Автор: FlintWithBlackCrown aka Кирилл Болохов

Теорема Штольца 1

y_n строго возрастают, $\lim(y_n) = +\infty$
Тогда если есть $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} =: l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$
Доказательство
случай $l = 0$. $c_n := \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ $\lim c_n = 0$
Зафиксируем $\varepsilon > 0$
Найдется N, такое что если $k \geq N : |c_k| < \varepsilon$
Возьмем $N \leq m < n$ и рассмотрим $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_* n - 2) + ... + (x_{m+1} - x_m) = c_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + c_{n-2}(y_{n-1} + y_{n-2}) + ... + c_m(y_{m+1} - y_m)$
$|x_n - x_m| \leq |c_{n-1}|(y_n - y_{n-1}) + |c_{n-2}|(y_{n-1} + y_{n-2}) + ... + |c_m|(y_{m+1} - y_m) < \varepsilon((y_n - y_{n-1}) + ... + (y_{m+1} - y_m)) = y_n - y_m \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon(y_n - y_m)$
$|x_n| = |(x_n - x_m) + x_m| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon(y_n - y_m) + |x_m|$
$\frac{|x_n|}{y_n} < \varepsilon \frac{y_n - y_m}{y_n} + \frac{|x_m|}{y_n} < \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n} < 2\varepsilon$
Зафиксируем m. Выберем N_1 так, что при $n \geq N_1$ $y_n > \frac{|x_m|}{2\varepsilon}$
$\Rightarrow$ если $n > \max\{N_1, N\}$, то $\frac{|x_n|}{y_n} < 2\varepsilon \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$
Случай $l \in \mathbb{R}$, рассмотрим последовательность $\overline{x_n} := x_n - l y_n$
$\frac{\overline{x_n+1} - \overline{x_n}}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - l y_{n+1} - x_n + l y_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \to 0 \Rightarrow \lim \frac{\overline{x_n}}{y_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\overline{x_n} + l y_n}{y_n} = l + \lim \frac{\overline{x_n}}{y_n} = l$
Случай $l = +\infty$
Знаем, что $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$
$\Rightarrow$ найдется N, такое что при $n \geq N$ $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n$ строго возрастает при $n \geq N$
$x_n - x_N > y_n - y_N \Rightarrow x_n > y_n + (x_N - y_N) \Rightarrow \lim x_n = +\infty$
$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ - бесконечно большая, значит перевернутая бесконечно малая. $\lim \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{y_n}{x_n}$ - бесконечно малая $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n}$ - бесконечно большая $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$
Случай $l = -\infty$
$\overline{x_n} := -x_n$
$\lim \frac{\overline{x_{n+1}} - \overline{x_n}}{y_{n+1}-y_n} = +\infty \Rightarrow \lim \frac{\overline{x_n}}{y_n} = +\infty \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = -\infty$

Следствие

Если $\lim a_n = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = l$
Доказательство $x_n := a_1 + a_2 + ... + a_n, y_n := n$
$\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{n+1-n} = \lim a_{n+1} = l \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = l$
Пример: $S_n := 1^k + 2^k + ... + n^k < n \cdot n^k = n^{k+1}$
оценка снизу: $\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k = \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}}$
Цель посчитать предел $\lim \frac{S_n}{n^{k+1}} = \lim \frac{S_n - S_{n-1}}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$
$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1)n^k + ... n^{k-1} + ... n^{k-2} + ...$
$\lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim \frac{n^k}{(k+1)n^k + ... + ...} = \lim \frac{1}{(k+1) + ... \frac{1}{n} + ... \frac{1}{n} + ...} = \frac{1}{k+1}$
$1^k + 2^k + ... + n^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}$

Теорема Штольца 2

y_n строго возрастают, $\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0$
Тогда если есть $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} =: l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = l$
Доказательсвто
Случай $l = 0$ $c_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

Выберем N как в предыдущем доказательстве и $N \leq m < n \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon(y_n - y_m) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|x_n - x_m| \leq \varepsilon \cdot \lim_{n\to\infty}(y_n - y_m) = \varepsilon(-y_m) = \varepsilon|y_m| \Rightarrow |x_m| \leq \varepsilon|y_m|$ при $m \geq N$
$\Rightarrow \left|\frac{x_m}{y_m}\right| \leq \varepsilon$ при $m \geq N \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = 0$
Случай $l \in \mathbb{R}$ просто копируем доказательство
Случай $l = +\infty$ найдется N, такой, что $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} > 1$ при $n \geq N \Rightarrow x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0 \Rightarrow x_n$ строго возрастает
Случай $l = -\infty$ аналогичный

Параграф 4

Определение

$x_1, x_2, \ldots$ - последовательность Рассмотрим строго возрастающую последовательность индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$
Пример $1, 2, 3, 4, 5$
$2, 4, 6, 8$ - подпоследовательность
Или квадраты тоже будет подпоследоваельностью
$1, 1, 2, 3, 4, 5$ - не подпоследовательность
$2, 1, 3, 4, 5$ тож не подпоследовательность
Замечание $n_k \geq k$ индукция База $n_1 \geq 1$, переход $k \to k+1 : n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1$

Свойства

1. Подпоследовательность последовательности имеющей предел имеет тот же предел
2. Если индексы $\{n_k\}$ и $\{m_l\}$ две последовательности, дающие все натуральные числа в объединении и $\lim x_{n_k} = \lim x_{m_l} =: a \in \overline{\mathbb{R}}$, то исходная последовательность имеет предел a
   Доказательство: Вне окрестности точчки a находится лишь конечное число членов последовательностей x_{n_k} и x_{m_l}, а значит льш конечное число членов x_n

Теорема о стагивающихся отрезках.

Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ и $\lim(b_n - a_n) = 0$. Тогда существует единсвтенная точка c, принадлежащая всем отрезками и $\lim a_n = \lim b_n = c$
Доказательство: Существование по теореме о вложенных отрезков
Единственность. Пусть точки $c < d$, лежат во всех отрезках, тогда $0 < c - d \leq b_n - a_n$, но $b_n - a_n \to 0$, тогда предельный переход в неравенстве даст $0 < d - c \leq 0$, противоречие
Доказательство $\lim a_n = \lim b_n = c$
$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \Rightarrow \lim(b_n - c) = 0 \Rightarrow \lim b_n = c$, аналогично для a_n

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую конечный предел.
Доказательство Последовательность x_n - ограниченная. Тогда $a \leq x_n \leq b$, a - нижняя граница, b - верхняя.
Вспомогательная конструкция
Рассмотрим отрезок от a до b, разделим пополам, тогда хотя бы в одной из половинок бесконечное число членов последовательности, обозначим этот отрезок за $[a_1, b_1]$. Далее разрезаем пополам уже отрезок $[a_1, b_1]$, тогда хотя бы в одной из половинок бесконечное число членов последовательности, обозначим эту половинку $[a_2, b_2]$ и т.д.
Получившиеся отрезки явно вложенные, в каждом из них бесконечное число членов

последовательности, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, то есть получились стягивающиеся отрезки. Тогда по теореме выше найдется $c \in [a_n, b_n]$, такая что $\lim a_n = \lim b_n = c$

Построение подпоследовательности

В $[a_1, b_1]$ бесконечное число членов последовательности, возьмем какой-то, пусть n_1 - это его номер. В $[a_2, b_2]$ бесконечное число членов последовательности, значит найдется член с номером $> n_1$, возьмем какой-то и пусть n_2 - это его номер. Аналогичные рассуждения для n_3 и так далее.

Получили $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$ и $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Проверим, что $\lim x_{n_k} = c$.

$\overbrace{a_k}^{\to c} \leq x_{n_k} \leq \overbrace{b_k}^{\to c}$, тогда по теореме о двух милиционерах $\lim x_{n_k} = c$.

Теорема

1. Из любой неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$
2. Аналогично для неограниченной снизу

Доказательство. Единица не верхняя граница, значит есть член последовательности больше, чем 1, пусть его номер n_1. Тогда $x_{n_1} + 1 > 2$ тоже не верхняя граница, значит есть члены последовательности, которые больше $x_{n_2} > x_{n_1} + 1 > 2$ и так далее. Построили $\underbrace{x_{n_k} > k}_{\Rightarrow \lim x_{n_k} = +\infty}$ и $x_{n_k} > x_{n_{k-1}} > \ldots$ Все индексы различные, переставим в порядке возрастания индексов, предел не поменяется, получится подпоследовательность. Аналогичное доказательство для $-\infty$

Определение

Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ фундаментальная (сходящаяся в себе, последовательность Коши) если верно следущее: $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m, n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$ Свойства:

1. Сходящаяся последовательность обязательно фундаментальна.
2. Фундаментальная последовательность обязательно ограничена
3. Если у фундаментальной последовательности есть подпоследовательность, имеющая предел, то последовательность имеет тот же самый предел

Доказательство

1. Пусть $f = \lim x_n \in \mathbb{R}$, Возьмем $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq N \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Возьмем $\varepsilon = 1$. Найдется N, такое что $\forall m, n \geq N$, $|x_n - x_m| < 1$. В частности $|x_n - x_N| < 1\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| \leq |x_N| + |x_n - x_N| < 1 + |x_N|$ тогда $|x_n| \leq \max\{1 + |x_n|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$
3. Пусть $\lim x_{n_k} = a \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\lim x_n = a$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Найдется N, такое что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ при $n, m \geq N$
   найдется K, такое что $\left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon$ при $k \geq K$ из $\lim x_{n_k} = a$
   Возьмем $k = \max\{K, N\} \Rightarrow n_k \geq k \geq N \Rightarrow \left|x_n - x_{n_k}\right| < \varepsilon$, еще $\left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$

Критерий Коши

Последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна

Доказательство

$\Rightarrow$ это свойство 1

$\Leftarrow$ фундам. $\Rightarrow$ ограниченность $\Rightarrow$ существует сходящаяся подпоследовательность $\Rightarrow$ последовательность сходящаяся

Определение

$x_1, x_2, x_3 ...$ a - частичный предел этой последовательности, если существует такая подпоследовательность, у которой $\lim = a$