Автор: FlintWithBlackCrown aka Кирилл Болохов

Замечания

1. В определениии 1 можно рассматривать лишь симметричные интервалы, то есть интервалы вида $(l - \varepsilon, l + \varepsilon), \varepsilon > 0$
2. Вне интеравлов конечное число = начиная с некоторого номера все внутри, то есть

$$\forall n \geq N : x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

То есть определения означают одно и то же

Примеры

1. $x_n = c$ - стационарные последовательности $\lim x_n = c$
2. $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}, \lim x_n = 1$ Решение
   $|x_n - 1| < \varepsilon, x_n - 1 = \frac{n^2}{n^2+1} - 1 = -\frac{1}{n^2+1}$

   $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$

   нужно понять, что начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $n^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
3. $x_n = (-1)^n$ не имеет предела

Свойства

1. Предел единственный, т. е. если $\lim x_n = a, \lim x_n = b$, то $a = b$
   Доказательство от противного
   Пусть $a < b$, знаем, что вне $\left(a - 1, \frac{a+b}{2}\right)$ лишь конечное число
   вне $\left(\frac{a+b}{2}, b + 1\right)$, но любой член последовательности лежит вне какого-то из этих интервалов $\Rightarrow$ их всего конечное число, противоречие
2. Перестановка местами членов последовательности не меняет предела
3. Если $l = \lim x_n$ и из последовательности выкинули какое-то количество членов, но их все еще бесконечно, то новая последовательность тоже имеет предел l
4. Пусть $l = \lim x_n$. Разложим каждый член последовательности с конечной кратностью, тогда предел новой последовательности l.
5. Добавление к последовательности конечного числа членов не менет предел
   Доказательство Почему lim не может появиться?
   Пусть появился предел, тогда по свойству 3 предел останется. противоречие
   Почему если был предел, то он и останется?
   Вне интервала было конченое число элементов, конечное и останется
6. Если послдовательность имеет предел, то она ограничена
   Доказательство
   Пусть $l = \lim x_n$. Возьмем $\varepsilon = 1, \exists N \forall n \geq N \ |x_n - l| < 1$, то есть $l - 1 < x_n < l + 1$.
   $\max\{l + 1, x_1, x_2, ..., x_{N-1}\}$ - верхняя граница
   $\min\{l - 1, x_1, x_2, ..., x_{N-1}\}$ - нижняя граница

Лемма

Пусть $a = \lim x_n$ и $b = \lim y_n, \varepsilon > 0$, тогда найдется N, такой что $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon$
Доказательство
$a = \lim x_n \Rightarrow \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \ |x_n - a| < \varepsilon \ b = \lim y_n \Rightarrow \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \ |y_n - b| < \varepsilon$
Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$ и он найдется

7. Предельный переход в неравенстве

Пусть $x_n \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}, \lim x_n = a, \lim y_n = b$, тогда $a \le b$
Докажем от противного, пусть $a > b$, пусть $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ и воспользуемся леммой, тогда
$\exists N_1$, такой что $|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow x_n > a - \varepsilon, y_n < b + \varepsilon \Rightarrow x_n > y_n$ противоречие.
Замечания:
1. Достаточно, чтобы неравенство $x_n \le y_n$ выполнялось начиная с некоторого номера
2. Строгое неравенство может не сохраняться
   Пример
   $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}, x_n < y_n \forall n, \lim x_n = \lim y_n = 0$

Следствия
1. Если $x_n \le b \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim x_n = a$, то $a \le b$
2. Если $a \le y_n \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim y_n = b$, то $a \le b$
3. Если $x_n \in [a, b] \wedge \lim x_n = l$, то $l \in [a, b]$

Продолжение свойств
8. Стабилизация знака. Пусть $\lim x_n = l \ne 0$. Тогда начиная с некоторого номера все члены последовательности имеют тот же знак, что и l
   Доказательство
   Считаем, что $l > 0$
   $\exists N$, такой что $\forall n \ge N \ |x_n - l| < \varepsilon$. то есть $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \Rightarrow x_n > 0 \forall n \ge N$
9. Теорема о сжатой последовательности (Теорема о двух милиционерах)

Пусть $x_n \le y_n \le z_n \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$,то $\lim y_n = l$
Доказательство: Возьмем $\varepsilon > 0$ по лемме найдется такой N, что $\forall n \ge N \ |x_n - l| < \varepsilon, |z_n - l| < \varepsilon \Rightarrow x_n > l - \varepsilon, z_n < l + \varepsilon$ сложим неравенства $l - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n \le l + \varepsilon (\forall n \ge N) \Rightarrow l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon (\forall n \ge N)$
Замечания
1. Достаточно, что неравенства становились верными после некоторого момента

Следствие. Пусть $|y_n| \le z_n$ и $\lim z_n = 0$. Тогда $\lim y_n = 0$
Доказательство
$x_n := -z_n \Rightarrow \lim x_n = 0$
$\lim z_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \forall n \ge N \Rightarrow \underbrace{|z_n|}_{x_n} < \varepsilon$

Определение
1. Последовательность x_n возрастающая, если $x_1 \le x_2 \le \ldots$
2. Последовательность строговозрастающая если очев
3. последовательность убывающая если очев
4. Последовательность строгоубывающая если очев
5. Последовательность x_n монотонная если она возрастающая или убывающая

Теорема
1. Возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел
2. Убывающая ограниченная снизу последовательность тоже имеет предел
3. Монотонная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

Доказательство
1. $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots$, она ограничена сверху, поэтому у нее есть $a := \sup\{x_n\}$, покажем, что $a = \lim x_n$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $a - \varepsilon < a$ - наименьшая из верхних границ, тогда $a - \varepsilon$ не верхняя граница, для $\{x_n\} \Rightarrow$ найдется N, такой что $x_n > a - \varepsilon$, тогда $a - \varepsilon \leq x_N \leq x_{N+1} \leq \ldots \leq x_n$ при $n \geq N$
a - верхняя граница $\Rightarrow x_n \leq a < a + \varepsilon \forall n \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \forall n > N$ то есть $|x_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N$
2. Очев
3. Очев

Определение
Последовательность x_n бесконечно балая, если $\lim x_n = 0$

Теорема
Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности - это бесконечно балая последовательность
Доказательство
y_n - ограниченная последовательность. Тогда $|y_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. $\lim x_n = 0$ возьмем $\varepsilon > 0$ тогда $\exists N \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, следовательно при $n \geq N$ $|x_n y_n \ | \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M \leq \varepsilon \Rightarrow \lim x_n y_n = 0$

Теорема об арифметических действиях с пределами
Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b$, тогда
1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim x_n y_n = ab$ в частности $\lim c x_n = ca$
3. $\lim|x_n| = |a|$
4. Если $b \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

1 Доказательство
Возьмем $\varepsilon > 0$, По лемме найдется N, такое что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$, тогда $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2 Доказательство
$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow x_n - a$ - бесконечно малая
$\lim y_n = b \Rightarrow y_n$ ограниченная последовательность
$\Rightarrow (x_n - a) y_n$ - бесконечно малая
$x_n y_n = (x_n - a) y_n + a y_n$ осталось доказать, что $\lim a y_n = ab$ то есть что $\lim a(y_n - b) = 0$ это верно, т.к $y_n - b$ бесконечно малая, a ограничено $\Rightarrow a(y_n - b) = 0$
3 Доказательство
$\lim x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ |x_n - a| < \varepsilon$
$\| x_n| - |a \| \leq |x_n - a| < \varepsilon.$
4 Доказательство
Достаточно доказать, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$
$\lim y_n = b \neq 0$. Будем считать, что $b > 0$. Найдется N_1, такой что $\forall n \geq N_1 \ |y_n - b| \leq \frac{b}{2}$ то есть $y_n > \frac{b}{2}$
$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|y_n - b}{|y_n b|} < \frac{|y_n - b|}{b \cdot \frac{b}{2}}$ найдется такой номер N_2, такой что $\forall n \geq N_2, |y_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{b^2}{2}$, $\frac{y_n - b}{b \cdot \frac{b}{2}} < \varepsilon$. Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$ тогда $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| < \varepsilon$ при $n \geq N$

Определение
$\lim x_n = +\infty$, если вне любого луча содержится лишь конечное число членов последовательности
$\lim x_n = +\infty$, если $\forall E \ \exists N \ \forall n \geq N \Rightarrow x_n > E$

Определение

$\lim x_n = -\infty$, если вне любого луча $(-\infty, E)$ содержится лишь конечное число членов последовательности

$\lim x_n = -\infty$, если $\forall E\ \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow x_n < E$

Определение

Последовательность x_n бесконечно большая, если $\forall E\ \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| > E$

Замечания

1. x_n - б.б $\Leftrightarrow \lim |x_n| = +\infty$
2. x_n - б.б $\Rightarrow x_n$ неограничена, обратное неверно