# Лабораторная работа «Решение дифференциальных уравнений»

17 сентября 2023 года

**Дедлайн 5 ноября 2023 года 23:59 МСК**

# 1 Решение системы обыновенных дифференциальных уравнений

## 1.1 Постановка задачи

Дано $N$ материальных точек с массами $m_k$, положения которых в начальный момент времени заданы радиус-векторами $\mathbf{r}_k$, а скорости векторами $\mathbf{v}_k$, $k = \overline{1, N}$. Требуется определить траектории всех частиц во все моменты времени от 0 до $t_{end}$.

**Формат ввода**. На вход программе дается файл с массами, начальными координатами и скоростями всех материальных точек.

Первая строка файла состоит из одного числа $n$ — количества точек.

**Формат вывода**. Файл формата csv, каждая строка которого имеет следующий вид:

$$t \qquad x_1 \qquad y_1 \qquad x_2 \qquad y_2 \qquad \ldots \qquad x_n \qquad y_n$$

**Закон всемирного тяготения**

Решение задачи основано на законе всемирного тяготения.

Сила, действующая на тело $q$ со стороны тела $k$, равна

$$\mathbf{F}_{qk} = G\frac{m_q m_k}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_q\right|^3}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_q\right), \tag{1}$$

где $G = 6.67430 \cdot 10^{-11}$ — гравитационная постоянная.

Общая сила, действующая на тело $q$:

$$\mathbf{F}_q = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq q}}^{N} \mathbf{F}_{qk} = G m_q \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq q}}^{N} \frac{m_k}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_q\right|^3}\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_q\right) \tag{2}$$

Зная силу $\mathbf{F}_q$, можно найти траекторию частицы $q$, если решить дифференциальное уравнение:

$$m_q \frac{d^2\mathbf{r}_q}{dt^2} = \mathbf{F}_q \tag{3}$$

Решая совместно $n$ уравнений вида (3) для каждой частицы, получаем траектории всех $n$ частиц.

## 1.2 Решение уравнений (3) методом Эйлера 1 порядка

Перепишем каждое уравнение вида (3) как систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} = \mathbf{v}_q \\ m_q \frac{d\mathbf{v}_q}{dt} = \mathbf{F}_q \end{gathered} \tag{4}$$

Перейдем от векторных уравнений (4) к скалярным, считая, что

$\mathbf{r_q} = (x_q, y_q)$, $\mathbf{v_q} = \left(v_{x_q}, v_{y_q}\right)$ и $\mathbf{F_q} = \left(F_{x_q}, F_{y_q}\right)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_q}{dt} &= v_{x_q}\\
\frac{dy_q}{dt} &= v_{y_q}\\
\frac{dv_{x_q}}{dt} &= \frac{F_{x_q}}{m_q}\\
\frac{dv_{y_q}}{dt} &= \frac{F_{y_q}}{m_q}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Заменим производные в (5) на конечные разности:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_q^n - x_q^{n-1}}{\Delta t} &= v_{x_q}^{n-1}\\
\frac{y_q^n - y_q^{n-1}}{\Delta t} &= v_{y_q}^{n-1}\\
\frac{v_{x_q}^n - v_{x_q}^{n-1}}{\Delta t} &= \frac{F_{x_q}^{n-1}}{m_q},\\
\frac{v_{y_q}^n - v_{y_q}^{n-1}}{\Delta t} &= \frac{F_{y_q}^{n-1}}{m_q}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где надстрочный индекс $n$, $n = 1, 2, \ldots$ указывает, что значение величины взято в момент времени $t_n = \Delta t \cdot n$, $\Delta t$ — шаг по времени (чем меньше, тем точнее расчет).

Выражая из (6) значения величин на $n$-ом шаге по времени, окончательно получаем итерационные формулы для решения каждого уравнения системы (3):

$$
\begin{aligned}
x_q^n &= x_q^{n-1} + v_{x_q}^{n-1}\Delta t\\
y_q^n &= y_q^{n-1} + v_{y_q}^{n-1}\Delta t\\
v_{x_q}^n &= v_{x_q}^{n-1} + \frac{F_{x_q}^{n-1}}{m_q}\Delta t,\\
v_{y_q}^n &= v_{y_q}^{n-1} + \frac{F_{y_q}^{n-1}}{m_q}\Delta t
\end{aligned}
\tag{7}
$$

## 2 Решение уравнения в частных производных

Реализовать решение задачи Дирихле для определения стационарного распределения температур на пластине с внешними источниками тепла, на краях которой поддерживается заданный температурный режим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = c\end{gathered} \tag{8}$$

При организации параллельных вычислений использовать метод Гаусса-Зейделя с разбиением сетки на горизонтальные полосы.

## 3 Критерии оценивания

Работу выполнять с использованием pthreads или OpenMP.

На оценку 8 нужно реализовать параллельную программу для решения задачи $n$ тел путем решения системы дифференциальных уравнений (3). Провести оценку производительности разработанной программы: вычислить ускорение и эффективность в зависимости от размера входных данных (количества точек) и количества потоков. Создать визуализацию (можно в Питоне с использованием библиотеки celluloid).

Баллы могут быть сняты за нерациональное распределение задач между потоками, неполное исследование производителности, отсутствие визуализации.

На оценку 10 необходимо также, в дополнение к решению системы (3), решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона.

Работы выполняются в группе. Оценка за работу выставляется как среднее арифметическое оценки группы и индивидуальной оценки. Индивидуальная оценка определяется по результатам ответов студента на вопросы во время защиты.