ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА[1]

Л. В. Канторович

Функциональный анализ в настоящее время весьма интенсивно развивается в СССР в целом ряде различных направлений. Эта дисциплина, возникшая лишь в XX веке, стала одной из центральных и многообещающих областей современной математики благодаря глубине своих внутренних построений и теорий, а также благодаря своим плодотворным приложениям. Её применение к классическому анализу позволило связать воедино целый ряд различных вопросов и получить существенное упрощение в трактовке их, а в связи с этим и значительный прогресс во многих проблемах математического анализа.

Изложение наиболее важных направлений функционального анализа и его приложений нашло отражение, в частности, в ряде статей, помещённых в «Успехах».

Необходимо сказать, однако, что, говоря о приложениях, в основном имеют в виду приложения к теоретическому исследованию проблем классического анализа — вопросов существования, единственности и т. п. В связи с этим установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далёкой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель этой статьи — в известной степени разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики, на то, что он может быть полезен и для занимающихся практическими приложениями математики.

Именно, мы хотим показать, что идеи и методы функционального анализа могут быть использованы для построения и анализа эффективных практических алгорифмов решения математических задач с таким же успехом, как для теоретического исследования этих задач. При этом в некоторых случаях получаемые с такой общей точки зрения результаты и оценки могут оказаться более законченными и точными, чем полученные для отдельной частной задачи[2]).

---

[1]) В подготовке данной работы к печати большую помощь оказал автору кандидат физико-математических наук Г. П. Акилов. В частности, им проведены выкладки и вычисления в большинстве примеров.

[2]) Кроме вопросов, рассматриваемых здесь, уместно напомнить в этой связи о важных применениях функционального анализа в математической физике (С. Л. Соболев) и теоретической физике (И. М. Гельфант).

Вся статья состоит из шести глав. Глава I носит вводный характер. В ней приводятся необходимые сведения о пространствах Банаха и некоторых конкретных классах операций в них в том виде, как они используются в дальнейшем. Здесь приводятся также в основном известные применения общих теорем функционального анализа к сходимости аппроксимативных процессов (§ 2) и итерационных методов (§ 3).

Глава II содержит общую теорию приближённых методов решения линейных проблем анализа, развитую на основе общих теорем о приближённом решении уравнений в пространствах Банаха.

Глава III посвящена изложению метода наискорейшего спуска, который развивается применительно к функциональным уравнениям в пространстве Гильберта.

Глава IV содержит исследование алгорифма Ньютона для нелинейных функциональных уравнений.

В главе V[1]) будут даны теория метода мажорант на основе теории полуупорядоченных пространств и связанные с этим методы приближённого решения, позволяющие получить двусторонние оценки.

Наконец, глава VI будет посвящена использованию идей функционального анализа для построения методов решения некоторого класса экстремальных задач как математического, так и чисто производственного характера. Более подробно содержание каждой главы характеризуется во введении к ней.

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Целью настоящей главы является, с одной стороны, сообщение необходимых читателю в дальнейшем сведений из классического функционального анализа; с другой стороны, изложение некоторых применений этих фактов к прикладному анализу, где, таким образом, из общих теорем получаются результаты, непосредственное доказательство которых подчас представляет значительные трудности.

§ 1. Линейные нормированные пространства и операции в них

В основе всех дальнейших рассмотрений лежит понятие линейного нормированного пространства[2]).

Линейным нормированным пространством называется линейное (или векториальное) множество, т. е. множество $X=\{x\}$ элементов любой природы, для которых определены операции *суммы* $x+y$ и *умножения элемента на вещественное число* λx, подчинённые обычным законам алгебры. Кроме этого, для каждого элемента x определена *норма* $\|x\|$ — вещественное число, обладающее свойствами длины вектора. Точнее говоря, норма должна удовлетворять следующим условиям:

[1]) Главы V и VI составят вторую часть данной статьи.

[2]) См. С. Банах [2], также Л. А. Люстерник [26].

1. $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\|=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=0$.
2. $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.
3. $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$.

Наличие нормы позволяет определить *сходимость*.

Говорят, что $x_n \longrightarrow x$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, если $\|x_n-x\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Пространство называется *полным* или также типа B (по имени С. Банаха), если выполнен *признак сходимости Коши*, т. е. если из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+p}-x_n\|=0,$$

следует сходимость последовательности $\{x_n\}$ к некоторому элементу x.

В полном пространстве *«абсолютно-сходящийся» ряд сходится*, т. е. из сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k=\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Приведём несколько примеров пространств, которые будут использованы в дальнейшем.

1. Множества *вещественных* или *комплексных* чисел представляют очевидным образом пространства типа B. Операции сложения и умножения на вещественное число в них определены. За норму следует принять модуль числа

$$\|z\|=|z|.$$

2. *Пространство Эвклида* R^n или, что то же самое, пространство n-мерных векторов

$$x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

представляет пространство типа B, если операции $x+y$ и λx производить, как обычно, для векторов (по компонентам), а в качестве нормы принять длину вектора

$$\|x\|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}.$$

3. То же, что в предыдущем примере, пространство можно нормировать иначе, взяв в качестве нормы длину максимальной компоненты

$$\|x\|=\max_i |\xi_i|.$$

n-мерное векторное пространство с такой нормировкой мы будем обозначать m_n. Без труда проверяется, что и здесь выполнены все поставленные выше условия. Сходимость $x_k=(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \longrightarrow x$ означает здесь, очевидно, то же, что и в R^n, а именно, что $\xi_i^{(k)} \longrightarrow \xi_i$ при $k \longrightarrow \infty$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, так что пространство оказывается полным.

4. Пространство C *непрерывных функций*, определённых в некотором промежутке $[a, b]$, где принята

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

Сходимость элементов в этом пространстве есть равномерная сходимость функций. Пространство C является полным.

5. Пространство L^2 *интегрируемых с квадратом функций*, определённых в промежутке $[a, b]$, где

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b x^2(t)\,dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Сходимость здесь означает сходимость в среднем. Можно доказать, что и это пространство полное.

6. Пространство l^2 бесконечных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ сходится. Здесь полагаем

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2}.$$

7. Рассмотрим пространство L *суммируемых функций* в промежутке $[a, b]$. Норма определяется так:

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt.$$

Это также полное пространство.

Замечание. В примерах 5 и 7 функции, отличающиеся разве лишь на множестве меры нуль, отождествляются.

8. Пространство m *ограниченных числовых последовательностей* $\{\xi_n\}$. В качестве нормы берём

$$\|x\| = \|\{\xi_n\}\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Все условия выполнены и здесь. Сходимость элементов в этом пространстве означает равномерную сходимость координат. Без труда устанавливается, что пространство m полное.

Операцией, переводящей одно пространство X в другое Y, называется функция $y = P(x)$, которая каждому элементу $x \in X$ относит однозначно некоторый элемент $y \in Y$. В частности, если Y—пространство вещественных чисел, операция P называется *функционалом*. Операция P называется *непрерывной*, если соотношение $x_n \to x$ (в пространстве X) влечёт $P(x_n) \to P(x)$ (в пространстве Y). Вообще непрерывные нелинейные операции будут использоваться лишь в главе IV; для нужд первых трёх глав нам достаточно так называемых линейных операций. *Линейной операцией* H (или *оператором*) называется операция непрерывная и сверх того аддитивная, т. е. такая, что

$$H(x + y) = Hx + Hy\,^{1}).$$

Аддитивность (вместе с непрерывностью) операции влечёт однородность её, т. е. $H(\lambda x) = \lambda Hx$.

---

[1]) Скобки, в которые заключается аргумент операции, мы будем иногда опускать.

Требование непрерывности для аддитивной операции эквивалентно существованию такой константы C, что

$$\| Hx \| \leqslant C \| x \| \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Наименьшая из постоянных C, обеспечивающая выполнение этого неравенства (такая всегда существует), называется *нормой* линейной операции H и обозначается

$$C_{\min} = \| H \|.$$

Таким образом,

$$\| Hx \| \leqslant \| H \| \, \| x \|.$$

Отметим, что если H_1 — линейная операция из X в Y, а H_2 — линейная операция из Y в пространство Z, то можно рассматривать операцию $H = H_2 H_1$, отображающую X в Z

$$Hx = H_2 (H_1 x).$$

Нетрудно видеть, что $\| H \| \leqslant \| H_1 \| \cdot \| H_2 \|$.

Приведём некоторые примеры линейных операций.

1. Рассмотрим линейные операции $y = Hx$, переводящие $X = m_n$ в $Y = m_\nu$. Введём элементы

$$x_1 = (1, 0, \ldots, 0); \quad x_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \quad \ldots; \quad x_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

пусть

$$y_k = Hx_k = (a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{\nu,k}).$$

Любой элемент $x \in X$ может быть представлен в форме

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k,$$

поэтому

$$y = Hx = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \ldots + \xi_n y_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k y_k.$$

Так что, если $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu)$, то

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu);$$

таким образом, операция H есть *линейное преобразование*, определяемое матрицей

$$A = \| a_{i,k} \|_{\substack{i=1, 2, \ldots, \nu, \\ k=1, 2, \ldots, n.}}$$

Найдём норму этой операции. Имеем

$$\| y \| = \| Hx \| = \max_i | \eta_i | = \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \xi_k \right| \leqslant \max_k | \xi_k | \cdot \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{i,k} | =$$

$$= \| x \| \cdot \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{i,k} |.$$

Следовательно, во всяком случае

$$\| H \| \leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{i,k} |,$$

но можно установить и точное равенство

$$\| H \| = \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{i,k} |.$$

2. Рассмотрим случай, когда $X = R^n$, $Y = R^\nu$. И здесь линейная операция задаётся в форме *линейного преобразования*. Норма, однако, определяется иным образом. Можно показать, что если матрица A симметричная, то

$$\| H \| = | \lambda_n |,$$

где λ_n — наибольшее по модулю собственное значение этой матрицы. В случае, если матрица A несимметричная, то

$$\| H \| = \sqrt{\Lambda_n},$$

где Λ_n — наибольшее собственное значение матрицы AA^*.

Действительно, собственные значения симметричной матрицы A это числа λ, для которых система уравнений $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \xi_k = \lambda \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет ненулевое решение (или в терминах линейных операций, значения λ, для которых функциональное уравнение $Hx = \lambda x$ может быть удовлетворено элементом x, отличным от нуля). Далее, как известно из алгебры, наибольшее и наименьшее собственные значения суть относительный максимум и относительный минимум формы $\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} \xi_i \eta_k$ при условии $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 = 1$. Так что, обозначая через λ_n наибольшее по модулю собственное значение, будем иметь $\left| \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} \xi_i \eta_k \right| \leqslant | \lambda_n |$, если $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 = 1$, или для произвольных ξ_i, η_k

$$\left| \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} \xi_i \eta_k \right| \leqslant | \lambda_n | \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2}.$$

Если теперь положить здесь $\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\xi_j$, то получим

$$\|y\|^2 = \|Hx\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\xi_i\right)^2 =$$
$$= \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{i,k}\xi_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\xi_j\right) \leqslant |\lambda_n|\,\|x\|\,\|Hx\|,$$

откуда следует, что

$$\|Hx\| \leqslant |\lambda_n|\,\|x\|; \quad \|H\| \leqslant |\lambda_n|.$$

Случай произвольной матрицы A исследуется подобно этому.

3. Рассмотрим операцию H из m в m, задаваемую системой равенств

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \ldots) = Hx; \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

причём предполагается, что $\sup\limits_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| < +\infty$. Так же как в примере 1, можно доказать, что

$$\|H\| = \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|.$$

4. Операция H из l^2 в l^2 задаётся формулами (1). Если для бесконечной матрицы $\|a_{i,k}\|$ выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 < +\infty,$$

то норма операции H без труда оценивается; пользуясь неравенством Буняковского, получим

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\xi_k\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\right) = \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2,$$

следовательно,

$$\|H\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2}.$$

5. Пусть $X = C$; $Y = R$ — пространство вещественных чисел. Функционал $f(x) = x(t_0)$, где t_0 — фиксированное значение аргумента из промежутка $[a, b]$, будет линейным. Аддитивность его очевидна:

$$f(x_1 + x_2) = x_1(t_0) + x_2(t_0) = f(x_1) + f(x_2)$$

и

$$|f(x)| = |x(t_0)| \leqslant \max_t |x(t)| = \|x\|,$$

так что $\|f\| \leqslant 1$. Нетрудно видеть, что $\|f\| = 1$.

Линейная комбинация функционалов такого рода тоже, очевидно, будет линейным функционалом. Причём, если

$$f(x) = c_1 x(t_1) + c_2 x(t_2) + \ldots + c_n x(t_n) \qquad (t_i \neq t_k,\ i \neq k),$$

то без труда находим, что

$$\| f \| = | c_1 | + | c_2 | + \ldots + | c_n |.$$

6. Пусть теперь $X = Y = C$. Рассмотрим *интегральную* операцию

$$y = Hx; \quad y(s) = \int_a^b H(s, t)\, x(t)\, dt,$$

причём ядро $H(s, t)$ считаем непрерывным. Имеем

$$\| y \| = \max_s | y(s) | = \max_s \left| \int_a^b H(s, t)\, x(t)\, dt \right| \leqslant \max_t | x(t) | \cdot \max_s \int_a^b | H(s, t) |\, dt.$$

Следовательно, норма операции H не превосходит второго множителя. Можно доказать, что

$$\| H \| = \max_s \int_a^b | H(s, t) |\, dt.$$

7. Рассмотрим операцию H из L в L также *интегрального* типа

$$y = Hx; \quad y(s) = \int_a^b H(s, t)\, x(t)\, dt.$$

Норма операции в этом случае выражается так:

$$\| H \| = \sup_t \int_a^b | H(s, t) |\, ds,$$

причём supremum берётся с пренебрежением множества значений t меры нуль [1]).

8. Пусть, наконец, $X = Y = L^2$. И здесь ограничимся рассмотрением операций частного вида

$$y(s) = x(s) - \int_0^1 H(s, t)\, x(t)\, dt,$$

причём предположим, что ядро $H(s, t)$ симметрично.

Обозначим через λ_i собственные числа ядра $H(s, t)$ и через $\varphi_i(t)$ — собственные функции его. Дополним систему функций $\{\varphi_i(t)\}$ функциями $\varphi_0(t)$, $\varphi_{-1}(t)$, ... так, чтобы в результате получилась *полная* система. При этом будем считать $\lambda_0 = \lambda_{-1} = \ldots = \infty$. Далее, обозначим через ξ_i и η_i коэффициенты Фурье функций $x(t)$ и $y(t)$ по системе φ_i. Тогда, пользуясь

---

[1]) Л. В. Канторович и Б. З. Вулих [15].

билинейным разложением для H и разложениями для x и y

$$H(s, t)=\sum_i \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}; \quad x(t)=\sum_i \xi_i\varphi_i(t); \quad y(t)=\sum_i \eta_i\varphi_i(t)$$

и, умножая выражение $y(s)$ на $\varphi_i(s)$ и интегрируя по s, найдём

$$\eta_i=\xi_i-\frac{1}{\lambda_i}\xi_i.$$

Принимая

$$Q=\sup_i\left|1-\frac{1}{\lambda_i}\right|,$$

имеем

$$\|Hx\|^2=\|y\|^2=\sum_i \eta_i^2=\sum\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)^2\xi_i^2\leqslant Q^2\sum_i \xi_i^2=Q^2\|x\|^2.$$

Следовательно,

$$\|H\|\leqslant Q.$$

В случае несимметричного ядра $H(s, t)$ можно свести вопрос к симметричному ядру $\overline{H}(s, t)$, где

$$\overline{H}(s, t)=H(s, t)+H(t, s)-\int_0^1 H(u, t)H(u, s)\,du$$

и будет

$$\|H\|=\sup_i\sqrt{\left|1-\frac{1}{\Lambda_i}\right|},$$

где Λ_i — собственные значения ядра $\overline{H}(s, t)$.

Наконец, если операция H задана интегрально

$$y(s)=\int_0^1 H(s, t)\,x(t)\,dt,$$

то норма её может быть легко оценена так:

$$\|H\|\leqslant\left\{\int_0^1\int_0^1 H^2(s, t)\,ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Точное её значение есть

$$\|H\|=\frac{1}{|\lambda_1|},$$

где λ_1 — наименьшее по модулю собственное значение ядра $H(s, t)$, если последнее симметрично.

В §§ 2 и 3 мы приводим две известные теоремы функционального анализа; они, в особенности вторая из них, играют большую роль в дальнейшем изложении. Кроме того, непосредственное применение этих теорем к вопросам прикладного характера позволит получить совсем просто некоторые результаты, относящиеся к этой области.

§ 2. Сходимость некоторых аппроксимативных процессов

Пусть X и Y — пространства типа B. Рассмотрим последовательность $\{H_n\}$ линейных операций, отображающих X в Y. Может оказаться, что при каждом $x \in X$ последовательность $H_n x$ сходится к некоторому элементу Hx. Это будет некоторая аддитивная операция, так как, переходя к пределу в равенстве $H_n(x+y) = H_n x + H_n y$, получим $H(x+y) = Hx + Hy$. Но можно доказать, что операция H будет и *непрерывной* и, таким образом, линейной. Этот факт сразу вытекает из следующей теоремы С. Банаха.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность линейных операций $\{H_n\}$ сходилась для любого $x \in X$, т. е. чтобы $H_n x \to Hx$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *$\|H_n\|$ были ограничены в совокупности;*

2) *Сходимость $H_n x \to Hx$ имела место для x из всюду плотного в X множества E*[1].

Доказательство. Затруднение представляет лишь доказательство необходимости первого условия. Допустим противное, т. е. что $\sup\limits_n \|H_n\| = +\infty$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно добиться того, что будет $\lim\limits_{n\to\infty} \|H_n\| = +\infty$. Далее, полагая $H'_n = \frac{1}{\sqrt{\|H_n\|}} H_n$, получим, с одной стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} H'_n x = 0$ для каждого $x \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|H'_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\|H_n\|} = +\infty$, с другой стороны. Мы опять будем считать, что оба эти условия уже выполнены для первоначальной последовательности операций.

Построим по индукции подпоследовательность $\{H_{n_k}\}$ и последовательность $\{x_k\}$ элементов пространства X следующим образом: H_{n_1} возьмём произвольно, подчинив лишь условию $\|H_{n_1}\| > 1$; найдётся элемент $x_1 \in X$ такой, что $\|x_1\| = 1$ $\|H_{n_1}(x_1)\| > \frac{3}{4}\|H_{n_1}\|$. Пусть уже выбраны операции $H_{n_1}, H_{n_2}, \ldots, H_{n_{k-1}}$ и построены элементы $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Поскольку $H_n x \to 0$, то при достаточно больших n будет

$$\|H_n(x_i)\| \leqslant \frac{1}{4k} \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \|H_n\| = +\infty$, то можно указать такое $n = n_k$, что, кроме того, будет

$$\|H_{n_k}\| \geqslant 4\,\|H_{n_{k-1}}\|. \tag{3}$$

Выбрав H_{n_k}, строим x_k; $\|x_k\| = 1$ и $\|H_{n_k}(x_k)\| \geqslant \frac{3}{4}\|H_{n_k}\|$.

Образуем теперь элемент

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\|H_{n_k}\|}.$$

Так как в силу (3) $\|H_{n_k}\| \geqslant 4^{k-1}$, а пространство X полное, то последний ряд сходится, и элемент x определён.

[1]) Множество $E \subset X$ называется *всюду плотным* в X, если каждое $x \in X$ можно аппроксимировать по норме с любой точностью элементами из E.

Оценим норму $H_{n_k}(x)$. Имеем

$$H_{n_k}(x)=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{H_{n_k}(x_i)}{\|H_{n_i}\|}+\frac{H_{n_k}(x_k)}{\|H_{n_k}\|}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{H_{n_k}(x_i)}{\|H_{n_i}\|}. \tag{4}$$

Далее, вследствие (2) и того, что $\|H_{n_i}\|\geqslant 4^{i-1}\geqslant 1$,

$$\left\|\frac{H_{n_k}(x_i)}{\|H_{n_i}\|}\right\|\leqslant\|H_{n_k}(x_i)\|\leqslant\frac{1}{4k}\qquad(i=1,2,\ldots,k-1), \tag{5}$$

$$\left\|\frac{H_{n_k}(x_k)}{\|H_{n_k}\|}\right\|\geqslant\frac{3}{4}, \tag{6}$$

и так как из (3) следует $\|H_{n_i}\|\geqslant 4^{i-k}\|H_{n_k}\|\,(i>k)$, то

$$\left\|\frac{H_{n_k}(x_i)}{\|H_{n_i}\|}\right\|\leqslant\frac{\|H_{n_k}\|\,\|x_i\|}{\|H_{n_i}\|}\leqslant\frac{1}{4^{i-k}}\qquad(i=k+1,\ldots). \tag{7}$$

Используя (5), (6) и (7), из (4) получаем

$$\|H_{n_k}(x)\|\geqslant\left\|\frac{H_{n_k}(x_k)}{\|H_{n_k}\|}\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{H_{n_k}(x_i)}{\|H_{n_i}\|}\right\|-\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{H_{n_k}(x_i)}{\|H_{n_i}\|}\right\|\geqslant\frac{3}{4}-$$

$$-\frac{k-1}{4k}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}>\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0.$$

Это противоречит тому, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|H_{n_k}(x)\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|H_nx\|=0$.

Таким образом, доказана ограниченность норм операций H_n. Отсюда, как уже было отмечено, следует, что предельная операция Hx — линейная. Действительно, если $\|H_n\|\leqslant M$, то, переходя к пределу в неравенстве $\|H_nx\|\leqslant M\|x\|$, найдём $\|Hx\|\leqslant Mi\,\|x\|$.

Доказательство достаточности значительно проще. Пусть $\|H_n\|\leqslant M$. Возьмём некоторое $x\in X$. Найдём такое $\bar{x}\in E$, что $\|x-\bar{x}\|<\frac{\varepsilon}{3M}$. По условию последовательность $\{H_n\bar{x}\}$ сходится, следовательно, для достаточно больших и будет

$$\|H_{n+p}(\bar{x})-H_n(\bar{x})\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда

$$\|H_{n+p}(x)-H_n(x)\|\leqslant\|H_{n+p}(x)-H_{n+p}(\bar{x})\|+\|H_{n+p}(\bar{x})-H_n(\bar{x})\|+$$

$$+\|H_n(\bar{x})-H_n(x)\|\leqslant 2M\|x-\bar{x}\|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Так как пространство Y полное, то существует предел $\lim H_nx=Hx$. При этом, как было показано, Hx есть линейная операция.

В качестве примера приложения доказанной теоремы укажем на теорему о сходимости *формул механических квадратур*.

Теорема 2. *Пусть имеются формулы вида*

$$\int_0^1 p(t)x(t)\,dt\cong\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)}), \tag{8}$$

точные для полиномов степени $\leqslant n$. *Тогда, для того чтобы имела место сходимость этих формул, т. е. чтобы было*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) = \int_0^1 p(t)\,x(t)\,dt,$$

для любой непрерывной функции $x(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M \qquad n = 1, 2, \ldots \text{[1]} \tag{9}$$

Доказательство. Правая часть формулы (8) есть, как установлено в § 1 (см. пример 5, стр. 95), линейный функционал в пространстве C, который мы обозначим через $f_n(x)$. Так как формула (8) *точная*, если $x(t)$ полином степени не выше n, то сходимость во всяком случае имеет место на множестве всех полиномов, которое будет (по теореме Вейерштрасса о возможности равномерной аппроксимации непрерывных функций полиномами) всюду плотным в C. Условие (9) есть не что иное, как требование ограниченности норм указанных функционалов: $\|f_n\| \leqslant M$. Остаётся применить теорему 1.

Следствие. Если в формулах (8) все $A_k^{(n)} \geqslant 0$, то имеет место сходимость этих формул для любой непрерывной функции (см. В. А. Стеклов [40]).

Действительно, при $x(t) \equiv 1$ формулы точны при любом n, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} = \int_0^1 p(t)\,dt,$$

т. е. условие (9) выполнено.

Аналогичным образом эта теорема может быть использована для исследования сходимости процесса интерполирования, на чём подробнее мы останавливаться не будем.

Другой пример применения теоремы 1 возьмём из области *теории сингулярных интегралов*.

Рассмотрим последовательность функций $H_n(s, t)$, суммируемых по каждому аргументу при почти всех значениях другого аргумента. Пусть, кроме того, выполнено обычное в теории сингулярных интегралов условие

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta H_n(s,t)\,dt = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < s < \beta \leqslant 1. \tag{10}$$

Тогда, для того *чтобы последовательность сингулярных интегралов*

$$\int_0^1 H_n(s,t)\,x(t)\,dt$$

[1]) Впервые эта теорема доказана Полиа [36].

сходилась в среднем в $\mathbf{L}$ *к* $x(s)$, *необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\int_0^1 |H_n(s,t)|\, ds \leqslant M \quad \textit{почти везде}\,^{1)}.$$

Действительно, рассматривая последовательность операций

$$H_n x = \int_0^1 H_n(s,t)\, x(t)\, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

мы видим, что в силу условия (10) $H_n x \to x$ (в L), если x есть *ступенчатая* функция; точнее говоря, если область задания функции разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых $x(t)$ постоянна. Но множество такого рода функций всюду плотно в L. Следовательно, применима теорема 1. Для того чтобы получить сформулированный результат, следует заметить, что

$$\| H_n \| = \sup_t \int_0^1 | H_n(s,t)|\, ds$$

(см. § 1, пример 7).

Так как сингулярными интегралами представляются различные аппроксимирующие выражения, то установленная теорема может быть использована при исследовании сходимости различных аппроксимативных процессов.

§ 3. Область сходимости методов последовательных приближений

Вернёмся снова к общим понятиям функционального анализа.

Предположим, что линейная операция H отображает пространство X на *всё* пространство Y, кроме того предположим, что это отображение *взаимнооднозначное*, т. е. что различные элементы пространства X переводятся операцией H в различные же элементы пространства Y. Тогда каждому элементу $y \in Y$ можно однозначно соотнести элемент $x \in X$, именно тот, который операцией H переводится в y. Таким образом, определяется некоторая операция H', переводящая Y в X. Эта операция, очевидно, *аддитивна*. Если она сверх того *непрерывна*[2]), то говорят, что *операция* H *имеет обратную; при этом пишут* $H' = H^{-1}$. Ясно, что для операции H^{-1} обратной будет H, т. е. $(H^{-1})^{-1} = H$.

Кратко определение обратной операции можно высказать следующим образом: *это есть такая линейная операция* H^{-1}, *что* $H^{-1}H = I$, $HH^{-1} = I_1$, где I и I_1 суть тождественные операции соответственно в X и Y.

Если дано уравнение

$$Hx = y, \tag{11}$$

причём операция H имеет обратную, то оно имеет при всяком y *единственное* решение $x = H^{-1}y$.

---

[1]) Достаточность этого условия установлена в работах И. П. Натансона и В. Орлича (см. И. П. Натансон [28], В. Орлич [30]).

[2]) Если X и Y — *полные* пространства, то непрерывность операции H' следует уже из её существования.

Иногда бывает целесообразно рассматривать левую, соответственно правую, обратную операцию для операции H.

Левой обратной называется такая линейная операция H^{-1}, что

$$H^{-1}H = I.$$

Легко видеть, что она существует, если $\|Hx\| \geqslant m\|x\|$ $(m > 0)$, при этом $\|H^{-1}\| \leqslant m^{-1}$.

Аналогично для *правой обратной* определяющим служит равенство

$$HH^{-1} = I_1\,{}^{1)}.$$

Если операция H имеет правую обратную, то уравнение (11) *имеет* при всяком y *решение* (может быть, не единственное) $x = H^{-1}y$.

Если, наоборот, существует однозначная левая обратная, то решение уравнения (11) *единственно*, если только оно существует.

Из этих замечаний следует, что если операция H имеет как левую, так и правую обратные операции, то она имеет и просто обратную. Впрочем, это нетрудно установить и формальными рассуждениями.

После сказанного выше становится ясной роль, которую играют обратные операции в решении функциональных уравнений.

Поэтому весьма важной оказывается следующая простая теорема Банаха:

Теорема 3. *Пусть операция H переводит пространство X типа B в себя. Тогда, если*

$$\|H\| = q < 1, \tag{12}$$

то уравнение

$$x = Hx + y \tag{13}$$

имеет при всяком y единственное решение, которое может быть найдено последовательными приближениями, начиная с произвольного x_0.

Таким образом, *если выполнено условие* (12), *то операция $I - H$ имеет обратную, причём оказывается*

$$\|(I-H)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$By = y + Hy + H^2y + \ldots; \tag{14}$$

он сходится, так как $\|H^ny\| \leqslant q^n\|y\|$, и имеем

$$\|By\| \leqslant \frac{\|y\|}{1-q}.$$

Между тем,

$$(I-H)By = (y + Hy + H^2y + \ldots) - (Hy + H^2y + \ldots) = y,$$

$$B(I-H)y = (y - Hy) + (Hy - H^2y) + \ldots = y,$$

откуда ясно, что действительно $B = (I-H)^{-1}$, причём $\|(I-H)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$, т. е. существует обратный оператор и, следовательно, решение. При

---

[1]) Мы сохраняем одно и то же обозначение для обратной операции, так как всегда будет ясно, о какой обратной — правой, левой или двусторонней — идёт речь.

этом последовательные приближения к решению будут

$$x_1 = Hx_0 + y; \quad x_2 = Hx_1 + y = H^2x_0 + y + Hy; \ldots;$$
$$x_n = Hx_{n-1} + y = H^n x_0 + y + Hy + \ldots + H^{n-1}y; \ldots,$$

т. е. отличаются от отрезков ряда (14) на $H^n x_0 \to 0$ и потому также сходятся к решению.

Теорема, таким образом, полностью доказана.

Замечание. Условие (12) достаточно для применимости метода последовательных приближений к уравнению (13). Это условие является и необходимым в случае, когда $X = L^2$ или R^n. Действительно, ограничиваясь для простоты операциями, рассмотренными в примерах 2 и 8, будем иметь, что уравнение $x - \frac{1}{\lambda_1} Hx = 0$, где λ_1—наибольшее собственное значение операции H, имеет ненулевое решение $x = x_1$, где x_1—собственный элемент, принадлежащий λ_1, так что операция $I - \frac{1}{\lambda_1} H$ не имеет обратной, но одновременно $\left\| \frac{1}{\lambda_1} H \right\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \| H \| = 1$.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 3.

Пусть имеется система уравнений

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\xi_k + b_i. \tag{15}$$

Её можно записать в форме уравнения (13), если в качестве операции H взять операцию из R^n в R^n, задаваемую матрицей $A = \| a_{i,k} \|$.

В § 1 (см. пример 2) было показано, что $\|H\| = |\lambda_1|$, где λ_1—наибольшее по модулю собственное значение матрицы A, если последняя симметрична, и $\|H\| = \sqrt{\Lambda_1}$, где Λ_1—наибольшее собственное значение матрицы AA^*, в общем случае.

Теорема 3 и замечание после неё позволяют утверждать справедливость следующего предложения (мы ограничимся случаем симметричной матрицы).

Для того *чтобы метод последовательных приближений мог быть применён для решения системы* (15), *необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A были по модулю меньше единицы.*

Если условие выполнено, то процесс сходится к решению, с какой бы начальной системы значений его ни начать[1]).

Рассмотрим теперь бесконечную систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\xi_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Система вида (16) называется *вполне регулярной*, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_{i,k} | \leqslant \theta < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Если последовательность $\{b_i\}$ ограничена, то систему (16) можно трактовать как *функциональное уравнение* вида (13) в пространстве m огра-

[1]) См. В. Иванов [8], Ф. С. Черепков [45].

ниченных последовательностей. При этом $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$, а операция H задаётся бесконечной матрицей $\| a_{i,k} \|$. Так как (см. пример 3, § 1) в этом случае

$$\| H \| = \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} | a_{i,k} | \leqslant \theta < 1,$$

то из теоремы 3 следует

Теорема 4[1]). *Вполне регулярная система* (16) *имеет единственное ограниченное решение, какова бы ни была ограниченная последовательность* $\{b_i\}$. *Это решение может быть найдено последовательными приближениями, начиная с любой ограниченной системы значений.*

Наконец, рассмотрим *интегральное уравнение*

$$x(s) = \lambda \int_a^b H(s, t)\, x(t)\, dt + y(s). \tag{18}$$

Оно также подходит под схему теоремы 3; причём в зависимости от того, какое пространство мы положим в основу, получатся различные результаты.

Если метод последовательных приближений применить к решению уравнения (18), то решение получится в виде ряда, расположенного по степеням λ:

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b H(s, t)\, y(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b H_2(s, t)\, y(t)\, dt + \ldots$$

$$\ldots + \lambda^n \int_a^b H_n(s, t)\, y(t)\, dt + \ldots, \tag{19}$$

где $H_2(s, t), \ldots, H_n(s, t)$ — повторные ядра для ядра $H(s, t)$. Точное нахождение радиуса сходимости этого ряда представляет значительные трудности, так как по существу это равносильно разысканию собственных чисел уравнения (18). Применение теоремы 3 позволяет весьма просто получить известные оценки области значений λ, в которой метод последовательных приближений применим и, следовательно, в которой ряд (19) непременно сходится к решению.

Если принять $X = C$, то по теореме 3, принимая во внимание пример 6 § 1, найдём, что *если*

$$\| H \| = | \lambda | \sup_s \int_a^b | H(s, t) |\, dt < 1,$$

т. е. если

$$| \lambda | < \frac{1}{\sup\limits_s \int_a^b | H(s, t) |\, dt}, \tag{20}$$

то ряд (19) *сходится* (*в пространстве* C — *равномерно*) *к решению уравнения* (18).

---

[1]) И. П. Натансон [28а], Л. В. Канторович [9]. Л. В. Конторович и В. И. Крылов [16].

Если известна оценка $|H(s,t)| \leqslant M$, то (20) во всяком случае выполнено, если

$$|\lambda| < \frac{1}{(b-a)M}.$$

Если положить $X = L$, то получаем

$$|\lambda| < \frac{1}{\sup\limits_t \int\limits_a^b |H(s,t)|\,ds};$$

ряд (19) при этом будет сходиться в *среднем* в L.

Если же $X = L^2$, то, согласно примеру 8 § 1, в этом случае условие будет

$$|\lambda| < \frac{1}{\left\{\int\limits_a^b \int\limits_a^b H^2(s,t)\,ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

а ряд (19) сходится в *среднем.*

ГЛАВА II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЁННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА

Приближённые методы высшего анализа — методы приближённого решения дифференциальных уравнений математической физики, интегральных уравнений и конформного преобразования весьма разнообразны по идеям, положенным в их основу. Для уравнений в частных производных можно назвать, например, вариационные методы (Ритца, Галеркина, моментов, приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям), разностные методы, интерполяционные методы. Ряд методов был развит и для интегральных уравнений и для задач конформного отображения.

В то же время исследование отдельных методов продвинулось не так далеко. Многие методы, особенно если они выдвигались физиками и техниками, оставались без всякого теоретического исследования и лишь проверялись по эффективности на отдельных примерах.

При теоретическом исследовании каждого приближённого метода вообще встают в порядке возрастающей точности и трудности следующие три вопроса:

a) установление сходимости,

b) исследование быстроты сходимости,

c) эффективная оценка погрешности.

Решение этих вопросов встречало значительные трудности, требовало в каждом случае специального индивидуального подхода.

Для метода сеток такое исследование было проведено в мемуаре Куранта, Фридрихса и Леви [1]); для метода Ритца в многочисленных и в ряде случаев тонких и сложных исследованиях Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [2]); для метода Галеркина вопрос о сходимости

[1]) Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви [25].

[2]) Н. М. Крылов [21].

представлял проблему, не решённую в течение ряда лет и получившую разрешение лишь в недавней работе М. В. Келдыша (1942) [1]); с большими трудностями встретился автор и при установлении сходимости предложенного им вариационного метода (1933)[2]).

Недостатком этих исследований является то, что поскольку каждый метод возникал из своих соображений, его исследование приходилось проводить другими средствами. Эта разрозненность не была преодолена и в монографии автора и В. И. Крылова [3]), где была дана сводка и систематизация материала, но задача объединения его по существу не была решена — каждый из методов для каждого типа уравнений излагался и подвергался исследованию отдельно.

Попытка получения общих теорем о приближённом решении функциональных уравнений была сделана в моей работе в 1937 г. [4]), однако, полученные там результаты могли быть применены лишь к немногим конкретным случаями не решали задачи о построении общей теории приближённых методов.

Существенное отличие приёма, применённого здесь[5]), заключается в том, что точное и приближённое уравнения рассматриваются в различных пространствах, что соответствует положению, которое фактически осуществляется для важнейших конкретных приближённых методов. Например, когда решение интегрального уравнения заменяется приближённо решением алгебраической системы.

Точнее говоря, мы будем изучать *функциональное* уравнение

$$Kx = y, \tag{1}$$

где x и y — элементы линейных нормированных пространств X и Y соответственно, а K — линейный оператор, отображающий X в Y.

Наряду с уравнением (1) мы будем рассматривать «приближённое» уравнение

$$\overline{K}\,\overline{x} = \overline{y}, \tag{2}$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — элементы пространств $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а оператор $\overline{K}$ отображает $\overline{X}$ в $\overline{Y}$.

Пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, выбираются более простыми, чем пространства X и Y, а оператор $\overline{K}$ предполагается в известном смысле «близким» к оператору K.

Здесь будут установлены теоремы двух родов — теоремы, позволяющие на основании данных о точном решении установить разрешимость «приближённого» уравнения (2) и сходимость (тоже в известном смысле) приближённого решения к точному, и, наоборот, теоремы, дающие на основании результатов приближённого решения сведения о разрешимости точного уравнения и близости приближённого и точного решения.

---

[1]) М. В. Келдыш [17].
[2]) Л. В. Канторович [10].
[3]) Л. В. Канторович и В. И. Крылов [16].
[4]) Л. В. Канторович [9].
[5]) Л. В. Канторович [11].

Мы рассмотрим здесь упрощённый случай, который, однако, достаточно полно выясняет суть дела, когда в уравнении (1) пространства X и Y, совпадают, тогда и в уравнении (2) можно взять также $\overline{X}=\overline{Y}$. Кроме того, будем считать, что из операторов K и $\overline{K}$ выделены единичные, т. е. они записаны в форме

$$K=I-\lambda H; \qquad \overline{K}=\overline{I}-\lambda\overline{H},$$

где I и $\overline{I}$ — тождественные операторы в пространстве X, соответственно $\overline{X}$, а H и $\overline{H}$ — линейные операторы в этих пространствах, отображающие их в себя. Такого типа уравнения по аналогии с интегральными можно было бы назвать уравнениями 2-го рода.

§ 1. Общая теория для уравнений второго рода

Рассмотрим линейные нормированные пространства X и $\overline{X}$, причём будем считать $\overline{X}$ *полным* и изоморфным некоторому линейному подпространству $X' \subset X$. Пусть изоморфизм осуществляется с помощью линейной операции φ_0, которая отображает X' на $\overline{X}$ и имеет непрерывную обратную φ_0^{-1}.

Будем, кроме того, считать, что существует линейная операция φ, отображающая X на $\overline{X}$ и совпадающая с φ_0 на X', т. е. φ_0, распространённая на X.

Рассмотрим, далее, уравнение

$$Kx=x-\lambda Hx=y, \tag{1}$$

где x и y — элементы X, а H — оператор, переводящий X в себя.

Для целей приближённого решения уравнения (1) рассмотрим наряду с ним «приближённое» уравнение

$$\overline{K}\overline{x}=\overline{x}-\lambda\overline{H}\overline{x}=\overline{y}=\varphi y. \tag{2}$$

Требование «близости» уравнений (1) и (2) поставим в виде следующего условия:

(I) $$\|\varphi Hx'-\overline{H}\varphi x'\|\leqslant\varepsilon\|x'\|, \quad x'\in X'.$$

Это условие часто будет удобнее использовать в другой форме:

(I′) $$\|\varphi Kx'-\overline{K}\varphi x'\|\leqslant\varepsilon|\lambda|\|x'\|, \quad x'\in X'.$$

Действительно, если выполнено (I), то

$$\|\varphi Kx'-\overline{K}\varphi x'\|=|\lambda|\|\varphi Hx'-\overline{H}\varphi x'\|\leqslant\varepsilon|\lambda|\|x'\|.$$

Так же проверяется и обратное.

Замечание 1. Если существует решение $x^*\in X'$ уравнения (1) и оператор $\overline{K}$ имеет обратный, т. е. если λ — регулярное значение оператора $\overline{H}$, то, обозначая через $\overline{x}_0$ решение уравнения (2), будем иметь оценку

$$\|\overline{x}_0-\varphi x^*\|\leqslant\varepsilon^*|\lambda|\|\overline{K}^{-1}\|\|x^*\|^{1)}. \tag{3}$$

[1]) ε^* означает то значение ε в условии (I), которое может быть взято, если положить $x'=x^*$. Очевидно, $\varepsilon^*\leqslant\varepsilon$.

В самом деле, так как $\bar{x}_0$—решение уравнения (2), то $\bar{K}\bar{x}_0=\varphi y=\varphi Kx^*$. Используя условие (I′), будем иметь

$$\|\bar{K}\varphi x^*-\bar{K}\bar{x}_0\|=\|\bar{K}\varphi x^*-\varphi Kx^*\|\leqslant\varepsilon^*|\lambda|\|x^*\|,$$

откуда

$$\|\varphi x^*-\bar{x}_0\|=\|\bar{K}^{-1}\bar{K}(\varphi x^*-\bar{x}_0)\|\leqslant\|\bar{K}^{-1}\|\|\bar{K}\varphi x^*-\bar{K}\bar{x}_0\|\leqslant\varepsilon^*|\lambda|\|\bar{K}^{-1}\|\|x^*\|.$$

Неравенство (3) уже даёт некоторое представление о связи решения приближённого уравнения (2) с приближённым решением уравнения (1). Именно, оно показывает, что $\bar{x}_0$ даёт в рассматриваемом случае близкое значение для φx^*—образа истинного решения.

Для установления дальнейших фактов поставим ещё условие, которое состоит в требовании возможности аппроксимации элементов вида Hx элементами из X'.

(II) *Для всякого элемента $x\in X$ найдётся $x'\in X'$ такой, что*

$$\|Hx-x'\|\leqslant\varepsilon_1\|x\|.$$

При данных условиях можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I) *и* (II). *Тогда, если оператор K имеет обратный и сверх того*

$$q=[\|\varphi\|\|K\||\lambda|\varepsilon_1+|\lambda|\varepsilon+|\lambda|^2\varepsilon\varepsilon_1]\|K^{-1}\|\|\varphi_0^{-1}\|<1, \tag{4}$$

то уравнение (2) *имеет решение $\bar{x}$ при любом $\bar{y}$, и при этом*

$$\|\bar{x}\|\leqslant\frac{(1+|\lambda|\varepsilon_1)\|K^{-1}\|\|\varphi\|\|\varphi_0^{-1}\|}{1-q}\|\bar{y}\|. \tag{5}$$

Доказательство. Положим $\bar{y}_0=\bar{y}$ и $y_0=\varphi_0^{-1}\bar{y}_0$.

Обозначим

$$z=K^{-1}\lambda Hy_0. \tag{6}$$

Имеем

$$Kz=z-\lambda Hz=\lambda Hy_0,$$

так что

$$z=\lambda H(z+y_0). \tag{7}$$

Найдём теперь, согласно условию (II), элемент $x\in X$ такой, что

$$\|H(z+y_0)-\frac{x'}{\lambda}\|\leqslant\varepsilon_1\|z+y_0\|,$$

или, принимая во внимание (7),

$$\|z-x'\|\leqslant\varepsilon_1|\lambda|\|z+y_0\|. \tag{8}$$

Так как $K(z+y_0)=z-y_0+\lambda H(z+y_0)=y_0$, то

$$\|z+y_0\|\leqslant\|K^{-1}\|\|y_0\|. \tag{9}$$

Вместе с (8) это даёт

$$\|z-x'\|\leqslant\varepsilon_1|\lambda|\|K^{-1}\|\|y_0\|. \tag{10}$$

Обозначим теперь $\bar{x}_1=\varphi(x'+y_0)$.

Оценим разность

$$\|\bar{K}\bar{x}_1-\bar{y}_0\|\leqslant\|\bar{K}\varphi(x'+y_0)-\varphi K(x'+y_0)\|+\|\varphi K(x'+y_0)-\varphi y_0\|=$$
$$=\|\bar{K}\varphi(x'+y_0)-\varphi K(x'+y_0)\|+\|\varphi\lambda Hy_0-\varphi Kx'\|.$$

Или, принимая во внимание условие (I′) и (6), будем иметь

$$\|\bar{K}\bar{x}_1-\bar{y}_0\|\leqslant \varepsilon\,|\lambda|\,\|x'+y_0\|+\|\varphi K z-\varphi K x'\|\leqslant \varepsilon|\lambda|\,\|x'+y_0\|+ \\ +\|\varphi\|\,\|K\|\,\|z-x'\|.$$

Но с помощью (8) и (9) получаем

$$\|x'+y_0\|\leqslant\|z+y_0\|+\|z-x'\|\leqslant(1+\varepsilon_1|\lambda|)\,\|y_0+z\|\leqslant \\ \leqslant(1+\varepsilon_1|\lambda|)\,\|K^{-1}\|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\bar{y}_0\|. \qquad (11)$$

Итак, используя (10), окончательно найдём:

$$\|\bar{K}\bar{x}_1-\bar{y}_0\|\leqslant\varepsilon|\lambda|(1+\varepsilon_1|\lambda|)\,\|K^{-1}\|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\bar{y}_0\|+ \\ +\|\varphi\|\,\|K\|\,\varepsilon_1|\lambda|\,\|K^{-1}\|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\bar{y}_0\|= \\ =[\|\varphi\|\,\|K\|\,|\lambda|\,\varepsilon_1+|\lambda|\,\varepsilon+|\lambda|^2\varepsilon\varepsilon_1]\,\|K^{-1}\|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\bar{y}_0\|=q\,\|\bar{y}_0\|.$$

Таким образом, $\bar{x}_1$ удовлетворяет уравнению (2) с большей точностью, нежели тривиальное приближение — нуль.

Продолжаем этот своеобразный процесс «исчерпывания».

Положим

$$\bar{y}_1=\bar{y}_0-\bar{K}\bar{x}_1.$$

Тогда

$$\bar{K}\,\bar{x}_1=\bar{y}_0-\bar{y}_1;\qquad \|\bar{y}_1\|\leqslant q\,\|\bar{y}_0\|$$

и, в силу (11),

$$\|\bar{x}_1\|=\|\varphi(x'+y_0)\|\leqslant\|\varphi\|(1+\varepsilon_1|\lambda|)\,\|K^{-1}\|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\bar{y}_0\|=M\,\|\bar{y}_0\|,$$

$$M=\|\varphi\|(1+\varepsilon_1|\lambda|)\,\|K^{-1}\|\,\|\varphi_0^{-1}\|.$$

Подобно тому, как выше $\bar{x}_1$ строилось по $\bar{y}_0$, строим $\bar{x}_2$, исходя из y_1 и определяем $\bar{y}_2=\bar{y}_1-\bar{K}\bar{x}_2$, причём будет

$$\|x_2\|\leqslant M\,\|y_1\|\leqslant Mq\,\|\bar{y}_0\|\quad\text{и}\quad\|\bar{y}_2\|\leqslant q\,\|\bar{y}_1\|\leqslant q^2\,\|\bar{y}_0\|.$$

И, вообще, определим последовательно $\bar{x}_n$ и $\bar{y}_n$ так, что будет

$$\begin{aligned}\bar{K}\bar{x}_n&=\bar{y}_{n-1}-\bar{y}_n, &(12)\\ \|\bar{x}_n\|&\leqslant Mq^{n-1}\,\|\bar{y}_0\|,\\ \|\bar{y}_n\|&\leqslant q^n\,\|\bar{y}_0\|.\end{aligned}$$

Складывая равенства (12), найдём

$$\bar{K}(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_n)=\bar{y}_0-\bar{y}_n. \qquad (13)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n$ сходится, так как пространство $\bar{X}$ полное. Положим

$$\bar{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n.$$

Переходя в (13) к пределу, получим

$$\bar{K}\bar{x}=\bar{y}_0=\bar{y}.$$

Кроме того, очевидно,

$$\|\bar{x}\|\leqslant\frac{M}{1-q}\,\|\bar{y}\|.$$

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Если пространство* $\overline{X}$ *и оператор* $\overline{K}$ *таковы, что выполнено условие*:

(A) *Из существования решения уравнения* (2) *при любом* $\overline{y}$ *следует его единственность,*

то при выполнении условий теоремы существует обратный оператор $\overline{K}^{-1}$ *и имеет место оценка*

$$\|\overline{K}^{-1}\| \leqslant \frac{M}{1-q} = \frac{(1+|\lambda|\varepsilon_1)\|K^{-1}\|\|\varphi\|\|\varphi_0^{-1}\|}{1-q}. \tag{14}$$

Заметим, что условие (A) всегда выполнено, если $\overline{H}$ — вполне непрерывный оператор[1]).

Замечание 2. Неравенство (4) позволяет судить о возможной области расположения собственных значений оператора уравнения (2). Именно, λ во всяком случае не принадлежит спектру оператора $\overline{H}$, если (4) выполнено. Следовательно, если ε и ε_1 малы, то собственные значения уравнения (2) могут располагаться или вне достаточно большого круга (велик первый сомножитель), или вблизи от собственных значений уравнения (1) (велика $\|K^{-1}\|$).

Замечание 3. Если условие (I) выполнено для *всех* $x \in X$, то формулировка и доказательство теоремы 1 упрощаются. Именно, условие (II) оказывается излишним, а в качестве q можно взять число

$$q = \varepsilon|\lambda|\|K^{-1}\|\|\varphi_0^{-1}\|.$$

В самом деле, усиленное условие (I) даёт

$$\|\overline{H}\varphi - \varphi H\| \leqslant \varepsilon,$$

что равносильно, очевидно, $\|K\varphi - \varphi K\| \leqslant \varepsilon|\lambda|$. Отсюда без труда находим

$$\|I - \overline{K}\varphi K^{-1}\varphi_0^{-1}\| = \|(\varphi K - \overline{K}\varphi)K^{-1}\varphi_0^{-1}\| \leqslant \varepsilon|\lambda|\|K^{-1}\|\|\varphi_0^{-1}\| = q.$$

Следовательно, по теореме Банаха (гл. 1, теорема 3) существует оператор $G^{-1} = (K\varphi K^{-1}\varphi_0^{-1})^{-1}$; $\|G^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1-q}$.

Так как $\overline{K}\varphi K^{-1}\varphi_0^{-1}G^{-1} = I$, то существует правый обратный оператор $\overline{K}^{-1} = \varphi K^{-1}\varphi_0^{-1}G^{-1}$, обеспечивающий возможность решения уравнения (2). При этом очевидно

$$\|\overline{K}^{-1}\| \leqslant \|\varphi K^{-1}\varphi_0^{-1}\|\|G^{-1}\| \leqslant \frac{\|\varphi K^{-1}\varphi_0^{-1}\|}{1-q}. \tag{14a}$$

Введём ещё условие о том, что правая часть—элемент y—допускает хорошую аппроксимацию.

(III) *Для элемента* y *найдётся элемент* $y' \in X'$ *такой, что*

$$\|y - y'\| \leqslant \varepsilon_2\|y\|.$$

Это условие вместе с условием (II) позволяет оценить возможную степень аппроксимации решения x^* уравнения (1) элементами пространства X'. Действительно, по условию (II) имеется такое $x' \in X'$, что

$$\|Hx^* - x'\| \leqslant \varepsilon_1\|x^*\|.$$

В таком случае

$$\|x^* - (\lambda x' + y')\| \leqslant \|y - y'\| + \|\lambda Hx^* - \lambda x'\| \leqslant \varepsilon_2\|y\| + |\lambda|\varepsilon_1\|x^*\| \leqslant$$
$$\leqslant (|\lambda|\varepsilon_1 + \varepsilon_2\|K\|)\|x^*\| = \eta\|x^*\|. \tag{15}$$

[1]) См. С. Банах [2] или Ф. Рисс [37].

Наличие условия (III) даёт возможность по решению уравнения (2) строить приближённое решение уравнения (1). Точнее говоря, справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия* (I), (II), (III) *и существует оператор* $\bar{K}^{-1}$, *то справедлива оценка*

$$\| x^* - \varphi_0^{-1}\bar{x}_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \{2\varepsilon |\lambda| \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| + (\varepsilon_1 |\lambda| + \varepsilon_2 \|K\|)(1 + \|\varphi K\| \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\|)\} \|x^*\| =$$

$$= p\|x^*\|, \text{ где } \bar{x}_0 \text{— решение уравнения (2)} \tag{16}$$

Доказательство. В силу (15) существует элемент $x' \in X'$ такой, что

$$\|x^* - x'\| \leqslant \eta \|x^*\|, \tag{17}$$

где $\eta = \varepsilon_1 |\lambda| + \varepsilon_2 \|K\|$.

Обозначим через $\bar{x}_1$ решение уравнения $\bar{K}\bar{x} = \varphi K x'$. Так как $\bar{x}_0$ — решение уравнения (2), то

$$\bar{K}\bar{x}_0 = \varphi K x^*;$$

с другой стороны,

$$\bar{K}\bar{x}_1 = \varphi K x',$$

следовательно,

$$\bar{K}(\bar{x}_0 - \bar{x}_1) = \varphi K (x^* - x'),$$

откуда находим

$$\|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\| \leqslant \|\bar{K}^{-1}\| \|\varphi K\| \cdot \eta \cdot \|x^*\|. \tag{18}$$

Так как $x' \in X'$, то применимо (3); это даёт

$$\|\bar{x}_1 - \varphi x'\| \leqslant \varepsilon |\lambda| \|\bar{K}^{-1}\| \|x'\| \leqslant \varepsilon |\lambda| (1 + \eta) \|\bar{K}^{-1}\| \|x^*\|$$

и, значит,

$$\|\varphi_0^{-1}\bar{x}_1 - x'\| \leqslant \varepsilon |\lambda| (1 + \eta) \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| \|x^*\|. \tag{19}$$

Но из (18) вытекает

$$\|\varphi_0^{-1}\bar{x}_1 - \varphi_0^{-1}\bar{x}_0\| \leqslant \eta \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| \|\varphi K\| \|x^*\|.$$

Сопоставляя это с (17) и (19) и принимая во внимание, что η может быть взято $\leqslant 1$ ($x' = 0$ во всяком случае удовлетворяет (17)), получим

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}\bar{x}_0\| \leqslant \{2\varepsilon |\lambda| \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| + \eta (1 + \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| \|\varphi K\|)\} \|x^*\|, \tag{16a}$$

откуда, заменяя η его значением, получаем (16).

Теорема доказана.

Замечание 4. Оценка (15) имеет общий характер. Иногда удаётся для η иным путём найти значение η^* — меньшее, нежели в (15). Как видно из доказательства теоремы 2, неравенство (16а) остаётся верным, если заменить в нём η на η^*.

Пусть теперь имеется последовательность пространств $\bar{X}$ и уравнений типа (2) в них. С помощью каждого из таких уравнений можно построить согласно теореме 2 приближённое решение уравнения (1). Вопрос о сходимости этих приближённых решений к точному разрешается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если выполнены условия:*

1) *Оператор K имеет обратный* ($\|K^{-1}\| < +\infty$);

2) *Оператор* $\overline{K}$ *удовлетворяет условию* (A) (*следствие* 1) (*для этого достаточно, в частности, вполне—непрерывности оператора* $\overline{H}$),

3)
$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon \| \varphi \| \| \varphi_0^{-1} \|^2 = 0, \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1 \| \varphi \|^2 \| \varphi_0^{-1} \|^2 = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_2 \| \varphi \|^2 \| \varphi_0^{-1} \|^2 = 0, \tag{22}$$

то приближённые уравнения разрешимы (*начиная с некоторого* n), *и имеет место сходимость приближённых решений к точному*

$$\lim_{n\to\infty} \| x^* - \varphi_0^{-1} \overline{x}_0 \| = 0$$

с быстротой, определяемой неравенством (16)[1].

Доказательство. Утверждение теоремы без труда вытекает из следствия к теореме 1 и теоремы 2. Действительно, условия (20)—(22) обеспечивают $q \to 0$ (см. (4)), значит, по следствию теоремы 1 существование операторов $\overline{K}^{-1}$ (во всяком случае при достаточно большом n), нормы которых (14) имеют порядок $\| \varphi \| \| \varphi_0^{-1} \|$. Вследствие (20)—(22) правая часть (16) стремится к нулю.

Доказанная выше теорема 1 позволяет на основании разрешимости точного уравнения заключить о разрешимости приближённого. Можно обосновать справедливость и обратного заключения. Именно, имеет место

Теорема 4. *Если существует оператор* $\overline{K}^{-1}$ *и выполнены условия* (I) *и* (II), *а также неравенство*

$$r = |\lambda| \varepsilon_1 (1 + \| \varphi K \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \overline{K}^{-1} \|) + 2\varepsilon |\lambda| \| \varphi_0^{-1} \| \| \overline{K}^{-1} \| < 1, \tag{21'}$$

то оператор K *имеет обратный* (*левый*)[2] *и справедлива оценка*

$$\| K^{-1} \| \leqslant \frac{\| \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi \| + 1 + \| \varphi \overline{K} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| K^{-1} \|}{1 - r}. \tag{22'}$$

Доказательство. Пусть x^* — некоторое решение уравнения (1). Согласно условию (II) найдётся элемент $x' \in X'$ такой, что

$$\| Hx^* - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \| x^* \|.$$

Это даёт

$$\| x^* - \lambda x' \| = \| \lambda H x^* + K x^* - \lambda x' \| \leqslant |\lambda| \varepsilon_1 \| x^* \| + \| K x^* \|;$$

таким образом, (15) выполняется с $\eta = |\lambda| \varepsilon_1 + \frac{\| K x^* \|}{\| x^* \|}$. Так как приближённое уравнение, соответствующее точному $Kx = Kx^*$, будет $\overline{K}\overline{x} = \varphi K x^*$,

---

[1] В формулировке теоремы для простоты опущен индекс n у операторов $\overline{K}$, φ, φ_0^{-1} и чисел ε, ε_1 и ε_2, относящихся к различным пространствам $\overline{X}$.

[2] Если для оператора K выполнено условие (A), то отсюда следует и существование двустороннего обратного K^{-1}.

решение которого есть $\overline{x}_0=\overline{K}^{-1}\varphi K x^*$, то согласно (16а), заменяя там η значением, найденным выше, получим

$$\| x^* - \varphi_0^{-1} \overline{K}\varphi K x^* \| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{(1+\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi K\|)\left(\varepsilon_1|\lambda|+\frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|}\right)+2\varepsilon|\lambda|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\right\}\|x^*\|.$$

Отсюда следует

$$\|x^*\|\leqslant\|\varphi_0^{-1}\overline{K}\varphi\|\,\|Kx^*\|+\varepsilon_1|\lambda|(1+\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi K\|)\|x^*\|+$$
$$+(1+\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi K\|)\|Kx^*\|+2\varepsilon|\lambda|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|x^*\|.$$

Значит,

$$\|Kx^*\|\geqslant\frac{1-\varepsilon_1|\lambda|(1+\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi K\|)-2\varepsilon|\lambda|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|}{\|\varphi_0^{-1}\overline{K}\varphi\|+1+\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|\varphi K\|}\|x^*\|=Q\|x^*\|,$$

$Q>0$, поэтому, как было отмечено в гл. I, существует оператор K^{-1} и $\|K^{-1}\|\leqslant\frac{1}{Q}$, что доказывает теорему.

Оценка погрешности приближённого решения может быть также дана в терминах приближённого уравнения.

Именно, имеет место

Теорема 5. *Если оператор $\overline{K}$ имеет обратный и выполнены условия* (I), (II), (III), *а также*

$$p=(|\lambda|\varepsilon_1+\|K\|\varepsilon_2)(1+\|\varphi K\|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|)+2|\lambda|\varepsilon\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\overline{K}^{-1}\|<1,$$

то справедлива оценка

$$\|x^*-\varphi_0^{-1}\overline{x}_0\|\leqslant\frac{p}{1-p}\|\varphi_0^{-1}\overline{x}_0\|. \tag{23}$$

Доказательство. Имеем очевидное неравенство

$$\|x^*\|\leqslant\|x^*-\varphi_0^{-1}\overline{x}_0\|+\|\varphi_0^{-1}\overline{x}_0\|.$$

Используя его для правой части (16) и затем разрешая полученное неравенство относительно $\|x^*-\varphi_0^{-1}\overline{x}_0\|$, придём к требуемому результату.

Теоремы, аналогичные доказанным выше, справедливы и в случае более общего уравнения, из которого не выделен единичный оператор.

Следующие ниже предложения не имеют аналога для общих уравнений. Здесь пользуемся тем, что если условие (III) не выполнено (по крайней мере с малым ε_2), то для уравнений типа (1) простой подстановкой можно добиться его выполнения, регуляризировав свободный член. Именно, положим

$$x=y+z;$$

подставляя это выражение в уравнение (1), получим для определения z уравнение

$$Kz=z-\lambda Hz=\lambda Hy=y_1,$$

в котором свободный член y_1 регулярен в силу условия (II).

Благодаря этому для z, согласно теореме 2, можно получить приближённое решение в форме $\varphi_0^{-1}\overline{z}$, где $\overline{z}$ есть решение приближённого уравнения

$$\overline{K}\overline{z}=\overline{z}-\lambda\overline{H}\overline{z}=\varphi y_1=\lambda\varphi Hy.$$

Тогда приближённое решение уравнения (1) будет

$$x_1 = y + \varphi_0^{-1}\bar{z} = y + \lambda\varphi_0^{-1}\bar{K}^{-1}\varphi H y. \tag{24}$$

Оценку близости z и $\varphi_0^{-1}\bar{z}$ можно было бы произвести на основании (16) теоремы 2. Однако, более точная оценка получается, если её провести специально для данного случая.

Теорема 6. *Если существует оператор $\bar{K}^{-1}$ и приближённое решение x_1 уравнения (1) определено по формуле (24), то справедлива оценка:*

$$\| x^* - x_1 \| \leqslant \{\| \varphi_0^{-1} \| \| \bar{K}^{-1} \| [| \lambda | (\| H \| + \varepsilon_1)\varepsilon + \| \varphi K \| \varepsilon_1] + \varepsilon_1\} | \lambda | \| x^* \| = p' \| x^* \|. \tag{25}$$

Доказательство. Имеем

$$z = \lambda H z + \lambda H y = \lambda H x^*. \tag{26}$$

Поэтому, согласно условию (II), найдётся $z' \in X'$ такое, что

$$\| z - z' \| \leqslant | \lambda | \varepsilon_1 \| x^* \|. \tag{27}$$

Обозначим через $\bar{z}_1$ решение уравнения

$$\bar{K}\bar{z}_1 = \varphi K z'.$$

Тогда, так как

$$\bar{K}\bar{z} = \varphi y_1 = \varphi K z,$$

то, вычитая, получим

$$\bar{K}(\bar{z} - \bar{z}_1) = \varphi K (z - z'),$$

откуда

$$\| \bar{z} - \bar{z}_1 \| \leqslant \| \bar{K}^{-1} \| \| \varphi K \| \| z - z' \| \leqslant \| \bar{K}^{-1} \| \| \varphi K \| | \lambda | \varepsilon_1 \| x^* \|. \tag{28}$$

Далее, так как $z' \in X'$, то на основании (3), учитывая (27), а потом (26), получим

$$\| \varphi z' - \bar{z}_1 \| \leqslant | \lambda | \varepsilon \| \bar{K}^{-1} \| \| z' \| \leqslant | \lambda | \varepsilon \| \bar{K}^{-1} \| (\| z \| + | \lambda | \varepsilon_1 \| x^* \|) \leqslant$$
$$\leqslant | \lambda |^2 \varepsilon \| \bar{K}^{-1} \| (\| H \| + \varepsilon_1) \| x^* \|,$$

поэтому

$$\| z' - \varphi_0^{-1}\bar{z}_1 \| \leqslant | \lambda |^2 \varepsilon \| \varphi_0^{-1} \| \| \bar{K}^{-1} \| (\| H \| + \varepsilon_1) \| x^* \|. \tag{29}$$

Из (28), наконец, получаем

$$\| \varphi_0^{-1}\bar{z} - \varphi_0^{-1}\bar{z}_1 \| \leqslant | \lambda | \varepsilon_1 \| \varphi_0^{-1} \| \| \bar{K}^{-1} \| \| \varphi K \| \| x^* \|.$$

Сопоставляя это с (27) и (29), находим

$$\| x^* - x_1 \| = \| z - \varphi_0^{-1}\bar{z} \| \leqslant$$
$$\leqslant | \lambda | \{\varepsilon_1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \bar{K}^{-1} \| [\| \varphi K \| \varepsilon_1 + | \lambda | (\| H \| + \varepsilon_1)\varepsilon]\} \| x^* \|,$$

что и доказывает теорему.

Доказанное предложение позволяет усилить утверждения теорем 4 и 5.

Теорема 7. *Если оператор $\bar{K}$ имеет обратный и выполнено неравенство*

$$p' = \{\varepsilon_1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \bar{K}^{-1} \| [\| \varphi K \| \varepsilon_1 + | \lambda | (\| H \| + \varepsilon_1)\varepsilon]\} | \lambda | < 1,$$

то

1) *Решение уравнения $Kx = y$ всегда единственно.*

2) *Если оператор K обладает свойством* (A), *в частности, если оператор H вполне непрерывен, то существует K^{-1} и*

$$\| K^{-1} \| \leqslant \frac{1 + |\lambda| \, \| \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H \|}{1 - p'} .$$

3) *Справедливо неравенство*

$$\| K^{-1} - [I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H] \| \leqslant \frac{p'}{1 - p'} (1 + |\lambda| \, \| \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H \|).$$

Доказательство 1). Действительно, если x—решение уравнения $Kx = 0$, то в (25) $x_1 = 0$ и, следовательно, $\| x \| \leqslant p' \| x \|$, что даёт $x = 0$.

2) Так же из (25), полагая там $y = Kx$ и, значит, $x_1 = Iy + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H y$, получим для любого x

$$\| x - Iy - \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H y \| = \| Ix - [I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H] Kx \| \leqslant p' \| x \| ,$$

т. е.

$$\| I - [I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H] K \| \leqslant p' .$$

Следовательно, согласно теореме Банаха (гл. I, стр. 102), оператор

$$G = [I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H] K$$

имеет обратный, при этом

$$\| G^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - p'} .$$

Но так как

$$G^{-1} G = G^{-1} [I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H] K = I ,$$

то существует левый обратный оператор

$$K^{-1} = G^{-1} [I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H];$$

в силу условия (A), он является и правым обратным, а, значит, и просто обратным оператором; кроме того,

$$\| K^{-1} \| \leqslant \| G^{-1} \| \, \| I + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H \| \leqslant \frac{1 + |\lambda| \, \| \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H \|}{1 - p'} .$$

3) Заменив теперь в (25) x^* на $K^{-1} y$, где y—произвольный элемент, получаем

$$\| K^{-1} y - [Iy + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H y] \| \leqslant p' \| K^{-1} \| \, \| y \| \leqslant \frac{p'}{1 - p'} (1 + |\lambda| \, \| \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H \|) \, \| y \|.$$

Теорема 6 позволяет несколько ослабить условия сходимости (если приближённое решение находить по формуле (24)).

Теорема 8. *Если оператор K имеет обратный, а оператор $\overline{K}$ удовлетворяет условию* (A) *и выполнено следующее:*

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon \| \varphi_0^{-1} \|^2 \| \varphi \| = 0,$ 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_1 \| \varphi_0^{-1} \|^2 \| \varphi \|^2 = 0,$

то имеет место сходимость

$$\lim_{n \to \infty} \| x^* - x_1 \| = \lim_{n \to \infty} \| x^* - (y + \lambda \varphi_0^{-1} \overline{K}^{-1} \varphi H y) \| = 0.$$

Замечание 5. Полезно указать общий приём построения «приближённого» уравнения (2).

Пусть K_1 — оператор, переводящий X в себя, близкий к K в X', в частности, $K_1 = K$. Тогда за уравнение (2) можно принять $\overline{K} \overline{x} = \varphi K_1 \varphi_0^{-1} \overline{x} = \overline{y} = \varphi y$.

Условие (I) будет выполнено для $\varepsilon = \| \varphi \| \, \| K - K_1 \|_{X_1}$.

§ 2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода

Ради простоты изложения мы до сих пор ограничивались рассмотрением только уравнений 2-го рода. Из общих уравнений мы рассмотрим лишь один тип, легко приводящийся к уравнениям 2-го рода.

Пусть имеются две пары пространств X и Y, $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, причём предполагается, что пространства второй пары *полные*. Пространства Y и $\overline{Y}$ связаны между собой так же, как пространства X и $\overline{X}$ (см. § 1); пусть Y'—изоморфное $\overline{Y}$ подпространство Y, ψ_0 — операция, осуществляющая этот изоморфизм, а ψ — распространение её на все Y.

В этих условиях рассмотрим уравнения

$$Kx = Gx - \lambda Tx = y, \tag{1a}$$

$$\overline{K}\overline{x} = \overline{G}\overline{x} - \lambda \overline{T}\overline{x} = \overline{y} = \psi y. \tag{2a}$$

Здесь G—некоторый линейный оператор, переводящий X в Y, имеющий обратный G^{-1}, причём предполагается, что G отображает X' *на* Y'; далее, предполагаем, что $\overline{G} = \psi_0 G \varphi_0^{-1}$, $(\overline{G}^{-1} = \varphi_0 G^{-1} \psi_0^{-1})$, а T и $\overline{T}$—линейные операторы, переводящие X в Y и соответственно $\overline{X}$ в $\overline{Y}$.

Наложим на операторы T и $\overline{T}$ следующие условия:

(Ia) $\|\overline{T}\varphi_0 x' - \psi T x'\| \leqslant \mu \|x'\|$, $x' \in X'$;

(IIa) *Для любого* $x \in X$ *найдётся такое* $y' \in Y'$, *что*

$$\|Tx - y'\| \leqslant \mu_1 \|x\| .$$

При этих условиях теория таких уравнений сводится к рассмотренным в § 1 уравнениям 2-го рода. Действительно, перепишем уравнения (1а) и (2а), применив к обеим частям оператор G^{-1} и соответственно $\overline{G}^{-1}$

$$x - \lambda G^{-1} T x = G^{-1} y,$$

$$\overline{x} - \lambda \overline{G}^{-1} \overline{T} \overline{x} = \overline{G}^{-1} \overline{y} = \overline{G}^{-1} \psi y = \varphi_0 G^{-1} \psi_0^{-1} \psi y.$$

Если теперь ввести обозначения

$$G^{-1} y = y_1 \in X;$$

$$H = G^{-1} T; \quad \overline{H} = \overline{G}^{-1} \overline{T},$$

то уравнения приведутся к рассмотренной форме

$$G^{-1} K x = K_1 x = x - \lambda H x = y_1, \tag{3}$$

$$\overline{G}^{-1} \overline{K} \overline{x} = \overline{K}_1 \overline{x} = \overline{x} - \lambda \overline{H} \overline{x} = \varphi_0 G^{-1} \psi_0^{-1} \psi G y_1 = \varphi_1 y_1 = \overline{y}_1. \tag{4}$$

Проверим, что для уравнений (3) и (4) выполнены условия (I) и (II) § 1.

В самом деле, имеем, в силу условия (Iа):

$$\| H\varphi_1 x' - \varphi_1 H x' \| = \| \overline{G}^{-1}\overline{T}\varphi_0 G^{-1}\psi_0^{-1}\psi G x' - \varphi_0 G^{-1}\psi_0^{-1}\psi G G^{-1} T x' \| =$$
$$= \| \overline{G}^{-1}\overline{T}\varphi_0 x' - \overline{G}^{-1}\psi T x' \| \leqslant \| \overline{G}^{-1} \| \| \overline{T}\varphi_0 x' - \psi T x' \| \leqslant \| \overline{G}^{-1} \| \mu \| x' \| .$$

Иными словами, условие (I) § 1 выполняется с

$$\varepsilon = \| \overline{G}^{-1} \| \mu = \| \varphi_0 G^{-1}\psi_0^{-1} \| \mu .$$

Далее, для любого x подберём $y' \in Y'$ из условия (IIа), затем положим $x' = G^{-1}y'$. Тогда

$$\| Hx - x' \| = \| G^{-1}Tx - G^{-1}y' \| \leqslant \| G^{-1} \| \| Tx - y' \| \leqslant \| G^{-1} \| \mu_1 \| x \| ,$$

т. е. условие (II) § 1 также выполнено с $\varepsilon_1 = \| G^{-1} \| \mu_1$.

В соответствии с этим все теоремы § 1 могут быть переформулированы для уравнений (1а) и (2а), при этом следует H, $\overline{H}$, ε, ε_1 заменить указанными для них значениями, а φ заменить на

$$\varphi_1 = \varphi_0 G^{-1}\psi_0^{-1}\psi G; \qquad (\varphi_1^{-1} = G^{-1}\psi_0^{-1}\psi_0 G \varphi_0^{-1} = \varphi_0^{-1}).$$

§ 3. Приближённое решение бесконечных систем линейных уравнений. Метод редукции

Рассмотрим систему вида

$$\xi_i - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

при условии Коха [1])

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 < +\infty .$$

Примем $X = l^2$, за X' возьмём множество элементов вида

$$x' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots).$$

Наконец, примем $\overline{X} = R^n$. Отображение φ определим, полагая для

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots); \qquad \overline{x} = \varphi x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n);$$

тогда для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будет

$$x' = \varphi_0^{-1}\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots).$$

Очевидно, $\| \varphi \| = \| \varphi_0^{-1} \| = 1$.

Бесконечную систему (1) можно теперь переписать в виде уравнения

$$Kx = x - \lambda H x = y,$$

где H — преобразование, определяемое матрицей $\| a_{i,k} \|$, вполне непрерывное.

---

[1]) Х. Кох [18].

В качестве приближённого уравнения

$$\overline{K}\overline{x} = \overline{x} - \lambda\overline{H}\overline{x} = \overline{y}$$

примем в данном случае конечную алгебраическую систему

$$\xi_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\xi_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

и, следовательно, в качестве $\overline{H}$—линейное преобразование R^n в себя, определяемое матрицей $\| a_{i,k} \|_{i,\,k=1,2,\ldots,n}$.

Проверим условия (I) и (II) § 1. Условие (I) выполнено тривиальным образом с $\varepsilon = 0$, так как

$$\overline{H}\varphi x' = \varphi H x' = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,\xi_k \right\}_{i=1,2,\ldots,n}.$$

Условие (II) также выполнено. Достаточно принять $x' = [Hx]_n = \varphi_0^{-1}\varphi Hx$. т. е. в качестве x' взять срезанную последовательность от Hx.

Тогда имеем

$$\| Hx - x' \| = \left\| \left(0, 0, \ldots, 0, \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+1,k}\,\xi_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2,k}\,\xi_k, \ldots \right) \right\| =$$

$$= \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \| x \| = \varepsilon_1 \| x \|,$$

где

$$\varepsilon_1 = \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, при $n \to \infty$ будет $\varepsilon_1 \to 0$.

Наконец, условие (III) тоже выполнено—в качестве ε_2 можно взять

$$\varepsilon_2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Все теоремы § 1 могут быть сформулированы, таким образом, для данного случая. Например, теорема 1 будет выглядеть так:

Теорема 9. *Если данное значение λ для бесконечной системы не собственное, то при достаточно больших n, точнее, если*

$$q = \| K \| \, \| K^{-1} \| \, | \lambda | \, \varepsilon_1 = | \lambda | \, \| K \| \, \| K^{-1} \| \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

то срезанные системы будут разрешимы.

Теорема 2 приводит к следующей теореме:

Теорема 10. *Если конечная система разрешима и* $(\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_n)$ — *её решение, и известна норма оператора* $\overline{K}^{-1}$, *то справедлива оценка*

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\overline{\xi}_k)^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi_k^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant (|\lambda|\varepsilon_1+\|K\|\varepsilon_2)(1+\|K\|\,\|\overline{K}^{-1}\|)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

устанавливающая близость приближённого и точного решения.

Из этой теоремы следует и сходимость решений конечной системы к решению бесконечной—метода редукции.

Заметим, что входящие в формулировку теоремы выражения $\|K\|$ и $\|\overline{K}^{-1}\|$ могут быть довольно легко оценены (ср. гл. 1, примеры 2 и 5, стр. 94—95)

$$\|K\|\leqslant 1+|\lambda|\,\|H\|\leqslant 1+|\lambda|\left(\sum_{i,\,k=1}^{\infty}a_{i,k}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\overline{K}^{-1}\|\leqslant\frac{\lambda}{|\lambda-\lambda_1|},$$

где λ_1 — ближайшее к λ собственное значение матрицы $[H]_{n,n}$, если она симметрична, и определяется более сложным образом в общем случае.

Применим, наконец, теорему 7, что возможно, так как в данном случае оператор H вполне непрерывен. Мы получим предложение, позволяющее на основании решения конечной системы делать заключения для бесконечной.

Теорема 11. *Если* λ — *не собственное значение для системы* (2) *и выполнено условие*

$$p'=\varepsilon_1(1+\|\overline{K}^{-1}\|\,\|K\|)\,|\lambda|<1,$$

то значение λ—*не собственное для системы* (1). *Оператор* K *имеет непрерывный обратный, и справедливы неравенства*

$$\|K^{-1}\|\leqslant\frac{1+|\lambda|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|H\|}{1-p'},$$

$$\|K^{-1}-(I+\lambda\varphi_0^{-1}\overline{K}^{-1}\varphi H)\|\leqslant\frac{p'}{1-p'}(1+|\lambda|\,\|\overline{K}^{-1}\|\,\|H\|).$$

Теорема 11 имеет определённый интерес для приложений, в которых во многих случаях решение задачи приводится к бесконечной системе. Исследование этих систем часто представляло непреодолимые теоретические затруднения. Последняя же теорема позволяет получить достаточно полный анализ бесконечной системы на основании решения одной из «срезанных» конечных систем.

Замечание 1. Мы могли провести те же рассмотрения вместо систем, удовлетворяющих условию Коха для класса систем с вполне непрерывным ядром Гильберта, т. е. тех систем, у которых оператор, определяемый матрицей H, вполне непрерывен. Действительно, условие принадлежности H к этому классу состоит в том, что операторы, определяемые срезанной матрицей $[H]_{n,n}$, т. е. по существу операторы $\varphi_0^{-1}\varphi H\varphi_0^{-1}\varphi$, сходятся к H в смысле нормы в пространстве операторов

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_0^{-1}H\varphi-H\|=0.$$

Так же, как и выше, можно убедиться, что в данном случае

$$\varepsilon_1\leqslant\|\varphi_0^{-1}\varphi H\varphi_0^{-1}\varphi-H\|,$$

так что $\varepsilon_1 \to 0$ при $n \to \infty$, что и обеспечивает возможность получения теорем, подобных приведённым выше. Единственная разница будет в том, что в этом случае для ε_1 мы не можем получить такую же простую оценку в явном виде, как для систем Коха.

Замечание 2. Рассматривая вместо пространства l^2 другие пространства, мы могли бы получить аналогичные предложения для других классов бесконечных систем — класса Рисса, регулярных систем и других.

§ 4. Интегральные уравнения. Метод замены системой алгебраических уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение 2-го рода

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t)\, x(t)\, dt = y(s); \tag{1}$$

будем считать, что $H(s, t)$, $y(s)$, а следовательно, и $x(s)$—непрерывные периодические функции своих аргументов с периодом 1.

Одним из наиболее распространённых методов приближённого решения интегрального уравнения является замена его системой алгебраических уравнений с помощью применения к интегральному члену какой-либо формулы механических квадратур вида:

$$\int_0^1 x(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)})$$

с последующим приданием аргументу частных значений $t = t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$.

Уравнение (1) заменится тогда следующей системой:

$$x(t_i^{(n)}) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} H(t_i^{(n)}, t_k^{(n)})\, x(t_k^{(n)}) = y(t_i^{(n)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Рассмотрим для определённости формулу механических квадратур с равноотстоящими абсциссами

$$t_k^{(n} = \frac{2k-1}{2n}; \quad A_k^{(n)} = \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы проведём исследование в двух случаях, первый из которых применим в более общих условиях, а второй даст более точные оценки.

А) В качестве пространства X примем пространство $\tilde{C}$ непрерывных периодических функций с периодом 1.

За X' возьмём множество ломаных периодических линий с абсциссами вершин равными $t_k^{(n)}$. Наконец, за $\bar{X}$ примем конечно-мерное пространство m_n

$$\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \qquad \|\bar{x}\| = \max |\xi_i|$$

и за образ функции —совокупность её значений в n точках

$$\bar{x} = \varphi x = (x(t_1^{(n)}),\ x(t_2^{(n)}),\ \ldots,\ x(t_n^{(n)})).$$

Если $\bar{x} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, то $x' = \varphi_0^{-1}\bar{x}$, очевидно, будет кусочно-линейной функцией с вершинами в точках $(t_k^{(n)}, \eta_k)$.

Совершенно ясно, что

$$\|\varphi\| = \|\varphi_0^{-1}\| = 1.$$

Если через $\overline{H}$ обозначить оператор в $\overline{X}$, задаваемый матрицей $\|A_k^{(n)} H(t_i^{(n)}, t_k^{(n)})\|$, то мы окажемся в условиях § 1. Надо только проверить выполнение условий (I), (II), (III).

Обозначим через $\omega_H^{(s)}(\delta)$ и $\omega_H^{(t)}(\delta)$ модули непрерывности $H(s,t)$, рассматриваемой как функция каждого из аргументов, так что, например, $\omega_H^{(s)}(\delta)$ обозначает наименьшее число такого рода, что $\max\limits_t |H(s',t)-H(s'',t)| \leqslant \omega_H^{(s)}(\delta)$ при $|s'-s''| \leqslant \delta$.

Выражение $\|\varphi H x' - \overline{H}\varphi x'\|$, если x'—кусочно-линейная функция, принимающая значения $\eta_k = x'(t_k^{(n)})$, имеет вид

$$\|\varphi H x' - \overline{H}\varphi x'\| = \max_i \left| \int_0^1 H(t_i,\ t)\, x'(t)\, dt - \sum_{k=1}^n A_k H(t_i,\ t_k)\, x'(t_k) \right|. \qquad (3)\ [1].$$

Далее, так как $A_k = \frac{1}{n}$, то в силу линейности функции x' между точками t_k и t_{k+1} имеем

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t)\, dt = \frac{1}{2n}(x'(t_{k+1}) + x'(t_k)).$$

Тогда (3) можно переписать, используя периодичность $x'(t)$ так:

$$\|\varphi H x' - \overline{H}\varphi x'\| = \max_i \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(t_i,\ t)\, x'(t)\, dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} H\left(t_i, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) x'(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} H\left(t_i, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)(x'(t_k)+x'(t_{k+1})) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} H(t_i,\ t_k)\, x'(t_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[H(t_i,\ t) - H\left(t_i, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)\right] x'(t)\, dt \right| +$$

$$+ \max_i \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n}\left[H\left(t_i, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) - H(t_i,\ t_k)\right] x'(t_k) \right| +$$

$$+ \max_i \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n}\left[H\left(t_i, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) - H(t_i,\ t_{k+1})\right] x'(t_{k+1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)\right] \|x'\| = 2\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)\|x'\|.$$

Итак, условие (I) выполнено с

$$\varepsilon = 2\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Проверяем условие (II).

Функция Hx определяется равенством

$$g(s) = (Hx)(s) = \int_0^1 H(s,\ t)\, x(t)\, dt,$$

поэтому можно в качестве аппроксимирующей функции $x' \in X'$ взять кусочно-линейную функцию, совпадающую с $g(s)$ в точках t_i, т. е. для $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$

$$x'(s) = n(t_{i+1} - s)\int_0^1 H(t_i,\ t)\, x(t)\, dt + n(s - t_i)\int_0^1 H(t_{i+1}, t)\, x(t)\, dt.$$

[1] Верхний значок у чисел $A_k^{(n)}$, $t_k^{(n)}$ здесь и в дальнейшем опущен.

Для этих же s имеем

$$|g(s)-x'(s)| = \left|\int_0^1 [H(s, t)-n(t_{i+1}-s)H(t_i, t)-n(s-t_i)H(t_{i+1}, t)]\, x(t)\, dt\right|,$$

но

$$|H(s, t)-n(t_{i+1}-s)H(t_i, t)-n(s-t_i)H(t_{i+1}, t)| \leqslant \omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)^{1)},$$

откуда следует

$$\|Hx-x'\| \leqslant \omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)\|x\|.$$

Следовательно, можно положить

$$\varepsilon_1 = \omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Проведя те же рассуждения для функции y вместо g, найдём функцию $y' \in X'$ такую, что

$$\|y-y'\| \leqslant \omega_y\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\omega_y(\delta)$—модуль непрерывности функции y; таким образом, условие (III) соблюдено, если принять

$$\varepsilon_2 = \omega_y\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\|y\|},$$

Применяя теоремы 1 и 2, заключаем, что если λ—не собственное значение уравнения (1), то при достаточно большом n система (2) разрешима, и построенная по её решению кусочно-линейная функция служит приближённым решением уравнения (1).

Точнее говоря, *если*

$$q = |\lambda|\left[\|K\|\omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)+2\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)+2|\lambda|\,\omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)\right]\|K^{-1}\| < 1,$$

то существует $\overline{K}^{-1}$ *и*

$$\|\overline{K}^{-1}\| \leqslant \frac{1+|\lambda|\,\omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)}{1-q}\|K^{-1}\|; \qquad (4)$$

при выполнении этих условий оценка погрешности приближённого решения $\varphi_0^{-1}\overline{x}_0$ *будет*

$$\|x^*-\varphi_0^{-1}\overline{x}_0\| \leqslant \left\{4|\lambda|\,\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)\|\overline{K}^{-1}\|+\right.$$

$$\left.+\left(|\lambda|\,\omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\|K\|\,\omega_y\left(\frac{1}{n}\right)}{\|y\|}\right)(1+\|K\|\,\|\overline{K}^{-1}\|)\right\}\|x^*\|.$$

Теоремы 5, 6 и 7 позволяют заключить, исходя из разрешимости системы уравнений (2), о разрешимости уравнения (1) и дать оценку погрешности приближённого решения. Так как ниже соответствующее предложение будет сформулировано для другого случая, более удобного для применений, мы не будем приводить здесь точных формулировок.

Замечание 1. Такие же результаты могли бы быть получены применением формулы трапеции при отсутствии периодичности. Аналогичным образом можно было бы рассмотреть результаты применения более точных формул квадратур.

---

1) Кривая от секущей отличается меньше, чем на колебание, так как обе заключены между границами функции.

В) Примем теперь за X' множество тригонометрических полиномов $(n-1)$-го порядка

$$x'(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos k\pi s.$$

Как и в А) считаем $\overline{X} = m_n$ и полагаем $\overline{x} = \varphi(x) = (x(t_1), \ldots, x(t_n))$, а потому $\|\varphi\| = 1$.

В этом случае $x' = \varphi_0^{-1}\overline{x}$ представляет тригонометрический полином, принимающий значения η_k в точках t_k. Как известно, если $|\eta_k| \leqslant M$, то такой полином не превосходит по модулю $(\lg n + 4) M$, по оценке, принадлежащей С. Н. Бернштейну[1]). Это означает, что

$$\|\varphi_0^{-1}\| \leqslant \lg n + 4.$$

Обозначим, далее, через $E_n^s(H)$ и $E_n^t(H)$ наилучшую степень аппроксимации $H(s, t)$ как функции s и соответственно t тригонометрическими полиномами порядка не выше n; это означает, что существуют тригонометрические полиномы $T(s, t)$ и $T_1(s, t)$ порядка n от s и соответственно от t (по другой переменной функция любой природы), что

$$|H(s, t) - T(s, t)| \leqslant E_n^s(H),$$

$$|H(s, t) - T_1(s, t)| \leqslant E_n^t(H).$$

Величины $E_n^s(H)$ и $E_n^t(H)$, если H дифференцируема, могут быть, как известно, оценены через границы производных этой функции.

Проверим опять выполнение условий (I) и (II).

Пусть $x'(s)$—тригонометрический полином порядка $n-1$. Так как формула квадратур

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k); \quad t_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad A_k = \frac{1}{n}$$

точна, если $f(t)$ полином $(2n-1)$-го порядка, а произведение $T_1(s, t)\,x'(t)$ при фиксированном s как раз такой полином, будем иметь

$$\|\varphi H x' - \overline{H}\varphi x'\| = \max_i \left| \int_0^1 H(t_i, t)\,x'(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} A_k H(t_i, t_k)\,x'(t_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \left| \int_0^1 [H(t_i, t) - T_1(t_i, t)]\,x'(t)\,dt \right| + \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} A_k [H(t_i, t_k) - T_1(t_i, t_k)]\,x'(t_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant E_n^t(H)\,\|x'\| + E_n^t(H)\,\|x'\| = 2E_n^t(H)\,\|x'\|,$$

так что можно положить

$$\varepsilon = 2E_n^t(H).$$

Положим теперь для данной функции $x \in X$

$$x'(s) = \int_0^1 T(s, t)\,x(t)\,dt;$$

---

[1]) См., например, В. Л. Гончаров [4], стр. 310.

тогда

$$\| Hx - x' \| = \max_s \left| \int_0^1 [H(s, t) - T(s, t)]\, x(t)\, dt \right| \leqslant E_n^s(H) \| x \|,$$

следовательно, можно принять

$$\varepsilon_1 = E_n^s(H).$$

Наконец, легко видеть, что условие (III) выполнено с

$$\varepsilon_2 = E_n(y) \frac{1}{\| y \|}.$$

Таким образом, оказывается возможным применение теорем § 1. Так, *если функция $H(s, t)$ достаточно гладкая, а n настолько велико, что*

$$q = |\lambda| [\, \|K\| E_n^s(H) + 2E_n^t(H) + 2|\lambda| E_n^s(H) E_n^t(H)] (\lg n + 4) \| \overline{K}^{-1} \| < 1,$$

то система (2) *разрешима, и если её решение есть* $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, *то построенный по этим значениям интерполяционный тригонометрический полином* x'_n *(принимающий значение* η_k *в точке* t_k*) служит приближённым решением уравнения* (1). *Точнее говоря,*

$$\| x^* - x'_n \| \leqslant \left\{ 4|\lambda| E_n^t(H) (\lg n + 4) \| \overline{K}^{-1} \| + \left(|\lambda| E_n^s(H) + \|K\| \frac{E_n(y)}{\|y\|} \right) \times \right.$$
$$\left. \times [1 + \|K\| \|\overline{K}^{-1}\| (\lg n + 4)] \right\} \| x^* \|. \quad (5)$$

Так как оператор $\overline{K}$ в этом случае тот же, что и в случае A), то в силу (4) $\| \overline{K}^{-1} \|$ *ограничены.*

Следовательно, (5) показывает, что последовательность тригонометрических полиномов x'_n *равномерно сходится* к решению x^* уравнения (1), причём близость приближённого решения к точному имеет порядок

$$\| x^* - x'_n \| = O\{\lg n [E_n^s(H) + E_n^t(H) + E_n(y)]\};$$

это даёт быструю сходимость, если функции $H(s, t)$ и $y(s)$ имеют производные высоких порядков. Если же эти функции *регулярны*, то порядок сходимости будет ρ^n $(\rho < 1)$.

Наконец, на основании теорем 6 и 7 можем получить следующую теорему, позволяющую на основании данных приближённого решения сделать заключение о самом уравнении.

Теорема 12. *Если λ — не собственное значение системы* (2) *и выполнено неравенство*

$$p' = \{ E_n^s + (\lg n + 4) \| \overline{K}^{-1} \| [\, \|K\| E_n^s + 2|\lambda| (\|H\| + E_n^s) E_n^t] \} |\lambda| < 1, \quad (6)$$

то

1) *λ не является собственным значением уравнения* (1),

2) $\| x^* - x_1 \| \leqslant p' \|x^*\|$, *где* $x_1 = y + \varphi_0^{-1} \bar{z}$; $\bar{z} - \lambda \overline{H} \bar{z} = \lambda \varphi H y$.

В частности, неравенство (5) определяет возможную *область расположения* собственных значений оператора H (вблизи соответствующих значений $\overline{H}$).

Замечание. Отметим, что результаты, аналогичные приведённым, могли бы быть получены для непериодического случая, если использовалась бы формула Гаусса и интерполирование алгебраическими полиномами [1]).

§ 5. Интегральные уравнения. Метод Ритца (моментов)

Решение уравнения

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t)\, x(t)\, dt = y(s) \tag{1}$$

разыскивается по этому методу в форме

$$x' = C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + \ldots + C_n\omega_n, \tag{2}$$

где функции ω_i образуют ортогональную и нормированную систему.

Коэффициенты C_i подбираются из условия минимальности среднего квадратического отклонения левой части от правой.

Легко проверить, что получающееся в результате для x' уравнение имеет вид:

$$x' - \lambda \int_0^1 [H]_{n,n} x'\, dt = [y]_n, \tag{3}$$

где $[y]_n$ есть n-й отрезок ряда Фурье функции y по функциям ω_i, а $[H]_{n,n}$ — отрезок двойного ряда Фурье функции $H(s, t)$.

Полученное уравнение можно рассматривать как систему уравнений относительно C_i. К этой системе можно было притти и из соображений метода моментов, именно, заменяя в уравнении (1) x на x' и интегрируя затем обе части его, после предварительного умножения на ω_i.

Обозначая коэффициенты Фурье функции $H(s, t)$ через h_{ik}, а коэффициенты Фурье функции $y(s)$—через η_i, т. е.

$$h_{ik} = \int_0^1 \int_0^1 H(s, t)\, \omega_i(s)\, \omega_k(t)\, ds\, dt,$$

$$\eta_i = \int_0^1 y(s)\, \omega_i(s)\, ds,$$

мы можем переписать эту систему в виде:

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} h_{ik} C_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Положим теперь $X = L^2$, $\overline{X} = R^n$, за X' возьмём множество функций вида (2).

---

[1]) Получаемые таким образом результаты более просты и точны, чем приведённые по данному вопросу в гл. II монографии автора и В. И. Крылова «Приближённые методы высшего анализа».

В качестве отображения φ тогда можно взять

$$\bar{x}=\varphi x; \quad \bar{x}=(C_1, C_2, \ldots, C_n); \qquad C_i=\int_0^1 x\omega_i ds;$$

$$x'=\varphi_0^{-1}\bar{x}=\varphi_0^{-1}[(C_1, C_2, \ldots, C_n)]=C_1\omega_1+C_2\omega_2+\ldots+C_n\omega_n.$$

Очевидно,

$$\|\varphi\|=\|\varphi_0^{-1}\|=1.$$

Если обозначить через $\bar{H}$ оператор в R^n, определяемый матрицей $\|h_{ik}\|_{i,k=1,2,\ldots,n}$, то мы окажемся в условиях § 1. Надо лишь проверить, что условия (I)—(III) выполнены.

Легко видеть, что $\varphi Hx'=\bar{H}\varphi x'$, так что

$$\|\varphi Hx'-\bar{H}\varphi x'\|=0,$$

и можно положить

$$\varepsilon=0.$$

Полагая, далее, $x'=\int_0^1 [H]_{n,n}x\,dt$, убеждаемся, что

$$\|Hx-x'\|=\left\{\int_0^1\left[\int_0^1 (H-[H]_{n,n})\,x(t)\,dt\right]^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_0^1\int_0^1 (H-[H]_{n,n})^2\,ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\|x\|;$$

следовательно, можно принять

$$\varepsilon_1=\left\{\int_0^1\int_0^1 (H-[H]_{n,n})^2\,ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\|H-[H]_{n,n}\|_{L^2\times L^2}.$$

Наконец, можно положить

$$\varepsilon_2=\|y-[y]_n\|.$$

Отсюда, на основании теорем § 1, следует, что *если λ—не собственное значение уравнения* (1) *и n достаточно велико, то система* (4) *имеет единственное решение и построенная по нему функция x'_n вида* (2) *служит приближённым решением уравнения.* Именно, теорема 2 даёт

$$\|x^*-x'_n\|=O(\varepsilon_1+\varepsilon_2). \tag{5}$$

Если $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$, то

$$\|x^*-x'_n\|_{L^2}\to 0,$$

откуда вытекает *равномерная сходимость* неопределённых интегралов

$$\int_0^s x'_n(t)\,dt\to\int_0^s x^*(t)\,dt.$$

В частном случае, когда ω_i—тригонометрические функции (а также полиномы Лежандра), из того, что

$$\| x^* - x'_n \| \sqrt{n} \to 0, \tag{6}$$

как легко видеть, вытекает и *равномерная* сходимость x'_n к решению.

На основании (5) условие (6) будет выполнено, если

$$\| H - [H]_{n,n} \| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \quad \| y - [y]_n \| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Например, если функции H и y удовлетворяют условию Липшица с $\alpha > \frac{1}{2}$ [1]).

Наконец, и здесь теоремы 6 и 7 позволяют сформулировать предложение, аналогичное теореме 12.

Теорема 13. *Если λ — не собственное значение системы* (4) *и*

$$p' = |\lambda| \, \| H - [H]_{n,n} \| (1 + \| \overline{K}^{-1} \| \, \| K \|) < 1,$$

то уравнение (1) *имеет единственное решение x^*, причём*

$$\| x^* - x_1 \| \leqslant p' \| x^* \|,$$

где $x_1 = y + \varphi_0^{-1} \bar{z}$, $\bar{z} - \lambda \overline{H} \bar{z} = \lambda \varphi H y$.

$\| \overline{K}^{-1} \|$ и $\| K \|$ здесь опять легко оцениваются.

§ 6. Интегральные уравнения. Прочие методы

Прежде всего следует упомянуть о методе замены ядра H уравнения

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t) x(t) \, dt = y(s) \tag{1}$$

на *вырожденное* ядро $\overline{H}$, близкое к H, т. е. о методе замены уравнения (1) на уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 \overline{H}(s, t) x(t) \, dt = y(s). \tag{2}$$

Если взять в качестве пространства X пространство M ограниченных функций и положить $\overline{X} = X' = X$, а за отображение φ взять тождественное отображение, то ясно, что условия (I), (II) и (III) будут удовлетворены, причём

$$\varepsilon = \sup_s \left| \int_0^1 [H(s, t) - \overline{H}(s, t)] \, dt \right| \leqslant \sup_{s,t} | H(s, t) - \overline{H}(s, t) |,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.$$

Теоремы § 1 показывают в этом случае, что *если ядра $H(s, t)$ и $\overline{H}(s, t)$ достаточно близки (ε мало), точнее, если*

$$q = |\lambda| \, \| K^{-1} \| \sup_{s,t} | H(s, t) - \overline{H}(s, t) | < 1$$

---

[1]) Полученные результаты покрывают и уточняют то, что было найдено по поводу сходимости данного метода Н. М. Крыловым и М. Кравчуком. (См. Н. М. Крылов [21], М. Ф. Кравчук [20].)

и λ — не собственное значение уравнения (1), *то уравнение* (2) *разрешимо и его решение* x_0 *служит приближённым решением уравнением* (1), *причём*

$$\| x^* - x_0 \| \leqslant 2 |\lambda| \, \| \overline{K}^{-1} \| \sup_{s,t} | H(s,t) - \overline{H}(s,t) | \, \| x^* \|.$$

Теорема 5 позволяет делать заключения о разрешимости точного уравнения на основании данных приближённого уравнения. В настоящем случае соответствующее утверждение формулируется так:

Если

$$p = 2 |\lambda| \, \| \overline{K}^{-1} \| \sup_{s,t} | H(s,t) - \overline{H}(s,t) | < 1$$

и λ — не собственное значение уравнения (2), *то λ — не собственное значение и уравнения* (1).

Беря в качестве X пространства L^2 и L (соответственно), можно получить аналогичного характера теоремы, известные ранее (Л. В. Канторович и В. И. Крылов [16], А. И. Акбергенов [1]).

Другой метод, который мы рассмотрим здесь, не упоминается в литературе. Этот метод занимает промежуточное положение между методом замены уравнения алгебраической системой и методом Ритца. Метод Ритца имеет тот недостаток, что при его использовании приходится вычислять двойные интегралы от $H(s,t)\,\omega_i(s)\,\omega_k(t)$, что может представлять значительные трудности. Первый же метод требует для быстрой сходимости не только «правильности» решения, но и «правильности» ядра, последнее же нередко не имеет места.

«Смешанный» метод состоит в том, что решение разыскивается в *определённой* форме, так же как в методе Ритца — моментов, но коэффициенты определяются из условия, чтобы уравнение было удовлетворено только в *отдельных точках* [1]).

Рассмотрим смешанный метод для определённости в применении к тому же периодическому уравнению

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s,t)\, x(t)\, dt = y(s). \tag{3}$$

Решение его будем разыскивать в форме

$$x'(s) = C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{k+1} \cos k\pi s = \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(s) \tag{4}$$

и потребуем, чтобы уравнение при этом *удовлетворялось* в n точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$, например, $t_k = \frac{2k-1}{2n}$. Для нахождения чисел C_k приходим тогда к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(t_i) - \lambda \int_0^1 H(t_i, t) \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(t)\, dt = y(t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

---

[1]) Для дифференциальных уравнений аналогичный метод был предложен нами ранее (в 1934 г). См. Л. В. Канторович [11а].

Здесь уместно применение рассмотрений § 2. Положим $X=Y=C$, где C—пространство непрерывных функций. В качестве $X'=Y'$ возьмём множество функций вида

$$x'(s)=\sum_{k=1}^{n} C_k\omega_k(s). \tag{6}$$

За $\overline{X}$ возьмём множество систем чисел

$$\overline{x}=(C_1, C_2, \ldots, C_n); \quad \|\overline{x}\|=\max_s \left|\sum_{k=1}^{n} C_k\omega_k(s)\right|.$$

За $\overline{Y}$ — множество систем чисел

$$\overline{y}=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n); \quad \|\overline{y}\|=\max_k |\eta_k|.$$

Наконец, отображения φ_0 и ψ будут

$$x'=\sum_{k=1}^{n} C_k\omega_k(s); \quad \overline{x}=\varphi_0 x'=(C_1, C_2, \ldots, C_n);$$

$$y=y(s); \quad \overline{y}=\psi y=(y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n)).$$

Очевидно,

$$\|\varphi_0\|=\|\varphi_0^{-1}\|=\|\psi\|=1.$$

Что касается $\|\psi_0^{-1}\|$, то она зависит от вида функций ω_k и расположения точек t_k. В случае, если ω_i—тригонометрические функции, а t_k—равноотстоящие точки, то по упоминавшейся уже теореме С. Н. Бернштейна имеем так же, как в § 4 для операции φ_0^{-1},

$$\|\psi_0^{-1}\| \leqslant \lg n+4.$$

Уравнение (3) — точное уравнение — и систему уравнений (5) — приближённое уравнение — можно записать соответственно в форме:

$$Kx=Gx-\lambda Tx=y,$$

$$\overline{K}\,\overline{x}=\overline{G}\,\overline{x}-\lambda\overline{T}\,\overline{x}=\overline{y},$$

где

$$G=I; \qquad T=H;$$

$$\overline{G}=\psi\varphi_0^{-1}; \qquad \overline{T}=\psi H\varphi_0^{-1}.$$

Это соответствует случаю, рассмотренному в § 2.

Проверим выполнение условий (Ia) и (IIa). Имеем

$$\text{(Ia)} \qquad \|\overline{T}\varphi x'-\psi Tx'\|=\|\psi H\varphi_0^{-1}\varphi_0 x'-\psi Hx'\|=0,$$

так что можно положить $\mu=0$.

Что касается условия (IIa), то, обозначая E_n^s наилучшую аппроксимацию $H(s, t)$ функцией вида (6), т. е. считая, что существует

$$P(s, t)=\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,\omega_k(s); \qquad |H(s, t)-P(s, t)|\leqslant E_n^s,$$

будем иметь для $y'=x'=\int_0^1 P(s, t)\,x(t)\,dt$, что

$$\|Tx-y'\|=\|Hx-x'\|=\max_s\left|\int_0^1 [H(s, t)-P(s, t)]\,x(t)\,dt\right|\leqslant E_n^s\|x\|;$$

таким образом, условие (IIa) выполнено для

$$\mu_1=E_n^s.$$

Итак, теория § 2 может быть полностью применена в настоящем случае.

При этом, однако, следует учесть, что в результатах § 1 надо H, $\overline{H}$ и φ заменить соответственно на H_1, $\overline{H}_1$ и φ_1, где

$$H_1 = G^{-1}H = H; \qquad \overline{H}_1 = \overline{G}^{-1}\overline{T} = \varphi_0\psi_0^{-1}\psi H\varphi_0^{-1}; \qquad \varphi_1 = \varphi_0 G^{-1}\psi_0^{-1}\psi G = \varphi_0\psi_0^{-1}\psi\,(\varphi_1^{-1} = \varphi_0^{-1});$$

далее следует считать

$$\varepsilon = \| \overline{G}^{-1} \| \mu = 0; \qquad \varepsilon_1 = \| G^{-1} \| \mu_1 = E_n^s.$$

Принимая всё это во внимание, на основании общей теории мы получаем для упомянутого частного случая (ω_k — тригонометрические функции, t_k — равноотстоящие), что *если λ не собственное значение уравнения* (3) *и* $E_n^s \lg^2 n \to 0$ (*теорема* 8), *то при n, достаточно больших, система* (7) *разрешима и приближённые решения, найденные на основании её, равномерно сходятся при $n \to \infty$ к решению уравнения* (3).

Границы погрешности приближённого решения могут быть указаны на основании теоремы 6. Имеем

$$\| x^* - x_1 \| \leqslant |\lambda| \, [\, \| \overline{K}^{-1} \| \, \| K \| (\lg n + 4) + 1] \, E_n^s \| x^* \|;$$

здесь $x_1 = y + \varphi_0^{-1}\bar{z}$, где $\bar{z} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ есть решение уравнения

$$\bar{z} - \lambda H_1 \bar{z} = \lambda \varphi_1 H_1 y,$$

т. е. решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(t_i) - \lambda \int_0^1 H(t_i, t) \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_k(t)\, dt = \lambda \int_0^1 H(t_i, t)\, y(t)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Отметим, что из замечания 4 § 1 следует, что если решение x^* допускает хорошую аппроксимацию функциями вида $\sum C_i \omega_i$ (η^* мало), то, так как $\varepsilon = 0$, мы получим в силу неравенства (16а) § 1 хорошее приближение к решению.

Указанная правильность решения часто имеет место даже при неправильном ядре, например, когда ядро — функция Грина.

Обратим внимание ещё на то, что для получения оценок при другом выборе точек t_k или при других функциях ω_k необходимо произвести оценку нормы оператора ψ_0^{-1}, что требует установления некоторых лемм конструктивной теории функций, подобных тому предложению С. Н. Бернштейна, которое было использовано выше.

§ 7. Дифференциальные уравнения

Одним из наиболее эффективных методов приближённого решения дифференциальных уравнений является метод Б. Г. Галеркина[1]). Поэтому мы начнём параграф с установления теоремы М. В. Келдыша о сходимости этого метода для дифференциальных уравнений второго порядка, а также приведём некоторые её усиления для этого случая.

Итак, пусть дано линейное уравнение второго порядка общего вида

$$L(x) = \frac{d}{dt}\left(p(t)\, x'(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(q(t)\, x(t)\right) + r(t)\, x(t) = f(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим систему функций $\{\omega_j(t)\}$, удовлетворяющих условию $\omega_j(0) = \omega_j(1) = 0$, и такую, что система функций $\{\omega_j'(t)\}$ вместе с функцией, равной $\frac{1}{p(t)}$, образует полную систему функций в L^2, ортогональную и нормированную относительно веса $p(t)$.

[1]) См. Л. В. Канторович и В. И. Крылов [16], гл. IV.

Метод Галеркина состоит в том, что приближённое решение уравнения (1) ищется в форме

$$\tilde{x}(t) = C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + \ldots + C_n\omega_n,$$

а постоянные C_i определяются из системы уравнений:

$$\int_0^1 L(\tilde{x})\,\omega_i(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,\omega_i(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Здесь возможно применение схемы § 2.

В качестве пространства X примем пространство функций x, удовлетворяющих условию (2), для которых $\int_0^1 p(t)\,x'^2(t)\,dt < +\infty$, причём положим

$$\|x\| = \left[\int_0^1 p(t)\,x'^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

За Y примем множество функций вида $f(t) = \frac{d}{dt}(p(t)z + C)$, где постоянная C выбрана так, что z удовлетворяет условию

$$\int_0^1 z\,dt = 0.$$

В качестве нормы в этом пространстве примем

$$\|f\| = \left[\int_0^1 p(t)\,z^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Обозначим, далее, через $\tilde{X}\,(=X')$ множество функций $\tilde{x}$ вида

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} C_i\omega_i,$$

а через $\tilde{Y}\,(=Y')$ множество функций вида

$$\tilde{y} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} pC_k\omega_k'(t)\right).$$

Легко видеть, что

$$\|\tilde{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|\tilde{y}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наконец, примем $\overline{X} = \overline{Y} = R^n$.

Для $\tilde{x} \in \tilde{X}$ положим

$$\varphi_0\tilde{x} = (C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

а для $y \in Y$ примем

$$\psi y = \left(-\int_0^1 y\omega_1\,dt, -\int_0^1 y\omega_2\,dt, \ldots, -\int_0^1 y\omega_n\,dt\right),$$

тогда, в частности, окажется

$$\psi\tilde{y}=(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Норма отображения ψ легко подсчитывается. Действительно, если $y(t)=\frac{d}{dt}(p(t)z+C)$, то

$$\|\psi y\|^2=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(-\int_0^1 y\omega_k\,dt\Bigr)^2=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\int_0^1 (p(t)z+C)\,\omega_k'\,dt\Bigr)^2\leqslant\int_0^1 p(t)z^2\,dt=\|y\|^2.$$

Последнее — в силу неравенства Бесселя.

Таким образом, $\|\psi\|=1$, кроме того, очевидно, $\|\varphi_0\|=\|\varphi_0^{-1}\|=\|\psi_0^{-1}\|=1$.

Если теперь ввести обозначения

$$Gx=\frac{d}{dt}[p(t)x'(t)];\qquad Tx=\frac{d}{dt}[q(t)x(t)]+r(t)x(t),$$

то уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$Lx=Gx+Tx=y, \tag{5}$$

а система уравнений (3) примет форму

$$\psi L\varphi_0^{-1}\bar{x}=\psi G\varphi_0^{-1}\bar{x}+\psi T\varphi_0^{-1}\bar{x}=\psi y=\bar{y}. \tag{6}$$

Если ещё обозначить

$$\bar{G}=\psi G\varphi_0^{-1}\quad\text{и}\quad \bar{T}=\psi T\varphi_0^{-1},$$

то легко видеть, где все условия § 2 окажутся выполненными. Мы проверим только условия (Ia) и (IIa).

Так как $\psi T=\bar{T}\varphi_0$, то условие (Ia) выполнено тривиальным образом с $\mu=0$.

Переходим к условию (IIa). Нам нужно установить возможность аппроксимации элемента Tx элементом вида $\tilde{y}=\frac{d}{dt}\sum_{=1}^{n}p(t)C_k\omega_k'(t)$, или, в соответствии с определением нормы в Y, возможность аппроксимации функции

$$\frac{1}{p(t)}\Bigl[\int_0^t Tx\,ds+C\Bigr] \tag{7}$$

функциями вида $\sum C_k\omega_k'$ с весом $p(t)$. Постоянная C при этом должна быть выбрана в соответствии с условием, поставленным выше.

Преобразуем функцию, определённую выше, к форме интегрального оператора от x'.

Имеем

$$\frac{1}{p(t)}\int_0^t Tx\,ds=\frac{1}{p(t)}\int_0^t\left[\frac{d}{ds}(qx)+rx\right]ds=\frac{1}{p(t)}\int_0^t[(q'+r)x+qx']\,ds=$$

$$=\frac{1}{p(t)}\int_0^t\left[(q'+r)\int_0^s x'(u)\,du+qx'\right]ds=\frac{1}{p(t)}\left\{\int_0^t x'(u)\,du\int_u^t(q'(s)+r(s))\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^t q(u)x'(u)\,du\right\}=\frac{1}{p(t)}\int_0^t\left[q(t)+\int_u^t r(s)\,ds\right]x'(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{p(t)}\int_0^1 P(t,u)\,x'(u)\,du, \tag{8}$$

где $P(t,\ u)$ — ограниченное ядро

$$P(t,u)=\begin{cases} q(t)+\int_u^t r(s)\,ds & \text{для } u\leqslant t,\\ 0 & \text{для } u>t.\end{cases} \tag{8a}$$

Рассмотрим для $\frac{1}{p(t)}P(t,u)$ наилучше аппроксимирующее (с весом $p(t)$) в среднем выражение вида

$$h_0(u)\cdot\frac{1}{p(t)}+\sum_{k=1}^n h_k(u)\,\omega_k'(t).$$

Тогда аппроксимирующее выражение для (8) может быть записано в виде:

$$\int_0^1\left[\frac{h_0(u)}{p(t)}+\sum_{k=1}^n h_k(u)\,\omega_k'(t)\right]x'(u)\,du=\frac{\bar c_0}{p(t)}+\sum_{k=1}^n c_k\,\omega_k'(t).$$

Учитывая, что функции $\omega_k'(t)$ вместе с $\frac{1}{p(t)}$ образуют полную ортогональную систему по весу $p(t)$, имеем

$$h_0(u)=\int_0^1 p(t)P(t,u)\frac{1}{p(t)}\,dt=\int_0^1 P(t,u)\,dt,$$

а

$$\bar c_0=\int_0^1 h_0(u)\,x'(u)\,du=\int_0^1\int_0^1 P(t,u)\,x'(u)\,du\,dt.$$

Чтобы получить для (7) аппроксимирующее выражение вида $\sum C_k\omega_k'$, следует принять $C=-\bar c_0$.

Степень аппроксимации зависит от возможности аппроксимировать ядро $P(t,u)$ комбинацией функций $\frac{1}{p(t)}$ и $\omega_k(t)$. Такая возможность всегда существует, так как система функций $\frac{1}{p(t)}$, $\omega_k'(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ полная в L^2. Но это значит, что условие (IIa) выполнено с $\mu_1\rightarrow 0$ при $n\rightarrow\infty$.

Отсюда и вытекает сходимость процесса Галеркина, причём отсюда же ясен способ оценки величины μ_1, а вместе с ней и быстроты сходимости.

Более детальные оценки могут быть осуществлены лишь при специальном выборе функций $\omega_k(t)$ и наложении дополнительных условий на коэффициенты.

Рассмотрим случай тригонометрических функций

$$\omega_k(t) = \sin k\pi t \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

В этом случае ядро $P(t, u)$ требуется аппроксимировать линейной комбинацией функций $\frac{1}{p(t)}$ и $\omega_k'(t) = k\pi \cos k\pi t$. Подберём функцию $a(u)$ из условия, чтобы

$$\int_0^1 \left[P(t, u) - \frac{a(u)}{p(t)} \right] dt = 0.$$

После этого построение наилучше аппроксимирующей комбинации приводится к нахождению n-го отрезка ряда Фурье по $\cos k\pi t$ функции

$$P(t, u) - \frac{a(u)}{p(t)}.$$

Так как функция $P(t, u)$ имеет разрыв — конечный скачок при $t = u$, а в остальном абсолютно непрерывна (если абсолютно непрерывна q), то её коэффициенты Фурье имеют порядок $\frac{1}{k}$, поэтому порядок её аппроксимации в среднем n-м отрезком ряда Фурье есть

$$O\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right);$$

аппроксимация с весом $\frac{1}{p(t)}$ будет иметь тот же порядок.

Таким же будет и порядок величины μ_1, так как интегрирование по u не изменит дела. Итак,

$$\mu_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Далее, так как $\| Gx \|_Y = \| x \|_X$, то $\| G^{-1} \| = 1$, поэтому в соответствии с § 2 величина ε_1 для уравнения второго рода, к которому приводится уравнение (5), будет

$$\varepsilon_1 = \mu_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Теоремы 6 и 8, применённые к преобразованному уравнению (5), позволяют высказать следующее утверждение:

В рассмотренном случае *имеет место сходимость последовательности приближённых решений к решению уравнения* (1), *причём*

$$\| x^* - \tilde{x}_n \| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Отсюда получается и *равномерная сходимость* последовательности $\tilde{x}_n$ к x^*. Действительно,

$$| x^*(t) - \tilde{x}_n(t) |^2 = \left| \int_0^t [x^{*\prime}(s) - \tilde{x}_n'(s)] \, ds \right|^2 \leq \int_0^1 \frac{dt}{p(t)} \int_0^1 p(t) \, [x^{*\prime}(t) - \tilde{x}_n'(t)]^2 \, dt =$$

$$= A \| x^* - \tilde{x}_n \|^2 = O\left(\frac{1}{n} \right).$$

Это обстоятельство, разумеется, справедливо и для общего случая.

Замечание 1. Оценка быстроты сходимости может быть произведена на основе замечания 4 § 1 ($\varepsilon = \mu = 0$), если известно, что решение допускает хорошую аппроксимацию функциями вида $\sum C_k \omega_k$.

Рассмотрим теперь случай самосопряжённого уравнения

$$\frac{d}{dt}[p(t)x'(t)] - r(t)x(t) = f(t). \tag{9}$$

Как известно, применение метода Галеркина к этому уравнению равносильно применению метода Ритца. Так что приведённые выше рассмотрения, применённые к данному уравнению, позволяют исследовать сходимость метода Ритца и быстроту её.

Остановимся опять лишь на случае тригонометрических функций.

Здесь существенная разница с общим случаем будет в том, что ядро $P(t, u)$ непрерывно, а если коэффициенты предполагать дифференцируемыми, то и дифференцируемо; последнее за исключением точки $t = u$. Значит, коэффициенты Фурье $P(t, u)$ при разложении в ряд по $\cos k\pi t$ будут иметь порядок $\frac{1}{k^2}$, а порядок аппроксимации в среднем $P(t, u)$ линейной комбинацией этих функций будет

$$O\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Как и выше, устанавливается равномерная сходимость последовательности приближённых решений к решению x^*, причём здесь, очевидно, будет

$$\| x^* - \tilde{x}_n \|_C = O\left(n^{-\frac{2}{2}}\right)^{1)}.$$

Замечание 1 и здесь, конечно, остаётся в силе.

Замечание 2. Все результаты этого параграфа могли быть получены и другим путём. Именно, дифференциальное уравнение (1) можно было свести к интегральному уравнению относительно $x'(t)$. Применение метода Галеркина к дифференциальному уравнению равносильно применению метода моментов (Ритца) к этому интегральному уравнению, что рассмотрено в § 5.

В заключение параграфа укажем, что под общую схему данной теории подходят также основные методы приближённого решения дифференциальных уравнений в частных производных, однако подробнее мы на этом останавливаться не будем.

ГЛАВА III

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Как известно, значительная часть проблем математической физики — большинство линейных проблем анализа — может быть сведена к задаче об экстремуме квадратичных функционалов.

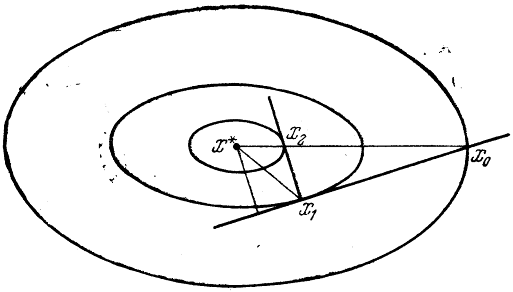
Этот факт может быть использован, с одной стороны, для различных теоретических исследований, относящихся к этим проблемам (теоремы существования решения, свойства собственных значений и т. д.). С другой стороны, он служит базой прямых методов решения названных проблем.

---

1) Этот результат установлен в монографии Н. М. Крылова [21].

В настоящей главе развит некоторый метод последовательных приближений для решения задач о минимуме квадратичных функционалов и связанных с ними линейных проблем—метод наискорейшего спуска.

Идея метода заключается в следующем. В линейном нормированном пространстве рассматривается квадратичный функционал $I(x)$ [1]. При разыскании его минимума берём за начальное приближение произвольный элемент x_0. Отыскиваем направление градиента в точке x_0, т. е., найдя $\frac{d}{d\varepsilon}[I(x_0+\varepsilon x)]$, подбираем нормированный элемент x так, чтобы указанная производная при $\varepsilon=0$ была максимальная. Пусть x'—такой элемент. Так как $I(x_0+\varepsilon x')$—многочлен второй степени относительно ε, то при некотором $\varepsilon=\varepsilon_1$ он достигнет минимального значения. Элемент $x_1=x_0+\varepsilon_1 x'$ принимаем за следующее приближение, после чего процесс повторяется.



Рассматриваемый метод может быть интерпретирован геометрически. Пусть сначала пространство, в котором определён функционал $I(x)$, двумерное. Линии уровня $I(x)=C$ представляют, вообще говоря, семейство подобных эллипсов с центром в точке минимума. Точка x_0, с которой мы начинаем процесс, лежит на некотором эллипсе семейства, именно, на $I(x)=I(x_0)$. От неё мы идём по направлению градиента, т. е. по нормали к этому эллипсу до точки, соответствующей наименьшему значению $I(x)$ на этой нормали, т. е. до точки x_1, где она коснётся некоторого эллипса семейства. От этой точки идём по нормали к эллипсу $I(x)=I(x_1)$ и т. д.

Если число измерений пространства больше двух, то вместо семейства эллипсов в качестве поверхностей уровня появится семейство эллипсоидов. Однако каждый шаг процесса может быть рассмотрен в плоскости. Именно, в плоскости, проходящей через точку минимума и точки x_0 и x_1. Сечения плоскостью эллипсоидов семейства будут эллипсы, нормальность же и касание сохраняются, так что всё будет выглядеть так же, как в двумерном случае.

Принципиальное отличие метода наискорейшего спуска от прямых методов Ритца, Галеркина и автора заключается в том, что последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, а в форме, определяемой самой задачей. От методов последовательных приближений типа ряда Неймана или Пикара данный метод отличается размером области сходимости, которая в ряде важных случаев совпадает с областью существования решения, а также нелинейным характером зависимости последовательных приближений.

[1]) Под квадратичным мы понимаем здесь такой функционал $I(x)$, что выражение $I(x+\varepsilon z)$ есть многочлен второй степени относительно ε, каковы бы ни были элементы x и z.

Идея этого метода восходит ещё к Коши [1]), который предложил его для решения задачи о минимуме функции n переменных и приводящейся к ней задаче о решении систем n алгебраических уравнений с n неизвестными. В том виде, как он изложен здесь для общих функциональных уравнений с применением к дифференциальным и интегральным уравнениям, метод разработан в наших работах. Иные попытки развития идей Коши были даны в работах Темпля, а также Куранта и некоторых других [2]).

Мы даём теорию этого метода в применении к функциональным уравнениям в пространстве Гильберта. В соответствии с этим в § 1 даются вкратце те сведения о пространстве Гильберта, которые используются в изложении.

§ 1. Пространство Гильберта [3])

Линейное множество $\mathcal{H}$ называется *пространством Гильберта*, если для каждой пары элементов x, y этого множества определено скалярное произведение их (x, y) — вещественное число, удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$,
4) *если* $x \neq 0$, то $(x, x) > 0$.

Из этих аксиом следует справедливость неравенства

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y),$$

известного под названием *неравенства Буняковского*.

Скалярное произведение позволяет ввести норму. Именно, полагаем

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Аксиомы нормированного пространства при таком определении нормы будут выполнены.

Будем требовать ещё, чтобы $\mathcal{H}$ было *полным* (как нормированное пространство) и *сепарабельным*, т. е. что в $\mathcal{H}$ существует исчислимое всюду плотное множество.

Пространство L^2 суммируемых с квадратом функций можно рассматривать как гильбертово пространство, если скалярное произведение определить в нём следующим образом:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Без труда проверяется, что аксиомы 1)—4) выполнены, а так как норма, определённая через скалярное произведение, совпадает с нормой, определённой в гл. 1, то имеет место и полнота.

---

[1]) См. А. Коши [1].

[2]) См. Л. В. Канторович [12], [13]; Г. Темпль [42]; Р. Курант [24].

[3]) По поводу теории пространства Гильберта см. А. И. Плеснер [35], а также В. И. Смирнов [39]. Мы рассматриваем здесь только вещественное пространство Гибельта.

То же справедливо и по отношению к пространству l^2. Здесь скалярное произведение определяется по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots); \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots).$$

Если в пространстве L^2 взять полную ортогональную систему нормированных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, то, соотнося каждой функции $x \in L^2$ совокупность её коэффициентов Фурье по этой системе, мы получим соответствие между L^2 и l^2. Это соответствие, как это следует из обобщённого равенства Парсеваля,

$$\int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$$

(ξ_i, η_i—коэффициенты Фурье функции $x(t)$, соответственно $y(t)$) не изменяет скалярного произведения. Поэтому L^2 и l^2 можно рассматривать как одно и то же гильбертово пространство.

Другим примером гильбертова пространства является n-мерное векторное пространство R^n. Скалярное произведение в нём — обычное скалярное произведение двух векторов. Можно доказать, что всякое гильбертово пространство изометрично либо L^2, либо R^n.

Наличие в пространстве скалярного произведения позволяет глубже и детальнее исследовать его, в частности, позволяет развить теорию линейных операторов значительно более полным образом, чем в общем пространстве типа B.

Отметим, например, такой очевидный факт.

Скалярное произведение (x, y) при фиксированном y представляет собой линейный функционал в $\mathcal{H}$. Аддитивность его вытекает из аксиомы 2), непрерывность же есть следствие неравенства Буняковского

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} = \|x\|\,\|y\|.$$

Таким образом, $\|f\| \leqslant \|y\|$, но так как $f(y) = (y, y) = \|y\|^2$, то $\|f\| = \|y\|$.

Приведём, наконец, некоторые сведения из теории операторов. В отличие от общих пространств типа B здесь употребительна несколько иная терминология. Аддитивный и непрерывный оператор называют не линейным, а *ограниченным*.

Пусть A—такой оператор. Он определяет функционал

$$A(x, y) = (Ax, y), \tag{1}$$

который оказывается *билинейным*, т. е. аддитивным по обеим переменным, и *ограниченным*

$$|A(x, y)| = |(Ax, y)| \leqslant \|Ax\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|. \tag{1'}$$

Нетрудно показать, что, наоборот, всякому билинейному и ограниченному функционалу $A(x, y)$ можно однозначно соотнести ограниченный оператор A так, что будет выполнено (1).

Рассмотрим теперь билинейный функционал

$$A^*(x, y) = (x, Ay). \tag{2}$$

В силу предыдущего функционалу (2) соответствует по формуле (1) некоторый ограниченный оператор A^*

$$(x, Ay) = (A^*x, y).$$

Оператор A^* называется *сопряжённым* для оператора A. Особенно важен случай, когда $A^* = A$, т. е. когда билинейный функционал (1) симметричен, $(Ax, y) = (x, Ay)$. Такой оператор называется *самосопряжённым* или *симметричным*.

Заметим, что операторы A^*A и AA^* всегда симметричны. Действительно, $(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)$.

Обращаясь к примерам гл. 1, мы без труда устанавливаем, что если оператор A в R^n задаётся матрицей $\|a_{i,k}\|$, то самосопряжённость его означает то, что указанная матрица симметрична, $a_{i,k} = a_{k,i}$. То же самое можно сказать об операторе в l^2.

Оператор в L^2

$$Ax = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

будет самосопряжён в том и только в том случае, когда ядро $K(s, t)$ симметрично, $K(s, t) = K(t, s)$.

Рассмотрим квадратичный функционал (Ax, x). Вообще говоря, различным операторам A может соответствовать один и тот же квадратичный функционал. Однако, если потребовать, чтобы A был *самосопряжённым* оператором, функционал (Ax, x) *однозначно* определяет оператор A. Действительно, в этом случае, исходя из (Ax, x), может быть определён билинейный функционал $(Ax, y) = \frac{1}{2}\,[(A(x+y),\ x+y) - (Ax, x) - (Ay, y)]$.

Квадратичный функционал (Ax, x) также *ограничен*, именно, имеет место неравенство

$$m(x, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant M(x, x). \tag{3}$$

Наибольшее m, соответственно наименьшее M, для которых удовлетворяется неравенство (3), называются *границами самосопряжённого оператора* A.

Рассмотрим теперь оператор

$$A_\lambda = \lambda I - A,$$

где I — тождественный оператор, а λ — вещественное число.

Если при некотором значении λ существует обратный оператор A_λ^{-1}, то это значение λ называется *регулярным*; все прочие значения образуют *спектр* оператора A. Если A — самосопряжённый оператор, то спектр расположен в промежутке $[m, M]$, где m и M границы оператора, причём как m, так и M принадлежат спектру.

Из точек спектра выделяют так называемые *собственные значения* оператора A. По определению λ есть *собственное значение* оператора A, если существует элемент $x \neq 0$ такой, что

$$A_\lambda x = \lambda x - Ax = 0.$$

Элемент x называется *собственным элементом*, соответствующим (или принадлежащим) данному собственному значению λ. Совокупность всех собственных элементов, соответствующих одному и тому же λ, образует линейное подпространство H — *собственное подпространство* λ. *Размерностью* собственного значения λ называется размерность соответствующего собственного пространства.

Основной факт теории линейных операторов в пространстве Гильберта заключается в возможности *интегрального представления* линейных операторов.

Именно, *каждому ограниченному самосопряжённому оператору A можно соотнести систему тоже самосопряжённых операторов e_λ (разложение единицы), причём*

1) *для каждого λ $e_\lambda^2 = e_\lambda$;*

2) *монотонно возрастающих, т. е. для $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ $(e_{\lambda_1}x, x) \geqslant (e_{\lambda_2}x, x)$;*

3) $e_m = 0$; $e_M = I$;

4) *если в промежутке $[\alpha, \beta]$ нет точек спектра, то $e_\alpha = e_\beta$.*

Оператор A при этом может быть представлен в виде:

$$A = \int_m^M \lambda \, de_\lambda, \tag{4}$$

что следует понимать так: для любого x

$$(Ax, x) = \int_m^M \lambda d(e_\lambda x, x). \tag{5}$$

Равным образом имеют место формулы

$$A^n = \int_m^M \lambda^n \, de_\lambda, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{6}$$

причём при отрицательных n требуется существование оператора A^n, т. е., иными словами, требуется, чтобы число нуль не входило в спектр. При $n = 0$, например, получаем

$$I = \int_m^M de_\lambda, \quad \text{т. е.} \quad (x, x) = \int_m^M d(e_\lambda x, x),$$

при $n = -1$

$$A^{-1} = \int_m^M \frac{1}{\lambda} \, de_\lambda; \quad (A^{-1}x, x) = \int_m^M \frac{d(e_\lambda x, x)}{\lambda}.$$

Заметим, что если некоторое λ есть *изолированная* точка спектра, то оно есть непременно *собственное значение*.

Оператор A называется *вполне непрерывным*, если его спектр, за исключением, может быть, нуля, состоит из *изолированных точек конечной* *кратности* (согласно сделанному выше замечанию все точки спектра будут собственными значениями, поэтому можно говорить о кратности[1]). В случае, когда оператор A вполне непрерывный, формула (4) (или, что то же самое, формула (5)) приобретает особенно простой вид. Перенумеруем все собственные значения, отличные от нуля, повторяя каждое из них столько раз, какова его кратность. Мы получим последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — соответствующие собственные элементы. Их можно считать ортогональными друг другу и нормированными, т. е. $(x_i, x_k) = 0$ $(i \neq k)$ и $(x_i, x_i) = 1$. Тогда, используя пункт 4) теоремы об интегральном представлении оператора, формулу (5) можно записать в форме

$$(Ax, x) = \sum_k \lambda_k c_k^2,$$

где $c_k = (x, x_k)$.

Как это следует из теории интегральных уравнений, оператор в L^2

$$Ax = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

вполне непрерывный, если $\int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, ds\, dt < +\infty$.

В l^2 оператор, задаваемый матрицей $\|a_{i,k}\|$, будет вполне непрерывным, если $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 < +\infty$.

В R^n каждый линейный оператор вполне непрерывен.

§ 2. Общие функциональные уравнения. Случай ограниченного оператора

Метод наискорейшего спуска мы рассмотрим применительно к решению уравнения

$$L(x) = Ax - \varphi = 0, \tag{1}$$

где x и φ — элементы гильбертова пространства $\mathcal{H}$, а A — линейный (не обязательно ограниченный) оператор, определённый в этом пространстве или его части.

Рассмотрим сначала случай, когда A — *симметричный ограниченный* оператор. Введём квадратичный функционал

$$H(x) = (Ax, x) - 2(\varphi, x). \tag{2}$$

Если через z обозначить любой элемент пространства, а через ε — вещественный параметр, то

$$\begin{aligned} H(x + \varepsilon z) &= (Ax + \varepsilon Az, x + \varepsilon z) - 2(x + \varepsilon z, \varphi) = \\ &= (Ax, x) + \varepsilon[(Ax, z) + (Az, x)] + \varepsilon^2 (Az, z) - 2(x, \varphi) - 2\varepsilon(z, \varphi) = \\ &= H(x) + 2\varepsilon(Ax - \varphi, z) + \varepsilon^2 (Az, z). \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) Общепринято другое определение вполне непрерывного оператора, эквивалентное приведённому здесь.

Отсюда видно, что задача решения уравнения (1) приводится к задаче отыскания минимума функционала (2). В самом деле, если $x = x^*$ обращает в минимум функционал (2), то из (3) следует, что $(Ax^* - \varphi, z) = 0$ при любом $z \in \mathcal{H}$, откуда $Ax^* - \varphi = 0$, т. е. x^*—решение уравнения (1).

Для отыскания минимума функционала (2) применим метод наискорейшего спуска. Начнём с некоторого начального значения x_0. Определим z так, чтобы

$$\frac{d}{d\varepsilon}[H(x_0 + \varepsilon z)]_{\varepsilon=0} = 2(Ax_0 - \varphi, z)$$

было наибольшим при условии $\|z\| = \sqrt{(z, z)} = \text{const}$. Очевидно, следует принять $z = z_1$, где

$$z_1 = L(x_0) = Ax_0 - \varphi. \tag{4}$$

Действительно, на основании неравенства Буняковского видим, что

$$|(Ax_0 - \varphi, z)| = |(z_1, z)| \leqslant \|z_1\| \cdot \|z\|,$$

и знак равенства достигается именно при $z = z_1$.

Далее, определяем ε из условия минимума выражения (3), что даёт $\varepsilon = \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon_1 = -\frac{(z_1, z_1)}{(Az_1, z_1)}. \tag{5}$$

В соответствии с изложенным выше первое приближение для x определяется формулой

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1 = x_0 - \frac{(Lx_0, Lx_0)}{(ALx_0, Lx_0)} L(x_0)\,[1]. \tag{6}$$

Аналогичными формулами определяются и следующие приближения.

Введём дальнейшее ограничение: предположим оператор A *положительно определённым*, точнее, что

$$m(x, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant M(x, x),$$

где $0 < m \leqslant M < +\infty$. При этих условиях существует обратный оператор A^{-1} и уравнение (1) имеет единственное решение x^*:

$$Ax^* = \varphi; \quad x^* = A^{-1}\varphi.$$

Относительно сходимости процесса к этому решению и его быстроты в этом случае имеет место

Теорема 1. *Последовательные приближения $x_0, x_1, \ldots$ сильно сходятся (т. е. по норме) к решению уравнения (1) с быстротой геометрической прогрессии.*

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. *Имеет место неравенство*

$$\sum_k \gamma_k u_k^2 \sum_k \gamma_k^{-1} u_k^2 \leqslant \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right]^2 \left(\sum_k u_k^2\right)^2,$$

[1] Формулы (5) и (6) теряют смысл, когда $(Az_1, z_1) = 0$. Но если при этом окажется $z_1 = L(x_0) = 0$, то x_0 — решение. Если же $(z_1, z_1) \neq 0$, то ε может быть взято сколько угодно большим и, очевидно, $\min H = -\infty$.

где m и M границы чисел γ_k:

$$0 < m \leqslant \gamma_k \leqslant M\ ^1).$$

Можно считать, что суммы конечны и что $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$, а $\sum_k u_k^2 = 1$.

Будем искать максимум $G = \sigma\tilde{\sigma} = \left(\sum_{k=1}^{p} \gamma_k u_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\gamma_k} u_k^2\right)$ при условии $\sum_{k=1}^{p} u_k^2 = 1$.

Приравниваем нулю производные функции

$$F = G - \lambda\left(\sum_{k=1}^{p} u_k^2 - 1\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u_s} = \sigma\frac{1}{\gamma_s} u_s + \tilde{\sigma}\gamma_s u_s - \lambda u_s = 0, \text{ т. е. } u_s(\sigma + \tilde{\sigma}\gamma_s^2 - \lambda\gamma_s) = 0.$$

Второй множитель в последнем выражении представляет собой многочлен второй степени относительно γ_s, следовательно, он может обратиться в нуль не более чем при двух значениях s; пусть это будут $s = k, l$. Для остальных s должно быть $u_s = 0$.

Но тогда

$$G_{\max} = (\gamma_k u_k^2 + \gamma_l u_l^2)\left(\frac{1}{\gamma_k} u_k^2 + \frac{1}{\gamma_l} u_l^2\right) = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma_l}} + \sqrt{\frac{\gamma_l}{\gamma_k}}\right]^2 (u_k^2 + u_l^2)^2 -$$

$$-\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma_l}} + \sqrt{\frac{\gamma_l}{\gamma_k}}\right]^2 (u_k^2 - u_l^2)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\gamma_k}{\gamma_l}} + \sqrt{\frac{\gamma_l}{\gamma_k}}\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}\right]^2.$$

Доказательство теоремы. Из (3) получается, что изменение H при переходе от x_0 к x_1 есть

$$\Delta H = H(x_1) - H(x_0) = 2\varepsilon_1(z_1, z_1) + \varepsilon_1^2(Az_1, z_1) = -\frac{(z_1, z_1)^2}{(Az_1, z_1)}. \quad (7)$$

Аналогично разность значений функционала H для x_0 и x^* может быть найдена, если положить в (3) $x = x^*$, $z = x_0 - x^* = \eta$, $\varepsilon = 1$,

$$\Delta^* H = H(x_0) - H(x^*) = 2(Ax^* - \varphi, x_0 - x^*) + (A(x_0 - x^*), x_0 - x^*) = (A\eta, \eta). \quad (8)$$

Так как $\eta = x_0 - x^*$, то

$$A\eta = Ax_0 - \varphi = z_1; \quad \eta = A^{-1}z_1. \quad (9)$$

Пользуясь (7), (8) и (9), получим

$$\frac{\Delta H}{\Delta^* H} = -\frac{(z_1, z_1)^2}{(Az_1, z_1)(A\eta, \eta)} = -\frac{(z_1, z_1)^2}{(Az_1, z_1)(A^{-1}z_1, z_1)}. \quad (10)$$

Для оценки этого отношения воспользуемся спектральным разложением оператора A:

$$A = \int_m^M \lambda\, de_\lambda; \quad (Az_1, z_1) = \int_m^M \lambda d(e_\lambda z_1, z_1) = \lim \sum \lambda(\Delta e_\lambda z_1, z_1), \quad (11)$$

---

1) Это предложение является частным случаем приведённого в книге Полиа и Сёге (См. Полиа и Сёге [36а], т. 1, стр. 80).

аналогично

$$(z_1, z_1) = \lim \sum (\Delta e_\lambda z_1, z_1); \quad (A^{-1}z_1, z_1) = \lim \sum \frac{1}{\lambda} (\Delta e_\lambda z_1, z_1). \tag{12}$$

Заменяя в выражении (10) скалярные произведения приближёнными их значениями по (11) и (12), найдём, используя неравенство леммы

$$-\frac{\Delta H}{\Delta^* H} \cong \frac{[\sum (\Delta e_\lambda z_1, z_1)]^2}{\sum (\Delta e_\lambda z_1, z_1) \sum \frac{1}{\lambda} (\Delta e_\lambda z_1, z_1)} \geqslant \frac{4}{\left[\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right]^2} = q > 0.$$

Приближённое равенство здесь верно со сколько угодно малой погрешностью, потому имеем и точное неравенство

$$-\frac{\Delta H}{\Delta^* H} = \frac{H(x_0) - H(x_1)}{H(x_0) - H(x^*)} \geqslant q,$$

отсюда

$$H(x_1) - H(x^*) \leqslant (1-q)[H(x_0) - H(x^*)] = C(1-q)$$

и для любого n

$$H(x_n) - H(x^*) \leqslant C(1-q)^n.$$

Далее,

$$\| x_n - x^* \|^2 = (\eta_n, \eta_n) \leqslant \frac{1}{m} (A\eta_n, \eta_n) = \frac{1}{m} [H(x_n) - H(x^*)] \leqslant \frac{C}{m} (1-q)^n =$$
$$= \frac{C}{m} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2n}.$$

Это и доказывает теорему.

Условие $m > 0$ может быть в известных случаях заменено на $m = 0$. Однако в этом случае теорема 1 перестаёт быть верной полностью, хотя бы уже потому, что решение уравнения (1) может не существовать или не быть единственным. Имеет место более слабое утверждение.

Теорема 2. *Если симметричный оператор A таков, что $0 \leqslant (Ax, x) \leqslant M(x, x)$ и если уравнение* (1) *имеет решение x^*, то последовательные приближения x_n, определяемые формулой* (6) *и аналогичными ей, дают минимизирующую последовательность, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} H(x_n) = H(x^*) \tag{13}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} (A(x_n - x^*), x_n - x^*) = 0. \tag{14}$$

Предварительно выскажем следующую лемму:

Лемма. *Если уравнение* (1) *имеет решение x^*, то каждое последующее приближение, определяемое формулой* (6), *ближе к нему, чем предыдущее*

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leqslant \| x_n - x^* \|\ ^{1)}.$$

Доказательство теоремы 2. Прежде всего, пользуясь тем, что $|(z_1, \eta)| \leqslant \| z_1 \| \, \| \eta \|$, а также равенством (8), имеем

$$\| z_1 \| \geqslant \frac{(z_1, \eta)}{\| \eta \|} = \frac{(A\eta, \eta)}{\| \eta \|} = \frac{H(x_0) - H(x^*)}{\| x_0 - x^* \|}.$$

---

[1]) Справедливость утверждения леммы может быть получена из геометрических соображений, если учесть указанную во введении картину расположения двух соседних приближений на плоскости. Действительно, наклонная x_0x^* больше наклонной x_1x^*. Можно дать и чисто аналитическое доказательство леммы.

Отсюда, привлекая (7), получим

$$-\Delta H = H(x_0) - H(x_1) = \frac{(z_1, z_1)^2}{(Az_1, z_1)} \geqslant \frac{\| z_1 \|^4}{M \| z_1 \|^2} \geqslant \frac{[H(x_0) - H(x^*)]^2}{M \| x_0 - x^* \|^2}.$$

Аналогичное неравенство справедливо и при любом n. Используя лемму, его можно записать так:

$$H(x_n) - H(x_{n+1}) \geqslant \frac{[H(x_n) - H(x^*)]^2}{M \| x_n - x^* \|^2} \geqslant \frac{[H(x_n) - H(x^*)]^2}{M \| x_0 - x^* \|^2} = Q [H(x_n) - H(x^*)]^2.$$

Если положить $H(x_n) - H(x^*) = r_n$, то это можно записать ещё так:

$$r_n - r_{n+1} \geqslant Q r_n^2. \tag{15}$$

Из этого следует, что числа r_n убывают, имеют конечный предел, и, переходя к пределу в (15), легко убедиться, что он равен 0, т. е. (13) установлено.

Можно без труда на основании неравенства (15) уточнить порядок убывания r_n, именно показать, что $r_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Теперь легко доказывается и (14). Вследствие (8)

$$\Delta^* H = H(x_0) - H(x^*) = (A\eta, \eta) = (A(x_0 - x^*),\ x_0 - x^*).$$

Это справедливо и для любого n, так что

$$(A(x_n - x^*),\ x_n - x^*) = H(x_n) - H(x^*) \to 0.$$

Замечание 1. Если $\lambda = 0$ есть изолированная точка спектра оператора A, то, в случае существования решения уравнения (1), последовательные приближения сходятся к нему с быстротой геометрической прогрессии.

В самом деле, пусть $\lambda = 0$ есть единственная точка спектра в промежутке $(-\infty, m)$, $m > 0$. В этом случае к решению x^* можно добавить произвольный элемент из собственного подпространства, соответствующего $\lambda = 0$. Можно поэтому считать, что элемент $\eta = x_0 - x^*$ ортогонален этому подпространству. Но тогда, если рассматривать оператор A в пространстве $\mathscr{H}_1$ — ортогональном дополнении собственного подпространства для $\lambda = 0$, A будет иметь обратный оператор и можно записать $\eta = A^{-1} z_1$, так что при интегрировании в качестве нижнего предела можно взять $m > 0$, а не нуль, вследствие чего оценка теоремы 1 сохраняет силу.

Замечание 2. Случай, когда оператор A в уравнении (1) не является симметричным, сводится к рассмотренному выше случаю симметричного оператора.

Действительно, рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (Ax - \varphi, Ax - \varphi) = (A^*Ax, x) - 2(Ax, \varphi) + (\varphi, \varphi) = \\ &= (A^*Ax, x) - 2(x, A^*\varphi) + (\varphi, \varphi). \end{aligned} \tag{16}$$

Если теперь написать функционал (2) для *симметричного и положительно полуопределённого* оператора A^*A, заменив в нём φ на $A^*\varphi$, то легко видеть, что функционал (16) отличается лишь слагаемым (φ, φ) от $H(x)$,

$$H_1(x) = H(x) + (\varphi, \varphi).$$

Но решение x^* уравнения (1) обращает в минимум функционал (16). Следовательно, оно обращает в минимум функционал (2), составленный для симметричного оператора A^*A с заменой φ на $A^*\varphi$. Задача же отыскания минимума функционала (2) для этого случая нами уже рассмотрена.

Замечание 3. Быстрота сходимости процесса, полученная нами в теореме 1, была порядка геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{M - m}{M + m}.$$

Дальнейшее повышение быстроты сходимости можно получить за счёт одновременного выполнения нескольких (двух, трёх и т. д.) шагов процесса.

Выясним вид результата второго приближения. Имеем $x_2 = x_1 + \varepsilon_2 z_2$, причём в свою очередь $x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1$, где $z_2 = L(x_1)$, а $z_1 = L(x_0)$, следовательно, $z_2 = L(x_0) + \varepsilon_1 L^2(x_0)$. Таким образом, имеем

$$x_2 = x_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) L(x_0) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 L^2(x_0).$$

Отсюда ясно, что во всяком случае не большее значение функционала H, чем в результате двух шагов описанного процесса, мы получим, если сразу будем отыскивать приближение в виде:

$$\bar{x}_1 = x_0 + \alpha L(x_0) + \beta L^2(x_0) = x_0 + \alpha z_1 + \beta u_1.$$

Определяем затем α и β из условия минимума выражения $H(\bar{x}_1)$. Это даёт систему двух уравнений с двумя неизвестными для определения этих величин:

$$\alpha(Az_1, z_1) + \beta(Az_1, u_1) + (z_1, z_1) = 0,$$
$$\alpha(Az_1, u_1) + \beta(Au_1, u_1) + (z_1, u_1) = 0.$$

Один шаг этого нового процесса, таким образом, даёт приближение к минимуму не худшее, чем два шага первоначального процесса, следовательно, в условиях теоремы 1, например,

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \sqrt{\frac{C}{m}} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2n}.$$

Фактически, вероятно, этот процесс даёт и большую быстроту сходимости, и представляло бы интерес провести исследование этого вопроса.

§ 3. Общие функциональные уравнения. Случай неограниченного оператора

Перейдём к случаю неограниченного оператора A. Прежде всего будем предполагать, что на некотором линейном множестве Ω_0, плотном в $\mathscr{H}$, задан известный, «изученный», симметричный оператор B положительно полуограниченный, точнее

$$(Bx, x) = x\mathscr{B}x \geqslant (x, x). \tag{1}$$

Прежде всего определяется естественным образом, согласно Фридрихсу[1]), область определения функционала $x\mathscr{B}x$.

Именно, рассмотрим последовательности элементов $x_n \in \Omega_0$ такого рода, что

$$\lim_{n, m\to\infty} (x_n - x_m)\mathscr{B}(x_n - x_m) = 0. \tag{2}$$

Каждая такая последовательность в силу (1) сильно сходится к некоторому элементу $x \in \mathscr{H}$. При этом две таких последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ могут сходиться сильно к одному и тому же элементу x только в том случае, когда они $\mathscr{B}$-эквивалентны, т. е. когда

$$(x_n - x'_n)\mathscr{B}(x_n - x'_n) \to 0.$$

Обозначим через Ω_B линейное множество элементов $x \in \mathscr{H}$, являющихся пределами последовательностей, удовлетворяющих условию (2). На области Ω_B определяется функционал $x\mathscr{B}x'$ с помощью формулы

$$x\mathscr{B}x' = \lim x_n \mathscr{B}x'_n, \tag{3}$$

где $x_n \to x$, $x'_n \to x'$, причём оказывается, что предел существует, каковы бы ни были последовательности $x_n \to x$ и $x'_n \to x'$, и его величина не зависит от выбора этих последовательностей.

Основные свойства функционала $\mathscr{B}$: билинейность, полуограниченность и симметрия, очевидно, сохраняются на Ω_B.

---

1) См. К. Фридрихс [44].

Нетрудно видеть, что если в Ω_B определить новое скалярное произведение, полагая $(x, x')_B = x\mathcal{B}x'$, то Ω_B окажется гильбертовым пространством.

Далее, сам оператор B с сохранением самосопряжённости (симметрии) распространяется на более узкую область Ω_B^*, $\Omega_0 \subset \Omega_B^* \subset \Omega_B$, при этом такую, что его значения в Ω_B^* заполняют всё пространство $\mathcal{H}$ [1]). Таким образом, можем считать обратный оператор B^{-1} определённым на всём $\mathcal{H}$.

Оператор A будем предполагать заданным также на множестве Ω_0. A будем считать симметричным и $\mathcal{B}$-ограниченным, т. е.

$$|x\mathcal{A}x| = |(Ax, x)| \leqslant M(Bx, x) \quad \text{для} \quad x \in \Omega_0. \tag{4}$$

Функционал $x\mathcal{A}x'$ также естественным образом распространяется на Ω_B. Действительно, функционал xAx' в пространстве Ω_B, рассматриваемом как гильбертово пространство с метрикой $\|x\|_B = (x\mathcal{B}x)^{1/2}$, есть ограниченный билинейный функционал, определённый на плотном множестве Ω_0. А в таком случае он распространяется и на все Ω_B, причём оказывается связанным с некоторым ограниченным (переводящим Ω_B в Ω_B) оператором A', а именно

$$x\mathcal{A}x' = (x, A'x')_B = x\mathcal{B}(A'x') \quad x,\ x' \in \Omega_B. \tag{5}$$

Последнее равенство можно принять за определение формы $\mathcal{A}$ на множестве Ω_B. Очевидно, она остаётся билинейной и симметричной.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathcal{B}x = \mathcal{A}x_0. \tag{6}$$

Оно имеет смысл, когда x и x_0 принадлежат Ω_0. Очевидно, что равенство (6) равносильно тому, чтобы равенство $(Bx, u) = (Ax_0, u)$ или

$$xBu = x_0Au \tag{7}$$

выполнялось бы для всех u, принадлежащих некоторому плотному в H множеству, например, $u \in \Omega_0$. В форме (7) данное уравнение имеет смысл и тогда, когда x_0 и x принадлежат Ω_B. Решение этого уравнения, т. е. такое $x \in \Omega_B$, что равенство (7) выполняется для всех u, принадлежащих плотному подмножеству Ω_B, скажем, Ω_0, будем называть *обобщённым решением* уравнения (6).

Можно показать, что такое обобщённое решение существует при любом $x_0 \in \Omega_B$.

Если воспользоваться оператором A', введённым в (5), то уравнение (7) можно переписать так:

$$x\mathcal{B}u = x_0\mathcal{A}u = (A'x_0)\,\mathcal{B}u,$$

откуда видно, что его решение есть

$$x = A'x_0, \tag{8}$$

и при $x_0 \in \Omega_B$ имеем $x \in \Omega_B$.

К уравнению (6) сводится уравнение вида

$$Bx = Ax_0 - \varphi, \tag{9}$$

где φ—любой элемент из $\mathcal{H}$. Действительно, поскольку существует оператор B^{-1}, φ можно представить в форме

$$\varphi = B\varphi_1,$$

где $\varphi_1 \in \Omega_B^* \subset \Omega_B$. Тогда уравнение (9) можно записать так:

$$B(x + \varphi_1) = Ax_0,$$

что сводится к (6). Поэтому оно имеет обобщённое решение $x \in \Omega_B$ такого рода, что для $u \in \Omega_0$ будет

$$(x + \varphi_1)\,\mathcal{B}u = x_0\,\mathcal{A}u.$$

Если воспользоваться равенством (8), то решение уравнения (9) можно записать так:

$$x = A'x_0 - \varphi_1 = A'x_0 - B^{-1}\varphi. \tag{10}$$

---

[1]) См. К. Фридрихс [44], а также А. И. Плеснер [35].

Перейдём теперь к изучению метода наискорейшего спуска для уравнения

$$L(x) = Ax - \varphi = 0. \tag{11}$$

Как в § 2, значение функционала H ((2) § 2) для приращённого аргумента $x_0 + \varepsilon z$ можно записать в виде:

$$H(x_0 + \varepsilon z) = H(x_0) + 2\varepsilon(Ax_0 - \varphi, z) + \varepsilon^2(Az, z). \tag{12}$$

При этом будем считать, что x_0 принадлежит области определения оператора A и во всяком случае $x_0 \in \Omega_B$ и также $z \in \Omega_B$.

Направление градиента будем подбирать при условии $z\mathcal{B}z = \text{const}$. Для этой цели годится z_1, обобщённое решение уравнения (9), т. е. z_1, удовлетворяющее уравнению (10). Коэффициент при 2ε в выражении (12) будет при этом $z_1\mathcal{B}z_1$.

ε_1 теперь находится из условия максимума выражения (12) и определяется формулой

$$\varepsilon_1 = -\frac{z_1\mathcal{B}z_1}{z_1\mathcal{A}z_1}. \tag{13}$$

Это выражение имеет смысл, так как $z_1 \in \Omega_B$. Первое приближение x_1 определяется в виде:

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1 = x_0 - \frac{z_1\mathcal{B}z_1}{z_1\mathcal{A}z_1} z_1. \tag{14}$$

Очевидно, $x_1 \in \Omega_B$.

Исходя из x_1, определяем таким же образом второе приближение x_2 и т. д.

При этом мы имеем в виду получение данным процессом *обобщённого решения* уравнения (11), т. е. элемента $x \in \Omega_B$ такого, что тождественно

$$x\mathcal{A}u = (\varphi, u) \quad \text{для} \quad u \in \Omega_0.$$

Относительно сходимости процесса в этом случае справедлива

Теорема 3. *Если оператор A $\mathcal{B}$-ограничен и положительно определённый, т. е. если*

$$m(x\mathcal{B}x) \leqslant (Ax, x) \leqslant M(x\mathcal{B}x), \qquad 0 < m \leqslant M < +\infty, \tag{15}$$

то имеет место $\mathcal{B}$-сходимость процесса к обобщённому решению уравнения (11) *с быстротой геометрической прогрессии.*

Доказательство. Мы сведём рассмотрение к случаю ограниченного оператора. Примем за основное пространство Ω_B и введём в нём новую метрику, полагая

$$(x, x')_B = x\mathcal{B}x'.$$

Уравнение (11) можно переписать в следующих формах:

$$Ax = \varphi,$$
$$(Ax, u) = (\varphi, u),$$
$$x\mathcal{A}u = (\varphi, u) = (B\varphi_1, u) = \varphi_1\mathcal{B}u,$$
$$(A'x)\mathcal{B}u = \varphi_1\mathcal{B}u,$$

или, наконец,

$$(A'x, u)_B = (\varphi_1, u)_B,$$

что равносильно уравнению

$$A'x = \varphi_1. \tag{16}$$

Если последнее уравнение рассматривать в пространстве Ω_B, то оно будет того вида, который рассмотрен в § 2. Применение к уравнению (16) формул (4) и (5) § 2 даёт

$$z_1 = A'x_0 - \varphi_1,$$
$$\varepsilon_1 = -\frac{(z_1, z_1)_B}{(A'z_1, z_1)_B}.$$

Сравнение с (10) показывает, что z_1 в этом случае совпадает с обобщённым решением уравнения (9), а если ε_1 переписать в виде

$$\varepsilon_1 = -\frac{(z_1, z_1)_B}{(A'z_1, z_1)_B} = -\frac{z_1\mathcal{B}z_1}{z_1\mathcal{A}z_1},$$

то мы убеждаемся, что процесс последовательных приближений для уравнения (16) совпадает с построенным в § 2 процессом для уравнения (1). Но условие (15) можно переписать так:

$$m(x, x)_B \leqslant (A'x, x)_B \leqslant M(x, x)_B;$$

таким образом, применима теорема 1.

§ 4. Отыскание собственных значений

Метод наискорейшего спуска может быть применён и для отыскания экстремума неквадратичных функционалов. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения наибольшего собственного значения μ некоторого вполне непрерывного симметричного оператора A. Будем считать A положительно определённым. Тогда, очевидно, это наибольшее собственное значение есть максимум функционала

$$G(x) = (Ax, x) \tag{1}$$

при условии $(x, x) = 1$. Задача отыскания максимума функционала (1) при условии $(x, x) = 1$ эквивалентна задаче отыскания максимума функционала

$$L(x) = \frac{G(x)}{(x, x)} \tag{2}$$

уже без всяких ограничений, налагаемых на x.

Элементом x^*, доставляющим максимум функционалу (2), будет любой из собственных элементов, принадлежащих этому собственному значению.

Идея метода остаётся без изменений. Начинаем процесс с произвольного x_0 с $\|x_0\| = 1$. Соответствующее значение $L(x)$ есть

$$\mu_0 = L(x_0) = G(x_0) = (Ax_0, x_0).$$

Составляем выражение

$$L(x_0 + \varepsilon z) = \frac{(Ax_0, x_0) + 2\varepsilon(Ax_0, z) + \varepsilon^2(Az, z)}{1 + 2\varepsilon(x_0, z) + \varepsilon^2(z, z)}.$$

Дифференцируя его, найдем

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(x_0 + \varepsilon z) = 2\frac{[(Ax_0, z) + \varepsilon(Az, z)][1 + 2\varepsilon(x_0, z) + \varepsilon^2(z, z)]}{[1 + 2\varepsilon(x_0, z) + \varepsilon^2(z, z)]^2} -$$

$$-2\frac{[(x_0, z) + \varepsilon(z, z)][(Ax_0, x_0) + 2\varepsilon(A_{x_0}, z) + \varepsilon^2(Az, z)]}{[1 + 2\varepsilon(x_0, z) + \varepsilon^2(z, z)]^2} =$$

$$= 2\frac{(Ax_0 - \mu_0 x_0, z) + \varepsilon(Az - \mu_0 z, z)' + \varepsilon^2[G(z)(x_0, z) - (Ax_0, z)(z, z)]}{[1 + 2\varepsilon(x_0, z) + \varepsilon^2(z, z)]^2}, \tag{3}$$

при $\varepsilon = 0$ получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}[L(x_0 + \varepsilon z)]_{\varepsilon=0} = 2(Ax_0 - \mu_0 x_0, z).$$

Следовательно, «направление градиента» даётся элементом

$$z_1 = Ax_0 - \mu_0 x_0.$$

Отметим, что

$$(z_1, x_0) = (Ax_0 - \mu_0 x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) - \mu_0 (x_0, x_0) = 0, \quad (4)$$

$$(z_1, z_1) = (Ax_0 - \mu_0 x_0, Ax_0) = (A^2 x_0, x_0) - \mu_0^2 = G_2(x_0) - \mu_0^2, \quad (5)$$

$$G(z_1) = (Az_1, z_1) = (A^2 x_0 - \mu_0 Ax_0, Ax_0 - \mu_0 x_0) = G_3(x_0) - 2\mu_0 G_2(x_0) + \mu_0^3, \quad (6)$$

где положено $G_2(x) = (A^2 x, x)$; $G_3(x) = (A^3 x, x)$.

Учитывая выбор z_1 и пользуясь (4), мы можем упростить выражение (3); именно, получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}[L(x_0 + \varepsilon z_1)] = 2\,\frac{(z_1, z_1) + \varepsilon[G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1)] - \varepsilon^2 (z_1, z_1)^2}{[1 + \varepsilon^2 (z_1, z_1)]^2}.$$

Из последнего выражения видно, что значение ε, обращающее в нуль эту производную и обеспечивающее максимум выражению $L(x_0 + \varepsilon z_1)$, является бо́льшим корнем уравнения

$$\varepsilon^2 (z_1, z_1)^2 - \varepsilon[G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1)] - (z_1, z_1) = 0, \quad (7)$$

т. е.

$$\varepsilon_1 = \frac{G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1) + \sqrt{[G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1)]^2 + 4(z_1, z_1)^3}}{2(z_1, z_1)^2}.$$

Если приближение x_0 достаточно близко к x^*, то (z_1, z_1) мало, поэтому можно написать приближённое выражение для ε_1

$$\varepsilon_1 \cong \frac{G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1) + \left[\mu_0(z_1, z_1) - G(z_1)\right] + \frac{1}{2}\,\frac{4(z_1, z_1)^3}{\mu_0(z_1, z_1) - G(z_1)}}{2(z_1, z_1)^2} =$$

$$= -\frac{(z_1, z_1)}{G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1)}. \quad (8)$$

Подсчитаем изменение L, учтём при этом (4), (5), (7),

$$\Delta L = L(x_0 + \varepsilon_1 z_1) - L(x_0) = \frac{\mu_0 + 2\varepsilon_1 (Ax_0, z_1) + \varepsilon_1^2 (Az_1, z_1)}{1 + \varepsilon_1^2 (z_1, z_1)} - \mu_0 =$$

$$= \frac{2\varepsilon_1 (z_1, z_1) + \varepsilon_1^2 [G(z_1) - \mu_0(z_1, z_1)]}{1 + \varepsilon_1^2 (z_1, z_1)} = \frac{\varepsilon_1 [1 + \varepsilon_1^2 (z_1, z_1)](z_1, z_1)}{1 + \varepsilon_1^2 (z_1, z_1)} = \varepsilon_1 (z_1, z_1). \quad (9)$$

После определения ε_1 за следующее приближение к собственному элементу можно принять элемент $x^{(1)} = x_0 + \varepsilon_1 z_1$ после того, как он нормирован, т. е.

$$x_1 = \frac{x^{(1)}}{\| x^{(1)} \|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\| x_0 + \varepsilon_1 z_1 \|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\sqrt{(x_0 + \varepsilon_1 z_1, x_0 + \varepsilon_1 z_1)}}.$$

Относительно сходимости процесса может быть установлена следующая теорема:

Теорема 4. *Последовательность значений функционала $\{L(x_n)\}$ сходится к числу ν_1, наибольшему собственному значению оператора A, а последовательность элементов $\{x_n\}$ сильно сходится к некоторому собственному элементу, принадлежащему ν_1.*

В обоих случаях сходимость имеет место с быстротой геометрической прогрессии.

Доказательство. Будем считать, что x_0 не принадлежит ортогональному дополнению инвариантного подпространства, соответствующего ν_1, что практически не умаляет общности.

Сравним изменение L (9) с изменением при переходе от x_0 к x^*, т. е. с разностью

$$L(x^*)-L(x_0)=\nu_1-\mu_0.$$

Так как наша цель состоить в оценке быстроты сходимости, то мы будем предполагать для упрощения, что элемент x_0 уже близок к собственному элементу x^*. Это допустимо, т. к. такое положение всё равно наступит после нескольких шагов процесса.

Перенумеруем все собственные значения оператора A в порядке их убывания

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots$$

В каждом из инвариантных подпространств выберем полную нормированную систему и объединим все их в одну $x_1^*=x^*$, $x_2^*, \ldots$ Дополним эту систему до полной ортогональной нормированной системы элементами

$$x_0^*,\ x_{-1}^*,\ \ldots\ x_{-k}^*,\ \ldots$$

и положим $\nu_k=0$ для $k=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ Тогда

$$x_0=\sum_k c_k x_k^*.$$

При этом будем считать, что если $\nu_1=\ldots=\nu_{k_1}$, то элементы $x_2^*, \ldots, x_{k_1}^*$ выбраны так, что соответствующие

$$c_k=(x_0, x_k^*)=0 \quad \text{для} \quad k=2,\ 3,\ \ldots,\ k_1.$$

Это обстоятельство не нарушается при переходе от x_0 к x_1 и т. д. Далее, так как элемент x_0 близок к x_1^* и нормирован, то величина

$$b^2=1-c_1^2=\sum_{k=2}^{\infty} c_k^2+\sum_{k=-\infty}^{0} c_k^2=\sum{}' c_k^2 \text{ [1]}$$

может считаться весьма малой. Тогда без труда находим в соответствии с § 1 [2])

$$Ax_0=\sum_k c_k \nu_k x_k^*; \qquad z_1=\sum_k c_k(\nu_k-\mu_0)x_k^*;$$

$$\mu_0=G(x_0)=(Ax_0, x_0)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \nu_k,$$

так что

$$\nu_1-\mu_0=\sum_k(\nu_1-\nu_k)c_k^2=\nu_1(1-c_1^2)-\sum{}' c_k^2\nu_k=O(b^2), \tag{10}$$

$$(z_1, z_1)=\sum_k c_k^2(\nu_k-\mu_0)^2=O(b^2), \tag{11}$$

$$G(z_1)=(Az_1, z_1)=\sum_k c_k^2 \nu_k(\nu_k-\mu_0)^2, \tag{12}$$

$$G(z_1)-\mu_0(z_1, z_1)=\sum_k c_k^2(\nu_k-\mu_0)^3. \tag{13}$$

---

[1]) $\sum\limits_k$ означает сумму по всем значениям $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ $\sum{}'$ означает сумму по всем значениям, за исключением $k=1$.

[2]) См. также А. И. Плеснер [35].

Соотношения (10) и (11) показывают, что величины $\nu_1-\mu_0$ и (z_1, z_1) малы одновременно с b^2 и того же порядка, что и b^2. Поэтому, предполагая величину b^2 малой, допустимо пользоваться приближённой формулой (8).

Рассмотрим и преобразуем теперь, отбрасывая величины порядка выше b^2 и пользуясь (10), (11), (13), отношение

$$\frac{L(x_1)-L(x_0)}{L(x^*)-L(x_0)}=\frac{\varepsilon_1(z_1, z_1)}{G(x^*)-G(x_0)}\cong-\frac{(z_1, z_1)^2}{(\nu_1-\mu_0)[G(z_1)-\mu_0(z_1, z_1)]}=$$

$$=-\frac{[\sum\limits_k c_k^2(\nu_k-\mu_0)^2]^2}{\sum\limits_k(\nu_1-\nu_k)c_k^2\sum\limits_k c_k^2(\nu_k-\mu_0)^3}=-\frac{[c_1^2(\nu_1-\mu_0)^2+\sum' c_k^2(\nu_k-\mu_0)^2]^2}{[\sum\limits_k(\nu_1-\nu_k)c_k^2][(\nu_1-\mu_0)^3c_k^2+\sum'(\nu_k-\mu_0)^3c_k^2]}\cong$$

$$\cong\frac{[\sum\limits_k(\nu_1-\nu_k)^2c_k^2]^2}{[\sum\limits_k(\nu_1-\nu_k)c_k^2][\sum\limits_k(\nu_1-\nu_k)^3c_k^2]}.$$

Применяя лемму из доказательства теоремы 1, полагая

$$\gamma_k=\nu_1-\nu_k;\quad m=\nu_1-\nu_2;\quad M=\nu_1,$$

получим

$$\frac{L(x_1)-L(x_0)}{L(x^*)-L(x_0)}\geqslant\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1}}+\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1-\nu_2}}\right)^2}-\alpha,$$

где α — величина порядка b^2.

Отсюда

$$L(x^*)-L(x_1)\leqslant\left[\left(\frac{\frac{\nu_2}{\nu_1}}{2-\frac{\nu_2}{\nu_1}}\right)^2+\alpha_1\right][L(x^*)-L(x_0)]=C\left[\left(\frac{\nu_2}{2\nu_1-\nu_2}\right)^2+\alpha_1\right].$$

Это неравенство и доказывает сходимость $L(x_n)$ к $L(x^*)=\nu_1$ с быстротой геометрической прогрессии. Знаменатель её мал, если отношение $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ не близко к единице[1]).

Докажем теперь сходимость последовательности x_n к элементу x^*. Произведём прежде всего оценку $\|x_0-x^*\|$:

$$\|x_0-x^*\|^2=(x_0-x_1^*,\ x_0-x_1^*)=$$

$$=(1-c_1)^2+\sum{}' c_k^2\leqslant 1-c_1^2+\sum{}' c_k^2=2\sum{}' c_k^2.$$

С другой стороны,

$$L(x^*)-L(x_0)=G(x^*)-G(x_0)=\nu_1-\mu_0=\sum_k(\nu_1-\nu_k)c_k^2\geqslant(\nu_1-\nu_2)\sum{}' c_k^2.$$

Сопоставляя эти неравенства, получим

$$\|x_0-x^*\|^2\leqslant\frac{2}{\nu_1-\nu_2}[L(x^*)-L(x_0)]=K[L(x^*)-L(x_0)].$$

---

[1]) Под ν_2 здесь подразумевается первое собственное значение неравное ν_1.

Аналогичное неравенство может быть написано и для любого последующего приближения x_n. Это даёт

$$\| x_n - x^* \|^2 \leqslant K [L(x^*) - L(x_n)].$$

Учитывая доказанную сходимость $L(x_n)$ к $L(x^*)$ с быстротой геометрической прогрессии, мы завершим доказательство теоремы.

Замечание 1. Если A не положительный оператор, то следует рассмотреть оператор A^2, собственные значения которого суть квадраты собственных значений оператора A. В то же время A^2 — положительный оператор.

Замечание 2. Описанный метод может быть применён очевидным образом и к нахождению других собственных значений. Для нахождения, например, $\nu_2 < \nu_1$ следует взять x_0 ортогональным к x_1^* (или, если собственному значению ν_1 отвечает несколько собственных элементов, то ортогональным к ним). Это обстоятельство сохраняется при переходе от одного приближения к следующему, и, таким образом, имеет место для всех приближений x_n.

§ 5. Системы линейных алгебраических уравнений

Иллюстрацию метода мы начнём с простейшей задачи.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \xi_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

В пространстве R^n систему (1) можно записать в форме

$$Ax = \varphi, \tag{1'}$$

где A — оператор, определяемый матрицей $\| a_{i,k} \|$, а векторы $\varphi = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$; $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Таким образом, система (1) приведена к уравнению, изученному в § 2. Предположим сначала, что оператор A симметричен и положительно определён, иными словами, что матрица $\| a_{i,k} \|$ симметрична и квадратичная форма $\sum\limits_{i,k} a_{i,k} \xi_i \xi_k$ положительно определена.

Пусть $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*)$ решение уравнения (1′). Взяв за начальное приближение к x^* вектор $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0)$, мы согласно формулам (4), (5), (6) § 2 за следующее приближение должны принять вектор

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1, \tag{2}$$

где

$$z_1 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \xi_k^0 - b_i \right\}_{i=1,2,\ldots,n} = (\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(1)}),$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\zeta_i^{(1)})^2}{\sum\limits_{i,k} a_{i,k} \zeta_i^{(1)} \zeta_k^{(1)}}.$$

Исходя из x_1, определяем следующее приближение x_2 и т. д.

Быстрота сходимости процесса устанавливается с помощью теоремы 1 или замечания 1 § 2.

Обозначая через $\frac{1}{\beta}$ наименьшее, а через $\frac{1}{\alpha}$ наибольшее собственное значение оператора A или, что то же, формы $\sum_{i,k} a_{i,k}\xi_i\xi_k$, будем иметь по формулам § 2

$$\| x_m - x^* \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(m)} - \xi_i^*)^2} \leqslant \sqrt{C\beta}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^m, \tag{3}$$

где

$$C = H(x_0) - H(x^*) = \sum_{i,k} a_{i,k}(\xi_i^0\xi_k^0 - \xi_i^*\xi_k^*) - 2\sum_i b_i(\xi_i^0 - \xi_i^*)$$

и, следовательно,

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i^*| \leqslant \| x_m - x^* \| \leqslant \sqrt{C\beta}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^m.$$

Рассмотрение *произвольной* системы уравнений (1) сводится к случаю, разобранному выше. В самом деле, как было показано в § 2 (замечание 2 § 2), уравнение (1′) может быть заменено на уравнение

$$A^* A x = A^* \varphi.$$

A^* здесь оператор, определяемый матрицей $\| a_{i,k}^* \|$, где $a_{i,k}^* = a_{k,i}$.

Переписывая последнее уравнение в виде системы уравнений типа (1), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}a_{j,k}\right)\xi_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь следует принять

$$z_1 = (\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}),$$

где

$$\eta_i^{(1)} = \sum_k\left(\sum_j a_{j,i}a_{j,k}\right)\xi_k^0 - \sum_j a_{j,i}b_j = \sum_j a_{j,i}\left(\sum_k a_{j,k}\xi_k^0 - b_j\right) = \sum_j a_{j,i}\zeta_j^{(1)}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{\sum_i (\eta_i^{(1)})^2}{\sum_{i,k}\left(\sum_j a_{j,i}a_{j,k}\right)\eta_i^{(1)}\eta_k^{(1)}} = -\frac{\sum_i (\eta_i^{(1)})^2}{\sum_i\left(\sum_k a_{i,k}\eta_k^{(1)}\right)^2}. \tag{5}$$

Относительно быстроты сходимости остаются справедливыми прежние утверждения с той разницей, что числа C, α и β относятся к оператору AA^*. Так, например, $\frac{1}{\beta}$ есть наименьшее положительное, а $\frac{1}{\alpha}$ наибольшее собственное значение формы $\sum_i\left(\sum_k a_{i,k}\xi_k\right)^2$ [1].

Замечание 1. Процесс вычисления может быть расположен в довольно удобную вычислительную схему и с удобством выполняется на счётных машинах. Именно, выписав матрицу $\| a_{i,k} \|$ и найдя столбец чисел $\zeta_i^{(1)}$, определяем последовательно столбец $\eta_i^{(1)}$ по (4) и $\sum_k a_{i,k}\eta_k^{(1)}$, каждый раз вычисляя (накоплением) суммы произведений. Имея этот столбец, находим ε_1 по (5) и столбец чисел $\xi_i^{(1)}$, после чего процесс повторяется.

---

[1] Как уже упоминалось, именно для систем алгебраических уравнений этот метод был предложен Коши, однако, без исследования быстроты сходимости его.

Таким образом, данный процесс можно рассматривать как *эффективный* метод решения систем линейных алгебраических уравнений наряду с методом итераций, методом Зейделя[1]) и др.

Замечание 2. Рассмотренный метод приближается по характеру процесса к методам итераций и Зейделя. Однако процесс итераций сходится при весьма ограничительных условиях; процесс Зейделя сходится, если форма $\sum_{i,k} a_{i,k}\xi_i\xi_k$ симметричная и положительно определённая, чего всегда можно добиться преобразованием системы. Но рассмотренный процесс обеспечивает более быструю сходимость. Кроме того, по отношению к другим более сложным задачам, чем решение системы линейных алгебраических уравнений, он даёт более удобный алгорифм по сравнению с соответствующим преобразованием процесса Зейделя.

Замечание 3. Без существенных изменений метод может быть перенесён и на бесконечные системы. Однако, чтобы обеспечить сходимость рядов, получающихся при определении последовательных приближений, может оказаться необходимым домножить предварительно уравнения системы на подходящие множители μ_i ($i=1, 2 \ldots$). Начальные значения ξ_i^0 также должны быть выбраны так, чтобы была обеспечена сходимость рядов в каждом из уравнений.

Замечание 4. Результаты § 4 могут быть непосредственно применены для нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы и дают эффективные средства решения этой задачи.

§ 6. Интегральные уравнения Фредгольма

Рассмотрим сначала интегральное уравнение с симметричным ядром

$$L(x) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt - \varphi(s) = 0. \tag{1}$$

Будем ещё предполагать выполненным условие

$$\frac{\lambda}{\lambda_k} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где λ_k, — собственные значения уравнения (1).

Если взять $\mathcal{H} = L^2$, то уравнение (1) оказывается типа (1) § 2. Оператор A будет

$$A = I - \lambda K,$$

где I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$, а K определяется равенством

$$y = Kx, \quad y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

Функционал $H(x)$ будет в данном случае иметь вид:

$$H(x) = \int_a^b x^2(t)\, dt - \lambda \int_a^b \int_a^b k(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds dt - 2 \int_a^b x(t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Если $\alpha = \max\limits_k \frac{\lambda}{\lambda_k}$, а $\beta = \min\limits_k \frac{\lambda}{\lambda_k}$, то

$$\beta(x, x) \leqslant \lambda(Kx, x) \leqslant \alpha(x, x),$$

так что

$$(1 - \alpha)(x, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant (1 - \beta)(x, x).$$

---

[1]) По поводу метода итераций см. Мизес и Гейрингер-Полячек [27], а также Л. В. Канторович и В. И. Крылов [16] (гл. 1, § 2). О методе Зейделя см. Зейдель [7]. По поводу обоих методов см. Д. Ю. Панов [34].

Поскольку $\alpha < 1$, то применима общая теория; случай предусмотрен теоремой 1.

Исходя из некоторой функции $x_0(s)$, определяем следующее приближение по формуле:

$$x_1(s) = x_0(s) + \varepsilon_1 z_1(s), \tag{3}$$

где

$$z_1 = L(x_0),$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{\int_a^b [L(x_0)]^2 ds}{H_0(z_1)} = -\frac{\int_a^b [L(x_0)]^2 ds}{H_0(L(x_0))}; \tag{4}$$

здесь H_0 означает однородный функционал, соответствующий H, т. е.

$$H_0(x) = \int_a^b x^2(s)\, ds - \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt.$$

Исходя из x_1, определяем x_2 и т. д.

Быстрота сходимости процесса определяется с помощью теоремы 1. Имеем (x^* — решение уравнения (1)) $m = 1 - \alpha$, $M = 1 - \beta$, поэтому

$$\sqrt{\int_a^b [x_n - x^*]^2 ds} = \| x_n - x^* \| \leqslant \sqrt{\frac{C}{m}} \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{C}{1 - \alpha}} \left(\frac{\beta - \alpha}{2 - (\alpha + \beta)} \right)^n = Tq^n, \tag{5}$$

где $C = H(x_0) - H(x^*)$.

Когда $\alpha = 1$, то применимо замечание 1 § 2. Таким образом, когда решение x^* существует, последовательность x_n сходится к нему. Быстрота сходимости оценивается тем же неравенством (5) с той разницей, что при отыскании α и β отношения $\frac{\lambda}{\lambda_k} = 1$ не принимаются во внимание.

Последовательность x_n сходится в среднем к x^*. Но может быть построена последовательность функций, сходящаяся равномерно к решению x^*.

Именно, если положить

$$y_n(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, x_n(t)\, dt; \qquad y_n = x_n - L(x_n),$$

то $y_n(s)$ равномерно сходится к $x^*(s)$.

В самом деле, используя (5), будем иметь

$$|y_n(s) - x^*(s)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(s, t)\, [x_n(t) - x^*(t)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \left[\int_a^b K^2(s, t)\, dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b [x_n(t) - x^*(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1 |\lambda| Tq^n.$$

Отсюда и видна равномерная сходимость $y_n(s)$ к $x^*(s)$ с быстротой геометрической прогрессии.

Доказанное предложение остаётся верным и в случае $\frac{\lambda}{\lambda_k} \leqslant 1$, так как неравенство (5), использованное в доказательстве, при этом. сохраняется. Однако в этом случае существование решения не вытекает из предпосылок и должно быть потребовано заранее.

Замечание 1. Если предположить, что $\frac{\lambda}{\lambda_k} < \frac{1}{2}$, то можно доказать равномерную сходимость к решению самой последовательности x_n, что, впрочем, не имеет особенно существенного значения, так как равномерная сходимость $y_n(s)$ установлена во всех случаях.

Перейдём теперь к случаю, когда ядро не симметрично или не выполнено условие (2) и, таким образом, не применимы предыдущие рассуждения.

Итак, рассмотрим уравнение

$$l(x) = x(s) - \lambda \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, dt - \overline{\varphi}(s) = 0. \tag{6}$$

В соответствии с общей теорией составляем функционал

$$H_1(x) = \int_a^b l^2(x)\, ds =$$
$$= \int_a^b x^2(s)\, ds - \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt - 2 \int_a^b \varphi(s)\, x(s)\, ds + C, \tag{7}$$

где

$$K(s, t) = k(s, t) + k(t, s) - \lambda \int_a^b k(s, u)\, k(t, u)\, du, \tag{8}$$

$$\varphi(s) = \overline{\varphi}(s) - \lambda \int_a^b k(t, s)\, \overline{\varphi}(t)\, dt, \tag{9}$$

$$C = \int_a^b \overline{\varphi}^2(s)\, ds.$$

Пусть $\{\Lambda_k\}$ собственные значения ядра $K(s, t)$. Без труда проверяется, что выполнено условие

$$\frac{\lambda}{\Lambda_k} < 1, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Заметим ещё, что если $\lambda = \Lambda_k$, то уравнение (1) разрешимо независимо от того, разрешимо или нет уравнение (6). Действительно, так как $x_k^*(s)$, собственная функция ядра $K(s, t)$, является и собственной функцией ядра $k(s, t)$, то

$$\int_a^b \varphi(s)\, x_k^*(s)\, ds = \int_a^b \overline{\varphi}(s)\, x_k^*(s)\, ds - \lambda \int_a^b \left(\int_a^b k(t, s)\, \overline{\varphi}(t)\, dt \right) x_k^*(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b \overline{\varphi}(s)\, x_k^*(s)\, ds - \frac{\lambda}{\Lambda_k} \int_a^b \overline{\varphi}(t)\, x_k^*(t)\, dt = 0,$$

т. е. *условия разрешимости* выполнены.

Итак, применение метода к уравнению (1) приводит к решению уравнения (6), коль скоро это решение существует. Если же λ собственное значение уравнения (6) и решения не существует, то предельная функция, которая, как выяснилось, всегда существует (ибо всегда существует решение уравнения (1)), доставляет минимум функционалу (7).

Оценку быстроты сходимости проведём для случая, когда ядро симметрично. В этом случае легко написать билинейный ряд для $K(s, t)$, исходя из билинейного ряда для $k(s, t)$. Именно,

$$K(s, t) \sim 2 \sum_k \frac{x_k^*(s)\, x_k^*(t)}{\lambda_k} - \lambda \sum_k \frac{x_k^*(s)\, x_k^*(t)}{\lambda_k^2} = \sum_k \frac{2\lambda_k - \lambda}{\lambda_k^2}\, x_k^*(s)\, x_k^*(t),$$

откуда следует, что

$$\Lambda_k = \frac{\lambda_k^2}{2\lambda_k - \lambda}.$$

Следовательно, в формуле (5) нужно положить

$$\alpha = \max_k \frac{\lambda}{\Lambda_k} = \max_k \left[1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_k}\right)^2\right]; \quad \beta = \min \left[1 - \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_k}\right)^2\right], \tag{10}$$

причём в (10) не учитываются те k, для которых $\lambda = \Lambda_k$.

Замечание 2. Подобно тому, как в § 4 метод наискорейшего спуска применялся для отыскания экстремума не квадратичного функционала, он может быть использован для решения нелинейных интегральных уравнений. Уравнения для нахождения ε, однако, не будут уже линейными.

Рассмотрим теперь применение метода для *отыскания собственных значений* интегрального уравнения. Пусть $K(s, t)$ — ядро этого уравнения, симметричное и положительно определённое.

Если обозначить через A оператор, определяемый формулой

$$y = Ax; \quad y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{11}$$

то мы окажемся в условиях § 4.

Следовательно, начиная с некоторой функции $x_0(t)$, для которой $\int_a^b x_0^2\, dt = 1$, мы должны взять в качестве следующего приближения к собственной функции, отвечающей наименьшему собственному значению $\lambda_1 = \frac{1}{\nu_1}$,

$$x^{(1)}(s) = x_0(s) + \varepsilon_1 z_1(s),$$

где

$$z_1(s) = \int_a^b K(s, t)\, x_0(t)\, dt - \mu_0\, x_0(s),$$

причём

$$\mu_0 = L(x_0) = \frac{\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(s,t)\,x_0(s)\,x_0(t)\,ds\,dt}{\int\limits_a^b x_0^2(s)\,ds} = \int\limits_a^b\int\limits_a^b K(s,t)\,x_0(s)\,x_0(t)\,ds\,dt = G(x_0),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\left[G(z_1)-\mu_0\int\limits_a^b z_1^2\,ds\right]+\sqrt{\left[G(z_1)-\mu_0\int\limits_a^b z_1^2\,ds\right]+4\left(\int\limits_a^b z_1^2\,ds\right)^3}}{2\int\limits_a^b z_1^2\,ds} \cong -\frac{\int\limits_a^b z_1^2\,ds}{G(z_1)-\mu_0\int z_1^2\,ds}.$$

После того, как $x^{(1)}$ пронормирована, исходя из неё, определяем $x^{(2)}$ и, поступая так же далее, получаем последующие приближения. При этом, если обозначить

$$x_n(s) = \frac{x^{(n)}(s)}{\left\{\int\limits_a^b [x^{(n)}]^2\,ds\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

то из теоремы 4 § 1 следует, что $x_n(s)$ сходится в среднем к $x_1^*(s)$ — собственной функции, соответствующей собственному значению λ_1, а числа $L(x_n) = L(x^{(n)})$ имеют пределом $\nu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$. Быстрота сходимости имеет порядок геометрической прогрессии.

Как и выше, при решении интегральных уравнений можно последовательность $x_n(s)$ заменить последовательностью, сходящейся к $x_1^*(s)$ равномерно. В качестве такой последовательности можно взять

$$y_n(s) = x_{n-1}(s) + \frac{1}{L(x_{n-1})}\,z_n(s). \tag{12}$$

Разберём численный пример. Рассмотрим интегральное уравнение, ядро которого — функция Грина для уравнения струны:

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(1-s) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Его собственные значения и собственные функции, как известно,

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \qquad x_k^*(s) = \sqrt{2}\,\sin k\pi s, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Применим изложенный выше метод, приняв за первое приближение к собственной функции постоянную $x_0(s) = 1$.

Тогда

$$\psi_1(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)\,x_0(t)\,dt = \int\limits_0^s t(1-s)\,dt + \int\limits_s^1 s(1-t)\,dt = \frac{1}{2}\,s(1-s),$$

$$\mu_0 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(s,t)\,x_0(s)\,x_0(t)\,ds\,dt = \int\limits_0^1 x_0(s)\,\psi_1(s)\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 s(1-s)\,ds - \frac{1}{12}.$$

Число $\frac{1}{\mu_0} = 12$ значительно отличается от первого собственного значения $\pi^2 = 9{,}8696$.

Строим функцию

$$z_1(s) = \psi_1(s) - \mu_0\,x_0(s) = \frac{1}{2}\,s(1-s) - \frac{1}{12}.$$

Далее подсчитываем

$$G_2(x_0) = \int_0^1 \psi_1^2(s)\,ds = \frac{1}{4}\int_0^1 s^2(1-s)^2\,ds = \frac{1}{120},$$

$$G_3(x_0) = \int_0^1\int_0^1 K(s,t)\,\psi_1(s)\,\psi_1(t)\,ds\,dt = 2\int_0^1 \frac{1}{2}s(1-s)\int_0^s t(1-s)\cdot\frac{1}{2}t(1-t)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{17}{20160} = \frac{17}{12^2\cdot 5\cdot 7\cdot 4},$$

$$\int_0^1 z_1^2\,ds = \int_0^1 \psi_1^2(s)\,ds - \mu_0^2 = \frac{1}{120} - \frac{1}{144} = \frac{1}{720},$$

$$G(z_1) = \frac{1}{12^2\cdot 210},$$

$$G(z_1) - \mu_0\int_0^1 z_1^2\,ds = -\frac{1}{12^3\cdot 7}.$$

При нахождении первого приближения пользоваться приближёнными формулами ещё нельзя, поэтому для нахождения ε_1 составляем квадратное уравнение, которое имеет вид

$$\left(\frac{1}{720}\right)^2\varepsilon_1^2 + \frac{1}{12^3\cdot 7}\,\varepsilon_1 - \frac{1}{720} = 0,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = 12{,}91.$$

На основании формулы (9) § 4 подсчитываем приращение L:

$$\Delta L = \varepsilon_1\int_0^1 z_1^2\,ds = 0{,}01793.$$

Тогда первое приближение для минимума будет

$$\mu_1 = \mu_0 + \Delta L = 0{,}08333 + 0{,}01793 = 0{,}10126.$$

Приближение для первого собственного значения $\frac{1}{\mu_1} = 9{,}876$ отличается от точного значения $\lambda_1 = \pi^2 = 9{,}870$ в третьем знаке после запятой.

В качестве приближения к собственной функции можно принять

$$x^{(1)}(s) = x_0(s) + \varepsilon_1 z_1(s) = 1 + 12{,}91\left[\frac{s(1-s)}{2} - \frac{1}{12}\right].$$

Однако лучшее приближение даёт функция, построенная по формуле (12),

$$y_1(s) = \frac{1}{\mu_0}\psi_1(s) = 6s(1-s)$$

или если её пронормировать, то получим

$$\bar{y}_1(s) = \sqrt{30}\,s(1-s).$$

Она отличается от действительной собственной функции $x_1^*(s) = \sqrt{2}\sin\pi s$ на величину не более 0,05.

Быстрота сходимости здесь может быть легко оценена, поскольку известны точные значения собственных чисел; в соответствии с теоремой 4 § 4 она будет иметь порядок геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2 - \lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{\pi^2}{8\pi^2 - \pi^2}\right)^2 = \frac{1}{49}.$$

Быстрота сходимости последовательности $x_1, x_2, \ldots$ имеет порядок геометрической прогрессии со знаменателем $\sqrt{q} = \frac{1}{7}$.

Замечание 3. Из полученных результатов следует *аналитичность* собственных функций при некоторых специальных предположениях относительно ядра. Именно, предположим, что ядро представляет полином степени не выше m_0 в каждой из областей $s \leqslant t$ и $s \geqslant t$. Тогда, если за x_0 взять многочлен степени не выше p_0, то нетрудно убедиться, что функции $x_n(s)$ и $y_n(s)$ будут многочленами, степень которых не превосходит $nm_0 + p_0$. Так как функции $y_n(s)$ равномерно сходятся к функции $x_1^*(s)$ с быстротой геометрической прогрессии, то это устанавливает, согласно известной теореме С. Н. Бернштейна, регулярность собственной функции $x_1^*(s)$ в некотором эллипсе с фокусами a и b.

Замечание 4. При тех же предположениях относительно ядра можно оценить *быстроту сходимости* метода Ритца. Именно, если разыскивается приближение к собственной функции в виде многочлена степени $nm_0 + p_0$ с неопределёнными коэффициентами, из условия минимума, то оно должно дать ещё лучшее приближение к собственному значению, чем даёт $x_n(s)$, т. е., во всяком случае, приближение порядка геометрической прогрессии[1]).

§ 7. Применение метода к решению дифференциальных уравнений

Рассмотрим самосопряжённое уравнение второго порядка

$$L(x) = \frac{d}{dt}(p(t)\,x') - q(t)\,x + \varphi(t) = 0; \qquad x(t_0) = x(t_1) = 0 \tag{1}$$

при условии $p(t) > 0$; $q(t) \geqslant 0$

Если положить

$$Ax = qx - \frac{d}{dt}(px'), \tag{2}$$

то уравнение (1) может быть записано так:

$$-L(x) = Ax - \varphi = 0. \tag{3}$$

Таким образом, это есть уравнение типа (11) § 3, так как оператор A, очевидно, не ограничен.

Оператор A имеет определённый смысл на множестве Ω_0 дважды дифференцируемых функций, равных нулю на концах промежутка.

Оператор B определим на этом же множестве, полагая

$$Bx = -x''.$$

Нетрудно видеть, что B удовлетворяет условиям § 3. В самом деле, используя известное неравенство

$$\int x'^2\,dt \geqslant \frac{(t_0 - t_1)^2}{\pi^2} \int x^2\,dt, \quad ^{2)}$$

справедливое для функций, равных нулю на концах промежутка, будем иметь

$$(Bx, x) = -\int x'' x\,dt = \int x'^2\,dt \geqslant \frac{(t_0 - t_1)^2}{\pi^2} \int x^2\,dt = N(x, x).$$

Оператор A $\mathcal{B}$-ограничен. В самом деле,

$$(Ax, x) = \int qx^2\,dt - \int \frac{d}{dt}(px')\,x\,dt = \int qx^2\,dt + \int px'^2\,dt,$$

---

[1]) Любопытно, что оценки этого рода, данные в известных работах акад. Н. М. Крылова, дают величину порядка $\frac{1}{n^p}$. См. Н. М. Крылов [21].

[2]) Здесь и в дальнейшем пределы интегрирования t_0 и t_1 опущены.

так что

$$\alpha(Bx, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant \beta(Bx, x), \tag{4}$$

где

$$\alpha = \min_t p(t); \qquad \beta = \max_t p(t) + \frac{1}{N} \max_t q(t). \tag{5}$$

Таким образом, если, начиная с некоторой функции $x_0 \in \Omega_0$, определить последующие приближения по формуле, соответствующей и аналогичной (14) § 3, а именно

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1,$$

где z_1 есть решение уравнения

$$Bz = Ax_0 - \varphi = -L(x_0),$$

т. е. уравнения

$$z'' = L(x_0), \qquad z(t_0) = z(t_1) = 0,$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{z_1 \mathcal{B} z_1}{z_1 A z_1} = -\frac{\int z_1'^2\, dt}{\int (q z_1^2 + p z_1'^2)\, dt},$$

то условия теоремы 3 будут выполнены, а потому последовательность функций x_n $\mathcal{B}$-сходится к решению уравнения (1). При этом быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\| x_n - x^* \|_B = \int [(x_n - x^*)']^2\, dt \leqslant \frac{C}{\alpha} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}\right)^{2n} = C_1 q^{2n}.$$

Это позволяет доказать и равномерную сходимость функций x_n к решению x^*. Действительно,

$$|x_n - x^*| = \left| \int_{t_0}^{t} (x_n - x^*)'\, dt \right| \leqslant \left\{ \int_{t_0}^{t} [(x_n - x^*)']^2\, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{t_0}^{t} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2 q^n.$$

Замечание 1. Если коэффициенты p, q φ уравнения (1) полиномы, то решение x^* будет *регулярно* в некотором эллипсе, содержащем промежуток $[t_0, t_1]$.

В самом деле, если p, q, φ полиномы степени не выше m_0, то, принимая за x_0 полином степени h, мы найдём, что $L(x_0)$ полином степени не выше $h + m_0$, а z_1 полином степени не выше $h + m_0 + 2$. Итак, при выполнении каждого шага степень полинома увеличивается не более чем на $m_0 + 2$, поэтому x_n будет полиномом, степень которого не превосходит $h + n(m_0 + 2)$. Учитывая равномерную сходимость полиномов x_n к решению с быстротой геометрической прогрессии, мы получим требуемое утверждение.

Далее, возможность аппроксимации решения полиномами порядка геометрической прогрессии показывает, что такую же, по крайней мере, степень аппроксимации решения дают и приближения по методу Ритца, если их разыскивать в полиномиальной форме, т. е процесс Ритца в этом случае сходится с быстротой геометрической прогрессии.

Аналогичные заключения могли бы быть сделаны, если коэффициенты уравнения имели другую определённую форму, например, тригонометрического многочлена.

Замечание 2. Иногда бывает удобно в качестве оператора B, определяющего метрику пространства Ω_0, брать не $-x''$, а другой самосопряжённый оператор второго порядка

$$Bx = \varkappa(t)\, x - \frac{d}{dt}(\pi(t)\, x'),$$

особенно тогда, когда он близок к исходному и не слишком сложен.

Замечание 3. Исходя из общих соображений, ясно, как применить метод к разысканию решений уравнения высших порядков или не самосопряжённых второго порядка.

Замечание 4. Разыскание собственных значений и собственных функций может быть, так же как для интегральных уравнений, произведено с помощью метода, изложенного в § 4.

Без значительных изменений метод может быть применён к решению уравнений в частных производных.

Не вдаваясь в подробности, мы укажем, что для решения, например, самосопряжённого уравнения эллиптического типа второго порядка

$$L(x)=\frac{\partial}{\partial s}\left(a\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(b\frac{\partial x}{\partial t}\right)-cx+\varphi=0; \quad a>0; \quad b>0; \quad c\geqslant 0$$

при граничном условии

$$x=0 \text{ на } \Gamma$$

следует рассмотреть пространство H функций, суммируемых с квадратом, определённых в области, ограниченной контуром Γ.

Оператор

$$Ax=cx-\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(a\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(b\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]$$

неограничен, но если положить

$$Bx=\Delta x=\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

то он становится $\mathcal{B}$-ограниченным и положительно $\mathcal{B}$-определённым, так что опять применима теорема 3 § 3.

Необходимо указать, однако, что при каждом шаге процесса придётся решать уравнение вида

$$Bx=\Delta x=\varphi,$$

что, конечно, затрудняет его применение. Впрочем, с помощью преобразования переменных (необязательно конформного) область может быть сведена к кругу, а тогда применение метода уже не встречает больших затруднений.

ГЛАВА IV

МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1])

Одним из наиболее эффективных методов нахождения корней алгебраического уравнения, если для них известны приближённые значения, является метод Ньютона, иногда называемый также методом касательных. В этом методе последовательные приближения определяются формулами вида

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Сходимость этого метода была исследована Коши, а затем Островским [2]).

Этот метод был распространён рядом авторов на системы алгебраических уравнений [3]). Однако он оказывается применимым и для случая любых нелинейных уравнений. В частности, по нашему предложению он был применён Д. М. Загадским к нелинейным интегральным уравнениям [4]).

Чтобы охватить одновременно все случаи, и этот метод наиболее удобно развить и исследовать в общем виде для функциональных уравнений. Этому и посвящена настоящая глава.

---

[1]) В том виде, как он изложен здесь, метод разработан нами (Л. В. Канторович [14]).

[2]) А. Коши [19а], А. Островский [31], [32].

[3]) Н. П. Стенин [41], А. Островский [32а], Ф. Виллерс [3].

[4]) Д. М. Загадский [5].

§ 1. Дифференцирование функциональных операций

Прежде всего введём понятие билинейной операции.

Пусть X и Y два линейных нормированных пространства. Совокупность всех линейных операций, переводящих X в Y, образует в свою очередь *линейное нормированное* пространство: сложение и умножение на вещественное число и норма для элементов этой совокупности определены ещё в главе I. Выполнение аксиом, приведённых там, проверяется без труда, так что мы не будем останавливаться на этом. Пространство линейных операций из X в Y мы будем обозначать в дальнейшем $(X \to Y)$.

Рассмотрим теперь линейную операцию

$$h = Bx,$$

переводящую пространство X в пространство $(X \to Y)$. Найдём её значение для произвольного элемента $x' \in X : h = Bx'$. Это будет некоторый злемент пространства $(X \to Y)$, т. е. некоторая линейная операция h из X в Y. Положим

$$Bx'x = B(x', x) = h(x) = (Bx')x. \tag{1}$$

Мы получим опрацию, определённую для пары элементов x, x', со значениями в Y, аддитивную по каждому аргументу и такую, что

$$\| B(x', x) \| \leqslant \| Bx' \| \| x \| \leqslant \| B \| \| x' \| \| x \|. \tag{2}$$

Операция, удовлетворяющая последним условиям, называется *билинейной*, а наименьший допустимый множитель в неравенстве типа (2) называется её нормой.

Наоборот, пусть дана некоторая билинейная операция $B(x', x)$, аддитивная по обоим аргументам и такая, что

$$\| B(x', x) \| \leqslant C \| x' \| \| x \|.$$

Тогда ясно, что при фиксированном x' $B(x', x)$ представляет некоторую линейную операцию $h(x)$, переводящую X в Y. Полагая $Bx' = h$, имеем

$$\| Bx' \| = \| h \| \leqslant C \| x' \|.$$

При этом, так как, очевидно, Bx' есть аддитивная операция, то $h = Bx'$ есть линейная операция из X в $(X \to Y)$ с нормой $\| B \| \leqslant C$. Из сказанного, таким образом, видно, что по существу эквивалентно рассматривать B как операцию из X в $(X \to Y)$ или как билинейную.

Приведём несколько примеров билинейных операций.

1) Рассмотрим *билинейную операцию* из пространства $X = m_n$ в $Y = m_\nu$. Легко усмотреть, что она имеет вид:

$$y = B(x, x') = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}\, \xi_i \xi'_j \right\}_{k=1,2,\ldots,\nu}, \tag{3}$$

т. е. её значение есть вектор, ν компонент которого суть билинейные формы.

Ясно, что

$$\| y \| = \| B(x, x') \| = \max_k \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}\, \xi_i \xi_j' \right| \leqslant \max_k \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j,k}|\, \| x \| \, \| x' \|,$$

так что

$$\| B \| \leqslant \max_k \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j,k}| \leqslant n^2 M,$$

если $|a_{i,j,k}| \leqslant M$, однако эти оценки не дают точного значения нормы.

2) *Билинейная операция* из R^n в R^ν имеет тоже вид (3), однако норма её определяется и оценивается иначе.

Именно:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}\, \xi_i \xi_j' \right|^2 \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j'^2 \right).$$

Отсюда

$$\| y \|^2 = \| B(x, x') \|^2 = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}\, \xi_i \xi_j' \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}^2 \| x \|^2 \| x' \|^2.$$

Следовательно,

$$\| B \| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant n \sqrt{\nu}\, L,$$

если все $|a_{i,j,k}| \leqslant L$.

3) Если X и Y — пространства комплексных чисел, то примером *билинейной операции* будет операция вида

$$y = B(x, x') = w \cdot x \cdot x',$$

где w — комплексное число. В этом случае

$$\| B \| = | w |.$$

4) Примером *билинейной операции* из C в C является интегральная операция вида

$$y = B(x, x'); \quad y(s) = \int_0^1 \int_0^1 K(s, t, u)\, x(t)\, x'(u)\, du\, dt. \tag{4}$$

Её норма оценивается так:

$$\| B \| \leqslant \sup_s \int_0^1 \int_0^1 | K(s, t, u) |\, dt\, du \leqslant M,$$

если

$$| K(s, t, u) | \leqslant M.$$

5) Та же операция (4) может рассматриваться как *операция* из L^2 в L^2. В таком случае норма оценивается иначе:

$$\| B \| \leqslant \left(\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t, u)\, ds\, dt\, du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь операцию (вообще, нелинейную)

$$y = P(x),$$

переводящую пространство X в Y. Говорят, что она *дифференцируема* (*в смысле Фреше*)[1]) при данном значении x, если имеется такая линейная операция $H \in (X \longrightarrow Y)$, что

$$\| P(x+\Delta x) - P(x) - H(\Delta x) \| \leqslant \| \Delta x \| \cdot \varepsilon(\| \Delta x \|), \tag{5}$$

где $\varepsilon(\delta) \longrightarrow 0$ при $\delta \longrightarrow 0$. Эту операцию называют *производной операции* $P(x)$ при данном x:

$$P'(x) = H.$$

Итак, $P'(x)$ есть элемент пространства $(X \longrightarrow Y)$. $H = P'(x)$ есть в свою очередь операция, переводящая пространство X в пространство $(X \longrightarrow Y)$. Она также может оказаться дифференцируемой. Её производная в этом случае называется *второй производной* операции $P(x)$

$$V = [P'(x)]' = P''(x).$$

Эта вторая производная представляет элемент пространства $(X \longrightarrow (X \longrightarrow Y))$, т. е. пространства линейных операций, переводящих X в $(X \longrightarrow Y)$. Как мы видели, рассмотрение такой операции эквивалентно рассмотрению билинейной операции из пространства X в Y, так что $P''(x)$ можно трактовать как такую билинейную операцию. В соответствии с этим под $\| P'(x) \|$ и $\| P''(x) \|$ мы будем понимать *нормы* соответствующих операций.

Приведём некоторые предложения относительно производных.

I. Правило дифференцирования сложной функции. *Если* $y = \varphi(x)$, *а* $z = F(y) = F(\varphi(x))$, *причём* φ *и* F *дифференцируемы, то*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x),$$

причём следует понимать, что написанные рядом линейные операции $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dy}{dx}$ *надлежит применять последовательно.*

Справедливость этого предложения устанавливается так же, как для обычных производных вещественных функций одного переменного.

II. *Если* $y = P(x)$ — *линейная операция из* X *в* Y, *то, очевидно,*

$$P'(x) = P; \quad P''(x) = 0,$$

т. е. производная линейной операции совпадает с ней самой.

III. *Если* H — *линейная операция из* Y *в* Z, *то*

$$[HP(x)]' = HP'(x),$$

т. е. постоянную операцию можно выносить за знак производной. Вытекает сразу из I и II. При этом $HP'(x) = V \in (X \rightarrow Z)$.

[1]) М. Фреше [43].

IV. *Если $P(x)$ — дифференцируемая операция, то справедливо неравенство*

$$\| P(x+\Delta x) - P(x) \| \leqslant \sup_{\substack{\bar{x} = x + \theta \Delta x \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1}} \| P'(\bar{x}) \| \, \| \Delta x \| ,$$

которое представляет оценку приращения функции, подобную той, которая для обычной функции получается из формулы конечных приращений.

Для доказательства положим

$$P(x+\Delta x) - P(x) = y.$$

В пространстве Y подберём такой линейный функционал T, для которого

$$\| T \| = 1, \quad T(y) = \| y \|^{1)}.$$

Рассмотрим вещественную функцию вещественного переменного t

$$f(t) = T[P(x + t\Delta x)].$$

Для её производной, пользуясь при дифференцировании правилами I и III, находим выражение

$$f'(t) = (TP'(x + t\Delta x))\, \Delta x.$$

Далее имеем из определения $f(t)$, применяя обычную формулу конечных приращений, что

$$T(y) = T[P(x+\Delta x) - P(x)] = f(1) - f(0) = f'(\theta) =$$
$$= (TP'(x + \theta \Delta x))\, \Delta x = (TP'(\bar{x}))\, \Delta x,$$

откуда

$$\| P(x+\Delta x) - P(x) \| = \| y \| =$$
$$= Ty \leqslant \| T \| \, \| P'(\bar{x}) \| \, \| \Delta x \| \leqslant \sup_{\bar{x} = x + \theta \Delta x} \| P'(\bar{x}) \| \, \| \Delta x \| .$$

V. *Если $P(x)$ — дважды дифференцируемая операция, то справедливо неравенство*

$$\| P(x+\Delta x) - P(x) - P'(x)\,\Delta x \| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\substack{\bar{x} = x + \theta \Delta x \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1}} \| P''(\bar{x}) \| \, \| \Delta x \|^2 ,$$

связанное с формулой Тейлора, подобно тому как предыдущее неравенство было связано с формулой конечных приращений.

Доказательство проводится аналогично предыдущему. Обозначая через $y = P(x+\Delta x) - P(x) - P'(x)\,\Delta x$, отыскиваем такой линейный функционал T, что $\| T \| = 1$ и $Ty = \| y \|$. Строим вспомогательную функцию

$$f(t) = T(P(x + t\Delta x));$$

для неё имеем

$$f'(t) = T[P'(x + t\Delta x)\, \Delta x],$$
$$f''(t) = T[P''(x + t\Delta x)\, \Delta x\, \Delta x],$$

причём последнее выражение означает, что билинейная операция $P''(x + t\Delta x)$ должна быть вычислена для значений аргументов, равных Δx.

---

1) Л. А. Люстерник [26].

Применяя обычную формулу Тейлора к функции $f(t)$, найдем

$$\|y\| = Ty = f(1) \cdot f(0) - f'(0) = \frac{1}{2} f''(\theta) \leqslant \frac{1}{2} \|T\| \cdot \sup_{\bar{x}=x+\theta\Delta x} \|P''(\bar{x})\| \, \|\Delta x\|^2.$$

Приведём несколько примеров дифференцирования операций.

1) Рассмотрим *операцию*, переводящую n-мерное пространство в ν-мерное. Она определяется совокупностью ν функций от n переменных:

$$y = P(x); \quad \eta_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Будем предполагать, что функции f_k имеют непрерывные частные производные второго порядка. Так как

$$d\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} d\xi_i,$$

а приращение $\Delta y = \{\Delta\eta_k\}_{k=1,\ldots,\nu}$ выражается этой же системой дифференциалов с точностью до бесконечно малых высших порядков, то ясно, что $P'(x)$ задаётся в данном случае *матрицей частных производных*:

$$P'(x) = \left\| \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \right\|_{\substack{k=1,2,\ldots,\nu \\ i=1,2,\ldots,n}},$$

точнее говоря, $P'(x)$ есть линейное преобразование, соответствующее этой матрице (ср. гл. I § 1).

Аналогичным образом, рассматривая приращение $P'(x)$ при приращении аргумента $\Delta' x' = (\Delta'\xi_1', \Delta'\xi_2', \ldots, \Delta'\xi_n')$, убедимся, что вторая производная определяется матрицей, зависящей от трёх индексов

$$P''(x) = \left\| \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right\|_{\substack{k=1,2,\ldots,\nu \\ i,j=1,2,\ldots,n}}.$$

Если её рассматривать как билинейную операцию, то её значение будет определяться системой ν билинейных форм

$$P''(x)\, x' x'' = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \xi_i' \xi_j'' \right\}_{k=1,2,\ldots,\nu}.$$

При выборе определённой нормы в пространствах, соответствующей нормировке R^n и R^ν или m_n и m_ν, можно очевидным образом указать оценки для $\|P'(x)\|$ и $\|P''(x)\|$.

2) В пространстве *комплексных чисел* рассмотрим аналитическую функцию $y = P(x)$.

В данном случае

$$\Delta y = P'(x)\, \Delta x$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка, поэтому операция $P'(x)$ есть *умножение на комплексное число* $P'(x)$ и норма её, очевидно,

$$\|P'(x)\| = |P'(x)|.$$

Нетрудно видеть, что и вторая производная совпадает с обычной второй производной, если последнюю рассматривать как билинейную операцию над парой комплексных чисел: $P''(x)x'x''$.

3) Пусть $y = P(x)$ — нелинейная *интегральная* операция

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\,dt,$$

где $K(s, t, u)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Тогда, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, имеем

$$\Delta y(s) = \int_0^1 K'_u(s, t, x(t))\,\Delta x(t)\,dt,$$

так что $P'(x)$ есть линейная интегральная операция с ядром $H(s, t) = K'_u(s, t, x(t))$.

Придавая теперь $x(t)$ приращение $\Delta' x(t)$, убеждаемся в том, что с точностью до малых высших порядков

$$[\Delta P'(x)]\,\Delta' x = \int_0^1 K''_{u^2}(s, t, x(t))\,\Delta x(t)\,\Delta' x(t)\,dt,$$

т. е. в данном случае вторая производная есть билинейная интегральная операция специального вида

$$P''(x)\,\Delta x\,\Delta'(x) = \int_0^1 H_2(s, t)\,\Delta x(t)\,\Delta' x(t)\,dt; \quad H_2(s, t) = K''_{u^2}(s, t, x(t)).$$

§ 2. Сходимость процесса Ньютона

Рассмотрим применение процесса Ньютона к нелинейному функциональному уравнению

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где операция P, переводящая пространство X в Y, предполагается дважды дифференцируемой. Формулы, связывающие последовательные приближения, строятся на основаниях, аналогичных тому, как это делается в случае вещественных переменных.

Пусть x_0 — начальное приближение к решению. Вводя вместо приращения $P(x) - P(x_0)$ дифференциал в точке x_0, заменим приближённо данное уравнение линейным

$$P(x) \cong P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) = 0. \tag{2}$$

Решение этого уравнения x_1 и даёт новое приближённое значение корня. Если операция $P'(x_0)$ имеет обратную $[P'(x_0)]^{-1} \in (Y \rightarrow X)$, то, используя её, можно получить выражение для x_1 в явном виде:

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1} P(x_0). \tag{3}$$

Аналогичным образом выражаются последовательно одно через другое и дальнейшие приближения

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n). \tag{4}$$

Условия сходимости последовательности x_n к точному решению и одновременно достаточные условия для существования этого решения даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Для элемента x_0 — начального приближения, операция $P'(x_0)\in(X\to Y)$ имеет обратную $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$ и известна оценка для её нормы*

$$\|\Gamma_0\|\leqslant B_0. \tag{5}$$

2) *Элемент x_0 приближённо удовлетворяет уравнению* (1), *причём*

$$\|\Gamma_0 P_0(x_0)\|\leqslant\eta_0. \tag{6}$$

3) *Вторая производная $P''(x)$ ограничена в области, определяемой неравенством* (9),

$$\|P''(x)\|\leqslant K. \tag{7}$$

4) *Постоянные B_0, η_0, K удовлетворяют неравенству*

$$h_0=B_0\eta_0K\leqslant\frac{1}{2}. \tag{8}$$

Тогда уравнение (1) *имеет решение x^*, которое находится в области вблизи x_0, определяемой неравенством*

$$\|x-x_0\|\leqslant N(h_0)\eta_0=\frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0; \tag{9}$$

при этом последовательные приближения процесса Ньютона x_n сходятся к x^*, и быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0. \tag{10}$$

Доказательство. Введём обозначение

$$F_0(x)=x-\Gamma_0P(x).$$

Пользуясь им, соотношение (3), связывающее x_1 и x_0, можно записать

$$x_1=F_0(x_0). \tag{11}$$

Покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия 1) — 4) не нарушаются. Прежде всего имеем

$$\|x_1-x_0\|=\|\Gamma_0P(x_0)\|\leqslant\eta_0. \tag{12}$$

Далее, пользуясь предложением IV § 1, применяя его к $P'(x)$, получаем оценку

$$\|\Gamma_0[P'(x_0)-P'(x_1)]\|\leqslant\|\Gamma_0\|\,\|P'(x_0)-P'(x_1)\|\leqslant$$
$$\leqslant B_0\Big(\sup_{\bar{x}=x_0+\theta(x_1-x_0)}\|P''(\bar{x})\|\Big)\|x_1-x_0\|\leqslant B_0K\eta_0=h_0<1;$$

последнее, в силу того, что $\|\bar{x}-x_0\|=\theta\|x_1-x_0\|\leqslant\theta\eta_0\leqslant N(h_0)\eta_0$ и поэтому $\|P''(\bar{x})\|\leqslant K$.

Отсюда, на основании теоремы Банаха (гл. I § 3), заключаем, что для операции $H=[I-\Gamma_0(P'(x_0)-P'(x_1))]$, где I — тождественная операция в X, существует обратная

$$H^{-1}=[I-\Gamma_0(P'(x_0)-P'(x_1))]^{-1}.$$

При этом, в силу той же теоремы

$$\|H^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-h_0}. \tag{13}$$

Полагая $\Gamma_1=H^{-1}\Gamma_0$ и пользуясь очевидным для операций равенством $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned}\Gamma_1=H^{-1}\Gamma_0&=[I-\Gamma_0(P'(x_0)-P'(x_1))]^{-1}[P'(x_0)]^{-1}=\\&=\{P'(x_0)[I-\Gamma_0(P'(x_0)-P'(x_1))]\}^{-1}=\\&=[P'(x_0)-(P'(x_0)-P'(x_1))]^{-1}=[P'(x_1)]^{-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказано существование этой обратной операции. На основании (13) находим оценку для её нормы

$$\|[P(x_1)]^{-1}\|=\|\Gamma_1\|=\|H^{-1}\Gamma_0\|\leqslant\frac{B_0}{1-h_0}=B_1, \tag{14}$$

т. е. условие 1) выполнено.

Далее, в силу правил дифференцирования (предл. II и III § 1), имеем

$$F_0'(x_0)=I-\Gamma_0P'(x_0)=0,$$

так что, используя (11), найдём

$$\Gamma_0P(x_1)=x_1-F_0(x_1)=F_0(x_0)-F_0(x_1)+F_0'(x_0)(x_1-x_0).$$

Применяя к последнему выражению аналог формулы Тейлора для $P=F_0$ и $\Delta x=x_1-x_0$, получим

$$\begin{aligned}\|\Gamma_0P(x_1)\|&\leqslant\frac{1}{2}\sup_{\bar{x}=x_0+\theta(x_1-x_0)}\|F_0''(\bar{x})\|\,\|x_1-x_0\|^2=\\&=\frac{1}{2}\sup_{\bar{x}=x_0+\theta(x_1-x_0)}\|\Gamma_0P''(\bar{x})\|\,\|x_1-x_0\|^2\leqslant\frac{1}{2}BK\eta_0^2=\frac{1}{2}h_0\eta_0.\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь (13), находим, наконец,

$$\|\Gamma_1P(x_1)\|=\|H^{-1}\Gamma_0P(x_1)\|\leqslant\|H^{-1}\|\,\|\Gamma_0P(x_1)\|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{h_0\eta_0}{1-h_0}=\eta_1<\eta_0,$$

и условие 2), таким образом, тоже выполнено.

Условие 3) будет также выполнено для точки x_1, так как соответствующая ей сфера, как мы убедимся ниже, не выходит за пределы сферы, определяемой неравенством (9).

Условие 4) проверяется непосредственно. Действительно,

$$h_1=B_1\eta_1K=\frac{B_0}{1-h_0}\cdot\frac{1}{2}\frac{h_0\eta_0}{1-h_0}\cdot K=\frac{1}{2}\frac{h_0^2}{(1-h_0)^2}\leqslant 2h_0^2\leqslant\frac{1}{2}.$$

Итак, для $x=x_1$ выполнены условия 1)—4) с заменой чисел B_0, η_0, h_0 на B_1, η_1, h_1. Это позволяет продолжить последовательное определение элементов x_n и связанных с ними чисел B_n, η_n, h_n, которые будут связаны друг с другом формулами

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}}, \tag{15}$$

$$\eta_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{1-h_{n-1}}, \tag{16}$$

$$h_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{h_{n-1}^2}{(1-h_{n-1})^2}, \tag{17}$$

при этом аналогично (12)

$$\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant \eta_{n-1}. \tag{18}$$

Для них будем иметь оценки

$$h_2 \leqslant 2h_1^2 \leqslant 8h_0^4; \ \ldots; \quad h_n \leqslant \frac{1}{2}(2h_0)^{2^n},$$

$$\eta_n = \frac{1}{2}\frac{h_{n-1}}{1-h_{n-1}}\eta_{n-1} \leqslant h_{n-1}\eta_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant h_{n-1}h_{n-2}\ldots h_0\eta_0 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^{n-1}}(2h_0)^{2^{n-2}}\ldots(2h_0)\eta_0 = \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0.$$

Отметим теперь следующее тождество:

$$\eta_n N(h_n) - \eta_{n+1} N(h_{n+1}) = \eta_n, \tag{19}$$

которое проверяется непосредственным вычислением

$$\eta_{n+1} N(h_{n+1}) = \eta_{n+1}\frac{1-\sqrt{1-2h_{n+1}}}{h_{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{h_n\eta_n}{1-h_n}\cdot\frac{1-\sqrt{1-\frac{h_n^2}{(1-h_n)^2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{h_n^2}{(1-h_n)^2}} =$$
$$= \eta_n\frac{1-h_n-\sqrt{1-2h_n}}{h_n} = \eta_n N(h_n) - \eta_n.$$

Из (18) с помощью (19) следует

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots + \eta_{n+p-1} =$$
$$= \eta_n N(h_n) - \eta_{n+p} N(h_{n+p}) \leqslant \eta_n N(h_n) \leqslant 2\eta_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0. \tag{20}$$

Отсюда вытекает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Переходя к пределу в (20) при $p\to\infty$, получим (10). При $n=0$ получаем

$$\| x^* - x_0 \| \leqslant \eta_0 N(h_0),$$

т. е. (9).

То, что x^* есть решение уравнения (1), легко получается предельным переходом из равенства

$$P'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + P(x_n) = 0. \tag{21}$$

Действительно, $\| x_{n+1} - x_n \| \to 0$, а

$$\| P'(x_n) \| \leqslant \| P'(x_0) \| + \| P'(x_n) - P'(x_0) \| \leqslant \| P'(x_0) \| + K \| x_n - x_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \| P'(x_0) \| + KN(h_0)\eta_0,$$

поэтому в (21) левая часть стремится к нулю, следовательно,

$$P(x^*) = \lim_{n\to\infty} P(x_n) = 0.$$

Нам осталось доказать использованное выше утверждение, что сфера

$$\|x-x_n\| \leqslant N(h_n)\eta_n \tag{9a}$$

не выходит за пределы сферы (9). Пусть x входит в сферу (9a), тогда по (20)

$$\|x-x_0\| \leqslant \|x_n-x_0\| + \|x-x_n\| \leqslant [\eta_0 N(h_0) - \eta_n N(h_n)] + \eta_n N(h_n) = \eta_0 N(h_0),$$

т. е. x попадает в сферу (9).

Доказательство теоремы завершено.

Единственность решения имеет место в некоторой области, охватывающей область (9). Точнее говоря, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1)—4) *предыдущей теоремы с той разницей, что неравенство* (7)

$$\|P''(x)\| \leqslant K$$

выполнено в области, определяемой неравенством

$$\|x-x_0\| < L(h_0)\eta_0 = \frac{1+\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0. \tag{22}$$

Тогда решение уравнения (1) *единственно в области* (22) (*в случае, когда* $h_0 = \frac{1}{2}$, *знак* $<$ *в* (22) *можно заменить на* $\leqslant$).

Доказательство. Разберём сначала случай $h_0 < \frac{1}{2}$. Предположим, что имеется некоторое решение $\tilde{x}$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\|\tilde{x}-x_0\| = \theta L(h_0)\eta_0, \qquad 0 \leqslant \theta < 1. \tag{23}$$

Так как $P(\tilde{x}) = 0$, то будет (см. доказательство теоремы 1)

$$F_0(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Далее имеем, как выше,

$$\|\tilde{x}-x_1\| = \|F_0(\tilde{x}) - F_0(x_0)\| = \|F_0(\tilde{x}) - F_0(x_0) - F_0'(x_0)(\tilde{x}-x_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} B_0 K \|\tilde{x}-x_0\|^2 = \frac{1}{2} B_0 K \theta^2 L^2(h_0)\eta_0^2 = \theta^2 L(h_1)\eta_1. \tag{24}$$

Справедливость последнего равенства устанавливается непосредственной проверкой.

Неравенство (24) отличается от (23) заменой x_0 на x_1 и θ на θ^2, поэтому, применяя его повторно, найдём

$$\|\tilde{x}-x_n\| \leqslant \theta^{2^n} L(h_n)\eta_n.$$

Но

$$L(h_n)\eta_n = \frac{1+\sqrt{1-2h_n}}{h_n}\eta_n \leqslant \frac{2\eta_n}{h_n} = \frac{2}{B_n K}, \tag{25}$$

поэтому, так как $B_n > B_0$,

$$\|\tilde{x}-x_n\| \leqslant \theta^{2^n} \cdot \frac{2}{B_0 K},$$

следовательно,

$$\| \tilde{x} - x_n \| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а так как $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\tilde{x} = x^*$. Единственность доказана.

В случае $h_0 = \frac{1}{2}$ в равенстве (23) может быть $\theta = 1$. Но тогда, как это следует из (15), $B_1 = \frac{B_0}{1-h_0} = 2B_0$, $B_2 = 2B_1 = 4B_0, \ldots, B_n = 2^n B_0$ и (25) даёт

$$\| \tilde{x} - x_n \| \leqslant \frac{2}{B_n K} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{B_0 K}.$$

Следовательно, и здесь $\tilde{x} - x_n \to 0$. Теорема полностью доказана.

Сделаем некоторые замечания к доказанным теоремам.

Замечание 1. Условие 2) могло бы быть заменено на более просто формулируемое *условие* 2'), состоящее в выполнении неравенства

$$\| P(x_0) \| \leqslant \eta_0'. \tag{26}$$

Так как при выполнении этого условия

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \| \Gamma_0 \| \, \| P(x_0) \| \leqslant B_0 \eta_0',$$

то условие 2) будет выполнено с $\eta_0 = B_0 \eta_0'$. В соответствии с этим условие 4) теоремы 1 будет выглядеть так:

$$h_0 = B_0 K \eta_0 = B_0^2 K \eta_0' \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отметим ещё, что само условие 2) допускает иную запись, часто более удобную в применениях. Именно, пользуясь (12), ему можно придать вид

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta_0, \tag{27}$$

так что оно с удобством проверяется после нахождения первого приближения.

Замечание 2. Условие 3) практически удобнее устанавливать в некоторой постоянной области, *содержащей* область (9), например, в сфере

$$\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0.$$

Замечание 3. Область, в которой находится решение x^*, по данным в условиях теоремы определяется неравенством (9). Однако нетрудно получить более точное неравенство. Именно, зная Γ_0, можно определить $x_1 = x_0 - \Gamma_0 P(x_0)$, а также $P(x_1)$, а тогда, применяя теорему к x_1 вместо x_0 и пользуясь оценкой (14) для $\| \Gamma_1 \|$, найдём после несложных преобразований

$$\| x_1 - x^* \| \leqslant \frac{2}{1 - h_0 + \sqrt{1 - 2h_0}} B_0 \| P(x_1) \|. \tag{28}$$

Полученная оценка имеет порядок $B_0 \| P(x_1) \|$ — при малых h_0 близка к этому числу.

Замечание 4. Отметим, что полученные в теоремах 1 и 2 оценки (8), (9) и (22) *не могут быть улучшены* даже для случая вещественного уравнения, как показывает следующий пример:

$$P(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + h = 0, \qquad (h > 0); \qquad x_0 = 0.$$

Действительно, для данного случая имеем

$$P'(x_0) = -1; \qquad \| \Gamma_0 \| = \frac{1}{|P'(x_0)|} = 1; \qquad B_0 = 1;$$

$$P''(x) = 1; \qquad \| P''(x) \| = |P''(x)| = 1; \qquad K = 1;$$

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| = 1 \cdot h = h; \qquad \eta_0 = h; \qquad h_0 = h.$$

Корни уравнения будут

$$x^*_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2h} = N(h_0)\,\eta_0 \quad \text{и} \quad L(h_0)\,\eta_0,$$

следовательно, будут существовать (будут вещественными) только при $h_0 = h \leqslant \frac{1}{2}$.

При этом меньший корень лежит на границе области (9), а второй—на границе области (22), так что первую нельзя сузить, вторую расширить без того, чтобы существование и единственность не перестали бы иметь место.

Замечание 5. Если начать процесс последовательных приближений не с x_0, а с элемента x_0', близкого к нему, то можно доказать, что сходимость к решению x^* приближений x_n', полученных из x_0', будет во всяком случае иметь место, если

$$\| x_0' - x_0 \| \leqslant \Delta = \frac{1-2h_0}{4h_0}\,\eta_0.$$

Замечание 6. В случае, если операция P *вполне непрерывна*, то существование решения в сфере (9) при условиях 1) — 4) могло бы быть получено на основании теоремы Шаудера о фикспунктах[1]. Именно, уравнение $P(x) = 0$ можно заменить эквивалентным ему $x = F_0(x)$, причём можно проверить, что операция $F_0(x)$ переводит сферу (9) в себя. Необходимо, однако, отметить, что эта проверка потребовала бы проведения *значительной части* рассуждений, использованных в теореме 1 и в то же время этот путь не даёт ряда других важных результатов: сходимости процесса Ньютона, единственности решения. Принцип Каччиопполи-Банаха[1]) позволил бы получить существование решения лишь при гораздо *более грубых* условиях, примерно $h_0 \leqslant 0,1$.

Замечание 7. Отметим, наконец, некоторое принципиальное значение доказанных теорем. Именно, они дают не только установление сходимости определённого алгорифма, но представляют теоремы о *существовании*, *единственности* и *области расположения* решения. При этом существенным условием для возможности применения этих теорем является наличие в нашем распоряжении начального значения x_0, являющегося грубым приближением к решению. Заметим, что такое начальное значение x_0, для которого выполнены условия теорем 1 и 2, всегда найдётся, если существует решение и оно простое, т. е. для него $\| [P'(x^*)]^{-1} \| < +\infty$, так как каждая достаточно близкая к x^* точка будет в этом случае удовлетворять условиям 1) — 4).

Начальное значение x_0 может быть фактически получено в результате грубого численного или приближённого решения задачи. В частности, в механике и в других областях прикладной математики такое приближённое решение часто получается в результате рассмотрения проблемы в упрощённых условиях. После того же, как найдено такое приближённое решение и для него проверены условия 1) — 4), то на основании данных теорем можно заключить о наличии точного решения, единственности его и области, где оно расположено, т. е. провести довольно полное теоретическое исследование проблемы.

Таким образом, данные теоремы показывают, что приближённое решение задачи является полезным не только для получения численных результатов, но оказывается применимым и для *теоретического* исследования вопроса.

При применении процесса Ньютона приходится при каждом шаге находить обратную операцию $[P(x_n)]^{-1}$ или, во всяком случае, решать *ряд* уравнений $P'(x_n)(x_n - x_{n+1}) = P(x_n)$, что нередко представляет значительные трудности. Поэтому при практическом применении процесса Ньютона иногда бывает более удобной его модификация, состоящая в том, что операция $[P'(x_n)]^{-1}$ заменяется при каждом шаге *одной*

[1]) См. В. В. Немыцкий [29].

и *той же* операцией $[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$, т. е. последовательные приближения отыскиваются по формуле

$$x'_{n+1} = x'_n - [P'(x_0)]^{-1} P(x'_n) \tag{29}$$

или из уравнения

$$P'(x_0)(x'_n - x'_{n+1}) = P(x'_n). \tag{30}$$

Очевидно, что первый шаг в обоих процессах совпадает, $x'_1 = x_1$. Относительно сходимости этого процесса справедлива

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 и при $h_0 < \frac{1}{2}$ имеет место сходимость модифицированного процесса Ньютона к решению*

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x^*$$

с быстротой, определяемой неравенством

$$\| x'_n - x^* \| \leqslant q^{n-1} \| x_1 - x^* \| \qquad q = 1 - \sqrt{1-2h_0} < 1. \tag{31}$$

Доказательство теоремы основывается на следующем предложении.

Если для элемента x выполнены условия

$$\| x - x^* \| \leqslant \| x_1 - x^* \|, \tag{32}$$

$$\| x - x_0 \| \leqslant N(h_0)\eta_0, \tag{33}$$

то для элемента $x' = F_0(x)$ будем иметь

$$\| x' - x^* \| \leqslant q \| x - x^* \|, \tag{32a}$$

$$\| x' - x_0 \| \leqslant N(h_0)\eta_0. \tag{33a}$$

Докажем его. Во первых, имеем, принимая во внимание, что $F'_0(x_0) = 0$,

$$\| x' - x^* \| = \| F_0(x) - F_0(x^*) \| \leqslant \sup_{\bar{x} = x + \theta(x^* - x)} \| F'_0(\bar{x}) \| \, \| x - x^* \| =$$

$$= \sup_{\bar{x} = x + \theta(x^* - x)} \| F'_0(\bar{x}) - F'_0(x_0) \| \, \| x - x^* \| \leqslant \sup_{\substack{\tilde{x} = x_0 + \theta_1(\bar{x} - x_0) \\ \bar{x} = x + \theta(x^* - x)}} \| F''_0(\tilde{x}) \| \, \| \bar{x} - x_0 \| \, \| x - x^* \|,$$

но $F''_0(x) = \Gamma_0 P''(x)$, а

$$\| \bar{x} - x_0 \| = \| \theta(x^* - x_0) + (1-\theta)(x - x_0) \| \leqslant \max(\| x^* - x_0 \|, \| x - x_0 \|) \leqslant N(h_0)\eta_0,$$

поэтому

$$\| x' - x^* \| \leqslant B_0 K N(h_0) \eta_0 \| x - x^* \| = h_0 N(h_0) \| x - x^* \| = q \| x - x^* \|.$$

(32a) доказано.

Далее имеем

$$\| x' - x_0 \| \leqslant \| x' - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \leqslant \| F_0(x) - F_0(x_0) - F'_0(x_0)(x - x_0) \| + \eta_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{\bar{x} = x_0 + \theta(x - x_0)} \| F''_0(\bar{x}) \| \, \| x - x_0 \|^2 + \eta_0 \leqslant \frac{1}{2} B_0 K [N(h_0)\eta_0]^2 + \eta_0 = N(h_0)\eta_0.$$

Теперь доказательство теоремы не представляет труда. В самом деле, так как для $x'_1 = x_1$ условия (32) и (33) очевидно выполнены, то они в силу доказанного будут выполнены и для следующего приближения: $x_2' = F_0(x^1) = F_0(x_1)$. Очевидно, что эти условия не нарушатся, если мы произведём ещё один шаг и т. д. При этом величина $\| x_n' - x^* \|$ при каждом шаге умножается на q, следовательно,

$$\| x_n' - x^* \| \leqslant q^{n-1} \| x_1' - x^* \| = q^{n-1} \| x_1 - x^* \|.$$

Теорема доказана.

§ 3. Применения метода Ньютона

Рассматривая *вещественное* или *комплексное* уравнение

$$P(x) = 0,$$

имеем

$$\| P(x_0) \| = | P(x_0) |; \quad \| \Gamma_0 \| = \| [P'(x_0)]^{-1} \| = \frac{1}{|P'(x_0)|},$$

$$K = \max \| P''(x) \| = \max | P''(x) |; \quad \eta_0' = | P(x_0) |; \quad \eta_0 = \frac{|P(x_0)|}{|P'(x_0)|}.$$

В соответствии с этим теоремы 1 и 2 для случая вещественных и комплексных уравнений формулируются так.

Если выполнено условие

$$h_0 = \frac{|P(x_0)| K}{|P'(x_0)|^2} \leqslant \frac{K}{2},$$

то уравнение $P(x) = 0$ *имеет корень в области*

$$| x - x_0 | \leqslant N(h_0) \eta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{K} | P'(x_0) |;$$

единственный в области

$$| x - x_0 | < L(h_0) \eta_0 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{K} | P'(x_0) |,$$

и к нему сходится процесс Ньютона.

Эти теоремы, за исключением факта единственности, были получены Островским[1]). В условии сходимости, полученном Коши[2]), ставится требование ограниченности $\frac{1}{|P'(x)|}$ в целом промежутке, что менее удобно для проверки, чем приведённое условие.

Метод Ньютона для решения *систем* ν алгебраических уравнений с ν неизвестными

$$\eta^{(i)} = f_i(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(\nu)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

является естественным обобщением того же метода для одного уравнения. Последовательные приближения для корня — первое приближение $(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(\nu)})$ по нулевому $(\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_0^{(\nu)})$ — определяются из системы уравнений для поправок

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi^{(1)}}\right)_0 (\xi_1^{(1)} - \xi_0^{(1)}) + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi^{(\nu)}}\right)_0 (\xi_1^{(\nu)} - \xi_0^{(\nu)}) + f_i(\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_0^{(\nu)}) = 0. \qquad (1)$$

---

[1]) А. Островский [31], [32].

[2]) А. Коши [19а].

В таком виде этот метод указан у Рунге и Кёнига[1]) Некоторая попытка дать условие сходимости процесса дана Виллерсом для двух уравнений с использованием производных третьего порядка[2]). Для общего случая ν уравнений некоторые достаточные условия, использующие только производные 1-го и 2-го порядков, даны Н. П. Стениным[3]). Для случая двух уравнений наиболее точные условия даны Островским[4]). Эта теорема получена ниже как следствие из общей теоремы о системах.

Будем рассматривать данную систему как одно уравнение

$$y = P(x) = 0, \tag{2}$$

где операция P переводит ν-мерное пространство в ν-мерное. Принимая метрику m_ν, получим из теорем 1 и 2 следующую теорему.

Теорема 4. *Если выполнены условия*

1) $|f_i(\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \ldots, \xi_0^{(\nu)})| < \overline{\eta} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$ (3)

2) *Матрица* $\left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi^{(j)}} \right)_0 \right\|$ *имеет определитель* $\Delta \neq 0$

и если через $A_{i,j}$ *обозначить алгебраические дополнения его элементов, то выполнено условие*

$$\max_i \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^{\nu} |A_{i,j}| \leqslant B.$$

3) $\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi^{(j)} \partial \xi^{(k)}} \right| \leqslant L \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, \nu)$

в интересующей нас области.

4) $h_0 = B^2 \overline{\eta} L \nu^2 \leqslant \frac{1}{2}$,

то данная алгебраическая система имеет решение, которое может быть найдено с помощью процесса Ньютона.

Мы не останавливаемся на доказательстве этой теоремы, которое сводится к проверке условий 1) — 4) теоремы 1. Так же могут быть сформулированы для данного случая остальные заключения теорем 1 — 3.

Следствие. Рассмотрим случай системы *двух* уравнений с *двумя* неизвестными. Формулировка условий здесь может быть несколько упрощена; именно, если через l обозначить максимум модулей $\left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi^{(j)}} \right)_0 \right| \leqslant l$, то, учитывая, что определитель Δ будет второго порядка и миноры его — это элементы, имеем $|A_{i,j}| \leqslant l$ и, следовательно, можно принять

$$\max_i \frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^{2} |A_{i,j}| \leqslant \frac{2l}{|\Delta|} = B\text{ [5]}).$$

---

[1]) Рунге и Кёниг [38].

[2]) Ф. Виллерс [3].

[3]) Н. П. Стенин [41].

[4]) А. Островский [33].

[5]) За более точное значение для B можно принять

$$B = \max\left(\left| \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi^{(1)}} \right)_0 \right| + \left| \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi^{(2)}} \right)_0 \right|; \quad \left| \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi^{(1)}} \right)_0 \right| + \left| \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi^{(2)}} \right)_0 \right| \right).$$

В соответствии с этим условие 4) теоремы 4 примет вид

$$\frac{16l^2}{\Delta^2}\bar{\eta}L \leqslant \frac{1}{2}$$

или

$$32l^2\bar{\eta}L \leqslant \Delta^2\ ^{1)}. \qquad (4)$$

Замечание. Отметим, что мы могли бы применить и условие 2 (вместо условия 2'), применённого в теореме 4), взяв его в форме

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta$$

(см. замечание 1, § 2 (27)), что при введённой нормировке соответствует условию

$$\max_i |\xi_1^{(i)} - \xi_0^{(i)}| \leqslant \eta.$$

Если принять последнее условие, то 4) следует заменить на

$$h_0 = BL\nu^2\eta \leqslant \frac{1}{2}.$$

Другая теорема о системах алгебраических уравнений получится, если мы применим метрику пространства R^ν.

Теорема 4-а. Если выполнены условия

1) *Матрица* $\left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi^{(j)}} \right)_0 \right\|$ *имеет обратную* $\left\| \frac{A_{i,j}}{\Delta} \right\|$, *причём*

$$\frac{1}{|\Delta|}\left(\sum_{i,j=1}^{\nu} A_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B,$$

2) $\sum\limits_{i=1}^{\nu} (\xi_1^{(i)} - \xi_0^{(i)})^2 \leqslant \eta^2$,

3) $\sum\limits_{i,j,k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi^{(j)}\, \partial \xi^{(k)}} \right)^2 \leqslant K^2$, можно взять также $K = \nu\sqrt{\nu}\, L$, где

$$\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi^{(j)}\, \partial \xi^{(k)}} \right| \leqslant L.$$

4) $h_0 = BK\eta \leqslant \frac{1}{2}$,

то процесс Ньютона сходится; при этом решение системы $x^* = (\xi^{(1)*}, \xi^{(2)*}, \ldots, \xi^{(\nu)*})$ *лежит в области*

$$\| x^* - x_0 \| = \left[\sum_{i=1}^{\nu} (\xi^{(i)*} - \xi_0^{(i)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}\, \eta.$$

И здесь доказательство состоит в непосредственной проверке условий теоремы 1.

---

[1]) В таком виде эта теорема была получена Островским. Любопытно, что применённые им для данного частного случая рассуждения, пожалуй, сложнее, чем доказательство общей теоремы 1 и, повидимому, эта сложность заставила его ограничиться случаем двух уравнений.

В качестве примера рассмотрим следующую систему, которая решается у Рунге и Кёнига (стр. 178 — 179), а также у Островского [1])

$$f \equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0,$$
$$g \equiv xy^3 - y - 4 = 0.$$

За первое приближение возьмём точку T_0 с $x_0 = 1,2$; $y_0 = 1,7$. Тогда

$$f(T_0) = -0,434, \quad g(T_0) = 0,1956.$$

Система для определения первых поправок $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$ будет

$$f'_x(T_0)\,\Delta x + f'_y(T_0)\,\Delta y + f(T_0) = 0; \qquad 8,64\Delta x - 3,4\Delta y - 0,434 = 0;$$
$$g'_x(T_0)\,\Delta x + g'_y(T_0)\,\Delta y + g(T_0) = 0; \qquad 4,913\Delta x + 9,404\Delta y + 0,1956 = 0,$$

так что их значения будут $\Delta x = 0,0349$; $\Delta y = -0,039$, при этом определитель системы $\Delta = 97,954$.

Сначала оценим h_0 согласно Островскому (следствие к теореме 4). Мы должны принять $l = 9,404$, $\bar{\eta} = 0,434$, а для L, выписав вторые производные

$$f''_{x^2} = 12x; \quad f''_{xy} = 0; \quad f''_{y^2} = -2; \quad g''_{x^2} = 0; \quad g''_{xy} = 3y^2; \quad g''_{y^2} = 6xy$$

и оценивая их в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1,3$; $0 \leqslant y \leqslant 1,8$, из которого не должны выйти последовательные приближения, найдём $L = 12 \cdot 1,3 = 15,6$. Для h_0, следовательно, получаем значение

$$h = \frac{16 l^2}{\Delta^2}\,\eta L = \frac{16 \cdot 9,404^2 \cdot 0,434 \cdot 15,6}{97,954^2} = 0,998 > 0,5.$$

Таким образом, на основании теоремы Островского заключения о сходимости процесса сделать нельзя.

Попробуем применить теорему 4-а.

Для нахождения B рассмотрим матрицу

$$\Gamma_0 = \begin{Vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 8,64; & -3,4 \\ 4,913; & 9,404 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0,09604; & 0,034711 \\ -0,05016; & 0,088204 \end{Vmatrix}.$$

Как известно, норма линейного преобразования, осуществляемого матрицей, есть

$$\|\Gamma_0\| = \sqrt{\Lambda_{\max}},$$

где $\Lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы (см. гл. 1, § 1, пример 2)

$$\Gamma_0\Gamma_0^* = \begin{Vmatrix} 0,09604; & 0,034711 \\ -0,05016; & 0,088204 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0,09604; & -0,05016 \\ 0,034711; & 0,088204 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,01042; & -0,001754 \\ -0,001754; & 0,01030 \end{Vmatrix}.$$

$\Lambda_{\max}$ отыскиваем из характеристического уравнения

$$\Lambda^2 - 0,02072\Lambda + 0,0001042 = 0,$$

откуда

$$\Lambda_{\max} = 0,01036 + \sqrt{0,0001073 - 0,0001042} = 0,0121,$$

и, значит,

$$B = \|\Gamma_0\| = \sqrt{0,0121} = 0,11.$$

За η можно взять величину

$$\eta = \|T_1 - T_0\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0,0524.$$

И, наконец, K оцениваем (в том же прямоугольнике, что и выше) согласно примеру 2 § 1,

$$K \leqslant (15,6^2 + 2^2 + 2 \cdot 9,72^2 + 14,04^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{631,72} = 25,14.$$

[1]) Рунге и Кёниг [38]; А. Островский [33].

Теперь находим h_0

$$h_0 = BK\eta = 0{,}11 \cdot 25{,}14 \cdot 0{,}0524 = 0{,}15 < 0{,}5,$$

что обеспечивает сходимость процесса.

Следующее приближение будет:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2349; \quad y_1 = y_0 + \Delta y = 1{,}661.$$

Перейдём к нелинейным интегральным уравнениям.

Будем рассматривать уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\, dt, \tag{5}$$

где K — непрерывная функция своих аргументов. Чтобы свести уравнение (5) к виду, рассмотренному в § 2, введём операцию

$$y = P(x); \quad y(s) = x(s) - \int_0^1 K(s, t, x(t))\, dt. \tag{6}$$

Процесс Ньютона для уравнения (6) строится следующим образом. Задаёмся начальным приближением — функцией $x_0(s)$. Следующее приближение — функция $x_1(s)$ — должно определяться из линейного интегрального уравнения

$$x_1(s) - x_0(s) - \int_0^1 K'_x(s, t, x_0(t))\,(x_1(t) - x_0(t))\, dt = \varepsilon_0(s), \tag{7}$$

где

$$\varepsilon_0(s) = \int_0^1 K(s, t, x_0(t))\, dt - x_0(t). \tag{8}$$

Уравнение (7) может быть получено, исходя из общей формулы, связывающей x_1 и x_0, если учесть смысл $P'(x)$ для данного случая (см. § 1).

Сходимость этого процесса, как уже упоминалось, была по моему предложению исследована в диссертации Д. М. Загадского[1]). Однако полученные им условия $\left(h_0 \leqslant \frac{1}{10}\right)$ более жёстки по сравнению с теми, которые получаются на основании теорем 1 — 3 § 2. Если операцию (6) рассматривать как операцию из C в C, то из этих теорем получается.

Теорема 5. *Если выполнены следующие условия:*

1) *Для начального значения $x_0(s)$ ядро*

$$K'_x(s, t, x_0(t)) = k(s, t)$$

имеет резольвенту $G(s, t)$, причём

$$\int_0^1 |G(s, t)|\, dt \leqslant B \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

2) $$|\varepsilon_0(s)| = \left|x_0(s) - \int_0^1 K(s, t, x_0(t))\, dt\right| \leqslant \eta,$$

[1]) Д. М. Загадский [5] и [6].

3) $|K''_{u^2}(s, t, u)| \leqslant K$ *в области, определяемой неравенством* (9) § 2,

4) $h = (B+1)^2 \bar{\eta} K \leqslant \frac{1}{2}$,

то процесс Ньютона для интегрального уравнения (5) *с начальным значением* $x_0(s)$ *сходится к решению этого уравнения, которое существует и лежит в области*

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leqslant N(h)(B+1)\bar{\eta}$$

и единственно в области

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leqslant L(h)(B+1)\bar{\eta}.$$

Для доказательства достаточно применить теоремы 1 и 2 (с условием 2′) вместо 2)).

Рассматривая уравнение (6) в пространстве L^2 вместо C, можем получить следующую теорему.

Теорема 5-а. *Пусть выполнены условия:*

1) $\int\limits_0^1 \left[x_0(s) - \int\limits_0^1 K(s, t, x_0(t))\,dt\right]^2 ds \leqslant \bar{\eta}^2$.

2) *Выполнено неравенство*

$$\max_n \frac{|\lambda_n|}{|1-\lambda_n|} \leqslant B,$$

где λ_n *собственные числа ядра* $K'_x(s, t, x_0(t))$, *если последнее симметрично, и*

$$\max_n \sqrt{\frac{\Lambda_n}{|1-\Lambda_n|}} \leqslant B,$$

где Λ_n — *собственные значения ядра* $\bar{k}(s, t) = k(s, t) + k(t, s) - \int\limits_0^1 k(u, s)\,k(u, t)\,du$ *в общем случае.*

3) $|K''_{u^2}(s, t, u)| \leqslant K$ *для всех конечных значений* u.

4) $h = B^2 \bar{\eta} K \leqslant \frac{1}{2}$,

то уравнение (6) *имеет решение, которое может быть найдено процессом Ньютона.*

Рассмотрим в качестве примера интегральное уравнение

$$x(s) = 1 - 0{,}4854s + s^2 + \int\limits_0^1 st \operatorname{arctg} x(t)\,dt,$$

точное решение которого есть $x^*(s) = 1 + s^2$ [1]).

Применим к этому уравнению теорему 5, взяв в качестве начального приближения $x_0(t) \equiv \frac{3}{2}$.

Так как ядро $k(s, t) = K'_x(s, t, x_0(t)) = \frac{st}{1+\frac{9}{4}} = \frac{4}{13} st$, то резольвента его $G(s, t)$ имеет вид

$$G(s, t) = cst;$$

[1]) Д. М. Загадский [6].

определяем c из интегрального уравнения резольвенты

$$G(s,\ t)=k(s,t)+\int_0^1 k(s,\ u)\,G(u,\ t)\,du,$$

что даёт

$$c=\frac{4}{13}+\frac{4}{39}c,\quad c=\frac{12}{35}.$$

Находим теперь B:

$$B=\max_s\int_0^1|G(s,\ t)|\,dt=\frac{6}{35}.$$

Определяем, далее, $\overline{\eta}$

$$\varepsilon_0(s)=1-0{,}4854s+s^2+s\int_0^1 t\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\,dt=s^2+0{,}006012s-0{,}5,$$

откуда

$$\overline{\eta}=\max_s|\varepsilon_0(s)|=\varepsilon_0(1)=0{,}506012.$$

Наконец,

$$K\leqslant\max_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}|K''_{u^2}(s,\ t,\ u)|=\max\left|\frac{2ust}{(1+u^2)^2}\right|=\frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Подсчитываем h:

$$h=(B+1)^2\,\overline{\eta}\overline{K}=\left(\frac{41}{35}\right)^2\cdot 0{,}506012\cdot\frac{3}{8}\sqrt{3}=0{,}451<0{,}5,$$

что обеспечивает сходимость процесса[1]).

Найдём следующее приближение. Согласно общей теории поправку $\Delta x=x_1-x_0$ следует определять из уравнения

$$x_1(s)-x_0(s)=\int_0^1\frac{st}{1+[x_0(t)]^2}(x_1(t)-x_0(t))\,dt+\varepsilon_0(s),$$

т. е.

$$\Delta x(s)=\frac{4}{13}s\int_0^1 t\Delta x(t)\,dt+s^2+0{,}006s-0{,}5,$$

и, следовательно,

$$\Delta x(s)=s^2+0{,}006s-0{,}5+\int_0^1 G(s,\ t)(t^2+0{,}006t-0{,}5)\,dt=$$

$$=s^2+0{,}006s-0{,}5+\int_0^1\frac{12}{35}st(t^2+0{,}006t-0{,}5)\,dt=s^2+0{,}0067s-0{,}5.$$

Таким образом,

$$x_1(s)=x_0(s)+\Delta x(s)=s^2+0{,}0067s+1,$$

что отличается от точного решения меньше чем на 0,01, тогда как начальное приближение разнилось от точного на 0,5.

В заключение отметим возможность применения метода Ньютона к *разысканию собственных значений и собственных элементов* некоторого оператора A в гильбертовом пространстве H (см. гл. III § 1).

---

[1]) Если воспользоваться теоремой 5-а, то для h получится значительно меньшее значение, а именно $h=0{,}141$.

Идея этого состоит в следующем. Если λ — собственное значение оператора A, а x — соответствующий ему собственный элемент, который мы будем считать нормированным, то x и λ можно рассматривать как решение системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left\{\begin{aligned} Ax-\lambda x&=0,\\ \frac{1}{2}[(x,\ x)-1]&=0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Если ввести *пространство* $\tilde{H}$ пар $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ ($x\in H$, λ — вещественное число), причём *норму* определить так:

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\|x\|^2+|\lambda|^2},$$

то систему (9) можно записать в виде одного уравнения

$$P\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}=0, \tag{10}$$

где

$$P\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Ax-\lambda x \\ \frac{1}{2}[(x,x)-1] \end{pmatrix}$$

— операция (нелинейная), переводящая $\tilde{H}$ в себя.

Без труда находим, что

$$P'\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (A-\lambda I)\,\Delta x-x\Delta\lambda \\ (x,\Delta x) \end{pmatrix},$$

так что, задавшись некоторым начальным приближением — парой $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$, следующее, в соответствии с § 2 (2), находим из линейного уравнения для поправки $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}$

$$P'\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix}=-P\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix},$$

т. е., иными словами, из системы уравнений

$$\left\{\begin{aligned} (A-\lambda I)\Delta x-x\Delta\lambda&=y,\\ (x,\ \Delta x)&=t. \end{aligned}\right.$$

Мы не будем останавливаться на исследовании условий сходимости процесса, которое производится с помощью теоремы 1 или, что здесь удобнее, с помощью теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Акбергенов А. И. Матем. сб., 42 (1933), 679.
[2] Banach St. Théorie des opérations, linéaires, Warszawa, 1932.
[3] Willers F. Methoden d. prakt. Analysis, Berlin, 1928.
[4] Гончаров В. Л. Интерполирование и приближение непрерывных функций, ГТТИ, М.—Л., 1934.
[5] Загадский Д. М: ДАН, 59, № 6 (1948).
[6] Приближённое решение нелинейных интегральных уравнений. Диссертация. Пед. ин-тут им. А. И. Герцена, Ленинград, 1946.
[7] Seidel. Münch. Akademie Abh. 1874, 3. Abh.

[8] Иванов В. Известия АН. Сер. матем., (1939), 477.
[9] Канторович Л. В. Уч. записки ЛГУ, III, вып. 7 (1937), 17.
[10] Известия АН. Сер. матем. 1933, № 5, 647.
[11] ДАН, 60, № 6 (1948), 957.
[11a] ДАН, 14, №8—9 (1934), 532.
[12] ДАН, 48, № 7 (1945), 455.
[13] ДАН, 56, № 3 (1947), 233.
[14] ДАН, 59, № 7 (1948), 1237.
[15] Канторович Л. В. и Вулих Б. З. Compositio mathematicae, 5 (1937), 119.
[16] Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа ОНТИ, 1941.
[17] Келдыш М. В. Известия АН. Сер. матем., 1942, № 6, 309.
[18] Koch H. v. Palermo Rend., 28 (1909), 255.
[19] Cauchy A. Comptes Rendus, 25 (1847), 536.
[19a] Oeuvres compl. (II), 4, p. 273.
[20] Кравчук М. Ф. О решении интегральных и дифференциальных уравнений методом моментов. I, Киев, 1932.
[21] Крылов Н. М. Les méthodes de solution approchée de problemes de la physique mathematique. Mém. de Sc. Math. XLIX, Paris, 1931.
[22] Annales de Toulouse (1927).
[23] Приближённое решение основных проблем математической физики, Киев, 1931.
[24] Courant R. Bull. Am. Math. Soc., 49 (1943), 1.
[25] Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Math., Anr., 100 (1928), 32.
[26] Люстерник Л. А. Основные понятия функционального анализа, Успехи матем. наук, вып. 1, 1936.
[27] Mises u. Pollaczek-Geiringer. Zeitschriftf. angew. Math. u. Mech., 9 (1929), 64.
[28] Натансон И. П. ДАН, 19, № 5 (1938), 357.
[28a] Уч. Записки Ун-та в Алма-Ата, II (1938), 19.
[29] Немыцкий В. В. Метод неподвижных точек в анализе. Успехи матем. наук, вып. I, 1937.
[30] Orlicz W. Studia math., 5 (1935), 127.
[31] Ostrowski A. Матем. сб., 2 (1937), 1073.
[32] Сборник работ памяти Граве, Москва, 1940, 213.
[33] Commen. Math. Helv., 9 (1937), 79.
[34] Панов Д. Ю. Добавление к книге Скарборо — Численные методы высшего анализа, М. — Л., 1934.
[35] Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов. Успехи матем. наук, вып. IX, 1941.
[36] Polya G., Math. Zeitsch., 37 (1933), 264.
[36a] Полиа и Сёге. Задачи и теоремы из анализа, М. — Л., 1937.
[37] Рисс Ф. О линейных функциональных уравнениях. Успехи матем. наук, вып. 1, 1936.
[38] Runge u. König. Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin, 1924.
[39] Смирнов В. И. Курс высшей математики V М. — Л., 1947.
[40] Стеклов В. А. Изв. импер. Акад. наук № 3 (1916), стр. 178.
[41] Степин Н. П. Сборник работ «Конформное отображение», М. — Л., 1937.
[42] Temple G. Proc. Royal Soc., London (A), 169 (1939), 476.
[43] Fréchet M. Ann. Ecole norm., 293 (1925).
[44] Friedrichs K. Math. Ann., 109 (1934), 465.
[45] Черепков Ф. С. Матем. сб. 1 (43) (1936), 953.