

Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

Теорема

$f : \langle a, b \rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \text{sign } x$

Пусть F первообразная f , тогда $F' = f$ принимает значения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу F' должна принимать все значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F первообразная f . Тогда

1. $\forall c \in \mathbb{R} F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ тоже первообразная f , то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных

Обозначение: $\int f = \int f(x)dx$

F - первообразная f , $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$

Проверка

3.

При $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. При $x < 0$: $(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$
11.

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{2} (\ln|1+x|)' - (\ln|1-x|)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

12.

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \text{очев}$$

Определение

A, B - множества функций $\langle a, b \rangle$. $A + B = \{f + g, f \in A, g \in B\}$; $c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}$, $A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f, g - имеют первообразные

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $f + g$ тоже имеют первообразную $\int f + g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3. $\alpha f + \beta g$ тоже имеет первообразную, $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g . Тогда $F + G$ - первообразыне для $f + g$

$$\int(f + g) = F + G + C, \int f = F + C, \int g = G + C$$

Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ - дифф. F - первообразная f . $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0. \text{ (Подставить } \varphi(x) = \alpha x + \beta)$$

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f' имеет первообразную, тогда fg' тоже имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство

H - первообразная для $f'g$. (?) fg - H - первообразая для fg'

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = fg' \blacksquare$$

Площади и определенный интеграл

\mathcal{F} - множество всех ограниченных множеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$
2. $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma(\overline{E}) \leq \sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на E_- и $E_+ \Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
(точки l могут принадлежать как E_- и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2': если $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Но существование такого объекта неочев (сложно)

Теорема

$\sigma(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : \cup_{k=1}^n P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } || \text{ осьм координат} \right\}$ -
квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе
апоЖ

Доказательство

Проверим три свойства

1. Пусть $P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ (?) $\sigma(P)(b-a)(d-c)$
 $\leq \{P\}$ - покрытие $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(c-d)$
 \geq Пусть $\cup_{k=1}^n P_k > P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P|$ Продлим стороны P_k и P , если
мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k , то он разбит на маленькие
прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие
прямоугольники образуют покрытие P , $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников}| \geq$
 $\sum |\text{маленьких прямоугольников, входящих в } P| = |P| \blacksquare$
2. любое покрытие E - это покрытие $\bar{E} \Rightarrow \sigma(\bar{E}) \leq \sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+ . (?) $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
 \leq Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^m P_k^+ > E_+$, такое что $\sum_{k=1}^m |P_k^+| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^n P_i^- > E_-$, такое что
 $\sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_-) = \varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+, P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-$ - образуют покрытие E , значит
 $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^m |P_k^+| + \sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$, устремим
 ε к нулю.
 \geq Пусть есть P_1, \dots, P_n - покрытие E . Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при
помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми)
Тогда P_1^+, \dots, P_n^+ - покрытие E_+ , а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^n |P_k| =$
 $\sum_{k=1}^n |P_k^+| + \sum_{k=1}^n |P_k^-| \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем
что хотели

Замечания

1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |P_k| \right\}$
Если $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$, но $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в \mathbb{R}^3 можно разделить на 5 непересекающихся частей,
применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить
два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная, $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$

Свойства

1. $f_{\pm} \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}, f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной, то f_+ и f_- были непрерывны

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $f \geq 0$, пографик f - это $P_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

Определение

$f \in C[a, b]$. $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

/__/__
 (o.o)
 > ^ <

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b - a)$
4. $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$, $(-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$,
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = - \int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma(P_f)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f$, $f_- = 0$
6. Если $f \geq 0$, $f \in C[a, b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a, b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:
 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]$
 $\int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \sigma\left([x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]\right) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Обозначение $P_g([\alpha, \beta]) := \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$

Доказательство

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b])) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Следствие

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b \text{ Тогда } \int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f \text{ (индукция)}$$

Теорема монотонность

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство

$$f_+ = \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}, \text{аналогично } f_- = \max\{0, -f\} \geq \max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+}), \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g$$

Следствия

1.

$$f \in C[a, b] \text{ Тогда } (b - a) \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Доказательство

$$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b - a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b - a)$$

2.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Теорема о среднем

$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

Доказательство:

$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение

Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним пределом

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int_a^x f$, $a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним пределом

$\Psi(x) := \int_x^b f$, $a \leq x \leq b$

Замечание:

1. $\Psi(x) = 0$

2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f$

Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$, $\Phi(x) := \int_a^x f$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство

$\Phi_+'(x) = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{1}{y - x} \int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f(c_y)$, $c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y \rightarrow x_+} f(c_y) = f(x)$

Если y_n убывает к x , то $c_{y_n} \rightarrow x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f(c_{y_n}) \rightarrow f(x)$

Для $\Phi_-'(x)$ аналогично

Следствие 1

$f \in C[a, b]$, $\Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$

Доказательство

$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -\Phi'(x) = -f(x)$

Следствие 2

$f \in C(a, b)$, тогда у f есть первообразная

Доказательство

Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x \geq c \\ -\Psi(x) & \text{при } x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C[a, b]$, F - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) := \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a$ $\int_a^b f := -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказательство

F, G - первообразная для f, g

$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$

$(\alpha F + \beta G)^{\wedge} = \alpha F^{\wedge} + \beta G^{\wedge} = \alpha f + \beta g$

$$\stackrel{\text{Н.Л}}{\Rightarrow} \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G \Big|_a^b = \alpha \cdot F \Big|_a^b + \beta G \Big|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Теорема формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b f g^{\wedge} = f g \Big|_a^b - \int_a^b f^{\wedge} g$

Доказательство

H - первообразная для $f^{\wedge} g \Rightarrow f g - H$ - первообразная для $f g^{\wedge}$

$$(f g - H)^{\wedge} = (f g)^{\wedge} - H^{\wedge} = f^{\wedge} g + f g^{\wedge} - f^{\wedge} g = f g^{\wedge}$$

$$\int f g^{\wedge} = (f g - H) \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - H \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - \int_a^b f^{\wedge} g$$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b] \varphi \in C^1[c, d], p, q \in [c, d]$

Тогда $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная $f, F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$(F(\varphi(t)))^{\wedge} = F^{\wedge}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)$$

$$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \Big|_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример

$$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4} \right) dt, \varphi(t) = t^2, \varphi'(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan|_{a^2}^{b^2}$$

Продолжение формулы интегрирования по частям

Пример

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2} - x) dx \mid \varphi(x) := y = \frac{\pi}{2} - x \mid =$$

$$- \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x + \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\cos x) dx &= - \left(\underbrace{\sin^{n-1} \cos|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x dx}_{1-\sin^2 x} \right) = (n-1) \\
1) \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) \\
W_n &= \frac{n-1}{n} W_{n-2} \\
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

Формула Валлиса

$$\lim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
\text{на } [0, \frac{\pi}{2}] \sin^{2n} &\geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} \\
W_{2n} &\geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2} \\
\frac{\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n)!!}{(2n)!!}} &\geq \frac{\pi \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\
\frac{\pi}{2} &\geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\
\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 &\cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
C_{2n}^n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!} \\
(2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n(n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\begin{aligned}
\text{Формула Валлиса } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$\begin{aligned}
f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle \\
\text{Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt}_{I:=}
\end{aligned}$$

Доказательство

Индукция по n

База $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

Переход $n \rightarrow n+1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt}_{I:=}$$

$I =$

$$u = f^{(n+1)}, u' = f^{(n+2)}, v = (x - t)^n, v' = -\frac{(x-t)^n}{n+1}$$

$$I = \int_{x_0}^x uv' - \int_{x_0}^x u' v = \underbrace{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x - t)^{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x}}_{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n+1} (x - t)^{(n+1)} dt$$

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t) (x - t)^{n+1} dt$$

Пример

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

Наблюдение: эта штука точно положительна, значит интегральчик точно положительный
Свойства:

$$1. 0 < H_j \leq \frac{1}{j!}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cos x dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}}{j!}$$

$$2. \text{ Если } c \in \mathbb{R}, \text{ то } c^j H_j \rightarrow 0, \text{ так как } 0 \leq |c^j H_j| \leq \frac{\left(|c| \frac{\pi^2}{4} \right)^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$3. H_0 = 1, H_1 = 2$$

$$4. H_j = (4j - 2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}, \text{ при } j \geq 2$$

$$\text{Доказательство: } j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

$$u = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j, v' = \cos x, u' = -2xj \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{(j-1)}, v = \sin x$$

$$\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x}_{\left| x=\frac{\pi}{2} \right.} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx$$

$$u = x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}, v' = \sin x, v = -\cos x, u' = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1)x^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2}$$

$$= x = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)_1^{j-1} = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1)$$

$$1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} + 2(j-1) \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}$$

подставляем в изначальный интеграл:

$$= 2j \left(x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \left(\frac{\pi^2}{4} \right) 2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = j!$$

$$j! H_j = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - 2j \frac{\pi^2}{4} 2(j-1)(j-2)! H_{j-2}$$

$$H_j = 2(2j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

Теорема Ламберта

π и π^2 - иррациональное число

Доказательство

От противного. Предположим, что $\pi^2 = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$

Проверим, что тогда $n^j H_j$ - целое число По индукции по j . База $j = 0, j = 1$ очевидный

Переход $j - 2, j - 1 \rightarrow j$

$$n^j H_j = \underbrace{(4j-2) \cdot n \cdot n^{j-1} H_j - 1 - \underbrace{n^2 \pi^2}_{=m^2 n} \underbrace{n^{j-2} H_{j-2}}_{\text{целое}}}_{\text{целое}} - \text{индукционное предположение}$$

Понимаем, что $n^j H_j$ - целое $n^j H_j > 0 \Rightarrow -n^j H_j \geq 1$, с другой стороны, если воспользуемся свойством номер 2 $n^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, противоречие :(

Интегральные суммы

Определение равномерно непрерывной функции

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание

f непрерывна во всех точках из E означает, что $\forall y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Примеры

1. \sin и \cos равномерно непрерывны на \mathbb{R} , $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит

2. $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывная на \mathbb{R}

Возьмем $\varepsilon = 1$: Проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = \left(x + \frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 = \frac{\delta^2}{4} > 1$

$$x^2 = x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4} > x \cdot \delta \text{ для } x = \frac{1}{\delta} \text{ все плохо}$$

$$f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) > 1$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$

Возьмем $\varepsilon = 1$ Проверим, что никакое $0 < \delta < 1$, $x = \frac{\delta}{2}$, $y = \delta$, $f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$

Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева с константой M , если $\forall x, y \in E |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Замечание

1. липшицевость \Rightarrow равномерно непрерывна (просто берем в качестве $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$)

2. Если $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f'| \leq M$ на (a, b) , то f липшицева с константой M и, в частности, равномерно непрерывна

Теорема Кантора

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

Доказательство

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Возьмем $\varepsilon > 0$, предположим, что никакое δ для него не подходит

$\delta = 1$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_1, y_1 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < 1$, но при этом $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_2, y_2 \in [a, b]$, такое что $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит \Rightarrow найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$, такие что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
 $y_n \in [a, b]$ ограничена, последовательность по Т. Б-В выберем подпоследовательность $y_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$

$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} + \lim(x_{n_k} - y_{n_k}) = c + 0 = c$

f непрерывна в c означает, что $\lim f(x_{n_k}) = f(c)$, аналогично $\lim f(y_{n_k}) = f(c)$, тогда перепад разности $\lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но с другой стороны $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$
противоречие, значит предположение не верно и какое-то δ подойдет

Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta), \delta > 0, \omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \wedge |x - y| \leq \delta\}$

Свойства

1. $\omega_f(0) = 0$ и $\omega_f(\delta) \geq 0$

2. ω_f нестрого возрастает

3. $\omega_f(|x - y|) \geq |f(x) - f(y)|$

4. Если f липшицева с константой M , то $\omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot \delta$

5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$

Доказательство:

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, тогда если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, тогда $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\}$

Следовательно, при $0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} 0 \leq \omega_f(t) \leq \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega_f(t) = 0$

$\Leftarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ по $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \varepsilon$

$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$ (если $|x - y| < \delta$) $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна

6. Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывна, то $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ Доказательство: Кантора и свойство 5

Определение Дробление отрезка (разбиение, пунктир)

Такой набор точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Будем обозначать $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Мелкость (ранг) дробления

$|\tau| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ - длина самого большого отрезка из нарезки

Оснащение дробления - набор точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такое что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Определение Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τ - его дробление, ξ - оснащение этого дробления $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема об интегральной сумме

$f \in C[a, b]$, тогда $\Delta := \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b-a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство

$$\int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f_t - f(\xi_k)) dt$$

$$\Delta \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dt = \int_a^b \omega_f(|\tau|) dt = \omega_f(|\tau|)(b-a)$$

$$|t - \xi_k| \leq x_k - x_{k-1} \leq |\tau| \Rightarrow |f(t) - f(\xi_k)| \leq \omega_f(|\tau|)$$

Следствие

$f \in C[a, b]$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и \forall его оснащения $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

Следствие

$f \in C[a, b]$ и τ_n - последовательность дроблений, такая что τ_n стремиться к 0

Тогда $\forall \xi_n$ - оснащение дроблений τ_n $S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$

Пример

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ - непрерывная функция

дробление $[0, 1]$ на равные отрезки $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\left(\frac{k}{n}\right)^p} \overbrace{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^p = \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

$$\text{Вывод } S_p(n) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и $I \in \mathbb{R}$ ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0 :$

$\exists \delta > 0 : \forall \tau$ - дробления $[a, b]$ и мелкости $< \delta$ и \forall его оснащения $\xi : |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$

Замечание

Если $f \in C[a, b]$, то она интегрируема по Риману

Лемма

$f \in C^2[\alpha, \beta]$, тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f - (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2} = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot (\beta - x)(x - \alpha) dx$

Доказательство

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)(x - \gamma) dx = f(x)(x - \gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \gamma) dx$$

$$f(x)(x-\gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \cdot (\beta-\alpha)$$

$$\Delta | y = f^{\wedge}, v = \frac{1}{2}(\beta-x)(x-\alpha), v = \frac{1}{2}(-\alpha\beta + (\alpha+\beta)x - x^2), v^{\wedge} = -x + \frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma - x | =$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} f^{\wedge}(x)(x-\gamma)dx = \underbrace{\frac{1}{2}f^{\wedge}(x)(\beta-x)(x-\alpha)}_{=0} \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^{\wedge}(x)(\beta-x)(x-\alpha)dx$$

Теорема оценка погрешности в форме трапеций

$f \in C^2[a, b]$ t - дробление отрезка $[a, b]$. Тогда $\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right| \leq \frac{1}{8} \cdot |\tau|^2 \cdot \int_a^b |f^{\wedge}|$

Доказательство

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{\wedge}(x)(x_k - x)(x - x_{k-1})dx$$

$$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |f^{\wedge}(x_k)(x_k - x)(x - x_{k-1})| dx \leq \frac{|\tau|^2}{8} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f^{\wedge}| = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f^{\wedge}|$$

$$(x_k - x)(x - x_{k-1}) \leq \left(\frac{(x_k - x) + (x - x_{k-1})}{2} \right)^2 = \left(\frac{(x_k - x_{k-1})}{2} \right)^2 \leq \frac{|\tau|}{4}$$

Замечание

- Если дробление на равные отрезки, тогда $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ ($x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$) и сумма площадей трапеций $= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{2} \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^n f(x_k) \right)$ и в этом случае теорема дает $|\Delta| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f^{\wedge}| = O(\frac{1}{n^2})$
- Как выглядит сумма Римана с равноотстоящими узлами и оснащением в правых концах
 $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$
если $|f^{\wedge}| \leq M, \omega_f(\delta) \leq M\delta$
 $\left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| \leq (b-a)\omega_f(\frac{b-a}{n}) \leq \frac{M(b-a)^2}{n} = O(\frac{1}{n})$

Теорема (формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f \in C^2(m, n), m, n \in \mathbb{Z}, \sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f + \frac{1}{2} \int_m^n f^{\wedge}(t)\{t\}(1 - \{t\})dt$

Доказательство

1.

$$\int_{k-1}^k f = \frac{f(k) + f(k-1)}{2} - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k f^{\wedge}(t)(k-t)(1-(k-1))dt = \frac{f(k) + f(k-1)}{2} - \frac{1}{2} \int_{k-1}^k f^{\wedge}(t)\{t\}(1-\{t\})dt$$

$$\underbrace{\sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f}_{\int_m^n f} = \underbrace{\sum_{k=m+1}^n \frac{f(k) + f(k-1)}{2}}_{= \sum_{k=m}^n f(k) - \frac{f(m) + f(n)}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f^{\wedge}(t)\{t\}(1-\{t\})dt}_{= \int_m^n f^{\wedge}(t)\{t\}(1-\{t\})dt}$$

Примеры

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p > -1$$

$$f(x) = x^p, m = 1, f^{\wedge}(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$$S_p(n) = \frac{1^p + n^p}{2} + \underbrace{\int_1^n x^p dx}_{= \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_1^n = \frac{n^{p+1}-1}{p+1}} + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$$

$$\left| \frac{S_p(n)}{p \Big| n^{p-1}-1 \Big|} - \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{n^p}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p+1} \right| \leq \frac{|p||p-1|}{2} \int_1^n x^{p-2} \overbrace{\{x\}(1-\{x\})}^{\leq \frac{1}{2}} dx \leq \frac{|p||p-1|}{8} \int_1^n x^{p-1} dx =$$

$$p+1 \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$$

Случай $p \in (-1, 1)$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Случай $p > 1$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$$

2.

Гармонические числа

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, m = 1, f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$H_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{\ln x \mid_1^n = \ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{a_n :=} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$$

$$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{>0} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

Проверим ограниченность $a_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \mid_{x=1}^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leq \frac{1}{8}$. значит ашки ограничены и существует предел

$$a = \lim a_n \leq \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$$

$$\frac{1}{2} + a = \gamma - \text{постоянная эйлера}$$

Упражнение

Доказать, что $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (указание $\int_1^n = \int_1^{+\infty} - \int_n^{+\infty}$)

3. Формула Стирлинга

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$$

$$f(x) = \ln x, m = 1, f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\ln n! = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx - \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx}_{b_n :=}$$

$$\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1$$

$b_{n+1} > b_n$ и $0 < b_n < \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{4x} \mid_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$, тогда существует предел $\lim b_n =: b$ и $b_n = b + o(1)$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1)} = n^n e^n \sqrt{n} C(1 + o(1)) \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

Найдем C

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{C^2 \sqrt{n} \sqrt{n}}$$

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \Rightarrow C \equiv \frac{2^{2n} \sqrt{n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$$

Формула Стирлинга $n! \equiv n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Упражнение

Доказать, что $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(\frac{1}{n}))$

Несобственные интегралы

Определение

$$-\infty < a < b \leq +\infty, f \in C[a, b)$$

Если существует $\lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f$, то он называется несобственным интегралом $\int_a^{\rightarrow b} f$

Определение

аналогично для предела справа

Определение

Несобственный интеграл $\int_{-a}^b f$ или $\int_a^{-\infty} f$ называется сходящимся, если соответствующий предел существует и конечен, в противном случае расходящийся

Замечание

Если $f \in C[a, b]$, то $\int_a^{-\infty} f = \int_a^b f$
 $\left| \int_a^b f - \int_a^B f \right| = \left| \int_B^b f \right| \leq \int_B^b |f| \leq \int_B^b M = (b - B) \cdot M \xrightarrow[B \rightarrow b^-]{} 0$

Примеры 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = 0 \text{ при } p > 1 \text{ и } -\infty \text{ при } p < 1$$

$$\text{Если } p \neq 1, \text{ то } \int_1^y \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{p-1} \Big|_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)y^{p-1}}$$

То есть интеграл сходится при $p > 1$ и равен $\frac{1}{p-1}$ и расходится при $p < 1$

$$\text{Если } p = 1 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y \rightarrow 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \stackrel{p \neq 1}{=} \frac{1}{1-p} - \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{(1-p)y^{p-1}} \text{ этот предел } = 0 \text{ при } p < 1 \text{ и } -\infty \text{ при } p > 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y \rightarrow 0+} \ln x \Big|_y^1 = -\lim_{y \rightarrow 0+} \ln y = +\infty$$

при $p < 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{1-p}$

при $p \geq 1$ интеграл расходится и равен $+\infty$

Критерий Коши

$f \in C[a, b]$ и следующие условия равносильны:

1. $\int_a^{-\infty} f$ сходится
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists c \in (a, b) : \forall A, B \in (c, b) \left| \int_A^B f \right| < \varepsilon$

Симметрично для нижнего

Доказательство

$$F(y) := \int_a^y f$$

$\int_a^{-\infty} f$ - сходится $\Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow b^-} F(y)$ существует и конечен \Leftrightarrow (критерий Коши для F)

$$b = +\infty \forall \varepsilon > 0 : \exists E : \forall A, B > E \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon, F(B) - F(A) = \int_A^B f$$

$$b < +\infty \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A, B \in (b - \delta, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon$$

В первом случае c это E , во втором $b - \delta$ это c

Замечание

$\int_a^b f$ сходится \Leftrightarrow существует $\lim_{B \rightarrow b^-} F(B) - F(a)$, где F - первообразная f и $\int_a^{-\infty} f =$

$$\lim_{B \rightarrow b^-} F(B) - F(a)$$

$$\int_a^{-\infty} f = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f = \lim_{B \rightarrow b^-} (F(B) - F(a))$$

Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность $f \in C[a, b], c \in (a, b)$ Тогда $\int_a^{-\infty} f$ - сходится $\Leftrightarrow \int_c^{-\infty} f$ сходится и в этом

случае есть формула $\int_a^{-\infty} f = \int_a^c f + \int_c^{-\infty} f$

Доказательство F - первообразная f . Тогда $\int_a^{-\infty} f$ сходится \Leftrightarrow существует конечный

$\lim_{B \rightarrow b^-} F(B) \Leftrightarrow \int_c^{-\infty} f$ - сходится.

$$\int_a^{-\infty} f = \lim_{B \rightarrow b^-} F(B) - F(a) = \lim_{B \rightarrow b^-} F(B) - F(c) + (F(c) - F(a))$$

2. Если $\int_a^{-\infty} f$ сходится, то $\lim_{y \rightarrow b^-} \int_y^{-\infty} f = 0$

Доказательство $\int_a^{-\infty} f = \int_1^y + \int_y^{-\infty} f$

3. Линейность $f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^{-\infty} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{-\infty} f + \beta \int_a^{-\infty} g$

Доказательство F, G - первообразные f, g

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{y \rightarrow b^-} F(y) - F(a) \text{ и } \int_a^{\rightarrow b} g = \lim_{y \rightarrow b^-} G(y) - G(a)$$

$$\alpha \int_a^{\rightarrow b} f + \beta \int_a^{\rightarrow b} g = \lim_{y \rightarrow b^-} (\alpha F(y) + \beta G(y)) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) = \int_a^{\rightarrow b} (\alpha f + \beta g)$$

Замечание

Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ сходится, а $\int_a^{\rightarrow b} g$ расходится, то $\int_a^{\rightarrow b} (f + g)$ расходится, от противного $g = (f + g) - f$

Монотонность

$f, g \in C[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$ если эти несобственные интегралы определены

Доказательство

$\int_a^y f \leq \int_a^y g$ при $a < y < b$

$\int_a^b f \leq \int_a^b g$ и предельный переход в неравенстве

Формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b]$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f g' = fg \Big|_a^b - \int_a^{\rightarrow b} f' g$

(если существуют 2 из трех пределов, то существует третий и верно равенство)

Доказательство

$\int_a^y f g' = fg \Big|_a^y - \int_a^y f' g$ при $a < y < b$

Теорема (формула замены переменной в несобственном интеграле)

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], \varphi \in C^1[\alpha, \beta], f \in C[a, b], c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta^-} \varphi(\gamma)$

Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$ (если один из двух интегралов существует, то существует второй и они равны)

Доказательство

$F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx, \Phi(\gamma) := \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

Простой случай (1 существует)

то есть существует $\lim_{y \rightarrow c^-} F(y)$

Возьмем γ_n возрастает к β , $\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c^-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

$\varphi(\gamma_n) \rightarrow c$ из определения по Гейне (x)

$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c^-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

то есть поняли, что $\lim_{\gamma \rightarrow \beta^-} \Phi(\gamma)$ существует и равен $\int_{\varphi(x)}^c f(x) dx$

Сложный случай (2 существует)

то есть $\lim_{\gamma \rightarrow \beta^-} \Phi(\gamma)$

Если $c < b$, то тогда существует и 1. т.к. f непрерывна на $[\varphi(\alpha), c]$

Можно считать, что $c = b$

Возьмем какую-нибудь последовательность b_n возрастающую и стремящуюся к b

Хотим доказать, что $\lim F(b_n)$ существует

между b_n и b есть значения φ в некоторых точках $\varphi(\beta_n)$

$\varphi(\alpha) < b_n \varphi(\beta_n) \Rightarrow \varphi$ принимает значение b_n в некоторых точках, лежащей между α и β_n

назовем это точку γ_n

$b_n = \varphi(\gamma_n), F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$

Осталось проверить, что $\gamma_n \rightarrow \beta$ От противного. Пусть нет стремления (это апатия) возьмем

подпоследовательность $\gamma_{n_k} \rightarrow \beta_* < \beta \Rightarrow \varphi(\gamma_{n_k}) \rightarrow \varphi(\beta_*)$, так как φ непрерывна в β_* , но $\varphi(\gamma_{n_k}) = b_{n_k} \rightarrow b$, но $\varphi(\beta_*) < b$ противоречие
 $F(b_n) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow 2$

Замечание

$a < b < +\infty, f \in C[a, b)$

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\varphi(t) = b - \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = b$$

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\right) = 0$$

$$\int_a^b f(x) = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

Рассмотрим случай, когда $f \geq 0$.

Тогда $F(y) := \int_a^y f(x)dx$ - возрастающая функция

Если $y < z$, то $F(z) = \int_a^z f = \int_a^y f + \int_y^z f = F(y) + \underbrace{\int_y^z f}_{\geq 0}$

то есть мы поняли, что если $f \in C[a, b)$ и $f \geq 0$, то $\int_a^b f$ всегда существует (но возможно $+\infty$)

Теорема

$f \in C[a, b)$ и $f \geq 0, F(y) := \int_a^y f$

Тогда $\int_a^b f$ - сходится $\Leftrightarrow F$ ограничена (сверху)

Доказательство

$\Rightarrow \int_a^b f$ - сходится $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f = \lim_{y \rightarrow b^-} F(y)$

но $\lim_{y \rightarrow b^-} F(y) = \sup_{y \in [a, b)} F(y) \Rightarrow F$ ограничена сверху

$\Leftarrow F$ ограничена и возрастает $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{y \rightarrow b^-} F(y)$, но это и есть $\int_a^b f$

Следствие (признак сравнения)

$0 \leq f \leq g, f, g \in C[a, b)$

Тогда

1. если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ тоже сходится,

2. если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ тоже расходится

Доказательство

1) Пусть $F(y) := \int_a^y f, G(y) := \int_a^y g \Rightarrow F \leq G$ во всех точках

$\int_a^b g$ - сходится $\Leftrightarrow G$ - ограничена сверху $\Rightarrow F$ - ограничена сверху $\Leftrightarrow \int_a^b f$ - сходится

2) от противного $\int_a^b g$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится от противного

Замечание 1

Достаточно выполнения неравенства $0 \leq f \leq g$ лишь в некоторой окрестности точки b

Замечание 2

неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = O(g)$, то есть $f \leq C \cdot g$

Замечание 3

Если $f \geq 0$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ - сходится

Следствие

$f, g \in C[a, b), f, g \geq 0$ Если $f \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} g$, то $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково (то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся)

Доказательство

$f \equiv g \Rightarrow f = \varphi \cdot g, \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \varphi(x) < 2$ в некоторой окрестности точки $b \Rightarrow$ в этой окрестности $f \leq 2g$ и $g \leq 2f$ и признак сравнения

Замечание

$f \geq 0$ и $\int_1^{+\infty} f$ - сходится $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Определение

$f \in C[a, b]$ интеграл $\int_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится

Теорема

$f \in C[a, b]$. Если $\int_a^b f$ абсолютно сходится, то он сходится

Доказательство

$f_+ = \max\{f, 0\}, f_- = \max\{-f, 0\}, f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$

В частности $0 \leq f_\pm \leq |f|$

из признака сравнение $\int_a^b f_\pm$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b (f_+ - f_-)$ сходится

Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$

Тогда если:

1. $\int_a^b f =: F(y)$ - ограниченная функция
2. g - монотонная функция
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Если эти три условия выполнены, то тогда интеграл $\int_a^{+\infty} fg$ - сходящийся

Доказательство

Доказательство для случая $g \in C^1[1; +\infty)$

$$\int_a^y fg = \int_a^y F' g = Fg|_a^y - \int_a^y F' g$$

Надо доказать, что $\int_a^y fg$ имеет конечный предел при $y \rightarrow +\infty$

$$Fg|_a^y = F(y)g(y) - \underbrace{F(a)g(a)}_{=0} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} 0 \quad F \text{ - ограниченная } g \text{ - бесконечно малая} \Rightarrow Fg$$

бесконечно малая

Осталось понять, что существует конечный $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y F' g$, то есть $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} F' g$ сходится

проверим, абсолютную сходимость $\int_a^{+\infty} |F' g|$, F - ограниченная функция $\Rightarrow |F| \leq M$

$\int_a^y |F' g| \leq M \int_a^y |g|, g$ монотонная $\Rightarrow g$ знакопостоянна, тогда получается, что $M \int_a^y |g| =$

$$M \int_a^y |g| = M|g(y) - g(a)| \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} M|g(a)|$$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} M|g|$ - сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |F' g|$ - сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} F' g$ - сходится

Признак Абеля

$f, g \in C[a, +\infty)$

Тогда если

1. $\int_a^{+\infty} f$ сходится,
2. g монотонная,
3. g ограничена

то $\int_a^{+\infty} fg$ - сходится

Доказательство

g монотона и ограничена, значит есть конечный предел $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) =: l \in \mathbb{R}$

$$\frac{g(y)}{g(y)} := g(y) - l \text{ - монотонна и } \underset{y \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$F(y) := \int_a^y f$ имеет конечный предел при $y \rightarrow +\infty$

\Rightarrow при $y > y_*$ $F(y)$ близко к этому \lim и, в частности, ограничена на $[a, y_*]$ F ограничена, так как это непрерывная функция, значит F - ограничена

то есть функции f и \bar{g} подходят под условия принципа Дирихле $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \bar{g}$ - сходится

$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} f(\bar{g} + l) = l \int_a^{+\infty} f + \int_a^{+\infty} f \bar{g}$ - первое сходится по условия, второе доказали, что сходится

Замечание

пусть f непрерывна с периодом T

$$\text{Тогда } \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$$

Доказательство

$$\int_b^{b+T} f(t) dt = \int_b^{b+T, =s} f \left(\underbrace{t+T}_{=s} \right) dt = \int_{b+T}^{b+2T} f(s) ds$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f &= \int_a^b f + \int_b^{a+T} f = \int_a^{b+T} f + \int_b^{a+T} f = \int_b^{b+T} f \\ \int_a^b f &= \int_a^b f(t+T) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(s) ds \end{aligned}$$

Замечание

f непрерывна и периодична $\Rightarrow f$ ограничена

T - периодична \Rightarrow все свои значения f принимает на отрезке $[0, T]$, а там она ограничена по т. Вейерштрасса

Следствие пр. Дирихле

$f \in C[a, +\infty)$, периодична с периодом T , $g \in C[a, +\infty)$ монотонна и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Тогда

1. если $\int_a^{+\infty} |g|$ сходится, то $\int_a^{+\infty} |fg|$ сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} g$ - расходится, то $\int_a^{+\infty} fg$ - расходится $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0$

Доказательство

1) f непрерывна и периодична \Rightarrow ограничена $\Rightarrow |f| \leq M \Rightarrow |fg| \leq M|g|$ и пр. сравнения

2) $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0 \Rightarrow F(y) := \int_a^y f$ - периодична

$$F(y+T) = \int_a^{y+T} f = \int_a^y f + \underbrace{\int_y^{y+T} f}_{=0} = \int_a^y f = F(y) \Rightarrow F$$

ограничена

все условия принципа Дирихле выполнены $\Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$ сходятся

\Rightarrow

От противного пусть $K := \int_a^{a+T} f \neq 0$

$\bar{f}(x) := f(x) - \frac{K}{T}$ - периодична

$\int_a^{a+T} \bar{f} = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \bar{f} g$ - сходится

$$\int_a^{+\infty} fg = \underbrace{\int_a^{+\infty} \bar{f} g}_{\text{сходится}} + \frac{K}{T} \underbrace{\int_a^{+\infty} g}_{\text{расходится}}$$

Пример

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

1. $p > 1$ $\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится $\Rightarrow (*)$ сходится

2. $0 < p \leq 1$ $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, $\frac{1}{x^p}$ монотонно убывает и стремится к 0, тогда второе следствие говорит, что интеграл сходящийся
 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4 \frac{1}{x^p}$ монотонно убывает и стремится к 0 и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - расходится
3. $p \leq 0$ нет сходимости
 $\int_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$ - противоречит критерию Коши

Анализ в метрических пространствах

Метрические нормированные пространства

Определение

X - множество $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

ρ называется метрикой (расстоянием) если выполняются три свойства:

1. $\rho(x, y) \geq 0 \wedge \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y$
3. Неравенство треугольника $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in X$

Определение

Метрическое пространство (X, ρ) , X - множество, ρ - метрика

Примеры

1. $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$
2. $X = \mathbb{R}^2, \rho(x, y)$ - обычное расстояние
3. Дисерктная метрика (метрика лентяя) X - произвольная $\rho(x, y) = (x == y)? 0 : 1$
4. $\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}\}, \rho(x, y) := (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_d - y_d|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$
 неравенство Δ - неравенство Минковского
 Частные случаи $d = 2, p = 2$ - стандартное расстояние на плоскости
 $d = 2, p = 1, \rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ - Манхэттенская метрика
5. $X = C[a, b]$ - равномерная метрика $\rho(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$
6. $X = C[a, b], \rho(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
7. Метрика Хенминга $a := a_1, a_2, \dots, a_n, b := b_1, b_2, \dots, b_n$ - наборы букв, $\rho(a, b)$ = количество позиций, в которых эти наборы отличаются ($a_i \neq b_i$)

Определение

(X, ρ) - метрическое пространство, $a \in X, r > 0$

Открытый шар с центром в точке a и радиусом r называется $B_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$

Определение

Замкнутый шар тоже самое, только \leq , обозначается $\overline{B}_r(a)$

Свойства

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. $B_{r_1}(a) \cup B_{r_2}(a) = B_{\max\{r_1, r_2\}}(a)$
3. Если $a \neq b$, то найдется такой $r > 0$ для которого $\overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_r(b) = \emptyset$
 Доказательство: $r := \frac{1}{3} \rho(\frac{1}{3})$. От противного, пусть пересекаются. Пусть $x \in B_r(a) \cup B_r(b)$, тогда $\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) \leq r + r = \frac{2}{3} \rho(a, b)$. Противоречие

Определение

(X, ρ) - метрическое пространство, $A \subset X$, множество A назовем открытым, если $\forall a \in A \exists r > 0$, такой что $B_r(a) \subset A$

Теорема (свойства открытых множеств)

1. пустое и все X - открытые множества
2. Объединение любого количества открытых множеств - открытое множество
3. аналогично с пересечением
4. Открытый шар это открытое множество

Доказательство

1. Очевидно
2. Пусть U_α - открытые множества $\alpha \in I$. $U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ надо доказать, что U - открытое. Возьмем $a \in U$. Тогда $a \in U_{\alpha_0}$ для некоторого α_0 . U_{α_0} - открытое \Rightarrow найдется $r > 0$ для которого $B_r(a) \subset U_{\alpha_0}$. $B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset U$
3. U_1, U_2, \dots, U_n - открытые множества $U := \bigcap_{k=1}^n U_k$. Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_k \forall k$. U_k - открытое \Rightarrow найдется $r_k > 0$, для которого $B_{r_k}(a) \subset U_k$
 $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \Rightarrow B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset U_k \Rightarrow B_r(a) \subset U$
4. $B_R(a)$ - открытое множество. Возьмем $b \in B_R(a)$
 $\rho(a, b) < R$ положим $r := R - \rho(a, b)$ и проверим, что шарик $B_r(b) \subset B_R(a)$ возьмем $x \in B_r(b) \Rightarrow \rho(x, b) < r$
Тогда $\rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(b, a) < r + \rho(b, a) = R$

Замечание

Пересечения бесконечного числа открытых множеств не обязательно открытое.

Контрпример $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$. $U_n = (-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_n = [-1, 1]$ - не открытое множество

Определение

(X, ρ) - метрическое пространство $A \subset X$, $a \in A$
 a - внутренняя точка множества A , если найдется $r > 0$, такое что $B_r(a) \subset A$

Замечание

Множество открытое = все его точки внутренние

Определение

Внутренность множества - это все его внутренние точки. Обозначается $\text{Int } A$
(альтернативное A°)

Пример

$\text{Int } [-1, 1] = (-1, 1)$

Свойства внутренности множества

1. $\text{Int } A \subset A$
2. $\text{Int } A$ - объединение всех открытых множеств, содержащихся в A .

Доказательство U_α - всевозможные множества $\subset A$

$U := \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ надо доказать, что $U = \text{Int } A$

“ \subset ” Возьмем $a \in U \Rightarrow a \in U_{\alpha_0}$ для некоторого α_0 , U_{α_0} - открытое, тогда найдется $B_r(a) \subset U_{\alpha_0} \subset A \Rightarrow a$ - внутренняя точка, то есть $a \in \text{Int } A$

“ \supset ” Возьмем $a \in \text{Int } A \Rightarrow a$ внутренняя точка \Rightarrow найдется $r > 0$, такой что $B_r(a) \subset A$, но

$B_r(a)$ - открытое множество $\Rightarrow B_r(a)$ есть среди тех множество, которые мы объединяем
 $\Rightarrow a \in B_{r(a)} \subset U$

3. $\text{Int } A$ - открытое множество.

Доказательство: из 2 $\text{Int } A$ - объединение открытых множеств, что по теореме открытое множество

4. A - открытое $\Leftrightarrow \text{Int } A = A$

\Leftarrow из 3.

\Rightarrow Если A открыто, тогда по пункту 2 среди объединений будет и $A \Rightarrow \text{Int } A \subset A$

5. $A \in B \Rightarrow \text{Int } A \subset \text{Int } B$

Доказательство

внутренняя точка множества A является внутренней точкой множества B

6. $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$

Доказательство $3 + 4 \Rightarrow 6$

Упражнение

1. Доказать, что $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

2. Доказать, что $\text{Int}(A \cup B) \neq \text{Int } A \cup \text{Int } B$

Определение

x

A - замкнутое множество, если A - открытое

Теорема (свойства замкнутых множеств)

1. \emptyset, X - замкнутое

2. Пересечение любого количества замкнутых - замкнуто

3. Объединение конечного количества замкнутых - замкнуто

4. Замкнутый шар - замкнутое множество

Доказательство

1. очев

2. Есть A_α - замкнутые. $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha =: A$

$X \setminus A = X \setminus \cap_{\alpha \in I} A_\alpha = \cup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$ - открытое $\Rightarrow A$ - замкнуто

3. $A_1, A_2, \dots, A_n, A := \bigcap_{k=1}^n A_k = A_k$

$X \setminus A = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n X \setminus A_k$ - открытое $\Rightarrow A$ - замкнутое

4. $\overline{B}_R(a)$ - замкнутое множество, то есть $\underbrace{X \setminus \overline{B}_R(a)}_{=\{x \in X : \rho(a, x) > R\}}$ - открытое

Возьмем b , такой что $\rho(a, b) > R$, надо доказать, что найдется $r > 0$, такой что $B_r(b) \subset X \setminus \overline{B}_R(a)$

$r := \rho(a, b) - R > 0$, проверим, что подходит

Хотим доказать, что $B_r(b) \cap \overline{B}_R = \emptyset$. От противного, возьмем $x \in B_r(b) \cap \overline{B}_R(a)$

$\rho(x, b) < r \wedge \rho(a, x) \leq R$

$\Rightarrow \rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) < R + r = R + (\rho(a, b) - R) = \rho(a, b)$ противоречие

Замечание

Объединение бесконечного количества замкнутых множеств может не быть замкнутым

Пример: $X = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y|$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1)$ не является замкнутым

Определение

Замыкание множества A

пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Обозначает $\text{Cl } A$ альтернатива (\bar{A})

Теорема

$$X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A), X \setminus \text{Int } A = \text{Cl } (X \setminus A)$$

Доказательство

" \subset " $\text{Cl } A = \bigcap_{F - \text{замкнутое}, F \supseteq A} F$, тогда $X \setminus \text{Cl } A = \bigcup_{F - \text{замкнутое}, F \supseteq G} = \bigcup_{G - \text{открытое}, G \subset X \setminus A} G = \text{Int}(X \setminus A)$

Свойства

1. $\text{Cl } A$ - замкнутое множество

Доказательство пересечение замкнутых замкнуто

2. $\text{Cl } A \supseteq A$

Доказательство: так как перечекаем множества, содержащие A

3. A - замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A$.

Доказательство: " \Leftarrow " свойство 1

" \Rightarrow " A - замкнуто \Rightarrow множества, которые пересекаем есть $A \Rightarrow \text{Cl } A \subset A \stackrel{\text{св. 2}}{\Rightarrow} \text{Cl } A = A$

4. $A \subset B \Rightarrow \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

$A \subset B \Rightarrow X \setminus A \supset X \setminus B \Rightarrow \text{Int}(X \setminus A) \supset \text{Int}(X \setminus B) \Rightarrow (X \setminus \text{Int}(X \setminus A)) \subset (X \setminus \text{Int}(X \setminus B))$

5. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$. Доказательство 1 + 3 \Rightarrow 5

Упражнения

1. $\text{Cl } (A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

2. для пересечений неверно

3. $A, \text{Int } A, \text{Cl } A, \text{Cl Int } A, \text{Int Cl } A, \text{Int Cl Int } A \dots$ какое наибольшее количество различных множества может получиться?

Теорема

$$a \in \text{Cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(a) \cap A \neq \emptyset$$

Доказательство

$$\text{Cl } A = X$$

$\text{Int}(X \setminus A), a \in \text{Cl } A \Leftrightarrow a \notin \text{Int}(X \setminus A) \Leftrightarrow$ какой бы ни взять $r > 0 B_r(a) \not\subset X \setminus A$, то есть $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$

Определение

(X, ρ) - метрические пространство. $a \in X$, окрестность точки a назовем шарик $B_r(a)$ для некоторого $r > 0$

Определение

$$\text{Проколотая окрестность } \mathring{U}_a := U_a \setminus \{a\} = B_r(a) \setminus \{a\}$$

Определение

a - предельная точка множества A

Если в любой проколотой окрестности точки a есть точки множества A . Обозначение A' множества всех предельных точек A

Теорема

A - множество. Следующие условия равносильны

1. $a \in A^\circ$
2. $\forall r > 0$ в шарике $B_r(a)$ содержится бесконечное количество точек множества A
3. Существует такая последовательность различных точек $x_n \in A$, что $\rho(r_n, a) \rightarrow 0$
4. Существует такая последовательность точек $x_n \in A$, что $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$ и строго убывает

Доказательство

“4 \Rightarrow 3” очевидно

“3 \Rightarrow 2” возьмем $r > 0 \Rightarrow$ при больших $n : \rho(x_n, a) < r \Rightarrow x_n \in B_r(a)$ при больших n

“2 \Rightarrow 1” В $B_r(a) \cap A$ - бесконечное количество точек.

$$\overset{\circ}{B}_r(a) \cap A = (B_r(a) \cap A)$$

В $\{a\}$ - бесконечное количество точек $\Rightarrow \overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a$ – предельная точка множества A “1 \Rightarrow 4” Возьмем $r_1 = 1$, тогда $\overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ найдется

$x_1 \in A$ и $0 < \rho(a, x_1) < 1$

Возьмем $r_2 := \frac{\rho(a, x_1)}{2} < \frac{1}{2}, \overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ найдется $x_2 \in A$ и $0 < \rho(a, x_2) < \rho(a, x_1)$

Возьмем $r_3 := \frac{\rho(a, x_2)}{2} < \frac{1}{4} \dots$

и так далее

В итоге получается, что $\rho(a, x_k) < \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim \rho(a, x_k) \rightarrow 0$

Свойства предельных точек

1. $\text{Cl } A = A \cup A^\circ$
2. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$
3. A - замкнуто $\Leftrightarrow A^\circ \subset A$

Доказательство

1. $A \in \text{Cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(a) \cap A \neq \emptyset$ Возможны два варианта:

1. $a \in A$
2. $a \notin A$ и $\overset{\circ}{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$

2. Очевидно

3. A - замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{Cl } A \Leftrightarrow A = A \cup A^\circ \Leftrightarrow A^\circ \subset A$