[Курс матана от Храброва❤️❤️❤️ часть 1]
[Курс матана от Храброва❤️❤️❤️ часть 2]

```
           __..--''``---....___   _..._    __
 /// //_.-'    .-/";  `        ``<._  ``.''_ `. / // /
///_.-' _..--.'_    \                    `( ) ) // //
/ (_..-' // (<  _     ;_..__               ; `' / ///
 / // // //  `-._,_)' // / ``--...____..-' /// / //
```

Глава 1. Введение

Множества

- A, B, C — множества, a, b, c — элементы множества.
- $x \in A$ — x лежит в множестве A.
- $x \notin A$ — x не лежит в множестве A.
- $A \subset B$ $(B \supset A)$ — A подмножество B, любой элемент A есть в B.
- $A = B$ — совпадающие множества $(A \subset B, B \subset A)$.
- $A \neq B$ — множества не равны.
- Пустое множество $(\varnothing)$ — множество, в котором ничего нет: $\forall x \notin \varnothing$.
- Собственное подмножество: $A \subset B, A \neq B$.
- 2^A — совокупность всех подмножеств множества A.

Как задавать множества

1. Явное перечисление: a, b, c.
2. Последовательность: $1, 2, 3, \ldots, n$.
3. Описание. Пример: множество простых чисел.
4. Предикатом. Пусть X — множество, на X задаём условие $\varphi(x)$, принимающее значения «истина» или «ложь».
   Тогда множество имеет вид: $x \in X : \varphi(x) \text{ истинно}$.

Удобные обозначения

- $\forall$ — для всякого (для любого).
- $\exists$ — существует (найдётся).

Действия с множествами

1. $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ - пересечение.
   $\{x : x \in A$ при всех $\alpha \in I\}$ = $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$
   $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$
2. $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ - объединение
   $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha,$ для некоторых $\alpha \in I\}$
3. $A \setminus B$ = $\{x : x \in A, x \notin B\}$ - разность множеств
4. $A \triangle B$ = $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - симметрическая разность (элементы лежат ровно в одном из двух множеств)

Формулы

$A \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$
$A \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

Теорема

Для множеств A и семейства $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ справедливы равенства:

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha),$$
$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha).$$

Доказательство

Пусть $x \in A \cup \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$. Тогда:

- либо $x \in A$,
- либо $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \iff \forall \alpha \in I : x \in B_\alpha$.

В обоих случаях $x \in A \cup B_\alpha$ для любого $\alpha \in I$. Значит,

$$x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

Обратно: если $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$, то для всех $\alpha \in I$ выполняется $x \in A \cup B_\alpha$.
Если $x \notin A$, то $\forall \alpha \in I$ имеем $x \in B_\alpha$, то есть $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$.
Следовательно, $x \in A \cup \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$.

Аналогично доказывается второе равенство.

Теорема (правила Де Моргана для разности)

Для любого множества A и семейства $B_\alpha, \alpha \in I$ выполняются равенства:

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha),$$

$$A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha).$$

Доказательство

Пусть $x \in A \setminus \underset{\alpha \in I}{\cup} B\alpha$. Тогда $x \in A$ и $x \notin \underset{\alpha \in I}{\cup} B\alpha$, то есть $(\forall \alpha \in I)(x \notin B_\alpha)$. Следовательно, $(\forall \alpha \in I)(x \in A \setminus B_\alpha)$, то есть $x \in \underset{\alpha \in I}{\cap} (A \setminus B_\alpha)$.

Обратно, пусть $x \in \underset{\alpha \in I}{\cap} (A \setminus B_\alpha)$. Тогда $(\forall \alpha \in I)(x \in A \wedge x \notin B_\alpha)$. Значит, $x \in A$ и $x \notin \underset{\alpha \in I}{\cup} B_\alpha$, то есть $x \in A \setminus \underset{\alpha \in I}{\cup} B_\alpha$.

Аналогично доказывается второе равенство.

Упорядоченная пара

- Пусть A, B — множества.
- $\langle a, b \rangle$, где $a \in A, b \in B$.
- Свойство: $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.
- Пример: $\langle 1, 2 \rangle \neq \langle 2, 1 \rangle$, но $1, 2 = 2, 1$.

Кортеж

- Пусть $A_1, A_2, \ldots, An$ — множества, $a_i \in A_i$.
- Кортеж: $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.
- Свойство: равенство поэлементное.

Декартово произведение множеств

$A \times B = \langle a, b \rangle : a \in A, b \in B$.

Бинарное отношение

- Определение: $R \subset A \times B$.
- Запись: $xRy \iff \langle x, y \rangle \in R$.
- Область определения: $\delta\_R = x \in A : \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in R$.
- Область значений: $\rho_R = y \in B : \exists x \in A, \langle x, y \rangle \in R$.

- Обратное отношение: $R^{-1} = \langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R \subset B \times A$.

Примеры

1. $A = B = \mathbb{N}, R = \langle x, y \rangle : x < y$. Тогда:
    - $\delta_R = \mathbb{N}$,
    - $\rho_R = 2, 3, 4, \ldots$,
    - R^{-1} — отношение «больше».
    - Композиция: $R \circ R = \langle a, c \rangle : c - a \geq 2$.
2. $A = B$ — прямые на плоскости.
    - $\parallel \circ \parallel = \parallel$,
    - $\perp \circ \perp = \parallel$.
3. $A = B$, $\langle a, b \rangle \in R$, если a — отец b.
    - Тогда $R \circ R$: a — дед c.
    - ρ_R: все, у кого есть сыновья.
    - R^{-1}: a — сын b.

```
     /\_____/\
    /  o   o  \
   ( ==  ^  == )
    )         (
   (           )
  ( (  )   (  ) )
 (__(__)___(__)__)
```

Вещественные числа

Аксиомы

1. **Коммутативность**: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.
2. **Ассоциативность**: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. **Ноль и единица**: существует 0, что $a + 0 = a$; существует $1 \neq 0$, что $1 \cdot a = a$.
4. **Противоположный и обратный элемент**:
    - $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a : a + (-a) = 0$.
    - $\forall a \neq 0, \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$.
5. **Дистрибутивность**: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Аксиомы порядка

- Задано отношение $\leq$ на $\mathbb{R}$:
  1. Рефлексивность.
  2. Антисимметричность.
  3. Транзитивность.
  4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y; \vee; y \leq x$.
  5. Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$.
  6. Если $0 \leq x, 0 \leq y$, то $0 \leq x + y$.

Аксиома полноты

Если $A, B \subset \mathbb{R}$ непустые и $a \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$, то существует $c \in \mathbb{R}$, такое что $a \leq c \leq b$.

Пример: в $\mathbb{Q}$ аксиома полноты не выполняется.

- $A = x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2$.
- $B = x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 > 2$.