ \ldots,$$

очевидно сходящуюся к e. Поэтому получаем в пределе

$$e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

или, наконец,

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!\,n}\ *).$$

Если через θ обозначить отношение разности $e-y_n$ к числу $\frac{1}{n!\,n}$ (оно, очевидно, содержится между нулем и единицей), то можно написать также

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!\,n}.$$

Заменяя здесь y_n его развернутым выражением, мы и придем к важной формуле:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!\,n},\tag{2}$$

которая послужит отправной точкой для вычисления e. Отбрасывая последний, «дополнительный», член и заменяя каждый из оставленных членов его десятичным приближением, мы и получим приближенное значение для e.

Поставим себе задачей с помощью формулы (2) вычислить e, скажем, с точностью до $\frac{1}{10^4}$. Прежде всего нужно установить, каким взять число n (которое находится в нашем распоряжении), чтобы осуществить эту точность.

Вычисляя последовательно числа, обратные факториалам (см. приведенную табличку), мы видим, что при $n=7$ «дополнительный» член формулы (2) будет уже

$$\frac{\theta}{n!\,n}=\frac{\theta}{7!\,7}<0{,}00003,$$

так что, отбрасывая его, мы делаем погрешность, значительно меньшую поставленной границы. Остановимся же на этом значении n. Каждый из остальных членов обратим в десятичную дробь, округляя (в запас точности) на пятом знаке так, чтобы погрешность по абсолютной величине была меньше половины единицы на пятом месте, т. е. меньше $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$.

$$\begin{array}{rl}
 & 2{,}00000\\
\frac{1}{2!} & =0{,}50000\\
\frac{1}{3!} & =0{,}16667-\\
\frac{1}{4!} & =0{,}04167-\\
\frac{1}{5!} & =0{,}00833+\\
\frac{1}{6!} & =0{,}00139-\\
\frac{1}{7!} & =0{,}00020-\\
\hline
 & 2{,}71826
\end{array}$$

Мы свели результаты вычислений в табличку. Рядом с приближенным числом

---

*) Так как (это легко проверить) $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$.

поставлен знак (+ или —), указывающий на знак **поправки**, которую необходимо было бы прибавить для восстановления точного числа.

Итак, как мы видели, поправка на отбрасывание дополнительного члена меньше $\frac{3}{10^5}$. Учитывая теперь еще и поправки на округление (с их знаками), легко сообразить, что суммарная поправка к полученному приближенному значению числа e лежит между

$$-\frac{2}{10^5} \quad \text{и} \quad +\frac{3{,}5}{10^5}.$$

Отсюда само число e содержится между дробями

$$2{,}71824 \quad \text{и} \quad 2{,}718295,$$

так что можно положить

$$e = 2{,}7182 +_{0{,}0001}.$$

Отметим, что та же формула (2) может служить и для доказательства **иррациональности** числа e.

Рассуждая от противного, попробуем допустить, что e равно рациональной дроби $\frac{m}{n}$; тогда, если именно для **этого** n написать формулу (2), будем иметь

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!\,n} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Умножив обе части этого равенства на $n!$, по сокращении знаменателей всех дробей, **кроме последней**, мы получим слева **целое число**, а справа — **целое число с дробью** $\frac{\theta}{n}$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает то, что требовалось.

50. Основная формула для числа e. Натуральные логарифмы. Число e в n° **48** первоначально было определено как предел переменной, зависящей от натурального указателя:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

Теперь же мы установим более общий результат

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

Для этого [**35**] достаточно доказать, что имеют место порознь соотношения

$$\lim_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4a}$$

Воспользуемся на этот раз определением предела «на языке последовательностей» [**32**].

Кстати, если и предел (3), рассматривая его как предел функции от n, истолковать «на языке последовательностей», то придем к равенству

$$\lim \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e, \tag{5}$$

какова бы ни была последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, растущих вместе с *номером* k до бесконечности.

Пусть теперь x пробегает какую-нибудь последовательность $\{x_k\}$ *положительных* значений, стремящихся к нулю; можно считать, что все $x_k<1$. Положим $n_k=E\left(\frac{1}{x_k}\right)$, так что

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k+1 \quad \text{и} \quad n_k \to +\infty.$$

Так как при этом

$$\frac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k},$$

то

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_l)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Два крайних выражения могут быть преобразованы так:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

причем, в силу (5),

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e, \quad \text{а также} \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e,$$

в то время как, очевидно,

$$1+\frac{1}{n_k} \to 1, \qquad 1+\frac{1}{n_k+1} \to 1.$$

Таким образом, оба упомянутых выражения стремятся к общему пределу e, а тогда [по теореме 3), **38**] и заключенное между ними выражение также стремится к e:

$$\lim\,(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e.$$

Этим и завершается доказательство первого из соотношений (4а) «на языке последовательностей».

Для доказательства же второго из них предположим теперь, что последовательность $\{x_k\}$ состоит из отрицательных значений, стремящихся к нулю; будем считать $x_k > -1$. Если положить $x_k = -y_k$, то

$$1 > y_k > 0, \qquad y_k \to 0.$$

Очевидно,

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right).$$

Так как, по доказанному, первый множитель последнего выражения стремится к e, второй же очевидно имеет пределом единицу, то и выражение слева также стремится к e. Формула (4) оправдана полностью.

Это замечательное свойство числа e лежит в основе всех его приложений. Именно оно делает особенно выгодным выбор этого числа в качестве основания для системы логарифмов. Логарифмы по основанию e называются *натуральными* и обозначаются знаком ln (logarithmus naturalis); в теоретических исследованиях пользуются исключительно натуральными логарифмами *).

Упомянем, что обычные, десятичные, логарифмы связаны с натуральными известной формулой:

$$\log x = \ln x \cdot M,$$

где M есть модуль перехода и равен

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,294\ \ldots;$$

это легко получить, если прологарифмировать по основанию 10 тождество

$$x = e^{\ln x}.$$

§ 5. ПРИНЦИП СХОДИМОСТИ

51. Частичные последовательности. Пусть дана некоторая последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n'},\ \ldots \qquad (1)$$

---

*) Эти логарифмы иногда ошибочно называют неперовыми по имени шотландского математика Непера (1550—1617) — изобретателя логарифмов. Сам Непер не имел понятия об основании системы логарифмов, ибо строил их своеобразно, совсем на другом принципе, но его логарифмы соответствуют логарифмам по основанию, близкому к $\frac{1}{e}$. Близкое к e основание имеют логарифмы его современника швейцарского математика Бюрги (1552—1632).

Рассмотрим, наряду с нею, какую-либо извлеченную из нее частичную последовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \tag{2}$$

где $\{n_k\}$ есть некоторая последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots \tag{3}$$

Здесь роль номера, принимающего подряд все натуральные значения, играет уже не n, а k; n_k же представляет собой функцию от k, принимающую натуральные значения и, очевидно, стремящуюся к бесконечности при возрастании k.

Если последовательность (1) *имеет определенный предел a (конечный или нет), то тот же предел имеет и частичная последовательность* (2). Если же для последовательности (1) нет определенного предела, то это не исключает возможности существования предела для какой-либо частичной последовательности.

Пусть, например, $x_n = (-1)^{n+1}$; предела эта переменная не имеет. Если же заставить n пробегать лишь одни нечетные или одни четные значения, то частичные последовательности

$$x_1 = 1,\quad x_3 = 1,\ \ldots,\ x_{2k-1} = 1,\ \ldots$$

и

$$x_2 = -1,\quad x_4 = -1,\ \ldots,\ x_{2k} = -1,\ \ldots$$

будут иметь пределом, соответственно, число 1 или -1.

В случае неограниченной последовательности (1) иной раз оказывается невозможным выделение частичной последовательности (2), имеющей конечный предел [так будет, если сама последовательность (1) стремится к $\pm\infty$]. Наоборот, для ограниченной последовательности имеет место следующее утверждение, принадлежащее Больцано и Вейерштрассу *):

Лемма Больцано — Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности* (1) *всегда можно извлечь такую частичную последовательность* (2), *которая сходилась бы к конечному пределу.*

(Эта формулировка не исключает возможности и равных чисел в составе данной последовательности, что удобно в приложениях).

Доказательство. Пусть все числа x_n заключены между границами a и b. Разделим этот промежуток $[a, b]$ пополам, тогда хоть в одной половине будет содержаться бесконечное множество элементов данной последовательности, ибо, в противном случае, и во всем промежутке $[a, b]$ этих элементов содержалось бы конечное число, что невозможно. Итак, пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин, которая

*) Карл Вейерштрасс (1815—1897) — выдающийся немецкий математик.

содержит бесконечное множество чисел x_n (или, если обе половины таковы, то — любая из них).

Аналогично, из промежутка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$ — под условием, чтобы в ней содержалось бесконечное множество чисел x_n, и т. д. Продолжая этот процесс, на k-й стадии его выделим промежуток $[a_k, b_k]$, также содержащий бесконечное множество чисел x_n; и так далее до бесконечности.

Каждый из построенных промежутков (начиная со второго) содержится в предыдущем, составляя его половину. Кроме того, длина k-го промежутка, равная

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

стремится к нулю с возрастанием k. Применяя сюда лемму о вложенных промежутках [n° **46**], заключаем, что a_k и b_k стремятся к общему пределу c.

Теперь построение частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$ произведем индуктивно следующим образом. В качестве x_{n_1} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n нашей последовательности, содержащихся в $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n, *следующих* за x_{n_1} и содержащихся в $[a_2, b_2]$, и т. д. Вообще, в качестве x_{n_k} возьмем любой (например, первый) из элементов x_n, *следующих за ранее выделенными* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ и содержащихся в $[a_k, b_k]$. Возможность такого выбора, производимого последовательно, обусловливается именно тем, что каждый из промежутков $[a_k, b_k]$ содержит *бесконечное множество* чисел x_n, т. е. содержит элементы x_n со сколь угодно большими номерами.

Далее, так как

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{и} \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

то по теореме 3) n° **38** и $\lim x_{n_k} = c$, что и требовалось доказать.

Метод, примененный при доказательстве этого утверждения и состоящий в последовательном делении пополам рассматриваемых промежутков, часто будет нам полезен и в других случаях.

Лемма Больцано — Вейерштрасса значительно облегчает доказательство многих трудных теорем, как бы вбирая в себя основную трудность рассуждения. Мы воспользуемся ею в ближайшем же номере.

52. Условие существования конечного предела для функции от натурального аргумента. Пусть дана переменная x_n, пробегающая последовательность значений (1); займемся, наконец, вопросом об *общем признаке существования конечного предела* для этой переменной (или для последовательности — что то же). Само *определение* предела для этой цели служить не может, ибо в нем фигурирует уже тот предел, о существовании которого идет речь. Мы нуждаемся в признаке, который использовал бы лишь то, что нам дано, а именно — последовательность (1) значений переменной.

Поставленную задачу решает следующая замечательная теорема, принадлежащая Больцано (1817) и Коши (1821); ее называют часто *принципом сходимости.*

Теорема. *Для того чтобы переменная x_n имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon>0$ существовал такой номер N, чтобы неравенство*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \tag{4}$$

выполнялось, лишь только $n>N$ и $n'>N$.

Как видит читатель, суть дела здесь в том, чтобы значения переменной между собой безгранично сближались по мере возрастания их номеров. Обратимся к доказательству.

Необходимость. Пусть переменная x_n имеет определенный конечный предел, скажем a. По самому определению предела [n° 28], каково бы ни было число $\varepsilon>0$, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер N, что для $n>N$ всегда имеет место неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем теперь любые два номера $n>N$ и $n'>N$; для них одновременно будет

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Этим необходимость условия доказана. Значительно труднее доказать его

Достаточность. Здесь именно мы и применим лемму предыдущего номера.

Итак, пусть условие выполнено, и по заданному $\varepsilon>0$ найден такой номер N, что для $n>N$ и $n'>N$ имеет место неравенство (4). Если n' при этом фиксировать, то, переписав (4) так:

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon,$$

видим, что переменная x_n, во всяком случае, будет ограниченной: ее значения для $n>N$ содержатся между числами $x_{n'} - \varepsilon$ и $x_{n'} + \varepsilon$, и нетрудно эти границы раздвинуть так, чтобы охватить и первые N значений: $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Тогда, по лемме Больцано — Вейерштрасса, можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу c:

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Покажем, что к этому пределу стремится вообще и переменная x_n. Можно выбрать k настолько большим, чтобы было

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

и, одновременно, $n_k > N$. Следовательно, в (4) можно взять $n' = n_k$:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

и, сопоставляя оба эти неравенства, окончательно находим

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (\text{для } n > N),$$

что и доказывает наше утверждение *).

Замечание. Хотя и Больцано и Коши утверждали достаточность высказанного ими условия существования конечного предела, но без строгой теории вещественных чисел, разумеется, доказать этого не могли.

53. Условие существования конечного предела для функции любого аргумента. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая — функции $f(x)$, заданной в области $\mathscr{X} = \{x\}$, для которой a служит точкой сгущения. Для существования конечного предела этой функции при стремлении x к a может быть установлен такой же признак, как и в случае функции от натурального аргумента. Формулировку его мы дадим параллельно для случая конечного a и для случая $a = +\infty$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ при стремлении x к a имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$ $(\Delta > 0)$, чтобы неравенство*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

выполнялось, лишь только

$$|x - a| < \delta \quad \text{и} \quad |x' - a| < \delta \quad (x > \Delta \text{ и } x' > \Delta).$$

Доказательство проведем в предположении, что a — конечное число.

Необходимость. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

---

*) Число 2ε в такой же мере «произвольно малое» число, как и ε. Если угодно, можно было сначала взять не ε, а $\frac{\varepsilon}{2}$, тогда мы здесь получили бы ε. Подобные вещи впредь мы будем предоставлять читателю.

Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если только $|x - a| < \delta$. Пусть и $|x' - a| < \delta$, так что и

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

в предположении, что одновременно

$$|x - a| < \delta \quad \text{и} \quad |x' - a| < \delta.$$

Достаточность может быть установлена, например, путем сведения вопроса к уже рассмотренному случаю. Путь для этого нам открывает само определение понятия предела функции «на языке последовательностей» [n° 32].

Итак, пусть условие, сформулированное в теореме, выполнено, и по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ установлено соответствующее $\delta > 0$.

Если $\{x_n\}$ есть любая последовательность значений из $\mathscr{X}$, сходящаяся к a, то, по определению предела последовательности, найдется такой номер N, что для $n > N$ будет: $|x_n - a| < \delta$. Возьмем, наряду с n, и другой номер $n' > N$, так что одновременно

$$|x_n - a| < \delta \text{ и } |x_{n'} - a| < \delta.$$

Тогда, в силу самого выбора числа δ,

$$|f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon.$$

Это неравенство выполняется при единственном требовании, чтобы оба номера n и n' были больше N. Это означает, что для функции $f(x_n)$ от натурального аргумента n выполняется условие n° 52 и, таким образом, последовательность

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

имеет конечный предел, скажем A.

Остается еще установить, что этот предел A не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$.

Пусть же $\{x'_n\}$ будет другая последовательность, извлеченная из $\mathscr{X}$ и также сходящаяся к a. Соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x'_n)\}$, по доказанному, имеет некоторый конечный предел A'. Для доказательства того, что $A' = A$, допустим противное. Составим тогда новую последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$$

значений x, явно сходящуюся к a. Ей отвечает последовательность значений функции

$$f(x_1),\ f(x_1'),\ f(x_2),\ f(x_2'),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x_n'),\ \ldots,$$

вовсе не имеющая предела, так как частичные последовательности ее членов, стоящих на нечетных или четных местах, стремятся к различным пределам [n° **51**]. А это противоречит доказанному. Итак, при $x \to a$ функция $f(x)$ действительно стремится к конечному пределу A.

§ 6. КЛАССИФИКАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ВЕЛИЧИН

54. Сравнение бесконечно малых. Предположим, что в каком-либо исследовании одновременно рассматривается ряд бесконечно малых величин

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

которые, вообще говоря, будут функциями от одной и той же переменной, скажем x, стремящейся к конечному или бесконечному пределу a.

Во многих случаях представляет интерес сравнение названных бесконечно малых между собой по характеру их приближения к нулю. В основу сравнения двух бесконечно малых α и β кладется поведение их отношения *). На этот счет установим два соглашения:

I. *Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\text{а с ним и } \frac{\alpha}{\beta}\right)$ имеет конечный и отличный от нуля предел, то бесконечно малые α и β считаются величинами одного порядка.*

II. *Если же отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ само оказывается бесконечно малым $\left(\text{а отношение } \frac{\alpha}{\beta} \text{ — бесконечно большим}\right)$, то бесконечно малая β считается величиной высшего порядка, чем бесконечно малая α, и одновременно бесконечно малая α будет низшего порядка, чем бесконечно малая β.*

Например, если $\alpha = x \to 0$, то по сравнению с этой бесконечно малой одного порядка с нею будут бесконечно малые

$$\sin x,\ \operatorname{tg} x,\ \sqrt{1+x}-1,$$

ибо, как мы знаем [n° **34**, 5); n° **43**, 6)],

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

---

*) Мы будем считать, что переменная, на которую мы делим, не обращается в нуль, по крайней мере, для значений x, достаточно близких к a.

Наоборот, бесконечно малые

$$1 - \cos x, \quad \operatorname{tg} x - \sin x \tag{1}$$

будут, очевидно, высшего порядка, чем x [n° **43**, 7), (а) и (б)].

Конечно, может случиться, что отношение двух бесконечно малых не стремится ни к какому пределу, не будучи и бесконечно большим; например, если взять [см. **34**, 6) и 7)]

$$\alpha = x, \quad \beta = x \sin \frac{1}{x},$$

то их отношение, равное $\sin \frac{1}{x}$, при $x \to 0$ предела не имеет. В таком случае говорят, что две бесконечно малые *несравнимы* между собой.

Заметим, что если бесконечно малая β оказывается высшего порядка, чем бесконечно малая α, то этот факт записывают так:

$$\beta = o(\alpha).$$

Например, можно писать:

$$1 - \cos x = o(x), \quad \operatorname{tg} x - \sin x = o(x) \text{ и т. п.}$$

Таким образом, символ $o(\alpha)$ служит *общим* обозначением для бесконечно малой высшего порядка, чем α. Этим удобным обозначением мы впредь будем пользоваться.

55. Шкала бесконечно малых. Иной раз встречается надобность в более точной сравнительной характеристике поведения бесконечно малых, в выражении порядков их *числами*. В этом случае, прежде всего, в качестве своего рода «эталона» выбирают одну из фигурирующих в данном исследовании бесконечно малых (скажем α); ее называют *основной*. Конечно, выбор основной бесконечно малой в известной мере произволен, но обычно берут простейшую из всех. Если рассматриваемые величины, как мы предположили, являются функциями от x и становятся бесконечно малыми при стремлении x к a, то в зависимости от того, будет ли a нулем, конечным и отличным от нуля числом или бесконечностью, естественно за основную бесконечно малую взять соответственно

$$|x|, \quad |x - a|, \quad \frac{1}{|x|}.$$

Далее, из степеней основной бесконечно малой α (мы будем считать $\alpha > 0$) с различными положительными показателями, α^k, составляют как бы шкалу для оценки бесконечно малых более сложной природы *).

---

*) Легко видеть, что при $k > 0$ величина α^k будет бесконечно малой одновременно с α.

III. *Уславливаются считать бесконечно малую β величиной k-го порядка (относительно основной бесконечно малой α), если β и α^k ($k > 0$) будут величинами одного порядка,* т. е. если отношение $\frac{\beta}{\alpha^k}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

Теперь, например, можно, не довольствуясь утверждением, что бесконечно малые (1) (при $x \to 0$) будут величинами высшего порядка, чем $\alpha = x$, сказать точно, что одна из них есть бесконечно малая второго порядка, а другая — третьего порядка относительно $\alpha = x$, ибо [43, 7), (а) и (б)]

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

56. Эквивалентные бесконечно малые. Остановимся теперь на одном особенно важном частном случае бесконечно малых одного порядка.

IV. *Будем называть бесконечно малые α и β эквивалентными (в знаках: $\alpha \sim \beta$), если их разность $\gamma = \beta - \alpha$ оказывается величиной высшего порядка, чем каждая из бесконечно малых α и β:*

$$\gamma = o(\alpha) \text{ и } \gamma = o(\beta).$$

Впрочем, достаточно потребовать, чтобы γ была высшего порядка, чем одна из этих бесконечно малых, потому что, если, например, γ высшего порядка чем α, то она будет также высшего порядка чем β. Действительно, из того, что $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$, следует, что и

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} = \lim \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\gamma}{\alpha}} = 0.$$

Рассмотрим две эквивалентные бесконечно малые α и β, так что $\beta = \alpha + \gamma$, где $\gamma = o(\alpha)$. Если приближенно положить $\beta \doteq \alpha$ *), то — по мере уменьшения обеих величин — стремится к нулю не только абсолютная погрешность от этой замены, представляемая величиной $|\gamma|$, но и относительная погрешность, равная $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$. Иными словами, *при достаточно малых значениях α и β можно со сколь угодно большой относительной точностью положить* $\beta = \alpha$. На этом основана, при приближенных выкладках, замена сложных бесконечно малых эквивалентными им простыми.

Установим полезный критерий эквивалентности двух бесконечно малых, который в сущности дает второе определение этого понятия, равносильное ранее данному:

*) Знак $\doteq$ означает приближенное равенство.

Для того чтобы две бесконечно малые α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Положив $\beta - \alpha = \gamma$, будем иметь

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Отсюда сразу и вытекает наше утверждение. Действительно, если $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$, то $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, т. е. γ есть бесконечно малая высшего порядка чем α, и $\beta \sim \alpha$. Обратно, если дано, что $\beta \sim \alpha$, то $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, а тогда $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$.

С помощью этого критерия, например, видно, что при $x \to 0$ бесконечно малая $\sin x$ эквивалентна x, а $\sqrt{1+x} - 1$ эквивалентно $\frac{1}{2}x$. Отсюда — приближенные формулы:

$$\sin x \doteq x, \quad \sqrt{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{2}x.$$

Доказанное свойство эквивалентных бесконечно малых приводит к использованию их при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$, т. е. при разыскании предела отношения двух бесконечно малых $\frac{\beta}{\alpha}$. Каждая из них при этом может быть заменена, без влияния на предел, любой эквивалентной ей бесконечно малой.

Действительно, если $\bar{\alpha} \sim \alpha$ и $\bar{\beta} \sim \beta$, т. е.

$$\lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 \text{ и } \lim \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 1,$$

то отношение

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\alpha},$$

отличающееся от отношения $\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ множителями, стремящимися к единице, имеет предел одновременно с ним (и притом тот же).

Если удается выбрать $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ достаточно простыми, то это может сразу значительно упростить задачу; например,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x + x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

Из доказанного вытекает также, что *две бесконечно малые, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой.*

57. Выделение главной части. Если выбрана основная бесконечно малая α, то простейшими бесконечно малыми естественно считать величины вида $c \cdot \alpha^k$, где c — постоянный коэффициент и $k > 0$. Пусть бесконечно малая β будет k-го порядка относительно α, т. е.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c,$$

где c — конечное и отличное от нуля число. Тогда

$$\lim \frac{\beta}{c\alpha^k} = 1,$$

и бесконечно малые β и $c\alpha^k$ оказываются эквивалентными: $\beta \sim c\alpha^k$. Эта *простейшая бесконечно малая $c\alpha^k$, эквивалентная данной бесконечно малой β, называется ее главной частью (или главным членом).*

Пользуясь установленными выше результатами, кроме уже указанных простых примеров, легко выделить главные части выражений:

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2; \quad \operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2} x^3.$$

Здесь $x \to 0$, и именно $\alpha = x$ является основной бесконечно малой.

Пусть $\beta \sim c\alpha^k$, т. е. $\beta = c\alpha^k + \gamma$, где $\gamma = o(\alpha^k)$. Можно представить себе, что из бесконечно малой γ снова выделен главный член: $\gamma = c'\alpha^{k'} + \delta$, где $\delta = o(\alpha^{k'})$ $(k' > k)$ и т. д.

Этот процесс последовательного выделения из бесконечно малой простейших бесконечно малых все возрастающих порядков можно продолжать и дальше.

Мы ограничиваемся в настоящем параграфе установлением общих понятий, иллюстрируя их лишь немногими примерами. В последующем мы укажем систематический прием как для построения главной части данной бесконечно малой величины, так и для дальнейшего выделения из нее простейших бесконечно малых, о котором только что шла речь.

58. Задачи. Для иллюстрации изложенных соображений приведем две задачи, в которых они используются.

1) Пусть прямолинейное расстояние на местности измеряется с помощью мерной рейки длиной l метров. Так как фактически рейка прикладывается не точно вдоль измеряемой прямой, то результат измерения оказывается

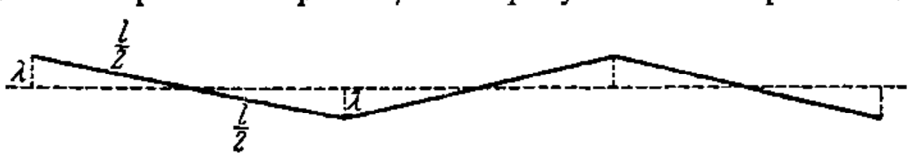


Рис. 25.

несколько больше истинной длины. Сделаем самое невыгодное предположение, именно, что рейка прикладывается зигзагом, так что ее концы отстоят от прямой поочередно то в одну, то в другую сторону на расстояние λ *м* (рис. 25). Требуется оценить погрешность.

При однократном прикладывании рейки абсолютная погрешность равна разности между длиной l рейки и ее проекцией на измеряемую прямую; проекция же эта будет:

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

Воспользовавшись приближенной формулой

$$\sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x$$

при $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ (что оправдано, ввиду малости величины λ относительно l), заменим выражение для проекции следующими:

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}.$$

В таком случае упомянутая погрешность есть $\frac{2\lambda^2}{l}$, а относительная погрешность, очевидно, будет $\frac{2\lambda^2}{l^2}$. Та же относительная погрешность сохранится и при многократном прикладывании рейки.

Если для этой погрешности установлена граница δ, т. е. должно быть $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$, то отсюда $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$.

Например, при измерении двухметровой рейкой ($l=2$) для достижения относительной точности в 0,001, нужно, чтобы уклонение λ не превосходило $2\sqrt{0{,}0005}\doteq 0{,}045$ *м* или 4,5 *см*.

2) При разбивке дуг окружностей на местности имеет значение следующая задача: *найти отношение стрелы $f=DB$ дуги ABC окружности к стреле $f_1=D_1B_1$ половины AB_1B этой дуги* (рис. 26).

Если положить радиус окружности равным r,

$$\sphericalangle AOB=\varphi, \text{ то } \sphericalangle AOB_1=\frac{\varphi}{2} \text{ и}$$

$$f=DB=r(1-\cos\varphi),\quad f_1=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{f}{f_1}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

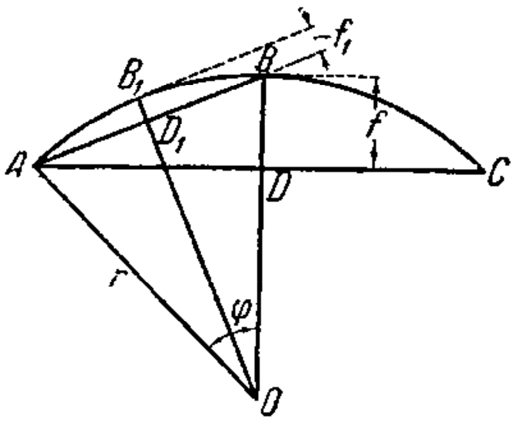


Рис. 26.

Выражение это слишком сложно, чтобы им удобно было пользоваться на практике. Найдем его предел при $\varphi\to 0$ (ибо для достаточно малых φ это выражение можно приближенно заменить его пределом). С этой целью заменяем числитель и знаменатель их главными частями и сразу находим:

$$\lim\frac{f}{f_1}=\lim\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2}=4.$$

Итак, для дуг, соответствующих небольшому центральному углу, приближенно можно считать, что *стрела полудуги вчетверо меньше стрелы дуги.* Это позволяет последовательно строить промежуточные точки дуги, для которой даны концы и середина.

59. Классификация бесконечно больших. Заметим, что для бесконечно больших величин может быть развита подобная же классификация. Как и в n° 54, будем считать рассматриваемые величины функциями от одной и той же переменной x, которые становятся бесконечно большими, когда x стремится к a.

I. *Две бесконечно большие y и z считаются величинами одного порядка, если их отношение $\frac{z}{y}$ $\left(а \text{ с ним и } \frac{y}{z}\right)$ имеет конечный и отличный от нуля предел.*

II. *Если же отношение $\frac{z}{y}$ само оказывается бесконечно большим (а обратное отношение $\frac{y}{z}$ — бесконечно малым), то z считается бесконечно большой величиной высшего порядка чем y, и, одновременно, y будет бесконечно большой низшего порядка чем z.*

В случае, когда отношение $\frac{z}{y}$ ни к какому конечному пределу не стремится и в то же время не будет бесконечно большим, бесконечно большие y и z — несравнимы.

При одновременном рассматривании ряда бесконечно больших величин, одну из них (скажем, y) выбирают в качестве основной, и с ее степенями сравнивают остальные бесконечно большие. Например, если (как мы предположили выше) все они суть функции от x и становятся бесконечно большими при $x \to a$, то в качестве основной бесконечно большой обыкновенно берут $|x|$, если $a = \pm\infty$, и $\frac{1}{|x - a|}$ при a конечном.

III. *Бесконечно большая z называется величиной k-го порядка (относительно основной бесконечно большой y), если z и y^k будут одного порядка,* т. е., если отношение $\frac{z}{y^k}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ (И РАЗРЫВЫ) ФУНКЦИИ

60. Определение непрерывности функции в точке. С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции. Установление этого понятия в точной форме принадлежит Больцано и Коши, имена которых уже упоминались.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором промежутке $\mathscr{X}$, и пусть x_0 будет точка этого промежутка, так что в ней функция имеет определенное значение $f(x_0)$.

Когда устанавливалось понятие предела функции при стремлении x к x_0 [n°n° 32, 33]

$$\lim_{x \to x_0} f(x),$$

неоднократно подчеркивалось, что значения x_0 переменная x не принимает; это значение могло даже не принадлежать области определения функции, а если и принадлежало, то значение $f(x_0)$ при образовании упомянутого предела не учитывалось.

Однако особый интерес представляет именно случай, когда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Говорят, что *функция $f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$ (или в точке $x = x_0$), если выполняется это соотношение; если же оно нарушено,* то говорят, что *при этом значении (или в этой точке) функция имеет разрыв* *).

В случае непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (и, очевидно, только в этом случае), при вычислении предела функции $f(x)$ при

---

*) Эта терминология связана с интуитивным представлением о непрерывности и разрывах кривой: функция непрерывна, если непрерывен ее график, точки разрыва функции отвечают точкам разрыва графика. На деле, однако, понятие непрерывности для кривой само требует обоснования, и простейший путь к нему лежит как раз через непрерывность функции!

$x \to x_0$ становится безразличным, будет ли x в своем стремлении к x_0 принимать, в частности, и значение x_0 или нет.

Определение непрерывности функции можно сформулировать в других терминах. Переход от значения x_0 к другому значению x можно себе представить так, что значению x_0 придано приращение $\Delta x = x - x_0$*). Новое значение функции $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ разнится от старого $y_0 = f(x_0)$ на приращение

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy в этой точке стремилось к нулю вместе с приращением Δx независимой переменной. Иными словами: *непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции.*

Возвращаясь к основному определению (1), раскроем его содержание «на языке последовательностей» [32]. Смысл непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 сводится к следующему: *какую бы последовательность значений x из $\mathscr{X}$:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

сходящуюся к x_0, ни взять, соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

сходится к $f(x_0)$.

Наконец, «на языке ε-δ» [n°33] непрерывность выразится так: *каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство*

$$|x - x_0| < \delta \text{ влечет за собой } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, таким образом, должно выполняться в достаточно малой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0.

Отметим, что, вычисляя предел (1), мы могли приближать x к x_0 и справа и слева, лишь бы x не выходило за пределы промежутка $\mathscr{X}$.

Установим теперь понятие об односторонней непрерывности или одностороннем разрыве функции в данной точке.

Говорят, что *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа (слева),* если выполняется предельное соотношение:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+0) &= \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \\ [\text{или } f(x_0-0) &= \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)]. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

*) В анализе принято приращение величин x, y, t ... обозначать через Δx, Δy, Δt, ... Эти обозначения надлежит рассматривать как цельные символы, не отделяя Δ от x, и т. п.

Если же то или другое из этих соотношений не осуществляется, то *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв соответственно справа или слева.*

По отношению к левому (правому) концу промежутка $\mathscr{X}$ *), в котором функция определена, может идти речь, очевидно, только о непрерывности или разрыве справа (слева). Если же x_0 есть внутренняя точка промежутка $\mathscr{X}$, т. е. не совпадает ни с одним из его концов, то для того, чтобы выполнялось равенство (1), выражающее непрерывность функции в точке x_0 в обычном смысле, необходимо и достаточно, чтобы имели место одновременно оба равенства (2) [35]. Иными словами, *непрерывность функции в точке x_0 равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно справа и слева.*

Условимся говорить, для упрощения речи, что функция непрерывна в промежутке $\mathscr{X}$, если она непрерывна в каждой точке промежутка в отдельности.

61. Условие непрерывности монотонной функции. Рассмотрим функцию $f(x)$, монотонно возрастающую (убывающую) **) в промежутке $\mathscr{X}$ [n°47]. Этот промежуток может быть как конечным, так и бесконечным, замкнутым, полуоткрытым или открытым. Мы установим сейчас простой признак, с помощью которого для функций подобного типа сразу может быть обнаружена ее непрерывность во всем промежутке $\mathscr{X}$.

Теорема. *Если множество значений монотонно возрастающей (убывающей) функции $f(x)$, которые она принимает, когда x изменяется в промежутке $\mathscr{X}$, содержится в некотором промежутке $\mathscr{Y}$ и заполняет его сплошь, то функция $f(x)$ в промежутке $\mathscr{X}$ непрерывна* ***).

Возьмем любую точку x_0 из $\mathscr{X}$ и, предполагая, что она не является правым концом этого промежутка, докажем непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 справа; аналогично может быть доказана и непрерывность функции в точке x_0 слева, если x_0 не есть левый конец рассматриваемого промежутка, а отсюда по совокупности и следует заключение теоремы.

Точка $y_0=f(x_0)$ принадлежит промежутку $\mathscr{Y}$, не являясь его правым концом (ведь в $\mathscr{X}$ есть значения $x>x_0$, а им отвечают в $\mathscr{Y}$ значения $y=f(x)>y_0$). Пусть ε будет произвольно малое положительное число; впрочем, мы предположим его вдобавок настолько

---

*) Предполагая, что этот конец есть число конечное.

**) Для отчетливости мы будем предполагать функцию монотонно возрастающей в строгом смысле (хотя теорема верна и для монотонных функций в широком смысле).

***) Впоследствии [70] мы покажем, что то условие, которое здесь сформулировано как достаточное для непрерывности монотонной функции, является и необходимым.

малым, чтобы и значение $y_1 = y_0 + \varepsilon$ тоже принадлежало промежутку $\mathcal{Y}$. Так как по предположению $\mathcal{Y} = \{f(x)\}$, то в $\mathcal{X}$ найдется такое значение x_1, что будет

$$f(x_1) = y_1,$$

причем, очевидно, $x_1 > x_0$ (ибо, при $x \leqslant x_0$ и $f(x) \leqslant y_0$). Положим $\delta = x_1 - x_0$, так что $x_1 = x_0 + \delta$. Если теперь

$$0 < x - x_0 < \delta, \text{ т. е. } x_0 < x < x_1,$$

то

$$y_0 < f(x) < y_1 = y_0 + \varepsilon \text{ или } 0 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$$

Это и значит, что

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

т. е. функция $f(x)$ действительно непрерывна в точке x_0 справа,

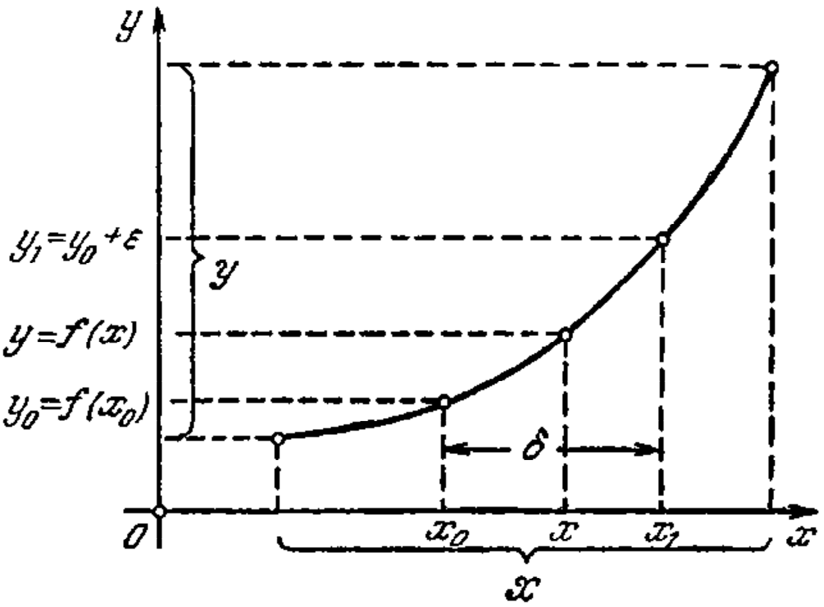


Рис. 27.

что и требовалось доказать. Рис. 27 служит иллюстрацией проведенного рассуждения.

62. Арифметические операции над непрерывными функциями. Прежде чем перейти к примерам непрерывных функций, установим следующее простое предложение, которое позволит легко расширить их число.

Теорема. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в одном и том же промежутке $\mathcal{X}$ и обе непрерывны в точке x_0, то в той же точке будут непрерывны и функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(последняя — при условии, что $g(x_0) \neq 0$).

Это непосредственно вытекает из теорем о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, имеющих порознь пределы [n° **42**].

Остановимся для примера на частном двух функций. Предположение о непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 равносильно наличию равенств

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0).$$

Но отсюда, по теореме о пределе частного (так как предел знаменателя не нуль), имеем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

а это равенство и означает, что функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

63. Непрерывность элементарных функций. 1°. Целая и дробная рациональные функции. Непрерывность функций от x, сводящихся к постоянной или к самому x, непосредственно ясна. Отсюда, на основании теоремы предыдущего номера, вытекает уже непрерывность любого одночленного выражения

$$ax^m=a\cdot\overbrace{x\cdot x\ \ldots\ x}^{m\ \text{раз}}$$

как произведения непрерывных функций, а затем — и многочлена (целой рациональной функции)

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

как суммы непрерывных функций. Во всех упомянутых случаях непрерывность имеет место во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Очевидно, наконец, что и частное двух многочленов (дробная рациональная функция):

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

также будет непрерывно при каждом значении x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

Непрерывность остальных элементарных функций мы установим, опираясь на теорему n° **61**.

2°. Показательная функция $y=a^x\,(a>1)$ монотонно возрастает при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=(-\infty, +\infty)$. Ее значения положительны и заполняют весь промежуток $\mathscr{Y}=(0, +\infty)$; это видно из существования логарифма $x=\log_a y$ для любого $y>0$ [n° **12**]. Следовательно, показательная функция непрерывна при любом значении x.

3°. Логарифмическая функция $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq 1)$. Ограничиваясь случаем $a>1$, видим, что эта функция возрастает при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=(0, +\infty)$. К тому же она, очевидно, принимает любое значение y из промежутка $\mathscr{Y}=(-\infty, +\infty)$, именно, для $x=a^y$. Отсюда — ее непрерывность.

4°. Степенна́я функция $y=x^\mu$ $(\mu \gtrless 0)$ при возрастании x от нуля до $+\infty$ возрастает, если $\mu>0$, и убывает, если $\mu<0$. При этом она принимает любое положительное значение y (для $x=y^{\frac{1}{\mu}}$), следовательно, и она непрерывна *).

5°. Тригонометрические функции:

$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=\operatorname{tg} x, \quad y=\operatorname{ctg} x,$$
$$y=\sec x, \quad y=\csc x.$$

Остановимся сначала на функции $y=\sin x$. Ее непрерывность, скажем, при изменении x в промежутке $\mathscr{X}=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, вытекает из ее монотонности в этом промежутке, да еще из того факта (устанавливаемого геометрически), что при этом она принимает каждое значение между -1 и 1. То же относится и к любому промежутку вида

$$\left[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right] \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Окончательно видим, что функция $y=\sin x$ непрерывна для всех значений x. Аналогично устанавливается и непрерывность функции $y=\cos x$, также при любом значении x.

Отсюда, по теореме предыдущего номера, вытекает уже непрерывность функций

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

Исключение представляют для первых двух—значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, обращающие $\cos x$ в нуль, а для последних двух — значения вида $k\pi$, обращающие $\sin x$ в нуль.

Наконец, упомянем

6°. Обратные тригонометрические функции:

$$y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \quad y=\operatorname{arctg} x, \quad y=\operatorname{arcctg} x.$$

Первые две непрерывны в промежутке $[-1, 1]$, а последние — в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Доказательство предоставляем читателю.

---

*) Если $\mu>0$, то значение нуль включается как в промежуток изменения x, так и в промежуток изменения y; при $\mu<0$ значение нуль не включается. Далее, если μ — целое число $\pm n$ или дробное $\pm\frac{p}{q}$ с нечетным знаменателем, то степень x^μ можно рассматривать и для $x<0$; непрерывность ее для этих значений устанавливается аналогично.

Резюмируя, можно сказать, таким образом, что основные элементарные функции оказываются непрерывными во всех точках, где они имеют смысл, т. е. в соответствующих естественных областях их определения.

64. Суперпозиция непрерывных функций. Обширные классы непрерывных функций могут быть построены с помощью суперпозиции функций, непрерывность которых уже известна. В основе этого лежит следующая

Теорема. *Пусть функция $\varphi(y)$ определена в промежутке $\mathcal{Y}$, а функция $f(x)$ — в промежутке $\mathcal{X}$, причем значения последней функции не выходят за пределы $\mathcal{Y}$, когда x изменяется в $\mathcal{X}$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 из $\mathcal{X}$, а $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ из $\mathcal{Y}$, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ будет непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(y)$ непрерывна при $y = y_0$, то по ε найдется такое $\sigma > 0$, что

$$\text{из } |y - y_0| < \sigma \text{ следует } |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

С другой стороны, ввиду непрерывности $f(x)$ при $x = x_0$, по σ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\text{из } |x - x_0| < \delta \text{ следует } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma.$$

По самому выбору числа σ отсюда следует, далее,

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Этим «на языке ε-δ» и доказана непрерывность функции $\varphi(f(x))$ в точке x_0.

Например, если степенную функцию x^μ $(x > 0)$ представить в виде функции

$$x^\mu = e^{\mu \ln x},$$

которая получается от суперпозиции логарифмической и показательной функций, то из непрерывности последних двух функций уже будет вытекать непрерывность степенной функции.

65. Вычисление некоторых пределов. Непрерывность функций многообразно может быть использована при вычислении пределов *).

*) Фактически мы иной раз это делали и раньше; так, в примере 6) n° 43 мы попутно установили непрерывность функции $\sqrt{x}$ при $x = 1$ и использовали ее, а в примере 7) (б) так же поступили по отношению к функции $\cos x$ при $x = 0$.

Здесь мы, опираясь на непрерывность элементарных функций, установим ряд важных пределов, которые понадобятся нам в следующей главе:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e$ $\left(\frac{0}{0}\right)$,

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\ln a$ $\left(\frac{0}{0}\right)$,

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu-1}{\alpha}=\mu$ $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Имеем

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}};$$

так как выражение, стоящее справа под знаком логарифма, при $\alpha\to 0$ стремится к e [n°**50**, (4)], то (по непрерывности логарифмической функции) его логарифм стремится к $\log_a e$, что и требовалось доказать.

Отметим частный случай доказанной формулы, когда речь идет о натуральном логарифме ($a=e$):

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1.$$

В простоте этого результата и коренятся, по существу, те преимущества, которые представляет натуральная система логарифмов.

Обращаясь к формуле 2), положим $a^\alpha-1=\beta$; тогда при $\alpha\to 0$ (по непрерывности показательной функции) и $\beta\to 0$. Имеем, далее, $\alpha=\log_a(1+\beta)$, так что, если воспользоваться уже доказанным результатом:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a,$$

что и требовалось доказать.

Если, в частности, взять $\alpha=\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$), то получится интересная формула:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a \qquad (\infty\cdot 0).$$

Наконец, для доказательства формулы 3), положим $(1+\alpha)^\mu-1=\beta$; при $\alpha\to 0$ (по непрерывности степенной функции) будет и $\beta\to 0$. Логарифмируя равенство $(1+\alpha)^\mu=1+\beta$, получим, что

$$\mu\cdot\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta).$$

С помощью этого соотношения преобразуем данное нам выражение так:

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

По доказанному оба отношения

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \text{ и } \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

стремятся к единице, так что всё произведение имеет пределом μ, что и требовалось доказать.

Предел, рассмотренный в n°**43**, 6), получается отсюда, как частный случай, при $\mu=\frac{1}{2}$.

66. Степенно-показательные выражения. Рассмотрим теперь степенно-показательное выражение u^v, где u и v являются функциями от одной и той же переменной x, с областью изменения $\mathscr{X}$, имеющей точку сгущения x_0; в частности, это могут быть две функции u_n и v_n от натурального аргумента.

Пусть существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to x_0} u=a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} v=b,$$

причем $a>0$. Требуется найти предел выражения u^v.

Представим его в виде

$$u^v=e^{v\cdot\ln u};$$

функции v и $\ln u$ имеют пределы

$$\lim_{x\to x_0} v=b, \quad \lim_{x\to x_0} \ln u=\ln a$$

(здесь использована непрерывность логарифмической функции), так что

$$\lim_{x\to x_0} v\cdot\ln u=b\cdot\ln a.$$

Отсюда — по непрерывности показательной функции — окончательно

$$\lim_{x\to x_0} u^v=e^{b\cdot\ln a}=a^b.$$

Предел выражения u^v можно установить и в других случаях, когда известен предел c произведения $v\cdot\ln u$ — конечный или бесконечный. При конечном c искомый предел будет, очевидно, e^c; если же $c=-\infty$ или $+\infty$, то этот предел, соответственно, будет 0 или $+\infty$ [n° **34**, 2)].

Самое же определение предела $c=\lim\{v\cdot\ln u\}$ — лишь по заданным пределам a и b — возможно всегда, кроме случаев, когда это произведение при $x\to x_0$ представляет неопределенность вида $0\cdot\infty$. Легко сообразить, что исключительные случаи отвечают таким комбинациям значений a и b:

$$\begin{aligned} a&=1, & b&=\pm\infty;\\ a&=0, & b&=0;\\ a&=+\infty, & b&=0. \end{aligned}$$

В этих случаях говорят, что *выражение u^v представляет неопределенность вида* 1^∞, 0^0, ∞^0 *) (смотря по случаю). Для решения вопроса о пределе выражения u^v здесь мало знать лишь пределы функций u и v, а нужно непосредственно учесть закон, по которому они стремятся к своим пределам.

Выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при $n\to\infty$, или более общее выражение $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ при $\alpha\to 0$, имеющее пределом e, дает пример неопределенности вида 1^∞.

Как уже указывалось, общие методы раскрытия неопределенностей всех видов будут даны в § 3 главы VII.

67. Классификация разрывов. Примеры. Остановимся подробнее на вопросе о непрерывности и разрыве функций в точке x_0, скажем, справа. Предполагая, что функция $f(x)$ в некотором промежутке $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ справа от этой точки о п р е д е л е н а, видим, что для непрерывности необходимо и достаточно: во-первых, чтобы существовал конечный предел $f(x_0+0)$ функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 справа и, во-вторых, чтобы этот предел был равен значению $f(x_0)$ функции в точке x_0.

Поэтому легко дать себе отчет в том, при каких обстоятельствах для функции $f(x)$ в точке x_0 справа появляется р а з р ы в. Может случиться, что хотя конечный предел $f(x_0+0)$ и существует, но он не равен значению $f(x_0)$; такой разрыв называют *обыкновенным* или *разрывом первого рода* **). Но может быть и так, что предел $f(x_0+0)$ бесконечен, или его вовсе нет; тогда говорят о *разрыве второго рода.*

Если функция $f(x)$ определена только в промежутке $(x_0, x_0+h]$, но с у щ е с т в у е т конечный предел

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то стоит лишь д о п о л н и т е л ь н о о п р е д е л и т ь функцию в точке x_0, положив $f(x_0)$ равным именно этому пределу, чтобы функция оказалась непрерывной в точке x_0 справа. Э т о о б ы ч н о м ы и б у д е м в п р е д ь п о д р а з у м е в а т ь. Впрочем, если функция определена и слева от x_0 — в промежутке $[x_0-h, x_0)$, и существует конечный предел

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

то восстановить непрерывность функции в точке x_0 можно лишь при условии совпадения обоих пределов.

---

*) Относительно самих этих символов можно было бы повторить сказанное в сноске на стр. 87.

**) В этом случае говорят также, что функция $f(x)$ в точке x_0 справа имеет с к а ч о к, по величине равный $f(x_0+0)-f(x_0)$.

Наконец, если для функции $f(x)$, определенной в промежутке $(x_0, x_0+h]$, конечного предела в точке x_0 справа не существует, то говорят, что функция имеет в точке x_0 справа *разрыв второго рода*, несмотря на то, что она в этой точке вовсе не определена: в этом случае, как бы дополнительно ни определить функцию при $x=x_0$, она неизбежно будет здесь иметь разрыв!

Примеры. 1) Рассмотрим функцию $y=E(x)$ (график ее представлен на рис. 5). Если x_0 не целое число и $E(x_0)=m$, т. е. $m<x_0<m+1$, то и для всех значений x в промежутке $(m, m+1)$ будет $E(x)=m$, так что непрерывность функции в точке x_0 непосредственно ясна.

Иначе обстоит дело, если x_0 равно целому числу m. Справа в этой точке будет иметь место непрерывность, ибо правее $x_0=m$, именно для значений x в $(m, m+1)$ будет $E(x)=m$, так что и $E(m+0)=m=E(m)$. Наоборот, левее $x_0=m$, для значений x в $(m-1, m)$, очевидно, $E(x)=m-1$; отсюда и $E(m-0)=m-1$, что не равно значению $E(m)$, и слева в точке $x_0=m$ функция имеет обыкновенный разрыв или скачок!

2) Для функции

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \qquad (\text{при } x\neq 0)$$

точка $x=0$ есть точка разрыва второго рода с обеих сторон; именно, в ней функция и справа и слева обращается в бесконечность:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty, \qquad f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

3) Функция

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \qquad (\text{при } x\neq 0),$$

рассмотренная в n°34, 6), в точке $x=0$ имеет разрыв второго рода с обеих сторон, так как не существует вовсе предела этой функции в названной точке ни справа, ни слева.

4) Наоборот, если взять функцию [n°34, 7)]

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x} \qquad (\text{при } x\neq 0)$$

для которой, как мы видели, существует предел

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0,$$

то, положив $f(0)=0$, мы восстановим непрерывность и при $x=0$.

5) Определим, наконец, две функции равенствами

$$f_1(x)=a^{\frac{1}{x}} \ (a>1), \qquad f_2(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

при $x\neq 0$ и дополнительным условием

$$f_1(0)=f_2(0)=0.$$

Как мы видели в n°35,

$$f_1(+0)=+\infty, \qquad f_1(-0)=0,$$

$$f_2(+0)=\frac{\pi}{2}, \qquad f_2(-0)=-\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, в точке $x=0$ для первой функции справа—разрыв второго рода, а слева — непрерывность; для второй функции — с обеих сторон скачки. [Ср. рис. 22 и 23.]

Остановимся в заключение на важном классе обычно рассматриваемых функций — монотонных или кусочно-монотонных *) — и покажем, что для них могут иметь место разве лишь обыкновенные разрывы. Это следует из того, что для такой функции $f(x)$ в каждой точке x_0, принадлежащей промежутку $\mathscr{X}$, где функция определена, всегда существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ (или — один из них, если x_0 является концом промежутка $\mathscr{X}$). Пусть, например, функция $f(x)$ монотонно возрастает, и x_0 не будет левым концом промежутка $\mathscr{X}$; тогда для $x<x_0$ значения $f(x)$ ограничены сверху числом $f(x_0)$ и по теореме n°47 действительно существует конечный предел

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

§ 2. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

68. Теорема об обращении функции в нуль. Займемся теперь изучением основных свойств функции, непрерывной в некотором промежутке. Интересные и сами по себе, эти свойства в дальнейшем изложении часто будут служить основой для различных умозаключений.

Первым на путь строгого обоснования их стал Больцано (1817), а вслед за ним — Коши (1821). Им и принадлежит приводимая ниже важная теорема.

Первая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b необходимо найдется точка c, в которой функция обращается в нуль:*

$$f(c)=0 \qquad (a<c<b).$$

Теорема имеет очень простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси x на другую, то она пересекает эту ось (черт. 28).

Доказательство мы проведем по методу деления промежутка [n°51]. Для определенности положим, что $f(a)<0$, а $f(b)>0$. Разделим промежуток $[a, b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке, тогда теорема доказана: можно положить $c=\frac{a+b}{2}$. Пусть же $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$; тогда на концах одного из промежутков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

*) Функция называется кусочно-монотонной, если промежуток ее определения может быть разложен на конечное число частичных промежутков, в каждом из которых в отдельности функция монотонна.

функция будет принимать значения разных знаков (и притом отрицательное значение на левом конце и положительное — на правом). Обозначив этот промежуток через $[a_1, b_1]$, имеем

$$f(a_1) < 0, \qquad f(b_1) > 0.$$

Разделим пополам промежуток $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль в середине $\frac{a_1+b_1}{2}$ этого проме-

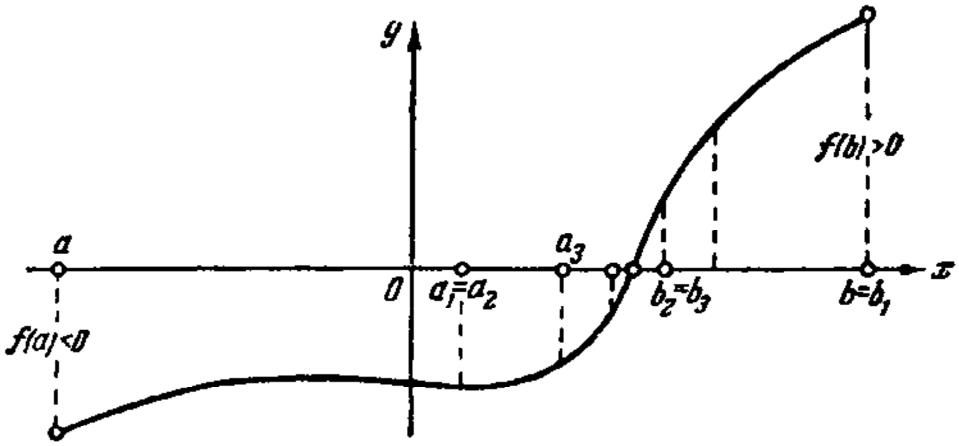


Рис. 28.

жутка, ибо тогда теорема доказана. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из половин промежутка, для которой

$$f(a_2) < 0, \qquad f(b_2) > 0.$$

Продолжим этот процесс построения промежутков. При этом **либо** мы после конечного числа шагов наткнемся в качестве точки деления на точку, где функция обращается в нуль, — и доказательство теоремы завершится, — **либо** получим бесконечную последовательность вложенных один в другой промежутков. Остановимся на этом последнем случае. Тогда для n-го промежутка $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ будем иметь

$$f(a_n) < 0, \qquad f(b_n) > 0, \tag{1}$$

причем длина его, очевидно, равна

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{2}$$

Построенная последовательность промежутков удовлетворяет условиям леммы о вложенных промежутках [n°46], ибо, ввиду (2), $\lim (b_n - a_n) = 0$; поэтому обе переменные a_n и b_n стремятся к общему пределу

$$\lim a_n = \lim b_n = c,$$

который, очевидно, принадлежит $[a, b]$ [36, 3)]. Покажем, что именно эта точка c удовлетворяет требованию теоремы.

Переходя к пределу в неравенствах (1) и используя при этом непрерывность функции (в частности, в точке $x=c$), получим, что одновременно

$$f(c)=\lim f(a_n)\leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(c)=\lim f(b_n)\geqslant 0,$$

так что действительно $f(c)=0$. Теорема доказана.

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a, b]$ — существенно: функция, имеющая разрыв хоть в одной точке, может перейти от отрицательного значения к положительному и не обращаясь в нуль. Так будет, например, с функцией $f(x)=E(x)-\frac{1}{2}$, которая нигде не принимает значения нуль, хотя $f(0)=-\frac{1}{2}$, а $f(1)=\frac{1}{2}$ (скачок при $x=1$).

§ 69. Применение к решению уравнений. Доказанная теорема имеет применение при решении уравнений.

Рассмотрим, например, алгебраическое уравнение нечетной степени (с вещественными коэффициентами)

$$f(x)\equiv a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0.$$

При достаточно больших по абсолютной величине значениях x многочлен имеет знак старшего члена, т. е. при положительном x — знак a_0, а при отрицательном x — обратный знак. Так как многочлен есть непрерывная функция, то, меняя знак, он в промежуточной точке необходимо обращается в нуль. Отсюда: *всякое алгебраическое уравнение нечетной степени (с вещественными коэффициентами) имеет по крайней мере один вещественный корень.*

Теоремой Больцано—Коши можно пользоваться не только для установления существования корня, но и для приближенного его вычисления. (Это и было отправной точкой зрения для Коши при доказательстве теоремы, помещенной им в разделе «О численном решении уравнений»). Поясним сказанное примером. Пусть $f(x)=x^4-x-1$. Так как $f(1)=-1$, $f(2)=13$, то многочлен имеет корень между 1 и 2. Разделим этот промежуток $[1, 2]$ на 10 равных частей точками 1,1; 1,2; 1,3;... и станем последовательно вычислять:

$$f(1{,}1)=-0{,}63\ldots;\quad f(1{,}2)=-0{,}12\ldots;\quad f(1{,}3)=+0{,}55;\ldots$$

Видим, что корень содержится между 1,2 и 1,3. Разделив и этот промежуток на 10 частей, найдем:

$$f(1{,}21)=-0{,}06\ldots;\quad f(1{,}22)=-0{,}04\ldots;\quad f(1{,}23)=+0{,}058\ldots;\ldots$$

Теперь ясно, что корень лежит между 1,22 и 1,23; таким образом, мы уже знаем значение корня с точностью до 0,01 и т. д. *).

70. Теорема о промежуточном значении. Доказанная в n°69 теорема непосредственно обобщается следующим образом:

*) Впрочем, практически этот путь невыгоден из-за большого количества вычислений; существуют приемы, гораздо быстрее ведущие к цели (они указываются в дифференциальном исчислении).

Вторая теорема Больцано—Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения*

$$f(a) = A \quad \text{и} \quad f(b) = B.$$

Тогда, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка c между a и b, что

$$f(c) = C.\text{*)}$$

Доказательство. Будем считать, например,

$$A < B, \quad \text{так что } A < C < B.$$

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна в промежутке и на концах его имеет разные знаки:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда, по первой теореме, между a и b найдется точка c, для которой $\varphi(c) = 0$, т. е.

$$f(c) - C = 0 \quad \text{или} \quad f(c) = C,$$

что и требовалось доказать.

Мы установили, таким образом, важное свойство функции $f(x)$, непрерывной в промежутке: *переходя от одного своего значения к другому, функция хоть раз принимает в качестве значения каждое промежуточное число.*

Это свойство, на первый взгляд, кажется вскрывающим самую сущность непрерывности функции. Однако легко построить заведомо разрывные функции, которые все же этим свойством обладают. Например, функция [n°**67**, 3)]

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

в любом промежутке, содержащем точку разрыва $x = 0$, принимает все вообще возможные для нее значения — от -1 до $+1$ **).

Из доказанного свойства непрерывной функции вытекает такое (по существу равносильное ему)

Следствие. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в каком-либо промежутке $\mathscr{X}$ (замкнутом или нет, конечном или*

---

*) Очевидно, что первая теорема Больцано—Коши есть частный случай этой: если A и B — разных знаков, то в качестве C можно взять и нуль.

**) Недаром еще Больцано подчеркивал, что указанное свойство есть следствие непрерывности, но его нельзя класть в основу определения непрерывности.

бесконечном), то принимаемые ею значения сами также заполняют сплошь некоторый промежуток.

Обозначим множество значений функции $\{f(x)\}$ через $\mathcal{Y}$. Пусть

$$m = \inf \mathcal{Y}, \qquad M = \sup \mathcal{Y}\ ^{*})$$

и l есть произвольное число между m и M:

$$m < l < M.$$

Необходимо найдутся значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ (x_1 и x_2 взяты из промежутка $\mathcal{X}$), такие, что

$$m \leqslant f(x_1) < l < f(x_2) \leqslant M;$$

это вытекает из самого определения точных границ числового множества. Но тогда, по доказанной теореме, существует между x_1 и x_2 такое значение $x = x_0$ (очевидно, также принадлежащее $\mathcal{X}$), что $f(x_0)$ в точности равно l; следовательно, это число входит в множество $\mathcal{Y}$.

Таким образом, $\mathcal{Y}$ представляет собой промежуток с концами m и M (которые сами могут ему принадлежать или нет — смотря по случаю; ср. n°**73**).

Мы видели в n°**61**, что в случае монотонной функции только что сформулированное свойство функции влечет за собой ее непрерывность. Что так будет не всегда, показывает приведенный выше пример.

Замечание. Для того частного случая, когда рассматриваемая функция представляет собой целый многочлен, обе теоремы высказывались задолго до строгого их доказательства в общем виде. Например, у Эйлера в его «Введении в анализ» мы находим — для указанного случая — полную формулировку теоремы настоящего номера, но без убедительного обоснования; эта теорема затем применяется к вопросу о существовании вещественных корней алгебраических уравнений [ср. n°69] **). Эйлер — подобно другим авторам — иной раз пользуется и геометрическими соображениями. Наконец, упомянем, что Лагранж ***) прямо начинает свой «Трактат о решении численных уравнений всех степеней» с аналитического доказательства (для многочлена!) теоремы n°68, основанного на разложении на множители.

71. Существование обратной функции. Применим изученные в предыдущем номере свойства непрерывной функции к установлению, при некоторых предположениях, существования однозначной обратной функции и ее непрерывности [ср. n°**23**].

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает)* ****) *и непрерывна в некотором промежутке $\mathcal{X}$. Тогда в соответствующем промежутке $\mathcal{Y}$ значений этой*

---

*) Напоминаем читателю, что если множество $\mathcal{Y}$ не ограничено сверху (снизу), то мы условились в n°6 полагать $\sup \mathcal{Y} = +\infty$ ($\inf \mathcal{Y} = -\infty$).

**) Стр. 44—46 русского перевода (см. сноску на стр. 48).

***) Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813) — знаменитый французский математик и механик.

****) В строгом смысле слова (это здесь существенно).

функции существует однозначная обратная функция $x=g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей функции. Мы видели выше [см. следствие], что значения непрерывной функции $f(x)$ заполняют сплошь некоторый промежуток $\mathcal{Y}$, так что для каждого значения y_0 из этого промежутка найдется хоть одно такое значение x_0 (из $\mathcal{X}$), что

$$f(x_0)=y_0.$$

Но, ввиду монотонности этой функции, такое значение может найтись только одно: если x больше или меньше x_0, то соответственно и $f(x)$ больше или меньше y_0.

Сопоставляя именно это значение x_0 произвольно взятому y_0 из $\mathcal{Y}$, мы получим однозначную функцию

$$x=g(y),$$

обратную для функции $y=f(x)$.

Легко видеть, что эта функция $g(y)$, подобно $f(x)$, также монотонно возрастает. Пусть

$$y'<y'' \quad \text{и} \quad x'=g(y'), \quad x''=g(y'');$$

тогда, по самому определению функции $g(y)$, одновременно

$$y'=f(x') \quad \text{и} \quad y''=f(x''),$$

Если бы было $x'>x''$, то, в силу возрастания функции $f(x)$, было бы и $y'>y''$, что противоречит условию. Не может быть и $x'=x''$, ибо тогда было бы и $y'=y''$, что также противоречит условию. Итак, возможно только неравенство $x'<x''$, так что $g(y)$ действительно возрастает.

Наконец, чтобы доказать непрерывность функции $x=g(y)$ достаточно сослаться на теорему в n°**61**, условия которой выполнены: названная функция монотонна и ее значения, очевидно, заполняют сплошь промежуток $\mathcal{X}$ *).

С помощью доказанной теоремы можно наново установить ряд уже известных нам результатов.

Например, если применить ее к функции x^n (n — натуральное число) в промежутке $\mathcal{X}=[0, +\infty)$, то придем к существованию и непрерывности (арифметического) корня

$$x=\sqrt[n]{y} \text{ для } y \text{ в } \mathcal{Y}=[0, +\infty).$$

72. Теорема об ограниченности функции. Если функция $f(x)$ определена (следовательно, принимает конечные значения) для всех

---

*) Какое бы x из $\mathcal{X}$ ни взять, стоит лишь положить $y=f(x)$, чтобы для этого y функция $g(y)$ имела своим значением именно взятое x.

значений x в некотором конечном промежутке, то это не влечет за собой с необходимостью ограниченности функции, т. е. ограниченности множества $\{f(x)\}$ принимаемых ею значений. Например, пусть $f(x)$ определена так:

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad \text{если } 0<x\leqslant 1 \text{ и } f(0)=0;$$

функция эта принимает только конечные значения, но она не ограничена, ибо при приближении x к нулю может принимать сколь угодно большие значения. Заметим попутно, что в полуоткрытом промежутке $(0, 1]$ она непрерывна, но в точке $x=0$ имеет разрыв.

Иначе обстоит дело с функциями, непрерывными в замкнутом промежутке.

Первая теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена и снизу и сверху, т. е. существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что*

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Доказательство поведем от противного: допустим, что функция $f(x)$ при изменении x в промежутке $[a, b]$ оказывается неограниченной, скажем, сверху.

В таком случае для каждого натурального числа n найдется в промежутке $[a, b]$ такое значение $x=x_n$, что

$$f(x_n)\geqslant n. \tag{3}$$

По лемме Больцано—Вейерштрасса [n°51], из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу:

$$x_{n_k}\to x_0 \quad (\text{при } k\to+\infty),$$

причем, очевидно, $a\leqslant x_0\leqslant b$. Вследствие непрерывности функции в точке x_0, тогда должно быть и

$$f(x_{n_k})\to f(x_0),$$

а это невозможно, так как из (3) следует, что

$$f(x_{n_k})\to+\infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

73. Наибольшее и наименьшее значения функции. Мы знаем, что бесконечное числовое множество, даже ограниченное, может не иметь в своем составе наибольшего (наименьшего) элемента. Если функция $f(x)$ определена и даже ограничена в некотором промежутке изменения x, то в составе множества ее значений $\{f(x)\}$ может не оказаться наибольшего (наименьшего). В этом случае точная верхняя (нижняя) граница значений функции $f(x)$ **не достигается** в названном промежутке. Так будет обстоять дело, например, с функцией

$$f(x) = x - E(x)$$

(график ее представлен на рис. 29). При изменении x в любом промежутке $[0, b]$ $(b \geqslant 1)$ точной верхней границей значений функции будет единица, но она не достигается, так что наибольшего значения функция не имеет.

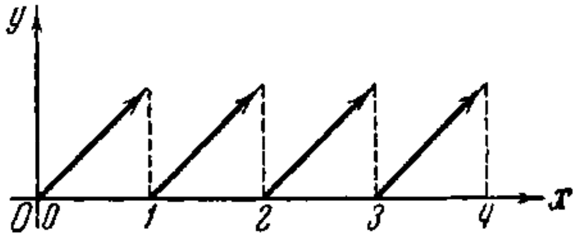


Рис. 29.

Читателю, вероятно, ясна связь этого обстоятельства с наличием у рассматриваемой функции **разрывов** при натуральных значениях x. Действительно, для **непрерывных в замкнутом промежутке** функций имеет место

Вторая теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в **замкнутом** промежутке $[a, b]$, то она **достигает** в этом промежутке своих точных верхней и нижней границ.*

Иными словами, *в промежутке $[a, b]$ найдутся такие точки x_0 и x_1, что значения $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будут, соответственно, **наибольшим** и **наименьшим** из всех значений функции $f(x)$.*

Доказательство. Положим

$$M = \sup\{f(x)\};$$

по предыдущей теореме, это — число конечное. Предположим (вопреки тому, что нужно доказать), что всегда $f(x) < M$, т. е., что граница M не достигается. В таком случае, можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Так как, по предположению, знаменатель здесь в нуль не обращается, то эта функция будет непрерывна. а следовательно (по предыдущей теореме), ограничена: $f(x) \leqslant \mu$ $(\mu > 0)$. Но отсюда легко получить, что тогда

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu},$$

т. е. число $M - \frac{1}{\mu}$, **меньшее** чем M, оказывается верхней границей для значений функции $f(x)$, чего быть не может, ибо M есть **точная** верхняя граница этих значений. Полученное противоречие доказывает теорему: в промежутке $[a, b]$ найдется такое значение x_0, что $f(x_0) = M$ будет **наибольшим** из всех значений $f(x)$.

Аналогично может быть доказано утверждение и относительно наименьшего значения.

Отметим, что приведенное доказательство есть чистое «доказательство существования». Средств для вычисления, например, значения $x=x_0$ никаких не дано. Впоследствии [в главе VII, § 1], правда, при более тяжелых предположениях относительно функции, мы научимся фактически находить значения независимой переменной, доставляющие функции наибольшее или наименьшее значения.

Если функция $f(x)$ при изменении x в каком-либо промежутке $\mathscr{X}$ ограничена, то ее колебанием в этом промежутке называется разность

$$\omega=M-m$$

между ее точными верхней и нижней границами. Иначе можно определить колебание ω как точную верхнюю границу абсолютных величин разностей $f(x'')-f(x')$, где x' и x'' принимают независимо одно от другого произвольные значения в промежутке $\mathscr{X}$:

$$\omega=\sup_{x',\,x''}\{|f(x'')-f(x')|\}.$$

Когда речь идет о непрерывной функции $f(x)$ в замкнутом конечном промежутке $\mathscr{X}=[a,\,b]$, то, как следует из доказанной теоремы, колебанием будет попросту *разность между наибольшим и наименьшим значениями функции* в этом промежутке. В этом случае промежуток $\mathscr{Y}$ значений функции есть замкнутый промежуток $[m,\,M]$, и колебание дает его длину.

74. Понятие равномерной непрерывности. Если функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathscr{X}$ (замкнутом или нет, конечном или бесконечном) и непрерывна в точке x_0 этого промежутка, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

или («на языке ε-δ», n°**60**): *для каждого числа* $\varepsilon>0$ *найдется такое число* $\delta>0$, *что*

$$|x-x_0|<\delta \text{ влечет за собой } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке $\mathscr{X}$, т. е. непрерывна в каждой точке x_0 этого промежутка. Тогда для каждой точки x_0 из $\mathscr{X}$ в отдельности по заданному ε найдется δ, соответствующее ему в упомянутом выше смысле. При изменении x_0 в пределах $\mathscr{X}$, даже если ε неизменно, число δ, вообще говоря, будет меняться. Одного взгляда на рис. 30 достаточно, чтобы убедиться в том, что число δ, пригодное на участке, где функция изменяется медленно (график представляет пологую кривую), может оказаться слишком большим для участка быстрого изменения функции (где график круто поднимается или опускается). Иными словами, число δ вообще зависит не только от ε, но и от x_0.

Если бы речь шла о конечном числе значений x_0 (при неизменном ε), то из конечного числа соответствующих им чисел δ можно было бы выбрать наименьшее, и это последнее годилось бы, очевидно, и для всех рассматриваемых точек x_0 одновременно.

Но по отношению к бесконечному множеству значений x_0, содержащихся в промежутке $\mathscr{X}$, так уже рассуждать нельзя: им (при постоянном ε) соответствует бесконечное множество чисел δ, среди которых могут найтись и сколь угодно малые. Таким образом, по отношению к функции $f(x)$, непрерывной в промежутке $\mathscr{X}$, встает вопрос: существует ли, при заданном ε, такое δ, которое годилось бы для всех точек x_0 из этого промежутка?

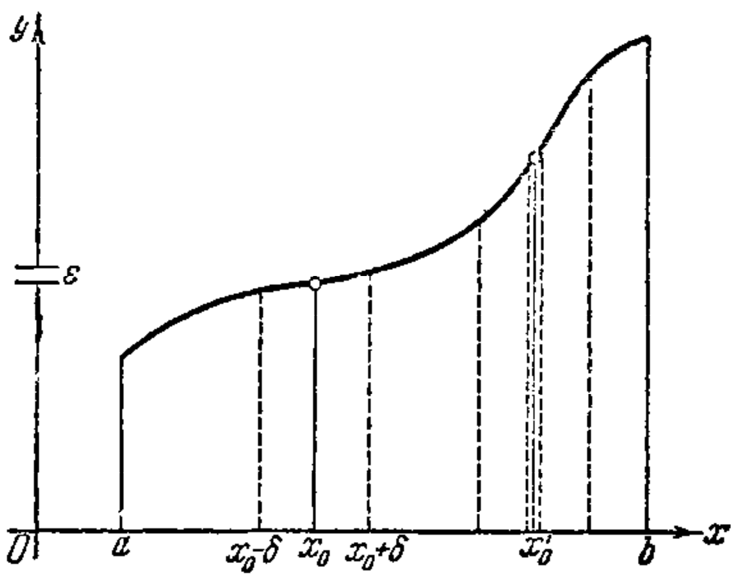


Рис. 30.

Если для каждого числа $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что*

$$|x - x_0| < \delta$$

влечет за собой

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

где бы в пределах рассматриваемого промежутка $\mathscr{X}$ *ни лежали точки* x_0 *и* x, *то функцию* $f(x)$ *называют* ***равномерно непрерывной*** *в промежутке* $\mathscr{X}$.

В этом случае число δ оказывается зависящим только от ε и может быть указано до выбора точки x_0: δ годится для всех x_0 одновременно.

Равномерная непрерывность означает, что во всех частях промежутка достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Можно показать на примере, что непрерывность функции во всех точках промежутка не влечет необходимо за собой ее равномерной непрерывности в этом промежутке. Пусть, например, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ для x, содержащихся между 0 и $\frac{2}{\pi}$, исключая 0. В этом случае область изменения x есть незамкнутый промежуток $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, и в каждой его точке функция непрерывна. Положим теперь $x_0=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x=\frac{1}{n\pi}$, где n — любое натуральное число; тогда

$$f(x_0)=\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}=\pm 1,\quad f(x)=\sin n\pi=0,$$

так что

$$|f(x)-f(x_0)|=1,$$

несмотря на то, что $|x-x_0|=\frac{1}{n(2n+1)\pi}$ с возрастанием n может быть сделано сколь угодно малым. Здесь при $\varepsilon=1$ нельзя найти δ, которое годилось бы одновременно для всех точек x_0 в $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, хотя для каждого отдельного значения x, ввиду непрерывности функции, такое δ существует!

75. Теорема о равномерной непрерывности. Весьма замечательно, что в замкнутом промежутке $[a, b]$ аналогичного положения вещей быть уже не может, как явствует из следующей теоремы.

Теорема Кантора).* *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна в этом промежутке.*

Доказательство поведем от противного. Пусть для некоторого определенного числа $\varepsilon>0$ не существует такого числа $\delta>0$, о котором идет речь в определении равномерной непрерывности. В таком случае, какое бы число $\delta>0$ ни взять, найдутся в промежутке $[a, b]$ такие два значения x и x', что

$$|x-x'|<\delta \text{ и тем не менее } |f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon.$$

Возьмем теперь последовательность $\{\delta_n\}$ положительных чисел так, что $\delta_n\to 0$. В силу сказанного, для каждого δ_n найдутся в $[a, b]$ значения x_n и x'_n (они играют роль x и x') такие, что (при $n=1, 2, 3, \ldots$)

$$|x_n-x'_n|<\delta_n \text{ и тем не менее } |f(x_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon.$$

По лемме Больцано — Вейерштрасса [n°51], из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0 промежутка $[a, b]$. Для того чтобы не осложнять обозначений, будем считать, что уже сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0.

Так как $x_n-x'_n\to 0$ (ибо $|x_n-x'_n|<\delta_n$, а $\delta_n\to 0$), то одновременно и последовательность $\{x'_n\}$ сходится к x_0. Тогда, ввиду непрерывности функции в точке x_0, должно быть

$$f(x_n)\to f(x_0) \quad\text{и}\quad f(x'_n)\to f(x_0),$$

*) Георг Кантор (1845—1918) — известный немецкий математик, основатель современной теории множеств.