Интегральное исчесление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если $F`(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b\rangle$

Теорема

$f : \langle a, b\rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \operatorname{sign} x$
Пусть F первообразная f, тогда $F` = f$ принимает зачения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу $F`$ должна приниматьвсе значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F первообразная f. Тогда
1. $\forall c \in \mathbb{R}\ F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ тоже первообразная f, то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)` = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))` = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных
Обозначение: $\int f = \int f(x) dx$
F - первообразная f, $\int f(x) dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

Проверка

3.

При $x > 0, (\ln x)` = \frac{1}{x}$. При $x < 0 : (\ln(|x|))` = (\ln(-x))` = \frac{1}{x}$
11.

$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)` = \frac{1}{2}((\ln|1+x|)`-(\ln|1-x|)`) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$
12.
$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)` = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)` = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$ очев

Определение

A, B - множества функция $\langle a, b\rangle . A + B = \{f + g, f \in A, g \in B\}; c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}, A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, f, g$ - имеют первообразные
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:
1. $f + g$ тоже имеют первообразную $\int f + g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3. $\alpha f + \beta g$ тоже имеет первообразную, $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g. Тогда $F + G$ - первообразыне для $f + g$
$\int(f + g) = F + G + C, \int f = F + C, \int g = G + C$
Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ - дифф. F - первообразная f. $\int f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0$. (Подставить $\varphi(x) = \alpha x + \beta$)

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $f`g$ имеет первообразную, тогда $fg`$ тоже имеет первообразную и $\int fg` = fg - \int f`g$

Доказательство

H - первообразная для $f`g$. (? )$fg$ - $H$ - первообразая для $fg`$
$(fg - H)` = f`g + fg` - H` = fg` \blacksquare$

Площади и определенный интеграл

$\mathcal{F}$ - множество всех ограниченных помножеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:
1. $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b - a)(d - c)$
2. $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma(\overline{E}) \leq \sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на E_- и $E_+ \Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ (точки l могут принадлежать как E_- и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2`: если $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Но существование такого объекто неочев (сложно)

Теорема

$\sigma(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}|P_k| : \cup_{k=1}^{n} P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } || \text{ осям координат}\right\}$ - квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе

апоЖ

Доказательство

Проверим три свойства

1. Пусть $P=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle(?)\sigma(P)(b-a)(d-c)$
   $\leq \{P\}$ - покрытие $P\Rightarrow\sigma(P)\leq|P|=(b-a)(c-d)$
   $\geq$ Пусть $\cup_{k=1}^{n} P_k > P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^{n}|P_k|\geq|P|$ Продлим стороны P_k и P, если мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k, то он разбит на маленькие прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие прямоугольники образуют покрытие P, $\sum_{k=1}^{n}|P_k|\geq\sum|\text{маленьких прямоугольников}|\geq\sum|\text{маленьких прямоугольников, входящих в }\ P|=|P|$ ∎
2. любое покрытие E - это покрытие $\overline{E}\Rightarrow\sigma\left(\overline{E}\right)\leq\sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+. $(?)\sigma(E)=\sigma(E_-)+\sigma(E_+)$
   $\leq$ Фиксируем $\varepsilon>0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^{m} P_k^+ > E_+$, такое что $\sum_{k=1}^{m}\left|P_k^+\right|\leq\sigma(E_+)+\varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^{n} P_i^- > E_-$, такое что $\sum_{i=1}^{n}|P_i^-|\leq\sigma(E_-)=\varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, ..., P_m^+, P_1^-, P_2^-, ...P_n^-$ - образуют покрытие E, значит $\sigma(E)\leq\sum_{k=1}^{m}\left|P_k^+\right|+\sum_{i=1}^{n}|P_i^-|\leq\sigma(E_+)+\varepsilon+\sigma(E_-)+\varepsilon=\sigma(E_+)+\sigma(E_-)+2\varepsilon$, устремим ε к нулю.
   $\geq$ Пусть есть $P_1, ...P_n$ - покрытие E. Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми)
   Тогда $P_1^+, ...P_n^+$ - покрытие E_+, а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^{n}|P_k|=\sum_{k=1}^{n}\left|P_k^+\right|+\sum_{k=1}^{n}(P_k^-)\geq\sigma(E_+)+\sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем что хотели

Замечания

1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|P_k|\right\}$
   Если $E=([0,1]\cap\mathbb{Q})\times([0,1]\cap\mathbb{Q})\Rightarrow\sigma_1(E)=0$, но $\sigma(E)=1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в $\mathbb{R}^3$ можно разделить на 5 непересекающихся частей, применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

Определение

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывная , $f_+\max\{f,0\}, f_+(x)=\max\{f(x),0\}, f_-=\max\{-f,0\}$

Свойства

1. $f_\pm\geq0$
2. $f=f_+-f_-, |f|=f_++f_-$
3. $f_+=\frac{f+|f|}{2}, f_-=\frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной,то f_+ и f_- были непрерывны

Определение

$f:[a,b]\to\mathbb{R}. f\geq0$, подграфик f - это $P_f:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\in[a,b], 0\leq y\leq f(x)\right\}$

Определение

$f\in C[a,b]. \int_a^b f=\int_a^b f(x)dx=\sigma\left(P_{f_+}\right)-\sigma\left(P_{f_-}\right)$

```
 /\_/\
( o.o )
 > ^ <
```

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b-a)$
4. $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-, (-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$, $\int_a^b (-f) = \sigma\left(P_{(-f)_+}\right) - \sigma\left(P_{(-f)_-}\right) = \sigma\left(P_{f_-}\right) - \sigma\left(P_{f_+}\right) = -\int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma\left(P_f\right)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f, f_- = 0$
6. Если $f \geq 0, f \in C[a,b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a,b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$: $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]$
$\int_a^b f = \sigma\left(P_f\right) \geq \sigma\left(\left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]\right) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$f : [a,b] \to \mathbb{R}, c \in (a,b)$
Тогда $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Обозначение $P_g([\alpha, \beta]) := \{(x,y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$

Доказательство

$\int_a^b f = \sigma\left(P_{f_+}([a,b])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([a,b])\right) = \sigma\left(P_{f_+}([a,c])\right) + \sigma\left(P_{f_+}([c,b])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([a,c])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([c,b])\right) = \int_a^c f + \int_c^b f$

Следствие

$f : [a,b] \to \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ Тогда $\int_a^b = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f$ (индукция)

Теорема монотонность

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$
Тогда $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство

$f_+ = \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, аналогично $f_- = \max\{0, -f\} \geq \max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-}$
$\Rightarrow \sigma\left(P_{f_+}\right) \leq \sigma\left(P_{g_+}\right), \sigma\left(P_{f_-}\right) \geq \sigma\left(P_{g_-}\right) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma\left(P_{f_+}\right) - \sigma\left(P_{f_-}\right) \leq \sigma\left(P_{g_+}\right) - \sigma\left(P_{g_-}\right) = \int_a^b g$

Следствия

1.

$f \in C[a,b]$ Тогда $(b-a) \cdot \min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} f(x)$

Доказательство

$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b-a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b-a)$

2.
$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Доказательство
$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Теорема о среднем
$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

Доказательство:
$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$

Определение
Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним перделом
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) := \int_a^x f, a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним перделом
$\Psi(x) := \int_x^b f, a \leq x \leq b$
Замечание:
1. $\Psi(x) = 0$
2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b (f)$

Теорема Барроу
$f \in C[a, b], \Phi(x) := \int_a^x f$
Тогда $\Phi`(x) = f(x)$

Доказательство
$\Phi_+`(x) = \lim_{y\to x_+} \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \lim_{y\to x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y-x} = \lim_{y\to x_+} \frac{1}{y-x}\int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f\left(c_y\right), c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y\to x_+} f\left(c_y\right) = f(x)$
Если y_n убывает к x, то $c_{y_n} \to x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f\left(c_{y_n}\right) \to f(x)$
Для $\Phi\_`(x)$ аналогично

Следствие 1
$f \in C[a, b], \Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi`(x) = -f(x)$

Доказательство
$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi`(x) = -\Phi`(x) = -f(x)$

Следствие 2
$f \in C\langle a, b\rangle$, тогда у f есть первообразная

Доказательство
Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) \text{ при } \ x \geq c \\ -\Psi(x) \text{ при } \ x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)
$f \in C[a, b], F$ - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) := \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a \int_a^b f := -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказтельство

F, G - первообразная для f, g
$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$
$(\alpha F + \beta G)` = \alpha F` + \beta G` = \alpha f + \beta g$
$\overset{\text{Н.Л}}{\Rightarrow} \int_a^{b (\alpha f + \beta g)} = \alpha F + \beta G \ |_a^b = \alpha \cdot F \ |_a^b + \beta G \ |_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Теорема формула интегрирования по частяи

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b fg` = fg \ |_a^b - \int_a^b f`g$

Доказательство

H - первообразная для $f`g \Rightarrow fg - H$- первообразная для $fg`$
$(fg - H)` = (fg)` - H` = f`g + fg` - f`g = fg`$
$\int fg` = (fg - H) \ |_a^b = fg \ |_a^b - H|_a^b = fg \ |_a^b - \int_a^b f`g$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \to [a, b] \ \varphi \in C^1[a, b], p, q \in [c, d]$
Тогда $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная f, $F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi`(t)$
$(F(\varphi(t)))` = F`(\varphi(t)) \cdot \varphi`(t) = f\{\varphi(t)\}\varphi`(t)$
$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \ |_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$

Пример

$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4}\right)dt, \varphi(t) = t^2, \varphi`(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$= \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan|_{a^2}^{b^2}$

Прододжение формулы интегрирования по частям

Пример

$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n (\frac{\pi}{2} - x) dx \mid \varphi(x) := y = \frac{\pi}{2} - x \mid = -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$
$W_0 = \frac{\pi}{2}$
$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
$wW_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \sin^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4} \ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(\cos x)` dx = -\left(\underbrace{\sin^{n-1} \cos|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x}_{1-\sin^2 x} dx\right) = (n-1)\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right)$
$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$
$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$
$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

Формула Валлиса

$\lim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство

на $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin^{2n} \geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}$
$W_{2n} \geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2}$
$\frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$
$\frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \to \frac{\pi}{2}$
$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \to \frac{\pi}{2}$

Следствие

$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!}$
$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = 2^n \cdot n!$
$\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n (n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
Формула Валлиса $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle$
Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

Доказательство

Индкукция по n

База $n = 0$

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f`(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$

Переход $n \to n+1$

$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{I:=}$

$I =$
$u = f^{(n+1)}, u` = f^{(n+2)}, v = (x-t)^n, v` = -\frac{(x-t)^n}{n+1}$
$I = \int_{x_0}^x uv` = uv |_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u`v = \underbrace{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x-t)^{n+1} |_{t=x_0}^{t=x}}_{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n+1} (x-t)^{(n+1)} dt$

$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt$

Пример

$H_j := \frac{1}{j!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x dx$

Наблюдение: эта штука точно положительна, значит интегральчик точно положительный

Свойтсва:

1. $0 < H_j \leq \frac{1}{j!}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \cos x dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$
2. Если $c \in \mathbb{R}$, то $c^j H_j \to 0$, так как $0 \leq \left|c^j H_j\right| \leq \frac{\left(|c|\frac{\pi^2}{4}\right)^j}{j!} \underset{j\to\infty}{\to} 0$
3. $H_0 = 1, H_1 = 2$
4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geq 2$

   Доказательство: $j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x dx$

   $u = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j, v` = \cos x, u` = -2xj\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{(j-1)}, v = \sin x$

   $\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x \,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \sin x dx$

   $u = x\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}, v` = \sin x, v = -\cos x, u` = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} - 2(j-1)x^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} =, x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right), = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} + 2(j-1)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}$

   подставляем в изначальный интеграл:

   $= 2j\left(x\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}(-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cos x dx - \left(\frac{\pi^2}{4}\right)2(j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} \cos x dx\right) = j!$

   $j! H_j = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - 2j\frac{\pi^2}{4}2(j-1)(j-2)! H_{j-2}$

   $H_j = 2(2j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

Теорема Ламберта

π и π^2 - иррациональное число

Доказательство

От противного. Предположим, что $\pi^2 = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$

Проверим, что тогда $n^j H_j$ - целое число По индукции по j. База $j = 0, j = 1$ очевидный

Переход $j-2, j-1 \to j$

$n^j H_j = \underbrace{(4j-2)\cdot n}_{\text{целое}} \cdot n^{j-1} H_j - 1 - \underbrace{n^2\pi^2}_{=m^2 n \text{ целое}} n^{j-2} H_{j-2}$ - индукционное предположение

Понимаем, что $n^j H_j$ - целоеб $n^j H_j > 0 \Rightarrow$ - $n^j H_j \geq 1$, с другой стороны, если воспользуемся свойством номер 2 $n^j H_j \underset{j\to\infty}{\to} 0$, противоречие :(

Интегральные суммы

Определение равномерно непрерывной функции

$f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если $\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E$, т.ч $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание

f непрерывна во всех точках из E означает, что $\forall y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in E$, т.ч $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Примеры

1. $\sin$ и $\cos$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$

   Возьмем $\varepsilon = 1$: Проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит $f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) = \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 -$

$x^2 = x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4} > x \cdot \delta$ для $x = \frac{1}{\delta}$ все плохо
$f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) > 1$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$
   Возьмем $\varepsilon = 1$ Проверим, что никакое $0 < \delta < 1$, $x = \frac{\delta}{2}, y = \delta, f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$ липшицева с константой M, если $\forall x, y \in E\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Замечание

1. липшицевость $\Rightarrow$ равномерно непрерывна (просто берем в качестве $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$)
2. Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f`| \leq M$ на $\langle a, b\rangle$, то f липшицева с константой M и, в частонсти, равномерно непрерывна

Теорема Кантора

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

Доказательство

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Возьмем $\varepsilon > 0$, предположим, что никакое δ для него не подходит
$\delta = 1$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_1, y_1 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < 1$, но при этом $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$
$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит, значит найдутс такие точки $x_2, y_2 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$
…
$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$, такие что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
$y_n \in [a, b]$ ограничена, последовательность по Т. Б-В выберем подпоследовательность $y_{n_k} \to c \in [a, b]$
$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} + \lim\left(x_{n_k} - y_{n_k}\right) = c + 0 = c$
f непрерывна в c означает, что $\lim f\left(x_{n_k}\right) = f(c)$, аналогично $f\left(y_{n_k}\right) = f(c)$, тогда пердел разности $\lim\left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right) = 0$, но с другой стороны $\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon$
противоречие, значит предположение не верно и какое-то δ подойдет

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta), \delta > 0, \omega_f(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \land |x - y| \leq \delta\}$

Свойства

1. $\omega_f(0) = 0$ и $\omega_f(\delta) \geq 0$
2. ω_f нестрого возрастает
3. $\omega_f(|x - y|) \geq |f(x) - f(y)|$
4. Если f липшицева с константой M, то $\omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot \delta$
5. $f : E \to \mathbb{R}$, тогда f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$
   Доказательство:
   $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \land |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, тогда если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, тогда $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\right\}$
   Следовательно, при $0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} \quad 0 \leq \omega_f(t) \leq \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \to 0+} w_f(t) = 0$
   $\Leftarrow \lim_{\delta \to 0+} \omega_{f(\delta)} = 0$ по $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \varepsilon$
   $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$ (если $|x - y| < \delta$) $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна
6. Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и непрерывна, то $\lim_{\delta \to 0+} w_f(\delta) = 0$ Доказательство: Кантора и свойство 5

Определение Дробление отрезка (разбиение, пунктир)
Такой набор точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$
Будем обозначать $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$
Мелкость (ранг) дробления
$|\tau| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$ - длина самого большого отрезка из нарезки
Оснащение дробления - набор точки $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ такое что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Определение Сумма Римана (интегральная сумма)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ τ - его дробление, ξ - оснащение этого дробления $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема об интегральной сумме
$f \in C[a, b]$, тогда $\Delta := \left|\int_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство
$\int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f_t - f(\xi_k))dt$
$\Delta \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|dt \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dt = \int_a^b \omega_f(|\tau|)dt = \omega_f(|\tau|)(b - a)$
$|t - \xi_k| \leq x_k - x_{k-1} \leq |\tau| \Rightarrow |f(t) - f(\xi_k)| \leq \omega_f(|\tau|)$

Следствие
$f \in C[a, b]$ Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и $\forall$ его оснащения $\left|\int_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| < \varepsilon$

Следствие
$f \in C[a, b]$ и τ_n - последовательность дроблений, такая что τ_n стремиться к 0
Тогда $\forall \xi_n$ - оснащение дроблений τ_n $S(f, \tau_n, \xi_n) \to \int_a^b f$

Пример
$S_p(n) := 1^p + 2^p + ... + n^p, p > 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$
Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ - непрерывная функция
дробление $[0, 1]$ на равные отрезки $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\left(\frac{k}{n}\right)^p} \overbrace{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

Вывод $S_p(n) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$

Определение
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и $I \in \mathbb{R}$ ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \tau$ - дробления $[a, b]$ и мелкости $< \delta$ и $\forall$ его оснащения $\xi : |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$

Замечание
Если $f \in C[a, b]$, то она интегрируема по Риману

Лемма
$f \in C^2[\alpha, \beta]$, тогда $\int_\alpha^\beta f - (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2} = -\int_\alpha^\beta f(x)``(\beta - x)(x - \alpha)dx$

Доказательство
$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$ $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)(x - \gamma)`dx = f(x)(x - \gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_\alpha^\beta f`(x)(x - \gamma)dx$

$f(x)(x-\gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta}\ f(\beta)(\beta-\gamma)-f(\alpha)(\alpha-\gamma)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot(\beta-\alpha)$
$\Delta\ |\ y=f`, v=\frac{1}{2}(\beta-x)(x-\alpha), v=\frac{1}{2}(-\alpha\beta+(\alpha+\beta)x-x^2), v`=-x+\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma-x\ |=$
$-\int_\alpha^\beta f`(x)(x-\gamma)dx=\underbrace{\frac{1}{2}f`(x)(\beta-x)(x-\alpha)\ |_{x=\alpha}^{x=\beta}}_{=0}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f``(x)(\beta-x)(x-\alpha)dx$

Теорема оценка погрешности в форме трапеций

$f\in C^2[a,b]$ t - дробление отрезка $[a,b]$. Тогда $\underbrace{\left|\int_a^b f-\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right|}_{\Delta:=}\le\frac{1}{8}\cdot$

$|\tau|^2\cdot\int_a^b|f``|$

Доказательство

$\Delta=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f-\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f``(x)(x_k-x)(x-$
$x_{k-1})dx$
$|\Delta|\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n|f``(x)|(x_k-x)(x-x_{k-1})dx\le\frac{|\tau|^2}{8}\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f``|=\frac{|\tau|^2}{8}\int_a^b|f``|$
$(x_k-x)(x-x_{k-1})\le\left(\frac{(x_k-x)+(x-x_{k-1})}{2}\right)^2=\left(\frac{(x_k-x_{k-1})}{2}\right)^2\le\frac{|\tau|}{4}$

Замечание

1. Если дробление на равные отрезки, тогда $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)\big(x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}\big)$ и сумма площадей трапеций $=\sum_{k=1}^n\frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}=\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^n f(x_k)\right)$ и в этом случае теорема дает $|\Delta|\le\frac{(b-a)^2}{8n^2}\int_a^b|f``|=O\big(\frac{1}{n^2}\big)$
2. Как выглядит сумма Римана с равноотстоящими узлами и оснащением в правых концах
   $S(f,\tau,\xi)=\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k-x_{k-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$
   если $|f`|\le M,\omega_f(\delta)\le M\delta$
   $\left|S(f,\tau,\xi)-\int_a^b f\right|\le(b-a)\omega_f\big(\frac{b-a}{n}\big)\le\frac{M(b-a)^2}{n}=O\big(\frac{1}{n}\big)$

Теорема (формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f\in C^2(m,n),m,n\in\mathbb{Z},\sum_{k=m}^n f(k)=\frac{f(m)+f(n)}{2}+\int_m^n f+\frac{1}{2}\int_m^n f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt$

Доказательство

1.

$\int_{k-1}^k f=\frac{f(k)+f(k-1)}{2}-\frac{1}{2}\int_{k-1}^k f``(t)(k-t)(1-(k-1))dt=\frac{f(k)+f(k-1)}{2}-\frac{1}{2}\int_{k-1}^k f``(t)\{t\}(1-$
$\{t\})dt$
$\underbrace{\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k f}_{\int_m^n f}=\underbrace{\sum_{k=m+1}^n\frac{f(k)+f(k-1)}{2}}_{=\sum_{k=m}^n f(k)-\frac{f(m)+f(n)}{2}}-\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt}_{=\int_m^n f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt}$

Примеры

$S_p(n):=1^p+2^p+...+n^p,p>-1$
$f(x)=x^p,m=1,f``(x)=p(p-1)x^{p-2}$
$S_p(n)=\frac{1^p+n^p}{2}+\underbrace{\int_1^n x^pdx}_{=\frac{x^{p+1}}{p+1}\ |_1^n=\frac{n^{p+1}-1}{p+1}}+\frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$

$\left|S_p(n)-\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{n^p}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{p+1}\right|\le\frac{|p||p-1|}{2}\int_1^n x^{p-2}\overbrace{\{x\}(1-\{x\})}^{\le\frac{1}{2}}dx\le\frac{|p||p-1|}{8}\int_1^n x^{p-1}dx=\frac{|p||n^{p-1}-1|}{8}$
$p+1\int_1^n x^{p-2}dx=\frac{x^{p-1}}{p-1}\ |_{x=1}^{x=n}=\frac{n^{p-1}-1}{p-1}$
Случай $p\in(-1,1)$
$S_p(n)=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+O(1)$

Случай $p > 1$
$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$
2.

Гармонические числа

$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$
$f(x) = \frac{1}{x}, m = 1, f`` = \frac{2}{x^3}$
$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{\ln x \,|_1^n = \ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{a_n:=} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$
$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{>0} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
Проверим ограниченность $a_n \le \int_1^n \frac{\frac{1}{4}}{x^3} dx = -\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) |_{x=1}^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \le \frac{1}{8}$. значит ашки ограничены и существует пердел
$a = \lim a_n \le \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$
$\frac{1}{2} + a = \gamma$ - постоянная эйлера

Упражнение

Доказать, что $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (указание $\int_1^n = \int_1^{+\infty} - \int_n^{+\infty}$)
3. Формула Стирлинга

$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$
$f(x) = \ln x, m = 1, f``(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\ln n! = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx - \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx}_{b_n:=}$
$\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1$
$b_{n+1} > b_n$ и $0 < b_n < \int_1^n \frac{\frac{1}{4}}{x^2} dx = -\frac{1}{4x} \,|_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$, тогда существует предел $\lim b_n =: b$ и $b_n = b + o(1)$
$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1)$ при $n \to \infty$
$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1)} = n^n e^n \sqrt{n} C(1 + o(1)) \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$
Найдем C
$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{(C n^n e^{-n} \sqrt{n})^2} = \frac{C \cdot 2^{2n} \sqrt{2n}}{C^2 \sqrt{n} \sqrt{n}}$
$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \Rightarrow C \equiv \frac{2^{2n} \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$
Формула Стирлинга $n! \equiv n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Упражнение

Доказать, что $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Несобственные интегралы

Определение

$-\infty < a < b \le +\infty, f \in C[a, b)$
Если существует $\lim_{B \to b-} \int_a^B f$, то он называется несобственный интегралом $\int_a^{\to b} f$
$\int_a^{\to b} f := \lim_{B \to b-} \int_a^B f$

Определение

аналогично для предела справа

Определение
Несобственный интеграл $\int_{\to a}^{b}$ или $\int_{a}^{\to b}$ называется сходящися, если соответствующий предел существуеют и конечен, в противном случае расходящийся

Замечание
Если $f \in C[a, b]$, то $\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$
$\left|\int_a^b f - \int_a^B f\right| = \left|\int_B^b f\right| \leq \int_B^b |f| \leq \int_B^b M = (b - B) \cdot M \underset{B \to b-}{\to} 0$

Примеры 1
$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = 0$ при $p > 1$ и $-\infty$ при $p < 1$
Если $p \neq 1$, то $\int_1^y \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{p-1} \mid_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)y^{p-1}}$
То есть интеграл сходится при $p > 1$ и равен $\frac{1}{p-1}$ и расходится при $p < 1$
Если $p = 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x} = \lim_{y \to +\infty} \ln y = +\infty$
2.
$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \to 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \underset{p \neq 1}{=} \frac{1}{1-p} - \lim_{y \to 0+} \frac{1}{(1-p)y^{p-1}}$ этот предел $= 0$ при $p < 1$ и $-\infty$ при $p > 1$
$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \to +\infty} \int_y^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \to 0+} \ln x \mid_y^1 = -\lim_{y \to 0+} \ln y = +\infty$
при $p < 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{1-p}$
при $p \geq 1$ интеграл расходится и равен $+\infty$

Критерий Коши
$f \in C[a, b)$ и следующие условия равносильны:
1. $\int_a^{\to b}$ сходится
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \left|\int_A^B f\right| < \varepsilon$

Симметрично для нижнего

Доказательство
$F(y) := \int_a^y f$
$\int_a^{\to b} f$ - сходится $\Leftrightarrow \lim_{y \to b-} F(y)$ существует и конечен $\Leftrightarrow$(критерий Коши для F)
$b = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists E : \forall A, B > E \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon, F(B) - F(A) = \int_A^B f$
$b < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A, B \in (b - \delta, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon$
В первом случае c это E, во втором $b - \delta$ это c

Замечание
$\int_a^b$ сходится $\Leftrightarrow$ существует $\lim_{B \to b-} F(B) - F(a)$, где F - первообразная f и $\int_a^{\to b} f = \lim_{B \to b-} F(B) - F(a)$
$\int_a^{\to b} f = \lim_{B \to b-} \int_a^B f = \lim_{B \to b-} (F(B) - F(a))$

Свойства несобственных интегралов
1. Аддитивность $f \in C[a, b), c \in (a, b)$ Тогда $\int_a^{\to b} f$ - сходится $\Leftrightarrow \int_c^{\to b} f$ сходится и в этом случае есть формула $\int_a^{\to b} f = \int_a^c f + \int_c^{\to b} f$
   Доказательство F - первообразная f. Тогда $\int_a^{\to b} f$ сходится $\Leftrightarrow$ существует конечный $\lim_{B \to b-} F(B) \Leftrightarrow \int_c^{\to b} f$ - сходится.
   $\int_a^{\to b} = \lim_{B \to b-} F(B) - F(a) = \lim_{B \to b-} F(B) - F(c) + (F(c) - F(a))$
2. Если $\int_a^{\to b} f$ сходится, то $\lim_{y \to b-} \int_y^{\to b} f = 0$
   Доказательство $\int_a^{\to b} f = \int_1^y + \int_y^{\to b} f$
3. Линейность $f, g \in C[a, b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g$
   Доказательство F, G - первообразные f, g

$\int_a^{\to b} f = \lim_{y \to b-} F(y) - F(a)$ и $\int_a^{\to b} g = \lim_{y \to b-} G(y) - G(a)$
$\alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g = \lim_{y \to b-} (\alpha F(y) + \beta G(y)) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) = \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g)$

Замечание

Если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} g$ расходится, то $\int_a^{\to b} (f + g)$ расходится, от проитвного $g = (f + g) - f$