Автор: FlintWithBlackCrown aka Кирилл Болохов

Бесконечные пределы

Обозначение

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Определение

$a \in \mathbb{R}$ U_a окрестность a - это интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon), \varepsilon > 0$
Окрестность $+\infty$ $U_{+\infty}$ - это луч вида $(E, +\infty)$, где $E \in \mathbb{R}$
Окрестность $-\infty$ $U_{-\infty}$ - это луч вида $(-\infty, E)$, где $E \in \mathbb{R}$

Определение

$a \in \overline{\mathbb{R}}, a = \lim x_n$, если

$$\forall U_a \ \exists N \ \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in U_a$$

Определение

$a \in \overline{\mathbb{R}}, a = \lim x_n$, если вне любой окрестности точки a, содержится лишь конечное число точек

Определенеие

Последовательность сходится, если она имеет конечный предел

Свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$

1. Единственность предела

2-5. Сохраняются со всеми доказательствами
8. Стабилизация знака сохраняется. Если $a \in \overline{\mathbb{R}}, a = \lim x_n, a \neq 0$то найдется такое N, что при $n \geq N$ элемент x_n имеет такой же знак, что и a

Доказательство: если $a \in \mathbb{R}$, то доказательство не изменится. Если $a = +\infty$. Для луча $(0, +\infty)$ найдется N, такое что $\forall n \geq N$ $x_n \in (0, +\infty)$, т.е x_n положительный.

Про неравенства

Считаем, что $-\infty < a$ $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
$+\infty > a$ $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Теорема

Пусть $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда:
1. Если $\lim x_n = +\infty$, то $\lim y_n = +\infty$
2. Если $\lim y_n = -\infty$, то $\lim x_n = -\infty$

Доказательство
Возьмем луч $(E, +\infty)$, такой что $\lim x_n = +\infty$, найдется N, такое что $\forall n \geq N$ $y_n \geq x_n > E \Rightarrow \lim y_n = +\infty$

Замечание

Свойство про ограниченность нарушается. Более того, если $\lim x_n = \pm\infty$,то x_n не является ограниченно последовательностью
От противного. Если x_n ограниченно сверху, то $x_n \leq M$ - верхняя граница $\forall n$. Но тогда они все лежат вне луча $(M, +\infty)$, противоречие с $\lim x_n = +\infty$

Арифметика с бесконечностью см. Stepik

Определение

Последовательность бесконечно большая, если $\lim|x_n| = +\infty$ (иногда обозначают $\lim x_n = \infty$)

Теорема. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми

Пусть $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда x_n будет бесконечно малой $\Leftrightarrow \frac{1}{x_n}$ - бесконечно большая
Доказательство x_n - бесконечно балая $\Leftrightarrow \lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$
$\frac{1}{x_n}$ - бесконечно большая $\Leftrightarrow \lim|\frac{1}{x_n}| = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow |\frac{1}{x_n}| > E \Leftrightarrow |x_n| < \frac{1}{E}$, берем $E = \frac{1}{\varepsilon}$

Замечание

$\lim x_n = \pm\infty \Rightarrow x_n$ - бесконечно большая, наоборот неверно $\lim x_n = -\infty \Rightarrow \forall E < 0\ \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow x_n < E \Rightarrow |x_n| = -x_n > -E = |E|$
Следовательно, $\lim|x_n| = +\infty$, т.е. x_n - бесконечно большая
(Пояснение к наоборот неверно) $\quad x_n = (-1)^n \cdot n$, тогда $|x_n| = n$ и $\lim|x_n| = +\infty$, то есть x_n - бесконечно большая. Но $\lim x_n$ не существует

Параграф 3. Экспонента

Неравенство Бернулли

Если $x > -1$, то $(1+x)^n \geq 1 + nx\ \forall n \in \mathbb{N}$, причем если $x \neq 0, n > 1$,то неравенство строгое

Общая формулировка

Если $x > -1$ и $p \geq 1$, то $(1+x)^p \geq 1 + px$, причем если $x \neq 0бp \neq 1, p \neq 0$,то неравенство строгое. Если же $0 \leq p \leq 1$, то верно неравенство с обратным знаком
Доказательство
Индукция по n. База $n = 1$ $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$ Переход $n \to n+1$. Предполагаем, что неравенство $(1+x)^n \geq 1 + nx$ уже доказано, тогда $(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$■

Следствия

1. Если $a > 1$, то $\lim a^n = +\infty$
2. Если $|a| < 1$, то $\lim a^n = 0$

Доказательство 1 $x \coloneqq a - 1 > 0$
$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx \geq E$ при $n \geq \frac{E}{x} \Rightarrow \lim a^n = +\infty$
Доказательсвто 2
Если $a = 0$,то все очевидно.
Пусть $a \neq 0$, тогда $\frac{1}{|}a| > 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$, то есть $\frac{1}{|a|^n}$ - бесконечно большая $\Rightarrow a^n$ бесконечно малая $\Rightarrow \lim a^n = 0$

Теорема

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность $x_n \coloneqq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ возрастающая при $n > -a$ и ограничена сверху. Причем если $a \neq 0$, то возрастание строгое.
Доказательство

Возрастание
$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{a}{n-1}\right)^n} = \frac{\frac{n+a^n}{n^n}}{\frac{(n-1+a)^n}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{(n+a)^n \cdot (n-1)^{n-1}}{(n+a-1)^{n-1} \cdot n^n} = \frac{(n+a)^n \cdot (n-1)^n}{(n-1+a)^n \cdot n^n} = \left(1 - \frac{a}{n(n+a-1)}\right)^n \cdot \frac{n-1+a}{n-1} \geq \Big(1 - n \cdot \left(\frac{a}{n \cdot (n+a-1)}\right)\Big) \cdot \frac{n-1+a}{n-1} = \frac{n-1}{n+a-1} \cdot \frac{n+a-1}{n-1} = 1$ Надо проверить, что $-\frac{a}{n \cdot (n+a-1)} > -1$, $n + a - 1 > 0 \Leftrightarrow a < n(n+a-1) = n^2 + na - n \Leftrightarrow n^2 + na - n - a > 0 \Leftrightarrow (n-1)(n+a) > 0$, это верно
Если $a \neq 0$, то $-\frac{a}{n(n+a-1)} \neq 0$ и знак неравенства Бернулли строгий

Ограниченность
$y_n := \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$ возрастает при $n > a$.
$x_n \cdot y_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(a - \frac{a}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)^n \leq 1$
$x_n \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{1}{y_1}$ при $a \leq 0$
$x_n \leq \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{1}{y_{[a]+1}}$ при $a > 0$
При $n \geq [a] + 1$ $x_n \leq \frac{1}{y_{[a]+1}}$

Следствие
Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ имеет конечноый предел

Определение
$\exp a := \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$,
число $e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1. $\exp 0 = 1, \exp 1 = e$
2. $\exp a > 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$

Возьмем $m > -a$, тогда при $n \geq m$ $1 + \frac{a}{n} > 0 \Rightarrow x_n \geq x_m > 0$. $x_n = \exp a \Rightarrow \exp a \geq x_m > 0$
3. Если $a \leq b$, то $\exp a \leq \exp B$

Доказательство
$a \leq b \Rightarrow 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{b}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n (= \exp a) \leq \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n (= \exp b)$ при $n > -a$
4. $\exp a \geq 1 + a$

Доказательство
$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{a}{n} = 1 + a$ (Неравенство Бернулли) при $n > -a$
5. $\exp a \cdot \exp(-a) \leq -1$

Доказательство
$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)^n \leq 1$
6. При $a < 1$ $\exp a \leq \frac{1}{1-a}$

Доказательство
$\exp a \leq \frac{1}{\exp(-a)}$,
$\exp(-a) \geq 1 - a > 0$
$\exp a \leq \frac{1}{1-a}$
7. Последовательность $Z_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ строго убывает и стремиться к e

Доказательство
$\frac{1}{z_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ строго возрастает при $n + 1 > 1$
$\lim z_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim x_n \cdot \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$
8. $\left(1 + \frac{1}{n}\right) (=: x_n)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} (=: z_n)$

Доказательство
$x_n < x_{n+1} \leq x_m \to e$ при $m \geq n + 1 \Rightarrow x_n < x_{n+1} \leq e$
$z_n > z_{n+1} \geq z_m$ при $m \geq n + 1 \Rightarrow z_n > z_{n+1} \geq e$

9. 2 < e < 3

Доказательство

$x_1 = 2 < e < z_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 = \frac{6^6}{5^6} < 3$

Лемма

Пусть $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$, тогда $\lim \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \exp a$

Доказательство

$x_n \coloneqq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n, \omega_n \coloneqq \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$, знаем, что $\lim x_n = \exp a$

Надо доказать, что $\lim(\omega_n - x_n) = 0$

$A \coloneqq 1 + \frac{a}{n}, B \coloneqq 1 + \frac{a_n}{n}$

$$|\omega_n - x_n| = |B^n - A^n| = \underbrace{|B - A|}_{\frac{|a_n - a|}{n}} \cdot \overbrace{|B^{n-1} + B^{n-2} \cdot A + ... + A^{n-1}|}^{B^{n-1} + B^{n-2} \cdot A + \cdot + A^{n-1} \leq \overbrace{\exp M + \exp M + ... + \exp M}^{n \cdot \exp M}} \leq \frac{|a_n - a|}{n} \cdot n \cdot$$

$\exp M = 0$

a_n имеет конечный предел, значит она ограничена $\Rightarrow a_n \leq M, a \leq M \forall n$

$A = 1 + \frac{a}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$

$B = 1 + \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$

$B^{n-k} \cdot A^{k-1} \leq \left(1 + \frac{M}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(1 + \frac{M}{n}\right)^{k-1} < \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \leq \exp M$

Теорема

$\exp a \cdot \exp b = \exp(a + b)$

Доказательтсво

$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{b}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{a + b + \frac{ab}{n}}{n}\right)^n =$

$a + b + \frac{ab}{n} \to a + b$, следовательно по лемме $= \exp(a + b)$

Следствие

$\exp x$ строго возрастающая функция

Доказательство

Возьмем какое-то$t > 0, \exp(x + t) = \underbrace{\exp x}_{>0} \cdot \underbrace{\exp t}_{\geq 1 + t} \geq \exp x(1 + t) = \exp x + t \exp x > \exp$

Теорема

Пусть $x_n > 0$ и $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, тогда последовательность $\lim x_n = 0$

Доказательство

$a \coloneqq \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Найдется такое m, что $n \geq m$

$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot ... \cdot \frac{x_{m+1}}{x(m)} \cdot x_m < \left(\frac{1+a}{2}\right)^{n-m} \cdot x_m = \left(\underbrace{\frac{a+1}{2}^n}, 0\right) \cdot x_m \cdot \underbrace{\left(\frac{1+a}{2}\right)^{-m}}_{\text{не зависит от n}}$ тогда по т. о двух милиционерах $\lim x_n = 0$

Следствие

при $a > 1$ $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ Доказательство $x_n \coloneqq \frac{n^k}{a^n}, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} : \frac{n^k}{a^n} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$

Следствие

$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

Доказательство

$x_n = \frac{a^n}{n!}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{a^n}{n!} = a \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$ Следствие $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство

$x_n := \frac{n!}{n^n}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$