

# Интегральное исчисление функций одной переменной

## Первообразная и неопределенный интеграл

### Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , функция  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

### Теорема

$f : \langle a, b \rangle$  непрерывна на отрезке, то у  $f$  есть первообразная

### Доказательство

не сейчас

### Замечание

не у всех функций есть первообразная.  $f(x) = \text{sign } x$

Пусть  $F$  первообразная  $f$ , тогда  $F' = f$  принимает значения  $\{-1, 0, 1\}$ . Но по теореме Дарбу  $F'$  должна принимать все значения из  $[-1, 1]$ , противоречие

### Теорема

Пусть есть  $f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  первообразная  $f$ . Тогда

1.  $\forall c \in \mathbb{R} F + c$  тоже первообразная  $f$
2. Если есть другая первообразная  $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  тоже первообразная  $f$ , то  $\Phi - F = \text{const}$

### Доказательство

1.  $(F(x) + c)' = f(x)$
2.  $(\Phi(x) - F(x))' = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

### Определение

Неопределенный интеграл функции  $f$  - множество всех ее первообразных

Обозначение:  $\int f = \int f(x)dx$

$F$  - первообразная  $f$ ,  $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$  (скобочки писать не будем (впадлу))

### Таблица интегралов

1.  $\int 0dx = C$
2.  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
7.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$
8. котенганс очевидно
9.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11.  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
12.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$

### Проверка

3.

При  $x > 0$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . При  $x < 0$ :  $(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$

11.

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} ((\ln|1+x|)' - (\ln|1-x|)') = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

12.

$$\left( \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \text{очев}$$

### Определение

$A, B$  - множества функция  $\langle a, b \rangle$ .  $A + B = \{f + g, f \in A, g \in B\}$ ;  $c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}$ ,  $A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

### Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  - имеют первообразные

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда:

1.  $f + g$  тоже имеют первообразную  $\int f + g = \int f + \int g$
2.  $\alpha f$  имеет первообразную  $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3.  $\alpha f + \beta g$  тоже имеет первообразную,  $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$  при  $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

### Доказательство

Пусть  $F, G$  - первообразные  $f, g$ . Тогда  $F + G$  - первообразные для  $f + g$

$$\int (f + g) = F + G + C, \int f = F + C, \int g = G + C$$

Остальное очев

### Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  - дифф.  $F$  - первообразная  $f$ .  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

### Доказательство

Тривиальн

### Следствие

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0. \text{ (Подставить } \varphi(x) = \alpha x + \beta \text{)}$$

### Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f'g$  имеет первообразную, тогда  $fg'$  тоже имеет первообразную и  $\int fg' = fg - \int f'g$

### Доказательство

$H$  - первообразная для  $f'g$ . (?)  $fg - H$  - первообразная для  $fg'$

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = fg' \blacksquare$$

## Площади и определенный интеграл

$\mathcal{F}$  - множество всех ограниченных помножеств в плоскости

### Определение

Квазиплощадь это отображение  $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$
2.  $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma(\overline{E}) \leq \sigma(E)$
3. Множество  $E$  разделено вертикальной прямой  $l$  на  $E_-$  и  $E_+$   $\Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$   
(точки  $l$  могут принадлежать как  $E_-$  и  $E_+$ )

### Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2': если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$ . Но существование такого объекта неочев (сложно)

### Теорема

$\sigma(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : \cup_{k=1}^n P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } \parallel \text{ осям координат} \right\}$  - квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе апоЖ

### Доказательство

Проверим три свойства

1. Пусть  $P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . (?)  $\sigma(P) = (b-a)(d-c)$   
 $\leq \{P\}$  - покрытие  $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(d-c)$   
 $\geq$  Пусть  $\cup_{k=1}^n P_k \supset P$  надо доказать, что  $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P|$ . Продлим стороны  $P_k$  и  $P$ , если мы посмотрим на каждый прямоугольник  $P_k$ , то он разбит на маленькие прямоугольники.  $P$  тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие прямоугольники образуют покрытие  $P$ ,  $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников}| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников, входящих в } P| = |P|$  ■
2. любое покрытие  $E$  - это покрытие  $\bar{E} \Rightarrow \sigma(\bar{E}) \leq \sigma(E)$
3. Пусть  $E$  разделено вертикальной прямой  $l$  на  $E_-, E_+$ . (?)  $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$   
 $\leq$  Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим покрытие  $\cup_{k=1}^m P_k^+ \supset E_+$ , такое что  $\sum_{k=1}^m |P_k^+| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$  (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие  $\cup_{i=1}^n P_i^- \supset E_-$ , такое что  $\sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_-) + \varepsilon$ .  $P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+, P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-$  образуют покрытие  $E$ , значит  $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^m |P_k^+| + \sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$ , устремим  $\varepsilon$  к нулю.  
 $\geq$  Пусть есть  $P_1, \dots, P_n$  - покрытие  $E$ . Разделим каждый прямоугольник  $P_k$  на  $P_k^-$  и  $P_k^+$  при помощи прямой  $l$  (некоторые могут быть пустыми). Тогда  $P_1^+, \dots, P_n^+$  - покрытие  $E_+$ , а с минусами можно догадаться. Рассмотрим  $\sum_{k=1}^n |P_k| = \sum_{k=1}^n |P_k^+| + \sum_{k=1}^n |P_k^-| \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$ . Взяв inf по покрытиям множества  $E$  получаем что хотели

### Замечания

1. Квазиплощадь неединственна. Пример:  $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |P_k| \right\}$   
 Если  $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$ , но  $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в  $\mathbb{R}^3$  можно разделить на 5 непересекающихся частей, применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

### Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная,  $f_+ = \max\{f, 0\}$ ,  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f_- = \max\{-f, 0\}$

### Свойства

1.  $f_\pm \geq 0$
2.  $f = f_+ - f_-$ ,  $|f| = f_+ + f_-$
3.  $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ ,  $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если  $f$  была непрерывной, то  $f_+$  и  $f_-$  были непрерывны

### Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ , пографик  $f$  - это  $P_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

### Определение

$f \in C[a, b]$ .  $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

$$\begin{array}{c} \wedge \_ \wedge \\ ( \ 0, 0 \ ) \\ > \ ^ < \end{array}$$

### Свойства

1.  $\int_a^a f = 0$
2.  $\int_a^b 0 = 0$
3.  $\int_a^b c = c(b - a)$
4.  $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$  Доказательство:  $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$ ,  $(-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$ ,  
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$
5. Если  $f \geq 0$ , то  $\int_a^b \sigma(P_f)$  Доказательство: Если  $f \geq 0$ , то  $f_+ = f$ ,  $f_- = 0$
6. Если  $f \geq 0$ ,  $f \in C[a, b]$  и  $\int_a^b f = 0$ , то  $f \equiv 0$  Доказательство: Пусть  $f \not\equiv 0$ . Найдется  $x_0 \in [a, b]$ , для которой  $f(x_0) > 0$ .  $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$ , найдется  $\delta > 0$ , такое что при  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :$   
 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]$   
 $\int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \sigma\left([x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]\right) > 0$

## Свойства определенного интеграла

### Теорема аддитивность

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\text{Обозначение } P_g([\alpha, \beta]) := \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

### Доказательство

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b])) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

### Следствие

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b \text{ Тогда } \int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f \text{ (индукция)}$$

### Теорема монотонность

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

### Доказательство

$$\begin{aligned} f_+ &= \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}, \text{ аналогично } f_- = \max\{0, -f\} \geq \\ &\max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \\ \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) &\leq \sigma(P_{g_+}), \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g \end{aligned}$$

### Следствия

1.

$$f \in C[a, b] \text{ Тогда } (b - a) \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

### Доказательство

$$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b - a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b - a)$$

2.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

**Доказательство**

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

**Теорема о среднем**

$f \in C[a, b]$  Тогда  $\exists c \in [a, b]$ , для которой  $\int_a^b f = (b - a)f(c)$

**Доказательство:**

$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок  $[\min f, \max f]$ , в частности у нее есть значение  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

**Определение**

Среднее значение функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  это  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

**Определение интеграл с переменным верхним пределом**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x) := \int_a^x f$ ,  $a \leq x \leq b$ , замечание  $\Phi(a) = 0$

**Определение интеграл с переменным нижним пределом**

$\Psi(x) := \int_x^b f$ ,  $a \leq x \leq b$

Замечание:

1.  $\Psi(x) = 0$

2.  $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b (f)$

**Теорема Барроу**

$f \in C[a, b]$ ,  $\Phi(x) := \int_a^x f$

Тогда  $\Phi'(x) = f(x)$

**Доказательство**

$\Phi'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{1}{y - x} \int_x^y f$  (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних)  $= f(c_y)$ ,  $c_y \in [x, y]$  то есть хотим посчитать предел  $\lim_{y \rightarrow x_+} f(c_y) = f(x)$

Если  $y_n$  убывает к  $x$ , то  $c_{y_n} \rightarrow x \Rightarrow$  по непрерывности  $f$  получается, что  $f(c_{y_n}) \rightarrow f(x)$

Для  $\Phi'_-(x)$  аналогично

**Следствие 1**

$f \in C[a, b]$ ,  $\Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$

**Доказательство**

$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -\Phi'(x) = -f(x)$

**Следствие 2**

$f \in C\langle a, b \rangle$ , тогда у  $f$  есть первообразная

**Доказательство**

Возьмем  $c \in (a, b)$   $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x \geq c \\ -\Psi(x) & \text{при } x \leq c \end{cases}$

**Теорема (формула Ньютона-Лейбница)**

$f \in C[a, b]$ ,  $F$  - первообразная  $f$  на  $[a, b]$ , тогда  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

### Доказательство

$\Phi(x) := \int_a^x f$  - первообразная,  $F$  - первообразная  $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$ , но  $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

### Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$  - подстановка

### Соглашение

Если  $b < a$   $\int_a^b f := -\int_b^a f$

### Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

### Доказательство

$F, G$  - первообразная для  $f, g$

$\alpha F + \beta G$  - первообразная для  $\alpha f + \beta g$

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$

$\stackrel{\text{Н.Л.}}{\Rightarrow} \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G \Big|_a^b = \alpha \cdot F \Big|_a^b + \beta G \Big|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

### Теорема формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b]$ , тогда  $\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$

### Доказательство

$H$  - первообразная для  $f' g \Rightarrow f g - H$  - первообразная для  $f g'$

$(f g - H)' = (f g)' - H' = f' g + f g' - f' g = f g'$

$\int f g' = (f g - H) \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - H \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$

### Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b] \varphi \in C^1[a, b], p, q \in [c, d]$

Тогда  $\int_p^q f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

### Доказательство

$F$  - первообразная  $f, F \circ \varphi$  - первообразная для  $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f\{\varphi(t)\} \varphi'(t)$

$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \Big|_a^b = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

### Пример

$$\int_a^b \left( \frac{t}{1+t^4} \right) dt, \varphi(t) = t^2, \varphi'(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \Big|_{a^2}^{b^2}$$

### Продолжение формулы интегрирования по частям

#### Пример

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - x \right) dx \mid \varphi(x) := y = \frac{\pi}{2} - x \mid =$$

$$- \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$w W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \sin^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4} \quad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\cos x)' dx = - \left( \underbrace{\sin^{n-1} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x dx}_{1 - \sin^2 x} \right) = (n-1) \left( \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) \\
& W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \\
& W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
& W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

## Формула Валлиса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

### Доказательство

$$\begin{aligned}
& \text{на } [0, \frac{\pi}{2}] \sin^{2n} \geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2} \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} \\
& W_{2n} \geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2} \\
& \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\
& \frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\
& \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

### Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

### Доказательство

$$\begin{aligned}
C_{2n}^n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!} \\
(2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n(n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Формула Валлиса } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
& \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

## Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle$$

$$\text{Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

### Доказательство

Индукция по  $n$

База  $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

Переход  $n \rightarrow n+1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt}_{I :=}$$

$I =$

$$u = f^{(n+1)}, u' = f^{(n+2)}, v = (x-t)^n, v' = -\frac{(x-t)^n}{n+1}$$

$$I = \int_{x_0}^x uv' = uv \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u' v = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x-t)^{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n+1} (x-t)^{n+1} dt$$

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(x_0) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) (x-t)^{n+1} dt$$

### Пример

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

Наблюдение: эта штука точно положительна, значит интегральчик точно положительный  
Свойства:

1.  $0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если  $c \in \mathbb{R}$ , то  $c^j H_j \rightarrow 0$ , так как  $0 \leq |c^j H_j| \leq \frac{(|c| \frac{\pi^2}{4})^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$
3.  $H_0 = 1, H_1 = 2$
4.  $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$ , при  $j \geq 2$

Доказательство:  $j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$

$$u = \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j, v' = \cos x, u' = -2xj \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}, v = \sin x$$

$$\left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx$$

$$u = x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}, v' = \sin x, v = -\cos x, u' = \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1)x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2}, x = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right), \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1) \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} + 2(j-1) \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}$$

подставляем в изначальный интеграл:

$$= 2j \left( x \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \left( \frac{\pi^2}{4} \right) 2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = j!$$

$$j! H_j = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - 2j \frac{\pi^2}{4} 2(j-1)(j-2)! H_{j-2}$$

$$H_j = 2(2j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

### Теорема Ламберта

$\pi$  и  $\pi^2$  - иррациональное число

#### Доказательство

От противного. Предположим, что  $\pi^2 = \frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$

Проверим, что тогда  $n^j H_j$  - целое число По индукции по  $j$ . База  $j = 0, j = 1$  очевидный

Переход  $j-2, j-1 \rightarrow j$

$$n^j H_j = \underbrace{(4j-2) \cdot n \cdot n^{j-1} H_{j-1}}_{\text{целое}} - \underbrace{n^2 \pi^2}_{=m^2/n \text{ целое}} n^{j-2} H_{j-2} - \text{индукционное предположение}$$

Понимаем, что  $n^j H_j$  - целое  $n^j H_j > 0 \Rightarrow -n^j H_j \geq 1$ , с другой стороны, если воспользуемся свойством номер 2  $n^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , противоречие :

### Интегральные суммы

#### Определение равномерно непрерывной функции

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  равномерно непрерывна, если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

#### Замечание

$f$  непрерывна во всех точках из  $E$  означает, что  $\forall y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

#### Примеры

1.  $\sin$  и  $\cos$  равномерно непрерывны на  $\mathbb{R}$ ,  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$  подходит

2.  $f(x) = x^2$  не равномерно непрерывная на  $\mathbb{R}$

Возьмем  $\varepsilon = 1$  : Проверим, что никакое  $\delta > 0$  не подходит  $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 -$

$$x^2 = x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4} > x \cdot \delta \text{ для } x = \frac{1}{\delta} \text{ все плохо}$$

$$f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) > 1$$

3.  $f(x) = \frac{1}{x}$  не является равномерно непрерывной на  $(0, 1]$

Возьмем  $\varepsilon = 1$  Проверим, что никакое  $0 < \delta < 1$ ,  $x = \frac{\delta}{2}$ ,  $y = \delta$ ,  $f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$

## Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  липшицева с константой  $M$ , если  $\forall x, y \in E |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

## Замечание

1. липшицевость  $\Rightarrow$  равномерно непрерывна (просто берем в качестве  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ )
2. Если  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема и  $|f'| \leq M$  на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f$  липшицева с константой  $M$  и, в частости, равномерно непрерывна

## Теорема Кантора

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

## Доказательство

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Возьмем  $\varepsilon > 0$ , предположим, что никакое  $\delta$  для него не подходит

$\delta = 1$  не подходит, значит найдутся такие точки  $x_1, y_1 \in [a, b]$ , такое что  $|x_1 - y_1| < 1$ , но при этом  $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$  не подходит, значит найдутся такие точки  $x_2, y_2 \in [a, b]$ , такое что  $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$  и  $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$  не подходит  $\Rightarrow$  найдутся  $x_n, y_n \in [a, b]$ , такие что  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$   
 $y_n \in [a, b]$  ограничена, последовательность по Т. Б-В выберем подпоследовательность  $y_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} + \lim(x_{n_k} - y_{n_k}) = c + 0 = c$$

$f$  непрерывна в  $c$  означает, что  $\lim f(x_{n_k}) = f(c)$ , аналогично  $f(y_{n_k}) = f(c)$ , тогда пердел разности  $\lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$ , но с другой стороны  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$   
 противоречие, значит предположение не верно и какое-то  $\delta$  подойдет

## Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$  модуль непрерывности  $\omega_f(\delta)$ ,  $\delta > 0$ ,  $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \wedge |x - y| \leq \delta\}$

## Свойства

1.  $\omega_f(0) = 0$  и  $\omega_f(\delta) \geq 0$
2.  $\omega_f$  нестрого возрастает
3.  $\omega_f(|x - y|) \geq |f(x) - f(y)|$
4. Если  $f$  липшицева с константой  $M$ , то  $\omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta$   $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot \delta$
5.  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда  $f$  равномерно непрерывна на  $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$

Доказательство:

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ тогда если } |x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ тогда } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\}$$

$$\text{Следовательно, при } 0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} \quad 0 \leq \omega_f(t) \leq \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega_f(t) = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0 \text{ по } \varepsilon > 0 \text{ выберем такое } \delta > 0, \text{ что } \omega_f(\delta) < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon \text{ (если } |x - y| < \delta) \Rightarrow f \text{ равномерно непрерывна}$$

6. Если  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и непрерывна, то  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$  Доказательство: Кантора и свойство 5

## Определение Дробление отрезка (разбиение, пунктир)

Такой набор точек  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Будем обозначать  $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Мелкость (ранг) дробления

$|\tau| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  - длина самого большого отрезка из нарезки

Оснащение дробления - набор точки  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  такое что  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

## Определение Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\tau$  - его дробление,  $\xi$  - оснащение этого дробления  $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

## Теорема об интегральной сумме

$f \in C[a, b]$ , тогда  $\Delta := \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$

### Доказательство

$$\begin{aligned} \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) &= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt \\ \Delta &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dt = \int_a^b \omega_f(|\tau|) dt = \omega_f(|\tau|)(b - a) \\ |t - \xi_k| &\leq x_k - x_{k-1} \leq |\tau| \Rightarrow |f(t) - f(\xi_k)| \leq \omega_f(|\tau|) \end{aligned}$$

### Следствие

$f \in C[a, b]$  Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$  дробления  $\tau$  мелкости  $< \delta$  и  $\forall$  его оснащения  $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

### Следствие

$f \in C[a, b]$  и  $\tau_n$  - последовательность дроблений, такая что  $\tau_n$  стремиться к 0

Тогда  $\forall \xi_n$  - оснащение дроблений  $\tau_n \quad S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$

## Пример

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^p$  на  $[0, 1]$  - непрерывная функция

дробление  $[0, 1]$  на равные отрезки  $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^p = \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

$$\text{Вывод } S_p(n) \sim \frac{n^{p+1} \left(\frac{k}{n}\right)^p}{p+1}$$

## Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ , и  $I \in \mathbb{R}$  ее интеграл, если  $\forall \varepsilon > 0 :$

$\exists \delta > 0 : \forall \tau$  - дробления  $[a, b]$  и мелкости  $< \delta$  и  $\forall$  его оснащения  $\xi : |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$

### Замечание

Если  $f \in C[a, b]$ , то она интегрируема по Риману

## Лемма

$$f \in C^2[\alpha, \beta], \text{ тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f - (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2} = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot (\beta - x)(x - \alpha) dx$$

### Доказательство

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(x - \gamma) \cdot dx = f(x)(x - \gamma) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \gamma) dx$$

$$f(x)(x-\gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \cdot (\beta-\alpha)$$

$$\Delta \mid y = f^{\cdot}, v = \frac{1}{2}(\beta-x)(x-\alpha), v = \frac{1}{2}(-\alpha\beta + (\alpha+\beta)x - x^2), v^{\cdot} = -x + \frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma - x \mid =$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f^{\cdot}(x)(x-\gamma)dx = \underbrace{\frac{1}{2}f^{\cdot}(x)(\beta-x)(x-\alpha)}_{=0} \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^{\cdot\cdot}(x)(\beta-x)(x-\alpha)dx$$

### Теорема оценка погрешности в форме трапеций

$f \in C^2[a, b]$   $t$ -дробление отрезка  $[a, b]$ . Тогда  $\underbrace{\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} \right|}_{\Delta :=} \leq \frac{1}{8} \cdot$

$$|\tau|^2 \cdot \int_a^b |f^{\cdot\cdot}|$$

#### Доказательство

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{\cdot\cdot}(x)(x_k - x)(x - x_{k-1})dx$$

$$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |f^{\cdot\cdot}(x)|(x_k - x)(x - x_{k-1})dx \leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f^{\cdot\cdot}| = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f^{\cdot\cdot}|$$

$$(x_k - x)(x - x_{k-1}) \leq \left( \frac{(x_k - x) + (x - x_{k-1})}{2} \right)^2 = \left( \frac{(x_k - x_{k-1})}{2} \right)^2 \leq \frac{|\tau|^2}{4}$$

#### Замечание

- Если дробление на равные отрезки, тогда  $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$  ( $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ ) и сумма площадей трапеций  $= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \left( \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^n f(x_k) \right)$  и в этом случае теорема дает  $|\Delta| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f^{\cdot\cdot}| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- Как выглядит сумма Римана с равноотстоящими узлами и оснащением в правых концах  $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$  если  $|f^{\cdot}| \leq M, \omega_f(\delta) \leq M\delta$   
 $\left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| \leq (b-a)\omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{M(b-a)^2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

### Теорема (формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f \in C^2(m, n), m, n \in \mathbb{Z}, \sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f + \frac{1}{2} \int_m^n f^{\cdot\cdot}(t)\{t\}(1-\{t\})dt$

#### Доказательство

1.

$$\int_{k-1}^k f = \frac{f(k)+f(k-1)}{2} - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k f^{\cdot\cdot}(t)(k-t)(1-(k-1))dt = \frac{f(k)+f(k-1)}{2} - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k f^{\cdot\cdot}(t)\{t\}(1-\{t\})dt$$

$$\underbrace{\sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f}_{\int_m^n f} = \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \frac{f(k)+f(k-1)}{2}}_{=\sum_{k=m}^n f(k) - \frac{f(m)+f(n)}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f^{\cdot\cdot}(t)\{t\}(1-\{t\})dt}_{=\int_m^n f^{\cdot\cdot}(t)\{t\}(1-\{t\})dt}$$

#### Примеры

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p > -1$$

$$f(x) = x^p, m = 1, f^{\cdot\cdot}(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1^{p+1}+n^{p+1}}{p+1} + \underbrace{\int_1^n x^p dx}_{=\frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}-1}{p+1}} + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$$

$$\left| \frac{S_p(n)}{p|n^{p-1}-1|} - \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{n^p}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p+1} \right| \leq \frac{|p||p-1|}{2} \int_1^n x^{p-2}\overbrace{\{x\}(1-\{x\})}^{\leq \frac{1}{2}} dx \leq \frac{|p||p-1|}{8} \int_1^n x^{p-1} dx =$$

$$\frac{8}{p+1} \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$$

Случай  $p \in (-1, 1)$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Случай  $p > 1$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$$

2.

Гармонические числа

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, m = 1, f^{(k)}(x) = -\frac{k!}{x^{k+1}}$$

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{\ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{a_n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$$

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{>0} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

Проверим ограниченность  $a_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \Big|_{x=1}^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leq \frac{1}{8}$ . значит ашки ограничены и существует предел

$$a = \lim a_n \leq \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$$

$$\frac{1}{2} + a = \gamma - \text{постоянная Эйлера}$$

## Упражнение

Доказать, что  $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  (указание  $\int_1^n = \int_1^{+\infty} - \int_n^{+\infty}$ )

3. Формула Стирлинга

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$$

$$f(x) = \ln x, m = 1, f^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$\ln n! = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx - \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx}_{b_n}$$

$$\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1$$

$$b_{n+1} > b_n \text{ и } 0 < b_n < \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}, \text{ тогда существует предел } \lim b_n =: b \text{ и}$$

$$b_n = b + o(1)$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1)} = n^n e^{-n} \sqrt{n} C (1 + o(1)) \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Найдем  $C$

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim C 2^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{(C n^n e^{-n} \sqrt{n})^2} = \frac{C \cdot 2^{2n} \sqrt{2n}}{C^2 \sqrt{n} \sqrt{n}}$$

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \Rightarrow C \equiv \frac{2^{2n} \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

$$\text{Формула Стирлинга } n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

## Упражнение

Доказать, что  $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(\frac{1}{n}))$

## Несобственные интегралы

### Определение

$$-\infty < a < b \leq +\infty, f \in C[a, b)$$

Если существует  $\lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$ , то он называется несобственным интегралом  $\int_a^{\rightarrow b} f$

$$\int_a^{\rightarrow b} f := \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f$$

### Определение

аналогично для предела справа

## Определение

Несобственный интеграл  $\int_{\rightarrow a}^b$  или  $\int_a^{\rightarrow b}$  называется сходящимся, если соответствующий предел существуют и конечен, в противном случае расходящимся

## Замечание

Если  $f \in C[a, b]$ , то  $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^b f$   
 $\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leq \int_B^b |f| \leq \int_B^b M = (b - B) \cdot M \xrightarrow{B \rightarrow b-} 0$

## Примеры 1

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = 0$  при  $p > 1$  и  $-\infty$  при  $p < 1$

Если  $p \neq 1$ , то  $\int_1^y \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{p-1} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)y^{p-1}}$

То есть интеграл сходится при  $p > 1$  и равен  $\frac{1}{p-1}$  и расходится при  $p < 1$

Если  $p = 1$   $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$

2.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \stackrel{p \neq 1}{=} \frac{1}{1-p} - \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{(1-p)y^{p-1}}$  этот предел  $= 0$  при  $p < 1$  и  $-\infty$  при  $p > 1$

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow 0+} \ln x \Big|_y^1 = -\lim_{y \rightarrow 0+} \ln y = +\infty$

при  $p < 1$  интеграл сходится и равен  $\frac{1}{1-p}$

при  $p \geq 1$  интеграл расходится и равен  $+\infty$

## Критерий Коши

$f \in C[a, b]$  и следующие условия равносильны:

1.  $\int_a^{\rightarrow b}$  сходится
2.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$

Симметрично для нижнего

## Доказательство

$F(y) := \int_a^y f$

$\int_a^{\rightarrow b} f$  - сходится  $\Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow b-} F(y)$  существует и конечен  $\Leftrightarrow$  (критерий Коши для  $F$ )

$b = +\infty \forall \varepsilon > 0 : \exists E : \forall A, B > E \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon, F(B) - F(A) = \int_A^B f$

$b < +\infty \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A, B \in (b - \delta, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon$

В первом случае  $c$  это  $E$ , во втором  $b - \delta$  это  $c$

## Замечание

$\int_a^b$  сходится  $\Leftrightarrow$  существует  $\lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$ , где  $F$  - первообразная  $f$  и  $\int_a^{\rightarrow b} f =$

$\lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a)$

$\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f = \lim_{B \rightarrow b-} (F(B) - F(a))$

## Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность  $f \in C[a, b), c \in (a, b)$  Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  - сходится  $\Leftrightarrow \int_c^{\rightarrow b} f$  сходится и в этом случае есть формула  $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$

Доказательство  $F$  - первообразная  $f$ . Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится  $\Leftrightarrow$  существует конечный

$\lim_{B \rightarrow b-} F(B) \Leftrightarrow \int_c^{\rightarrow b} f$  - сходится.

$\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(a) = \lim_{B \rightarrow b-} F(B) - F(c) + (F(c) - F(a))$

2. Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится, то  $\lim_{y \rightarrow b-} \int_y^{\rightarrow b} f = 0$

Доказательство  $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_1^y f + \int_y^{\rightarrow b} f$

3. Линейность  $f, g \in C[a, b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g$

Доказательство  $F, G$  - первообразные  $f, g$

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - F(a) \text{ и } \int_a^{\rightarrow b} g = \lim_{y \rightarrow b-} G(y) - G(a)$$

$$\alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g = \lim_{y \rightarrow b-} (\alpha F(y) + \beta G(y)) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) = \int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g)$$

### Замечание

Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  сходится, а  $\int_a^{\rightarrow b} g$  расходится, то  $\int_a^{\rightarrow b} (f + g)$  расходится, от противного  $g = (f + g) - f$

### Монотонность

$f, g \in C[a, b)$  и  $f \leq g$  на  $[a, b)$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$  если эти несобственные интегралы определены

### Доказательство

$$\int_a^y \leq f_a^y g \text{ при } a < y < b$$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \text{ и предельный переход в неравенстве}$$

### Формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b)$

$$\text{Тогда } \int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^{\rightarrow b} f' g$$

(если существуют 2 из трех пределов, то существует третий и верно равенство)

### Доказательство

$$\int_a^y f g' = f g \Big|_a^y - \int_a^y f' g \text{ при } a < y < b$$

### Теорема (формула замены переменной в несобственном интеграле)

$\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b), \varphi \in C^1[\alpha, \beta), f \in C[a, b), c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma)$

Тогда  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$  (если один из двух интегралов существует, то существует второй и они равны)

### Доказательство

$$F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx, \Phi(\gamma) := \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$$

### Простой случай (1 существует)

то есть существует  $\lim_{y \rightarrow c-} F(y)$

$$\text{Возьмем } \gamma_n \text{ возрастает к } \beta, \Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

$\varphi(\gamma_n) \rightarrow c$  из определения по Гейне (х)

$$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

то есть поняли, что  $\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$  существует и равен  $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

### Сложный случай (2 существует)

то есть  $\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$

Если  $c < b$ , то тогда существует и 1. т.к.  $f$  непрерывна на  $[\varphi(\alpha), c]$

Можно считать, что  $c = b$

Возьмем какую-нибудь последовательность  $b_n$  возрастающую и стремящуюся к  $b$

Хотим доказать, что  $\lim F(b_n)$  существует

между  $b_n$  и  $b$  есть значения  $\varphi$  в некоторых точках  $\varphi(\beta_n)$

$\varphi(\alpha) < b_n < \varphi(\beta_n) \Rightarrow \varphi$  принимает значение  $b_n$  в некоторых точках, лежащей между  $\alpha$  и  $\beta_n$

назовем это точку  $\gamma_n$

$$b_n = \varphi(\gamma_n), F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$$

Осталось проверить, что  $\gamma_n \rightarrow \beta$  От противного. Пусть нет стремления (это апатия) возьмем

подпоследовательность  $\gamma_{n_k} \rightarrow \beta_* < \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\beta_*)$ , так как  $\varphi$  непрерывна в  $\beta_*$ , но  $\varphi(\gamma_{n_k}) = b_{n_k} \rightarrow b$ , но  $\varphi(\beta_*) < b$  противоречие  
 $F(b_n) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow 2$

### Замечание

$a < b < +\infty, f \in C[a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\varphi(t) = b - \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = b$$

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\right) = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

Рассмотрим случай, когда  $f \geq 0$ .

Тогда  $F(y) := \int_a^y f(x) dx$  - возрастающая функция

$$\text{Если } y < z, \text{ то } F(z) = \int_a^z f = \int_a^y f + \underbrace{\int_y^z f}_{\geq 0} = F(y) + \int_y^z f \geq F(y)$$

то есть мы поняли, что если  $f \in C[a, b)$  и  $f \geq 0$ , то  $\int_a^b f$  всегда существует (но возможно  $+\infty$ )

### Теорема

$f \in C[a, b)$  и  $f \geq 0, F(y) := \int_a^y f$

Тогда  $\int_a^b f$  - сходится  $\Leftrightarrow F$  ограничена (сверху)

### Доказательство

$$\Rightarrow \int_a^b f \text{ - сходится} \Rightarrow \exists \text{ конечный } \lim_{y \rightarrow b-} \int_a^y f = \lim_{y \rightarrow b-} F(y)$$

$$\text{но } \lim_{y \rightarrow b-} F(y) = \sup_{y \in [a, b)} F(y) \Rightarrow F \text{ ограничена сверху}$$

$$\Leftarrow F \text{ ограничена и возрастает} \Rightarrow \exists \text{ конечный } \lim_{y \rightarrow b-} F(y), \text{ но это и есть } \int_a^b f$$

### Следствие (признак сравнения)

$$0 \leq f \leq g, f, h \in C[a, b)$$

Тогда

$$1. \text{ если } \int_a^b g \text{ сходится, то } \int_a^b f \text{ тоже сходится,}$$

$$2. \text{ если } \int_a^b f \text{ расходится, то } \int_a^b g \text{ тоже расходится}$$

### Доказательство

$$1) \text{ Пусть } F(y) := \int_a^y f, G(y) := \int_a^y g \Rightarrow F \leq G \text{ во всех точках}$$

$$\int_a^b g \text{ - сходится} \Leftrightarrow G \text{ - ограничена сверху} \Rightarrow F \text{ - ограничена сверху} \Leftrightarrow \int_a^b f \text{ - сходится}$$

$$2) \text{ от противного } \int_a^b g \text{ - сходится} \Rightarrow \int_a^b f \text{ сходится от противного}$$

### Замечание 1

Достаточно выполнения неравенства  $0 \leq f \leq g$  лишь в некоторой окрестности точки  $b$

### Замечание 2

неравенство  $f \leq g$  можно заменить на  $f = O(g)$ , то есть  $f \leq C \cdot g$

### Замечание 3

Если  $f \geq 0$  и  $f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$  при некотором  $\varepsilon > 0$ , то  $\int_a^{+\infty} f$  - сходится

### Следствие

$f, g \in C[a, b), f, g \geq 0$  Если  $f \underset{x \rightarrow b-}{\sim} g$ , то  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково (то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся)

### Доказательство

$f \equiv g \Rightarrow f = \varphi \cdot g, \lim_{x \rightarrow b-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \varphi(x) < 2$  в некоторой окрестности точки  $b \Rightarrow$  в этой окрестности  $f \leq 2g$  и  $g \leq 2f$  и признак сравнения

### Замечание

$f \geq 0$  и  $\int_1^{+\infty} f$  - сходится  $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

### Определение

$f \in C[a, b]$  интеграл  $\int_a^b f$  абсолютно сходится, если  $\int_a^b |f|$  сходится

### Теорема

$f \in C[a, b]$ . Если  $\int_a^b f$  абсолютно сходится, то он сходится

### Доказательство

$$f_+ = \max\{f, 0\}, f_- = \max\{-f, 0\}, f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$$

В частности  $0 \leq f_{\pm} \leq |f|$

из признака сравнение  $\int_a^b f_{\pm}$  - сходится  $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b (f_+ - f_-)$  сходится

### Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$

Тогда если:

1.  $\int_a^b f =: F(y)$  - ограниченная функция
2.  $g$  - монотонная функция
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Если эти три условия выполнены, то тогда интеграл  $\int_a^{+\infty} fg$  - сходящийся

### Доказательство

Доказательство для случая  $g \in C^1[1; +\infty)$

$$\int_a^y fg = \int_a^y F' g = Fg \Big|_a^y - \int_a^y Fg'$$

Надо доказать, что  $\int_a^y fg$  имеет конечный предел при  $y \rightarrow +\infty$

$$Fg \Big|_a^y = F(y)g(y) - \underbrace{F(a)g(a)}_{=0} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0 \quad F - \text{ограниченная } g - \text{бесконечно малая} \Rightarrow Fg$$

бесконечно малая

Осталось понять, что существует конечный  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y Fg'$ , то есть  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y Fg'$  сходится

проверим, абсолютную сходимость  $\int_a^{+\infty} |Fg'|$ ,  $F$  - ограниченная функция  $\Rightarrow |F| \leq M$

$\int_a^y |Fg'| \leq M \int_a^y |g'|$ ,  $g$  монотонная  $\Rightarrow g'$  знакопостоянна, тогда получается, что  $M \int_a^y |g'| =$

$$M \left| \int_a^y g' \right| = M |g(y) - g(a)| \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} M |g(a)|$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} M |g'| - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} |Fg'| - \text{сходится} \Rightarrow \int_a^{+\infty} Fg' - \text{сходится}$$

### Признак Абеля

$f, g \in C[a, +\infty)$

Тогда если

1.  $\int_a^{+\infty} f$  сходится,
2.  $g$  монотонная,
3.  $g$  ограничена

то  $\int_a^{+\infty} fg$  - сходится

### Доказательство

$g$  монотона и ограничена, значит есть конечный предел  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) =: l \in \mathbb{R}$

$\overline{g(y)} := g(y) - l$  - монотонна и  $\xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$

$F(y) := \int_a^y f$  имеет конечный предел при  $y \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$  при  $y > y_*$   $F(y)$  близко к этому  $\lim$  и, в частности, ограничена на  $[a, y_*]$   $F$  ограничена, так как это непрерывная функция, значит  $F$  - ограничена

то есть функции  $f$  и  $\bar{g}$  подходят под условия принципа Дирихле  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \bar{g}$  - сходится

$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} f(\bar{g} + l) = l \int_a^{+\infty} f + \int_a^{+\infty} f \bar{g}$  - первое сходится по условию, второе доказали, что сходится

### Замечание

пусть  $f$  непрерывна с периодом  $T$

Тогда  $\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$

### Доказательство

$$\int_b^{b+T} f(t) dt = \int_b^{b+T, =s} f\left(\underbrace{t+T}_{=s}\right) dt = \int_{b+T}^{b+2T} f(s) ds$$

$$\int_a^{a+T} f = \int_a^b f + \int_b^{a+T} f = \int_b^{b+T} f + \int_b^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$$
$$\int_a^b f = \int_a^b f(t+T) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(s) ds$$

### Замечание

$f$  непрерывна и периодична  $\Rightarrow f$  ограничена

$T$  - периодична  $\Rightarrow$  все свои значения  $f$  принимает на отрезке  $[0, T]$ , а там она ограничена по т. Вейерштрасса

### Следствие пр. Дирихле

$f \in C[a, +\infty)$ , периодична с периодом  $T$ ,  $g \in C[a, +\infty)$  монотонна и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Тогда

1. если  $\int_a^{+\infty} |g|$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} |fg|$  сходится
2. Если  $\int_a^{+\infty} g$  - расходится, то  $\int_a^{+\infty} fg$  - сходится  $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0$

### Доказательство

1)  $f$  непрерывна и периодична  $\Rightarrow$  ограничена  $\Rightarrow |f| \leq M \Rightarrow |fg| \leq M|g|$  и пр. сравнения

2)  $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0 \Rightarrow F(y) := \int_a^y f$  - периодична

$$F(y+T) = \int_a^{y+T} f = \int_a^y f + \underbrace{\int_y^{y+T} f}_{=0} = \int_a^y f = F(y) \Rightarrow F \text{ - периодична и непрерывна} \Rightarrow F$$

ограничена

все условия принципа Дирихле выполнены  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$  сходится

$\Rightarrow$

От противного пусть  $K := \int_a^{a+T} f \neq 0$

$\bar{f}(x) := f(x) - \frac{K}{T}$  - периодична

$\int_a^{a+T} \bar{f} = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \bar{f}g$  - сходится

$$\int_a^{+\infty} fg = \underbrace{\int_a^{+\infty} \bar{f}g}_{\text{сходится}} + \underbrace{\frac{K}{T} \int_a^{+\infty} g}_{\text{расходится}}$$

### Пример

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

1.  $p > 1 \mid \frac{\sin x}{x^p} \mid \leq \frac{1}{x^p}$  и  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  - сходится  $\Rightarrow (*)$  сходится

- $0 < p \leq 1$   $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ ,  $\frac{1}{x^p}$  монотонно убывает и стремится к 0, тогда второе следствие говорит, что интеграл сходящийся
- $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4 \frac{1}{x^p}$  монотонно убывает и стремится к 0 и  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  - расходится
- $p \leq 0$  нет сходимости
- $\int_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$  - противоречит критерию Коши

## Анализ в метрических пространствах

### Метрические нормированные пространства

#### Определение

$X$  - множество  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho$  называется метрикой (расстоянием) если выполняются три свойства:

- $\rho(x, y) \geq 0 \wedge \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y$
- Неравенство треугольника  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$

#### Определение

Метрическое пространство  $(X, \rho)$ ,  $X$  - множество,  $\rho$  - метрика

#### Примеры

- $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$
- $X = \mathbb{R}^2, \rho(x, y)$  - обычное расстояние
- Дискретная метрика (метрика лентяя)  $X$  - произвольная  $\rho(x, y) = (x == y) ? 0 : 1$
- $\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}, \rho(x, y) := (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_d - y_d|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$   
неравенство  $\Delta$  - неравенство Минковского  
Частные случаи  $d = 2, p = 2$  - стандартное расстояние на плоскости  
 $d = 2, p = 1, \rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  - Манхеттенская метрика
- $X = C[a, b]$  - равномерная метрика  $\rho(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$
- $X = C[a, b], \rho(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- Метрика Хенминга  $a := a_1, a_2, \dots, a_n, b := b_1, b_2, \dots, b_n$  - наборы букв,  $\rho(a, b)$  = количество позиций, в которых эти наборы отличаются ( $a_i \neq b_i$ )

#### Определение

$(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $a \in X, r > 0$

Открытый шар с центром в точке  $a$  и радиусом  $r$  называется  $B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$

#### Определение

Замкнутый шар тоже самое, только  $\leq$ , обозначается  $\overline{B}_r(a)$

#### Свойства

- $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
- $B_{r_1}(a) \cup B_{r_2}(a) = B_{\max\{r_1, r_2\}}(a)$
- Если  $a \neq b$ , то найдется такой  $r > 0$  для которого  $\overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \emptyset$   
Доказательство:  $r := \frac{1}{3}\rho(a, b)$ . От противного, пусть пересекаются. Пусть  $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$ , тогда  $\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) \leq r + r = \frac{2}{3}\rho(a, b)$ . Противоречие

## Определение

$(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ , множество  $A$  назовем открытым, если  $\forall a \in A$   
 $\exists r > 0$ , такой что  $B_r(a) \subset A$

## Теорема (свойства открытых множеств)

1. пустое и все  $X$  - открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество
3. аналогично с пересечением
4. Открытый шар это открытое множество

## Доказательство

1. Очев
2. Пусть  $U_\alpha$  - открытые множества  $\alpha \in I$ .  $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  надо доказать, что  $U$  - открытое.  
Возьмем  $a \in U$ . Тогда  $a \in U_{\alpha_0}$  для некоторого  $\alpha_0$ .  $U_{\alpha_0}$  - открытое  $\Rightarrow$  найдется  $r > 0$  для которого  $B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
3.  $U_1, U_2, \dots, U_n$  - открытые множества  $U := \bigcap_{k=1}^n U_k$ . Возьмем  $a \in U \Rightarrow a \in U_k \forall k$ .  $U_k$  - открытое  $\Rightarrow$  найдется  $r_k > 0$ , для которого  $B_{r_k}(a) \subset U_k$   
 $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset U_k \Rightarrow B_r(a) \subset U$
4.  $B_R(a)$  - открытое множество. Возьмем  $b \in B_R(a)$   
 $\rho(a, b) < R$  положим  $r := R - \rho(a, b)$  и проверим, что шарик  $B_r(b) \subset B_R(a)$  возьмем  $x \in B_r(b) \Rightarrow \rho(x, b) < r$   
Тогда  $\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < r + \rho(b, a) = R$

## Замечание

Пересечения бесконечного числа открытых множеств не обязательно открытое.

Контрпример  $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$ .  $U_n = (-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = [-1, 1]$  - не открытое множество

## Определение

$(X, \rho)$  - метрическое пространство  $A \subset X, a \in A$

$a$  - внутренняя точка множества  $A$ , если найдется  $r > 0$ , такое что  $B_r(a) \subset A$

## Замечание

Множество открытое = все его точки внутренние

## Определение

Внутренность множества - это все его внутренние точки. Обозначается  $\text{Int } A$   
(альтернативное  $A^\circ$ )

## Пример

$\text{Int } [-1, 1] = (-1, 1)$

## Свойства внутренности множества

1.  $\text{Int } A \subset A$
2.  $\text{Int } A$  - объединение всех открытых множеств, содержащихся в  $A$ .

Доказательство  $U_\alpha$  - всевозможные множества  $\subset A$

$U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  надо доказать, что  $U = \text{Int } A$

" $\subset$ " Возьмем  $a \in U \Rightarrow a \in U_{\alpha_0}$  для некоторого  $\alpha_0$ ,  $U_{\alpha_0}$  - открытое, тогда найдется  $B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset A \Rightarrow a$  - внутренняя точка, то есть  $a \in \text{Int } A$

" $\supset$ " Возьмем  $a \in \text{Int } A \Rightarrow a$  внутренняя точка  $\Rightarrow$  найдется  $r > 0$ , такой что  $B_r(a) \subset A$ , но

$B_r(a)$  - открытое множество  $\Rightarrow B_r(a)$  есть среди тех множество, которые мы объединяем  
 $\Rightarrow a \in B_r(a) \subset U$

3.  $\text{Int } A$  - открытое множество.

Доказательство: из 2  $\text{Int } A$  - объединение открытых множеств, что по теореме открытое множество

4.  $A$  - открытое  $\Leftrightarrow \text{Int } A = A$

$\Leftarrow$  из 3.

$\Rightarrow$  Если  $A$  открыто, тогда по пункту 2 среди объединений будет и  $A \Rightarrow \text{Int } A \subset A$

5.  $A \in B \Rightarrow \text{Int } A \subset \text{Int } B$

Доказательство

внутренняя точка множества  $A$  является внутренней точкой множества  $B$

6.  $\text{Int } (\text{Int } A) = \text{Int } A$

Доказательство 3 + 4  $\Rightarrow$  6

### Упражнение

1. Доказать, что  $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$
2. Доказать, что  $\text{Int } (A \cup B) \neq \text{Int } A \cup \text{Int } B$

### Определение

$x$

$A$  - замкнутое множество, если  $A$  - открытое

### Теореме (свойства замкнутых множеств)

1.  $\emptyset, X$  - замкнутое
2. Пересечение любого количества замкнутых - замкнуто
3. Объединение конечного количества замкнутых - замкнуто
4. Замкнутый шар - замкнутое множество

### Доказательство

1. очев

2. Есть  $A_\alpha$  - замкнутые.  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha =: A$

$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$  - открытое  $\Rightarrow A$  - замкнуто

3.  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $A := \bigcap_{k=1}^n A_k$

$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n X \setminus A_k$  - открытое  $\Rightarrow A$  - замкнутое

4.  $\overline{B}_R(a)$  - замкнутое множество, то есть  $\underbrace{X \setminus \overline{B}_R(a)}_{= \{x \in X : \rho(a, x) > R\}}$  - открытое

Возьмем  $b$ , такой что  $\rho(a, b) > R$ , надо доказать, что найдется  $r > 0$ , такой что  $B_r(b) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$

$r := \rho(a, b) - R > 0$ , проверим, что подходит

Хотим доказать, что  $B_r(b) \cap \overline{B}_R(a) = \emptyset$ . От противного, возьмем  $x \in B_r(b) \cap \overline{B}_R(a)$

$\rho(x, b) < r \wedge \rho(a, x) \leq R$

$\Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) < R + r = R + (\rho(a, b) - R) = \rho(a, b)$  противоречие

### Замечание

Объединение бесконечного количества замкнутых множеств может не быть замкнутым

Пример:  $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1)$  не является замкнутым

## Определение

Замыкание множества  $A$

пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Обозначает  $\text{Cl } A$  альтернатива  $(\overline{A})$

## Теорема

$$X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A), X \setminus \text{Int } A = \text{Cl}(X \setminus A)$$

## Доказательство

“ $\subset$ ”  $\text{Cl } A = \bigcap_{F - \text{замкнутое}, F \supset A} F$ , тогда  $X \setminus \text{Cl } A = \bigcup_{F - \text{замкнуто}, F \supset A} F^c = \bigcup_{G - \text{открытое}, G \subset X \setminus A} G = \text{Int}(X \setminus A)$

## Свойства

1.  $\text{Cl } A$  - замкнутое множество

Доказательство пересечение замкнутых замкнуто

2.  $\text{Cl } A \supset A$

Доказательство: так как перечисляем множества, содержащие  $A$

3.  $A$  - замкнуто  $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A$ .

Доказательство: “ $\Leftarrow$ ” свойство 1

“ $\Rightarrow$ ”  $A$  - замкнуто  $\Rightarrow$  множеств, которые пересекаем есть  $A \Rightarrow \text{Cl } A \subset A \stackrel{\text{св. 2}}{\Rightarrow} \text{Cl } A = A$

4.  $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

$A \subset B \Rightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow (X \setminus \text{Int}(X \setminus A)) \subset (X \setminus \text{Int}(X \setminus B))$

5.  $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$ . Доказательство 1 + 3  $\Rightarrow$  5

## Упражнения

1.  $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

2. для пересечений неверно

3.  $A, \text{Int } A, \text{Cl } A, \text{Cl Int } A, \text{Int Cl } A, \text{Int Cl Int } A \dots$  какое наибольшее количество различных множество может получиться?

## Теорема

$$a \in \text{Cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

## Доказательство

$$\text{Cl } A = X$$

$\text{Int}(X \setminus A), a \in \text{Cl } A \Leftrightarrow a \notin \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow$  какой бы ни взять  $r > 0$   $B_r(a) \not\subset X \setminus A$ , то есть  $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$

## Определение

$(X, \rho)$  - метрическое пространство.  $a \in X$ , окрестность точки  $a$  назовем шарик  $B_r(a)$  для некоторого  $r > 0$

## Определение

Проколота окрестность  $\mathring{U}_a := U_a \setminus \{a\} = B_r(a) \setminus \{a\}$

## Определение

$a$  - предельная точка множества  $A$

Если в любой проколота окрестности точки  $a$  есть точки множества  $A$ . Обозначение  $A'$  множества всех предельных точек  $A$

## Теорема

$A$  - множество. Следующие условия равносильны

1.  $a \in A'$
2.  $\forall r > 0$  в шарике  $B_r(a)$  содержится бесконечное количество точек множества  $A$
3. Существует такая последовательность различных точек  $x_n \in A$ , что  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$
4. Существует такая последовательность точек  $x_n \in A$ , что  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$  и строго убывает

## Доказательство

“4  $\Rightarrow$  3” очевидно

“3  $\Rightarrow$  2” возьмем  $r > 0 \Rightarrow$  при больших  $n : \rho(x_n, a) < r \Rightarrow x_n \in B_r(a)$  при больших  $n$

“2  $\Rightarrow$  1” В  $B_r(a) \cap A$  - бесконечное количество точек.

$$\mathring{B}_r(a) \cap A = (B_r(a) \cap A)$$

В  $\{a\}$  - бесконечное количество точек  $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a$  — предельная точка множества  $A$  “1  $\Rightarrow$  4” Возьмем  $r_1 = 1$ , тогда  $\mathring{B}_{r_1}(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$  найдется

$x_1 \in A$  и  $0 < \rho(a, x_1) < 1$

Возьмем  $r_2 := \frac{\rho(a, x_1)}{2} < \frac{1}{2}$ ,  $\mathring{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$  найдется  $x_2 \in A$  и  $0 < \rho(a, x_2) < \rho(a, x_1)$

Возьмем  $r_3 := \frac{\rho(a, x_2)}{2} < \frac{1}{4} \dots$

и так далее

В итоге получается, что  $\rho(a, x_k) < \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim \rho(a, x_k) \rightarrow 0$

## Свойства предельных точек

1.  $\text{Cl } A = A \cup A'$
2.  $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3.  $A$  - замкнуто  $\Leftrightarrow A' \subset A$

## Доказательство

1.  $A \in \text{Cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(a) \cap A \neq \emptyset$  Возможны два варианта:

1.  $a \in A$

2.  $a \notin A$  и  $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$

2. Очевидно

3.  $A$  - замкнуто  $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subset A$