SPb HSE, 1 курс ПМИ, осень 2025/26

Билеты для экзамена по математическому анализу

По лекциям Александра Игоревича Храброва

TEX конспекты Кирилл Болохов

Сборка Пётр Антропович

Собрано 21 января 2026 г.

Содержание

Билет 38. Непрерывность слева и справа. Арифметические действия с непрерывными функциями. Непрерывность многочленов и рациональных функций.

Теорема : Арифметические действия с непрерывными функциями

$a \in E$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a. Тогда функции:

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. $|f|$
4. $\frac{f}{g}$ (при условии $g(a) \neq 0$)

также непрерывны в точке a.

Доказательство. 1. Если a — изолированная точка множества E, то все функции, заданные на E, непрерывны в точке a по определению.
2. Если a — предельная точка, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Далее применяем теорему об арифметических действиях с пределами. ■

Следствие : Непрерывность элементарных функций

1. Многочлены непрерывны на $\mathbb{R}$.
2. Рациональные функции (отношение двух многочленов) непрерывны во всех точках, где знаменатель не равен нулю.

Доказательство. $f(x) = c$ и $g(x) = x$ непрерывны. Многочлены получаются из них конечным числом операций сложения и умножения. Рациональные функции — делением. Из теоремы выше следует их непрерывность. ■

Билет 39. Теорема о пределе композиции. Теорема о непрерывности композиции. Пример, показывающий важность непрерывности.

Теорема : О пределе композиции

$f : D \to E$, a — предельная точка D, и $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. $g : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке b.
Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

Доказательство. Используем определение предела по Гейне. Возьмем $x_n \in D, x_n \neq a$, т.ч. $\lim x_n = a$. Из $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \lim f(x_n) = b$. Из непрерывности g в точке b, по Гейне $\lim g(f(x_n)) = g(b)$. ■

Следствие : О непрерывности композиции

Пусть $f : D \to E, g : E \to \mathbb{R}, a \in D$. f непрерывна в точке a и g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Доказательство. В теорему о пределе композиции $b = f(a)$ ∎

Пример : показывающий важность непрерывности

$a = 0$

$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, при $x \neq 0$; $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

$b = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

$g(f(x))$ не имеет предела в 0

$x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0 \quad f(x_n) = \frac{1}{\pi x} \cdot \sin(\pi n) = 0$

$g(f(x_n)) = g(0) = 0 \to 0$

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0 \quad f(y_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \cdot \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$

$g(f(y_n)) = g(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}) = 1 \to 1$

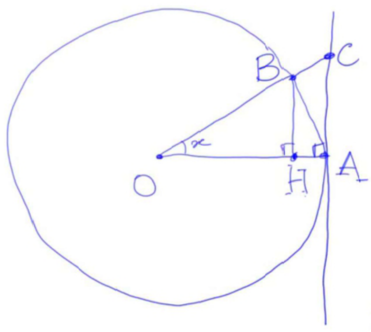
Билет 40. Неравенства между синусом и аргументом. Непрерывность тригонометрических функций. Предел $\lim \frac{\sin x}{x}$

Теорема : Неравенства между синусом и аргументом

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Д-во:

единичная окр-ть



$\sin x = BH$

$\operatorname{tg} x = CA$

$\triangle BOA \subset$ сектор $BOA \subset$

$\subset \triangle COA$

$\underset{\frac{1}{2}\sin x}{\underset{\parallel}{S_{\triangle BOA}}} < \underset{\frac{x}{2}}{\underset{\parallel}{S_{\text{сектор } BOA}}} < \underset{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x}{\underset{\parallel}{S_{\triangle COA}}}$

Следствие : Свойства

1. $|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ и равенство только при $x = 0$
2. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ и равенство только при $x = y$
3. $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$ и равенство только при $x = y$

Доказательство. 1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, т.к. функции четные $\Rightarrow |\sin x| \leqslant |x|$ и равенство только при $x = 0$
Если $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$, то все очевидно: $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$
2. $|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x+y}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$. ■

Теорема : Непрерывность тригонометрических функций

1. sin и cos непрерывны на $\mathbb{R}$
2. tg и ctg непрерывны на своей области определения

Доказательство. 1. Возьмем $a \in \mathbb{R}$ и покажем, что sin непрерывен в точке a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ и } |x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

Заметим, что $\delta = \varepsilon$ подходит $|\sin x - \sin a| \leqslant |x - a| < \delta = \varepsilon$
2. $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ область определения — $\cos \neq 0$. Тогда при делении сохраняется непрерывность. ■

Теорема : Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Из неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ делением на $\sin x$ (при $x > 0$) получаем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. При $x \to 0$, $\cos x \to 1$. По теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
(Для $x < 0$ аналогично в силу четности). ■

Билет 41. ! Теорема Вейерштрасса. Существенность условий.

Теорема : Вейерштрасса

Непрерывная на отрезке функция принимает наибольшее и наименьшее значения. В частности, она ограничена.

Доказательство. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках.
Надо доказать, что найдется $c \in [a,b]$, т.ч. $f(c) \geqslant f(x), \forall x \in [a,b]$
Рассмотрим множество $A = \{f(x) : x \in [a,b]\}$, у него есть $\sup A = s \in \overline{\mathbb{R}}$.
Возьмем какую-то последовательность s_n, которая снизу подходит к s и строго возрастает (если $s \in \mathbb{R}$, то например $s_n = s - \frac{1}{n}$, а если $s = +\infty$, то например $s_n = n$),

тогда $s_n < s \Rightarrow s_n$ не верхняя граница для $A \Rightarrow$ найдется $x_n \in [a,b]$, т.ч. $f(x_n) > s_n$
x_n — ограниченная последовательность $\xRightarrow[\text{т. Б-В}]{}$ найдется подпоследовательность x_{n_k} имеющая предел $c = \lim x_{n_k}$ и $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, тогда $c \in [a,b]$
f непрерывна в точке $c \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(c)$
$s_n < f(x_{n_k}) \leqslant s \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = s$

$$\begin{cases} \lim f(x_{n_k}) = f(c) \\ \lim f(x_{n_k}) = s \end{cases} \Rightarrow f(c) = s \text{ следовательно, } s \in \mathbb{R} \text{ и } f(c) = \sup A \Rightarrow f(c) \geqslant f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$ ■

Замечание : Существенность условий

1. Важно, что функция задана на отрезке. Для интервала или полуинтервала неверно
   Например, $f : (0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$ это неограниченная функция
2. Важно, что функция непрерывна во всех точках отрезка. Без этого не верно.
   Например, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{при } x \in [0,1] \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$ непрерывна везде, кроме одной точки, но неограниченна

Билет 42. ! Теорема Больцано–Коши. Существенность условий.

Теорема : Больцано-Коши

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках

1. Если $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.
2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то $\exists c \in (a,b) : f(c) = C$.

Доказательство. 1. Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$.

- Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$
  Если $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, то $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$
  Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$
- Если $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, то $c = \frac{a_1+b_1}{2}$
  Если $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$, то $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$
  Если $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$, то $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$
- и т.д.

На n-ом шаге $f(a_n) < 0 < f(b_n)$
Если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$, то $c = \frac{a_n+b_n}{2}$
Если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, то $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$
Если $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$, то $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
Получились вложенные отрезки $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \dots$
$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \xRightarrow[\text{т. о стяг. отр.}]{} \exists c \in [a,b]$, т.ч. $\lim a_n = c = \lim b_n$
f непрерывна в точке $c \Rightarrow \lim f(a_n) = f(c) = \lim f(b_n) \Rightarrow f(c) = 0$ ■

Замечание : Существенность условий

Нужна непрерывность во всех точках.

$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x \in [-1,0] \\ 1, & \text{при } x \in (0,1] \end{cases}$ непрерывна везде кроме 0

Доказательство. 2. $g(x) = f(x) - C$; $g(a)$ и $g(b)$ разных знаков. ∎

Билет 43. Теоремы о непрерывных образах отрезка и промежутка.

Теорема : Непрерывный образ отрезка

Непрерывный образ отрезка — отрезок.

Доказательство. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках. Надо доказать, что $f([a,b])$ — отрезок
По теореме Вейерштрасса найдутся $p,q \in [a,b]$ т.ч. $f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q) \quad \forall x \in [a,b]$
Рассмотрим функцию f на отрезке $[p,q]$ (или $[q,p]$). Тогда для $\forall C$ лежащего между $f(p)$ и $f(q)$ найдется $c \in [p,q]$, где $f(c) = C \Rightarrow f([a,b] = [f(p),f(q)]$ ∎

Теорема : Непрерывный образ промежутка

Непрерывный образ промежутка — это промежуток (возможно другого вида)

Доказательство. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках.
$\inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = M \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in \langle a,b\rangle \Rightarrow f(\langle a,b\rangle) \subset [m,M]$
Осталось понять, что $f(\langle a,b\rangle) \supset (m,M)$. Возьмем $y \in (m,M)$:
$y < M \Rightarrow y$ не верхняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a,b\rangle\} \Rightarrow$ найдется $q \in \langle a,b\rangle$ для которого $f(q) > y$
$y > m \Rightarrow y$ не нижняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a,b\rangle\} \Rightarrow$ найдется $p \in \langle a,b\rangle$ для которого $f(p) < y$
т.е. $[p,q] \subset \langle a,b\rangle$ и $f(p) < y < f(q) \xRightarrow[\text{т. Б-К}]{}$ найдется $c \in [p,q]$, т.ч. $f(c) = y$ ∎

Замечание

Промежуток может быть любого вида.

Билет 44. Непрерывность обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

Лемма

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ монотонна
Если $f(\langle a,b\rangle)$ — промежуток, то f непрерывна во всех точках.

Доказательство. Пусть f возрастает. Возьмем $c \in \langle a, b\rangle$, и докажем, что f - непрерывна в точке c
Если $x < c$, то $f(x) \leqslant f(c) \Rightarrow$ на $\langle a, c\rangle$ возрастает и ограничена сверху $f(c) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ существует $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \leqslant f(c)$
Проверим, что $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = f(c)$
От противного. Пусть $A < f(c)$. Возьмем $y \in (A, f(c))$, тогда $f(x) \neq y\ \forall x$
Если $x \geqslant c$, то $f(x) \geqslant f(c) > y$
Если $x < c$, то $f(x) \leqslant \sup\limits_{x<c} f(x) = A < y \Rightarrow f(\langle a, b\rangle)$ не промежуток
Аналогично $f(c) = \lim\limits_{x\to c+} f(x)$ ∎

Теорема : Непрерывность обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и строго монотонна.
$\inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = m,\ \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = M$

1. f обратима и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$.
2. f^{-1} строго монотонна.
3. f^{-1} непрерывна во всех точках.

Доказательство. 1. f биекция между $\langle a, b\rangle$ и $\langle m, M\rangle$: инъекция из строгой монотонности, сюръекция из предыдущей теоремы $\Rightarrow f$ обратима и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$.
2. Пусть f строго возрастает.
$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f^{-1}$ строго возрастает.
$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
3. 1+2+лемма ∎

Теорема : Непрерывность обратных тригонометрических функций

1. $\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ непрерывно и строго возрастает $\Rightarrow \arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ непрерывно и строго возрастает
2. $\cos : \left[0,\pi\right] \to [-1,1]$ непрерывно и строго убывает $\Rightarrow \arccos : [-1,1] \to \left[0,\pi\right]$ непрерывно и строго убывает
3. $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ непрерывно и строго возрастает $\Rightarrow \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ непрерывно и строго возрастает
4. $\operatorname{ctg} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ непрерывно и строго убывает $\Rightarrow \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ непрерывно и строго убывает

Билет 45. Определение натурального логарифма, свойства, определение a^b, пределы.

Определение : Натуральный логарифм

$\exp : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$
$\exp n = \exp(1+1+\ldots+1) = \exp(1)^n \to +\infty$
$\exp(-n) = \frac{1}{\exp n} \to 0$
exp строго возрастает и непрерывна $\Rightarrow$ существует обратная функция ln
$\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает.

Следствие : Свойства

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$.
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$.
3. $\ln(1+x) \leqslant x$, при $x > -1$.
4. $\ln(1+x) \geqslant 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, если $-1 < x < e-1$.

Теорема

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Доказательство. $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ при $-1 < x < e-1$.
При $x > 0$: $\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$.
При $x < 0$: $\frac{1}{1+x} \geqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \geqslant 1$. ∎

Определение

$a^b = \exp\left(b \cdot \ln a\right), a > 0.$

Замечание

1. Если $b = n \in \mathbb{N}$
   $a^n = \exp(n \ln a) = \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ шт}}) = \underbrace{\exp(\ln a) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln a)}_{n \text{ шт}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ шт}}$
2. Если $b = -n : \exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
3. Если $b = \frac{1}{n} : \exp(\frac{1}{n} \ln a + \frac{1}{n} \ln a + \dots + \frac{1}{n} \ln a) = \left(\exp(\frac{1}{n} \ln a)\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a}$
4. Если $b = \frac{k}{n}$, то $a^{\frac{k}{n}} = \exp(k \cdot \frac{1}{n} \ln a) = \left(\exp(\frac{1}{n} \ln a)\right)^k = (\sqrt[n]{a})^k$

Следствие

1. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство. 1. $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + x)\right) \lim\limits_{x \to 0} \left(\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp 1 = e$
2. Проверим по Гейне, возьмем $x_n \to +\infty$, тогда $y_n := \frac{1}{x_n} \to 0$, тогда $\lim(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ ■

Билет 46. Определение показательной и степенной функций. Пределы $\lim \frac{a^x - 1}{x}$ и $\lim \frac{(1+x)^p - 1}{x}$

Определение : Показательная функция

$a^x = \exp\left(x \cdot \ln a\right) : \mathbb{R} \to (0, +\infty).$

Замечание : Свойства

1. Функция непрерывна
2. при $a > 1$ строго возрастает, при $a < 1$ строго убывает.
3. $a^x \geqslant 1 + x \ln a$

Теорема

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство. $a^x - 1 \geqslant x \ln a$.
$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \geqslant 1 - x\ln a \Rightarrow a^x \leqslant \frac{1}{1-x\ln a}$, если $x\ln a < 1$.
$x\ln a \leqslant a^x - 1 \leqslant \frac{1}{1-x\ln a} - 1 = \frac{x\ln a}{1-x\ln a}$.
$\ln a \leqslant \frac{a^x-1}{x} \leq \frac{\ln a}{1-x\ln a} \xrightarrow{x\to 0} 0$ при $x \geqslant 0$
$\ln a \geqslant \frac{a^x-1}{x} \geqslant \frac{\ln a}{1-x\ln a} \xrightarrow{x\to 0} 0$ при $x < 0$
Следовательно получаем, что $\frac{a^x-1}{x} = \ln a$. ■

Определение : Степенная функция

$x^p = \exp(p\ln x) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.

Замечание : Свойства

1. Это непрерывная функция
2. При $p > 0$ строго возрастает, при $p < 0$ строго убывает.

Теорема

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

Доказательство. $(1+x)^p = \exp(p\ln(1+x)) \geqslant 1 + p\ln(1+x)$, при $p\ln(1+x) < 1$
С другой стороны $\exp(p\ln(1+x)) \leqslant \frac{1}{1-p\ln(1+x)}$, при $p\ln(1+x) < 1$ (это заведомо верно при $xp < 1$)
$\frac{p\ln(1+x)}{1-p\ln(1+x)} = \frac{1}{1-p\ln(1+x)} - 1 \geqslant (1+x)^p - 1 \geqslant p\ln(1+x)$
$p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x(1-p\ln(1+x))} \geqslant \frac{(1+x)^p-1}{x} \geqslant p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$, для $x > 0$
$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$; $\big(1 - p\ln(1+x)\big) \to 1$. Предельный переход и два милиционера.
Для $x < 0$ аналогично со сменой знака на $\leqslant$ ■

Билет 47. Сравнение функций: отношение эквивалентности, символы Ландау, свойства.

Определение : Сравнение функций

$f, g : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E.

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g$ если $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_a$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$.
2. $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ если $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, т.ч. $f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_a$.
3. $f \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g)$, если $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}$ и φ ограничена, т.ч. $f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_a$.

Определение

$f = \mathcal{O}(g)$ на множестве E если найдется C, т.ч. $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$, при $x \in E$

Замечание

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g, \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$.
   Если в какой-то точке $g(x) = 0$, то $f(x) = 0$, а $\varphi(x)$ выбираем какой хотим
   $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 1$

2. $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 0$

Замечание : Свойства

1. $\sim$ — отношение эквивалентности

2. Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to a$, то $f_1 f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_1 g_2$

3. Если $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to a$ и $f_2 \neq 0$ в проколотой окрестности точки a, то $\frac{f_1}{f_2} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$

4. $f \underset{x\to a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g + o(f)$

5. $f \underset{x\to a}{\sim} g \Rightarrow f \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g)$ и $f \underset{x\to a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g)$

6. $f \cdot o(g) \underset{x\to a}{=} o(fg)$

7. $o(f) + o(f) = o(f), \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$

8. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f \underset{x\to a}{=} b + o(1)$

Доказательство.

1. Симметричность: $f \underset{x\to a}{\sim} g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_a$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$
   $\Rightarrow \varphi \neq 0$ в окрестности точки $a \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 1 \Rightarrow g \underset{x\to a}{\sim} f$

   Транзитивность:
   $f \sim g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x)$ в окрестности точки a
   $g \sim h \Rightarrow g(x) = \psi(x)h(x)$ в окрестности точки a
   $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x), \text{ т.к. } \varphi(x)\psi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 : f(x) = h(x)$$

2. $f_1 = \varphi_1 g_1$ и $f_2 = \varphi_2 g_2$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi_2(x) = 1 \Rightarrow f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 g_1 g_2 \quad \lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x)\varphi_2(x) = 1$

3. $f_1 = \varphi_1 g_1$ и $f_2 = \varphi_2 g_2$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi_2(x) = 1 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \frac{g_1}{g_2} \quad \lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = 1$

4. $f \underset{x\to a}{\sim} g \Leftrightarrow f = \varphi g$, где $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g \Leftrightarrow f = g + o(g)$, где $\lim\limits_{x\to a} (\varphi(x) - 1) = 0$
   Вторая равносильность: $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f)$
   $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f \Leftrightarrow g = f + o(f) \Leftrightarrow f = g - o(f) = g + o(f)$

5. $f \sim g \Rightarrow f = \varphi g$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \varphi$ ограничена в окрестности точки $a \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$
   $f = o(g) \Rightarrow f = \varphi g$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi$ ограничена в окрестности точки $a \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$

6. $o(g)$ — функция вида φg, где $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$
   $o(fg)$ — функция вида $\varphi f g$, где $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

7. $g + h$, где $g = o(f)$ и $h = o(f)$
   $g = o(f) \Rightarrow g = \varphi f$, где $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$
   $h = o(f) \Rightarrow h = \psi f$, где $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = 0$
   $g + h = (\varphi + \psi) f$ и $\lim\limits_{x \to a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$

8. $o(1)$ - это такая функция φ, которая $\xrightarrow[x \to a]{} 0$, то есть $f \underset{x \to a}{=} b + o(1)$ означает, что $f(x) - b \xrightarrow[x \to a]{} 0$

■

Пример

1. Все при $x \to 0$
   $\sin x \sim x$
   $\ln(1 + x) \sim x$
   $a^x - 1 \sim x \ln a$
   $(1 + x)^p - 1 \sim px$
   $\mathrm{tg}(x) \sim x$
   $\mathrm{arctg}(x) \sim x$

2. Все при $x \to 0$
   $\sin x = x + o(x)$
   $\ln(1 + x) = x + o(x)$
   $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$
   $(1 + p)^x = 1 + px + o(x)$
   $a^x - 1 = x \ln a + o(x)$
   $\mathrm{tg}(x) = x + o(x)$
   $\mathrm{arctg}(x) = x + o(x)$
   $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Билет 48. ! Определение производной и дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости. Левая и правая производные.

Определение : Производная

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$.
Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то он называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Замечание : Переобозначение

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Определение : Дифференцируемость

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$.
f - дифференцируема в точке x_0, если $\exists k \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Замечание : Переобозначение

$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h)$ при $h \to 0$

Теорема : Критерий дифференцируемости

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Следующие условия равносильны:

1. f дифференцируема в точке x_0.
2. У функции f существует конечная производная в точке x_0.
3. Существует $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и φ непрерывна в точке x_0.

В случае, когда эти условия выполнены $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{k(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k \Rightarrow f'(x_0) = k$.
$2 \Rightarrow 3$: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$
Но $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi$ непрерывна в точке x_0.
$3 \Rightarrow 1$: $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.
$f(x) - f(x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + \underbrace{(\varphi(x) - \varphi(x_0))}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}(x - x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = \varphi(x_0)$. ∎

Теорема : Односторонние производные

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Замечание

$f'(x_0)$ существует $\Leftrightarrow$ существуют правая и левая производная и они равны.

Билет 49. Геометрический смысл производной. Непрерывность дифференцируемой функции.

Теорема : Непрерывность дифференцируемой функции

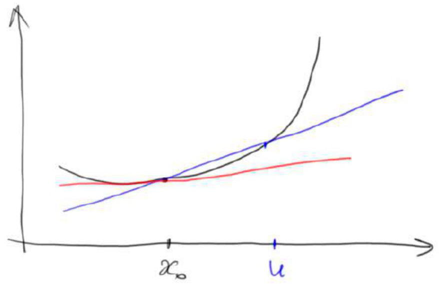
Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0. Обратное не верно.

Доказательство. $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$,
$o(x - x_0)$ это функция вида $\varphi(x)(x - x_0)$, $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Пример : Уравнение касательной

Касательная — предельное положение секущей.
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — уравнение касательной к графику функции f в точке x_0

Пример Уравнение касательной



Уравнение секущей, т.е. прямой проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(u, f(u))$

$$y = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

перейдем к пределу $u \to x_0$

получим уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

уравнение касательной в точке x_0

Геометрический смысл производной — угловой коэффициент касательной

Билет 50. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.

Теорема : Арифметические действия с дифференцируемыми функциями

$f,g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$, f и g дифф. в точке x_0. Тогда

1. $f \pm g$ дифф. в точке x_0 и $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
2. fg дифф. в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифф. в точке x_0 и $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Доказательство. f, g - дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$, где φ, ψ непрерывны в точке x_0.
1. Сложим, получим $f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (\varphi(x)) + \psi(x))(x - x_0)$,
$(f + g)'(x_0) = \varphi(x_0) + \psi(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \underbrace{(f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0))}_{=\chi(x)}(x - x_0)$.

Нужно доказать, что $\chi(x)$ непрерывна в точке x_0 и найти $\chi(x_0)$.
$\chi(x_0) = f(x_0)\underbrace{\psi(x_0)}_{=g'(x_0)} + g(x_0)\underbrace{\varphi(x_0)}_{=f'(x_0)} + \underbrace{f'(x_0)g'(x_0)(x_0 - x_0)}_{=0} \Rightarrow (fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$.

3. Поймем, что $\frac{1}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.
$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)(x-x_0)}{g(x)g(x_0)}$, обозначим $\chi(x) = -\frac{\psi(x)}{g(x)g(x_0)}$.
Нужно доказать, что χ непрерывна в точке x_0 и посчитать $\chi(x_0)$.
g дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow g$ непрерывна в точке x_0, $\chi(x_0) = \frac{-\psi(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.
$(\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot (\frac{1}{g})' = \frac{f'}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g}{g^2} - \frac{fg}{g^2} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$ ■

Билет 51. ! Теорема о дифференцируемости композиции.

Теорема : о дифференцируемости композиции

$f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle; g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle, f$ дифференцируема в точке x_0, g дифференцируема в точке $f(x_0) = y_0$
Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Доказательство. f - дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0
g - дифференцируема в точке $y_0 \Rightarrow g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$, где ψ непрерывна в точке y_0
возьмем $y = f(x)$
$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)}_{\chi(x)} \cdot (x - x_0) =$

Нужно доказать, что $\chi(x)$ непрерывна в точке x_0

φ непрерывна в точке x_0
f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f$ непрерывна в точке x_0 и ψ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \Rightarrow$ $\psi(f(x))$ непрерывна в точке x_0
$(g \circ f)'(x_0) = \chi(x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ ■

Билет 52. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

Теорема : о дифференцируемости обратной функции

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f строго монотонна; $x_0 \in \langle a, b\rangle$, f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, $y_0 = f(x_0)$
Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство. f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0
$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
$y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$
$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$
Если $y \neq y_0$, то $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$
Если $y = y_0$, то $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ по условию
$\Rightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0)$, обозначим $\chi(y) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$
Надо проверить, что χ непрерывна в точке y_0, т.е. $\varphi(f^{-1}(y))$ непрерывна в точке y_0
f^{-1} непрерывна в точке y_0 (т.к. f непрерывна в точке x_0)
φ непрерывна в точке x_0, т.к. f дифф. в точке x_0
$\chi(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ ∎

Следствие

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Билет 53. Производные элементарных функций.

Теорема : Производные элементарных функций

1. $(c)' = 0$
2. $(x^p)' = px^{p-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, в частности $(e^x)' = e^x$
5. $(\sin x)' = \cos(x)$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $\operatorname{tg}(x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказательство.

2. $(x^p)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^p - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}$
3. $(a^x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$
4. $(\ln x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos(x)$
7. $(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $f(x) = \sin x, f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$
   $f^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
   $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
11. $f(x) = \operatorname{tg}(x), f : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$
   $f^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
   $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$

■

Билет 54. ! Теоремы Ферма и Ролля. Их геометрический смысл.

Теорема : Ферма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f - дифф. в точке x_0 и $f(x_0) = \min\limits_{t\in\langle a,b\rangle}(f(t))$ $\left(\text{или } f(x_0) = \max\limits_{t\in\langle a,b\rangle}(f(t))\right)$
Тогда $f'(x_0) = 0$

Доказательство. $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, знаменатель положителен, числитель не меньше нуля и вся дробь неотрицательна $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ (предельный переход в неравенстве)
$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, знаменатель отрицателен, числитель не меньше нуля и вся дробь не положительна $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ (предельный переход в неравенстве)

$$\begin{cases} f'(x_0) \geqslant 0 \\ f'(x_0) \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$ ■

Замечание : Геометрический смысл

В точке min (или max) касательная всегда горизонтальна

Теорема : Ролля

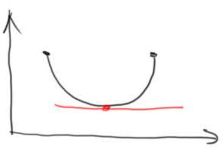
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f непрерывна во всех точках и дифференцируема на (a, b)
Если $f(a) = f(b)$, то найдется $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса найдутся $p, q \in [a, b]$, т.ч. $f(p) = \min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$; $f(q) = \max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$
Случай 1: p, q концы отрезка $\Rightarrow f(p) = f(q) \Rightarrow f(x) = \texttt{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$
Случай 2: хотя бы одна из этих точек не конец отрезка $\xRightarrow[\text{т.Ферма}]{}$ производная в этой точке равна 0 ■

Замечание : Геометрический смысл

$f(a) = f(b)$ и f дифф., то существует точка где касательная горизонтальна

Геометрический смысл. Если $f(a)=f(b)$, то в какой-то точке касательная горизонтальна



Замечание. Нужна дифф. во всех (·) интервала (a,b)
$f(x)=|x|$ на $[-1,1]$ $f'(x)\neq 0$

Билет 55. ! Теорема Лагранжа и Коши. Их геометрический смысл.

Теорема : Лагранжа

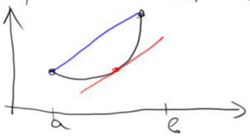
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках и дифференцируема на (a, b).
Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - kx$
Подберем k так, что $g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Функция g удовлетворяет теореме Ролля $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$
$g'(c) = f'(c) - k = 0 \Rightarrow f'(c) = k$ ∎

Замечание : Геометрический смысл

Найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде

Геометрический смысл



$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - угловой коэфф. хорды

Найдется точка, в которой касательная параллельна хорде

Теорема : Коши

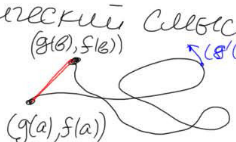
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны во всех точках и дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
Тогда $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство. $g(a) \neq g(b)$ (т.к. в противном случае по т. Ролля $\exists y \in (a,b)$ т.ч. $g'(y) = 0$).
Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - kg(x)$, подберем k так, что $h(a) = h(b)$
$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
По т. Ролля для функции h $\exists c \in (a, b)$, т.ч. $h'(c) = 0 = f'(c) - kg'(c) \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ∎

Замечание : Геометрический смысл

$(g(t), f(t))$ - координата частицы в момент времени t, тогда $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ угловой коэфф. хорды, соединяющей a, b

Геометрический смысл теоремы Коши t - время $(g(t), f(t))$ коорд. точки в момент t



$(g'(t), f'(t))$ - вектор скорости

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ угловой коэфф хорды

$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ - угловой коэфф. прямой

т.е. найдется касательная, парал. хорде, соедин. концы

Билет 56. ! Следствия теоремы Лагранжа. Характеристика монотонности дифференцируемых функций.

Следствие : из теоремы Лагранжа 1

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках, дифф на (a,b) и $|f'(x)| \leqslant M \quad \forall x \in (a,b)$
Тогда $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle$

Доказательство. Пусть $x \leqslant y$, тогда f непрерывна на $[x, y]$ и дифф. на (x,y)
По т. Лагранжа $\exists c \in (x, y) \subset (a, b)$, т.ч. $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$
$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x| \leqslant M|y - x|$ ∎

Следствие : из теоремы Лагранжа 2

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках, дифф на (a,b). Если $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f постоянна

Доказательство. Это 1. для $M = 0$
$|f(x) - f(y)| \leqslant 0 \quad \forall x,y \in \langle a,b\rangle \Rightarrow f$ постоянна ∎

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой M, если
$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \quad \forall x, y \in E$

Следствие : из теоремы Лагранжа 3

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках и дифф. на (a,b).

а) Если $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ то f строго возрастает.

б) Если $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$ то f строго убывает.

Доказательство. а) Возьмем $x < y$ и применим т. Лагранжа для $[x, y]$.
Тогда $\exists c \in (x, y) \subset (a, b)$, т.ч. $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$ ∎

Следствие : из теоремы Лагранжа 4

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф. на (a,b). Тогда

а) f нестрого возрастает $\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a, b)$

б) f нестрого убывает $\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Доказательство. а) $\Leftarrow$ аналогично предыдущему
$\Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim\limits_{y \to x+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$ предельный переход в неравенстве. ∎

Замечание

В 3 нет равносильности

Пример

$f(x) = x^3$ строго возрастает
$f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$

Билет 57. Теорема Дарбу. Следствие.

Теорема : Дарбу

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифф. во всех точках. C лежит между $f'(a)$ и $f'(b)$
Тогда $\exists c \in (a,b)$, т.ч. $f'(c) = C$

Доказательство. Случай 1. $C = 0$. Тогда $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков.
Пусть $f'(a) < 0 < f'(b)$, f дифф. на $[a,b] \Rightarrow f$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow$ по т. Вейерштрасса $\exists p \in [a,b]$, т.ч. $f(p) = \min\limits_{t \in [a,b]} f(t)$
Если $p \in (a,b)$, то по т. Ферма $f'(p) = 0$, а это нужная точка
Пусть $p = a$, тогда $f'(a) = f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, числитель $\geqslant 0$, знаменатель > 0, предельный переход: $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ противоречие
Пусть $p = b$, тогда $f'(b) = f'_-(b) = \lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leqslant 0$, противоречие
Значит точка не может оказаться на концах отрезка, а для внутреннего мы уже знаем
Случай 2. $C \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $g(x) = f(x) - Cx$, тогда $g'(x) = f'(x) - C \Rightarrow g'(a)$ и $g'(b)$ разных знаков $\Rightarrow$ найдется $c \in (a,b)$, где $g'(c) = f'(c) - C = 0$ ∎

Следствие

$f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ дифф на $\langle a,b \rangle$ и $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \langle a,b \rangle$, тогда f строго монотонна.

Доказательство. Докажем, что f' знакопостоянна. От противного.
$f'(p) < 0 < f'(q)$ тогда по т. Дарбу есть точка c между p и q, т.ч. $f'(c) = 0$. Противоречие. ∎

Билет 58. Правило Лопиталя (для $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Примеры.

Теорема : правило Лопиталя 1 ($\frac{0}{0}$)

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$; $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, дифф на (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
$\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$
Тогда если $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
Аналогично можно написать все $\lim\limits_{x\to a+}$

Доказательство. Проверим по Гейне, что $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
Возьмем x_n возрастающую и $\lim x_n = b$. Надо доказать, что $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$
По условию $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = 0$;
$g' \neq 0$, тогда по следствию из т. Дарбу g строго монотонна. Применим т. Штольца.
Надо посчитать $\lim \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)}$.
По т. Коши найдется $c_n \in (x_n, x_{n+1})$, т.ч. $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$. Тогда $\lim \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$
$x_n < c_n < x_{n+1} \Rightarrow \lim c_n = b$, тогда из определения по Гейне для $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$ ■

Теорема : правило Лопиталя 2 ($\frac{\infty}{\infty}$)

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифф на (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$, $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = +\infty$
Тогда если $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Аналогично можно записать все $\lim\limits_{x\to a+}$

Доказательство. Проверим по Гейне, что $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
Возьмем x_n возрастающую и $\lim x_n = b$. Надо доказать, что $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$
По условию $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim g(x_n) = +\infty$
$g' \neq 0$, тогда по следствию из т. Дарбу g строго монотонна. Применим т. Штольца.
Надо посчитать $\lim \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)}$.
По т. Коши найдется $c_n \in (x_n, x_{n+1})$, т.ч. $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$. Тогда $\lim \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$
$x_n < c < x_{n+1} \Rightarrow \lim c_n = b$, тогда из определения по Гейне для $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$ ■

Пример

1. $p > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \frac{1}{p} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$
2. $a > 1, p \in \mathbb{R}$ тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$
   Если $p \leqslant 0$ то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} x^p}{\lim\limits_{x\to+\infty} a^x} = \frac{0}{+\infty} = 0$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{px^{p-1}}{\ln a \cdot a^x} = \frac{p}{\ln(a)} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}}{a^x} = 0$, при $p \leqslant 1$
   применим правило Лопиталя $n > p$ раз, где $n > p$
3. $\lim\limits_{x\to0+} x^x = \exp(\lim\limits_{x\to0+} x\ln x) = \exp(0) = 1$
   $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim\limits_{x\to0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to0+} (-x) = 0$

Билет 59. Определение производной n-го порядка. Классы $C^n(E)$. Несовпадение классов $C^n(E)$.

Определение : Определение производной n-го порядка

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a,b\rangle$
f n раз дифференцируема в точке x_0, если f $n-1$ раз диференцируема в окрестности точки x_0 и f^{n-1} дифф. в точке x_0
$f^n = (f^{n-1})'$

Определение : Классы $C^n(E)$

$f \in C^n(\langle a, b\rangle)$ означает, что $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, n раз дифференцируема во всех точках и $f, f', ..., f^n$ непрерывны на $\langle a, b\rangle$

Определение

$f \in C(\langle a, b\rangle)$ означает, что $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и непрерывна во всех точках

Замечание

$C(\langle a, b\rangle) \supset C^1(\langle a, b\rangle) \supset C^2(\langle a, b\rangle) \supset ...$

Билет 60. Арифметические свойства производных n-го порядка. Производные n-го порядка элементарных функций.

Теорема : арифметические свойства производных n-го порядка

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f и g n раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда

1. $\alpha f + \beta g$ n раз дифф. в точке x_0 и $(\alpha f + \beta g)^n(x_0) = \alpha f^n(x_0) + \beta g^n(x_0)$
2. fg n раз дифф. в точке x_0 и $(fg)^n(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^k(x_0) \cdot g^{n-k}(x_0)$
3. f n раз дифференцируема в точке $\alpha x_0 + \beta$. Тогда $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $g^n(x_0) = \alpha^n f^n(\alpha x_0 + \beta)$

Доказательство.

1. Индукция по n. База очев. Переход $n \to n+1$
$(\alpha f + \beta g)^{n+1} = ((\alpha f + \beta g)^n)' = (\alpha f^n + \beta g^n)' = \alpha(f^n)' + \beta(g^n)' = \alpha f^{n+1} + \beta g^{n+1}$
2. Индукция по n. База $n = 1$: $(fg)' = fg' + f'g$
Переход $n \to n+1$
$(fg)^{n+1} = ((fg)^n)' = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f^k g^{n-k})' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f^{k+1} g^{n-k} + f^k g^{n-k+1}) =$
$\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j f^{j+1} g^{n-j} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^k g^{n+1-k} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^k g^{n+1-k}$
3. Индукция по n. Переход $n \to n+1$
$g^{n+1}(x_0) = (g^n)'(x_0) = (\alpha^n f^n(\alpha x + \beta))'\big|_{x=x_0} = \alpha^n f^{n+1}(\alpha x + \beta) \cdot (\alpha x + \beta)'\big|_{x=x_0} = \alpha^{n+1} f^{n+1}(\alpha x_0 + \beta)$

■

Пример : производные n-го порядка элементарных функций

1. $(x^p)^{(n)} = p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)x^{p-n}$
2. $(\ln x)^{(n)} = ((\ln x)')^{(n-1)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)...(-1-(n-1)+1)x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
3. $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$

Билет 61. Формула Тейлора для многочленов (с леммами).

Определение : Многочлен Тейлора

f n раз дифференцируема в x_0
Многочлен Тейлора для функции f в x_0 степени n

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Лемма : 1

$f(x) = (x-x_0)^k$, тогда $f^{(m)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{если } k \neq m \\ m! & \text{если } k = m \end{cases}$

Доказательство. Если $k \geqslant m$: $f^{(m)}(x) = k(k-1)\dots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}$
При $k > m$: $f^{(m)}(x_0) = 0$, так как есть $(x-x_0)$ в положительной степени
При $k = m$: $f^{(m)}(x) = m!$
При $k < m$: $f^{(m)}(x) = (f^{(k)})^{(m-k)} = (k!)^{(m-k)} = 0$ ∎

Лемма : 2

P - многочлен степени $\leqslant n$, $x_0 \in \mathbb{R}$
Тогда P можно представить в виде $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, где $c_0, c_1, \dots, c_n$ - некоорые коэфф.

Доказательство. Обозначим $t = x - x_0$, тогда $x = t + x_0$
$P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(t+x_0)^k$, раскроем скобки, все разложится по каким-то степенями t с какими-то коэфф., а это то, что нам нужно ∎

Теорема : Формула Тейлора для многочленов

Пусть P - многочлен степени $\leqslant n$, тогда $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Доказательство. По лемме 2: $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$ и найдем c_k
$P^{(m)}(x) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k\right)^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\left((x-x_0)^k\right)^{(m)}$ подставим $P^{(m)}(x_0)$ по Лемме 1 там почти всегда нули, за исключением одной производной, которая в точности m-тая, получим $P^{(m)}(x_0) = m!c_m$ ∎

Следствие

Если степень многочлена $P \leqslant n$, то он совпадает со своим многочленом Тейлора степени n

Билет 62. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано (с леммой).

Определение

$R_{n,x_0}f(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ - остаток в формуле Тейлора
Формула Тейлора $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$

Теорема : Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, f n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0$$

Лемма

g n раз дифференцируема в точке x_0 и $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$
Тогда $g(x) = o((x - x_0)^n)$

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ считаем по Лопиталю

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

Надо найти $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{x-x_0}$
Напишем определение дифф $g^{(n-1)}$ в точке x_0
$g^{(n-1)}(x) = \underbrace{g^{(n-1)}(x_0)}_{=0} + \underbrace{g^{(n)}(x_0)}_{=0}(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow g^{(n-1)}(x) = o(x - x_0)$, при $x \to x_0$ ■

Доказательство. Формулы. $g(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ проверим, что g удовлетворяет условиям Леммы $g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(m)}x_0$, $0 \leqslant m \leqslant n$ из предыдущей теоремы мы знаем, что $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(T_{n,x_0}f)^{(k)}x_0}{k!}$ ■

Следствие

Пусть f n раз дифференцируема в точке x_0 и P - такой многочлен степени $\leqslant n$, что $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Тогда $P = T_{n,x_0}f$

Доказательство. $\begin{cases} f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n), \\ f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) \end{cases} \Rightarrow Q(x) = T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$

Q — многочлен степени $\leqslant n$, тогда можем записать разложение $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k$

Пусть Q не нулевой многочлен

Пусть m - наименьший индекс, для которого $c_m \neq 0$, тогда $Q(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} c_k(x-x_0)^k = o((x-x_0)^m)$, $0 = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{Q(x)}{(x-x_0)^m} = \lim\limits_{x\to x_0}(c_m + c_{m+1}(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^{n-m}) \Rightarrow c_m = 0$, противоречие ■

Билет 63. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теорема : Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$; f $n+1$ раз дифференцируема; $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда найдется c между x_0 и x, т.ч.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство. Возьмем такое $M \in \mathbb{R}$, что $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M(x-x_0)^{n+1}$
Надо доказать, что $M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ для некоторого c
$g(t) = f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t-x_0)^{n+1}$ — $n+1$ раз дифференцируема
$g(x) = 0$, (по выбору M)
$0 \leqslant k \leqslant n$: $g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(k)}(x_0) - 0 = 0$
$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - M(n+1)!$
$g(x) = g(x_0) = 0$ Тогда по теореме Ролля найдется x_1 между x, x_0, т.ч. $g'(x_1) = 0$
$g'(x_0) = g'(x_1) = 0 \Rightarrow$ по т. Ролля найдется x_2, т.ч. $g''(x_2) = 0$ и т.д.
$g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_n) = 0 \Rightarrow$ по Роллю найдется c между x, x_n, т.ч.
$g^{(n+1)}(c) = 0$, $g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n+1)!M$ ■

Билет 64. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Разложения $\sin x, \cos x, e^x$ в ряд.

Следствие : 1

Пусть f $n+1$ раз дифференцируема на $\langle a,b\rangle$ и $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$.
Тогда $|R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Доказательство. $R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ для некоторого c, рисуем модуль

$$|R_{n,x_0}f(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

Следствие : 2

f бесконечно дифф на $\langle a,b\rangle$ и $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$ и $\forall n$.
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,x_0}f(x) = f(x)$

Доказательство. $|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = |R_{n,x_0}f(x)| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ но мы знаем, что $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ■

Теорема : Разложения $\sin x, \cos x, e^x$ в ряд

$\forall x \in \mathbb{R}$:
$\exp x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
$\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1^k) \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^{2k+1})}{(2k+1)!}$

Билет 65. ! Формулы Тейлора для $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^p$

Теорема : Формулы Тейлора для элементарных функций

Все при $x_0 = 0$

- $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$
- $(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$

Билет 66. Аппроксимация Паде. Определение и примеры.

Определение : Аппроксимация Паде $[m,n]$

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n} + o(x^{n+m}) \text{ при } x \to 0$$

Пусть f будет $m+n$ раз дифференцируема в точке 0
Тогда $f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n+m} x^{n+m}}_{\text{многочлен Тейлора}} + o(x^{n+m})$ при $x \to 0$
Приравняем и умножим на знаменатель
$(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m+n} x^{m+n})(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n) + o(x^{n+m}) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m) + o(x^{m+n})$

Пример : $\cos x$ [2,2]

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos x = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} + o(x^4)$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)(1 + b_1 x + b_2 x^2) = a_0 + a_1 + a_2 x^2 + o(x^4)$$

$$1 + b_1 x + b_2 x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{b_1 x^3}{2} - \frac{b_2 x^4}{2} + \frac{x^4}{24} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$b_1 = 0; a_1 = 0; 1 = a_0; b_2 - \frac{1}{2} = a_2; -\frac{b_2}{2} + \frac{1}{24} = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{12} \Rightarrow a_2 = -\frac{5}{12}$$

$$\cos x = \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2} + o(x^4)$$

Билет 67. Иррациональность числа e.

Теорема : Иррациональность числа e

e — иррационально.

Доказательство. От противного, пусть $e = \frac{m}{n}$
по Лагранжу $\frac{m}{n} = e = \exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\exp c}{(n+1)!}$

$$\underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\text{целое}} = \underbrace{n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!}}_{\text{целое}} + \frac{\exp c}{n+1}$$

$\frac{\exp c}{n+1}$ - целое число, $\frac{\exp c}{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{\exp c}{n+1} \geqslant 1$,
$1 \leqslant \frac{\exp c}{n+1} < \frac{e}{n+1}$
$e \geqslant n+1$ невозможно $\Rightarrow$ противоречие. ■

Билет 68. ! Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$
a - точка нестрогого локального минимума, если существует такая окрестность U_a точки a, что $f(x) \geqslant f(a) \quad \forall x \in U_a \cap E$
a - точка нестрогого локального максимума, если существует такая окрестность U_a точки a, что $f(x) \leqslant f(a) \quad \forall x \in U_a \cap E$
a - точка строгого локального минимума, если существует такая окрестность $\mathring{U}_a$ точки a, что $f(x) > f(a) \quad \forall x \in \mathring{U}_a \cap E$
a - точка строгого локального максимума, если существует такая окрестность $\mathring{U}_a$ точки a, что $f(x) < f(a) \quad \forall x \in \mathring{U}_a \cap E$

Замечание

Дальше рассматриваем только случаи, когда E - промежуток

Определение

a - точка экстремума, если a - точка нестрогого локального min или нестрогого локального max.
a - точка строгого экстремума, если a - точка строгого локального min или строгого локального max.

Теорема : Необходимое условие экстремума

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in (a,b)$ - точка экстремума
Тогда если f диффиринцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$

Доказательство. Пусть x_0 - точка нестрогого локального max.
Тогда найдется $\delta > 0$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x) \leqslant f(x_0)$
$f(x_0)$ - наибольшее значение функции на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \underset{\text{т. Ферма}}{\Longrightarrow} f'(x_0) = 0$ ∎

Замечание

1. max или min могут быть в точке не дифф.
2. Важно, что интервал, точнее что x_0 не конец отрезка
3. Условие $f'(x_0) = 0$ недостаточно для того, чтобы точка была точкой экстремума ($f(x) = x^3$)

Билет 69. ! Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.

Теорема : Достаточное условие экстремума в терминах 1-й производной

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in (a,b)$
Найдется $\delta > 0$, т.ч. f дифф. на $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ и непрерывна в x_0. Тогда

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 точка строгого локального max
2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 точка строгого локального min

Замечание

Если f' не меняет знак в x_0, то x_0 — не точка экстремума.

Замечание

Если знаки + и +

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f(x) > f(x_0) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} \Rightarrow \text{не точка экстремума}$$

Доказательство. 1. $(x_0 - \delta, x_0]$ f непрерывна и дифференцируема внутри
$f' > 0 \Rightarrow f$ – строго возрастает на $(x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$[x_0, x_0 + \delta)$ f непрерывна и дифференцируема внутри
$f' < 0 \Rightarrow f$ – строго убывает на $[x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f(x) > f(x_0) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ — точка локального max}$$

∎

Теорема : Достаточное условие экстремума в терминах n-й производной

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}; x_0 \in (a,b)$; f n раз диффиринцируема в точке x_0
$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
Тогда

1. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 точка строгого локального min
2. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 точка строгого локального max
3. Если n нечетно, то x_0 не точка экстремума

Частный случай $n = 2$. $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$ f дважды дифф. в x_0, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$.
Тогда

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 точка строгого локального min
2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 точка строгого локального max

Доказательство. Напишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x-x_0)^n}_{>0 \text{ при } x\neq x_0} \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)}_{\text{При } x\to x_0 \longrightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0}$$

1. n - четное: $f^{(n)} > 0$ по стабилизации знака выражение в скобках > 0 при x близких к x_0 $\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ при x близких к x_0
2. Аналогично 1., но выражение в скобках будет < 0
3. n - нечетно, $(x-x_0)^n$ меняет знак в точке x_0, а выражение в скобках при x близких к x_0 фиксированного знака $\Rightarrow$ нет экстремума.

∎

Билет 70. Выпуклые и вогнутые функции. Переформулировки определения выпуклости. Геометрический смысл. Лемма о трех хордах.

Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

- f выпуклая, если $\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall\lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
- f вогнутая, если $\forall x, y \in \langle a, b\rangle \quad \forall\lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
- f строго выпуклая, если
  $\forall x, y \in \langle a, b\rangle, x \neq y \quad \forall\lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
- f строго вогнутая, если
  $\forall x, y \in \langle a, b\rangle, x \neq y \quad \forall\lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Замечание : 1

$u < w, v = \lambda y + (1-\lambda)w$
Условие $v \in (u,w)$ равносильно условию $\lambda \in (0,1)$

Доказательство. $\Leftarrow \lambda \in (0,1) \quad v = \lambda u + (1-\lambda)w < \lambda w + (1-\lambda)w = w$
$\Rightarrow v = \lambda u + (1-\lambda)w \Rightarrow \lambda(u-w) = v - w \Rightarrow \lambda = \frac{w-v}{w-u} \in (0,1)$ ■

Замечание : 2

f выпукла на $\langle a,b\rangle \Leftrightarrow \forall u < v < w$ из $\langle a,b\rangle$

$$f(v) \leqslant \frac{w-v}{w-u}f(u) + \frac{v-u}{w-u}f(w)\Big(\Leftrightarrow (w-u)f(v) \leqslant (w-v)f(u) + (v-u)f(w)\Big)$$

Замечание : Геометрический смысл

$$y = \frac{f(w)-f(u)}{w-u}(x-u) + f(u)$$
$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u}(v-u) + f(u) = \frac{v-u}{w-u}f(w) + \frac{w-v}{w-u}f(u)$$

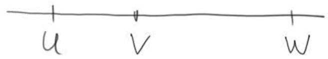
Замечание : Свойства выпуклых функций

1. $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ - выпуклые $\Rightarrow f + g$ - выпуклые
2. $\alpha > 0$ и f - выпуклая $\Rightarrow \alpha f$ выпуклая

Опр. $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ f - выпуклая, если $\forall x,y\in\langle a,b\rangle$ $\forall\lambda\in(0,1)$

$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

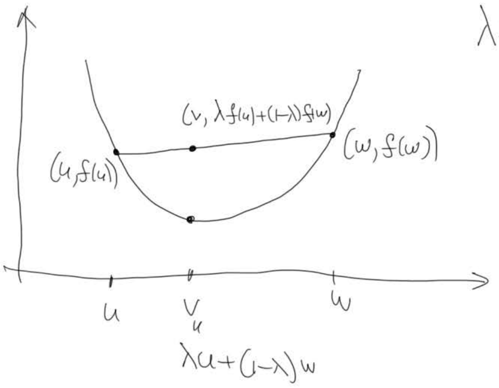
Геометрический смысл



$w > \lambda u+(1-\lambda)w > u$ $\quad\lambda\in(0,1)$

Пусть $u<v<w$ $\quad v=\lambda u+(1-\lambda)w=w+\lambda(u-w)\Rightarrow\lambda=\frac{w-v}{w-u}\in(0,1)$

$\lambda f(u)+(1-\lambda)f(w)$



Уравнение прямой через $(u,f(u))$ и $(w,f(w))$

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u}(x-u)+f(u)=y$$

$\lambda(u,f(u))+(1-\lambda)(w,f(w))$ параметриз. отрезка с концами $(u,f(u))$ и $(w,f(w))$

Значение в точке v

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u}(v-u)+f(u)=(1-\lambda)(f(w)-f(u))+f(u)=\lambda f(u)+(1-\lambda)f(w)$$

Хорда соедин две точки на графике всегда лежит над графиком

Лемма : О трёх хордах

$f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ выпуклая
$\forall u<v<w$ точки из $\langle a,b\rangle$. Тогда

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\leqslant\frac{f(w)-f(u)}{w-u}\leqslant\frac{f(w)-f(v)}{w-v}$$

Каждое из трех неравенств влечет выпуклость

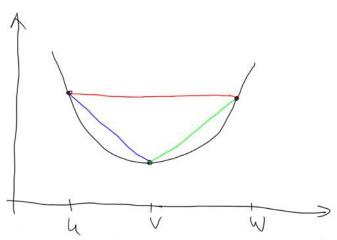
Замечание

Для строгой выпуклости знаки строгие

Замечание : Напоминание

f — выпуклая $\Leftrightarrow\forall u<v<w$

Доказательство. 1. $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\leqslant\frac{f(w)-f(u)}{w-u}\Leftrightarrow(w-u)(f(v)-f(u))\leqslant(v-u)(f(w)-f(u))\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(w-u)f(v)\leqslant(v-u)f(w)+\underbrace{((w-u)-(v-u))}_{=w-v}f(u)$ ■



$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ — угловой коэфф хорды \

$\frac{f(w)-f(u)}{w-u}$ — угловой коэфф. хорды —

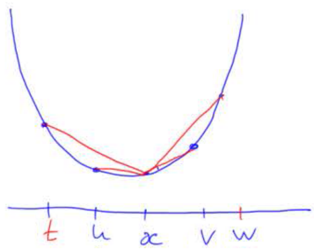
$\frac{f(w)-f(v)}{w-v}$ — угловой коэфф. хорды /

Билет 71. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции. Характеристика выпуклых функций с помощью касательных.

Теорема

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая, $x \in (a,b)$
Тогда существуют конечные $f'_+(x)$ и $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$

Доказательство. По лемме о трех хордах $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leqslant \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leqslant \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \leqslant \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$
$g(t) = \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ возрастающая при $t \in (a,x)$ и $g(t) \leqslant \frac{f(v)-f(x)}{v-x}$
g возрастает и ограничена сверху, следовательно существует конечный $f'_-(x) = \lim\limits_{t\to x-} g(t) \leqslant \frac{f(v)-f(x)}{v-x}$
$h(v) = \frac{f(v)-f(x)}{v-x}$ возрастает при $v \in (x,b)$
h возрастет и ограничена снизу, тогда существует конечный $f'_+(x) = \lim\limits_{t\to x+} h(v) \geqslant f'_-(x)$ ■



Следствие : 1

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ - выпуклая $\Rightarrow$ в непрерывна на (a,b)

Доказательство. Знаем, что существуют конечные $f'_\pm(x) \Rightarrow f$ непрерывна в x слева и справа $\Rightarrow$ непрерывна ■

Замечание

На концах прерывность может и не быть

Следствие : 2

$f : \langle a, b\rangle$ выпуклая, $x, y \in (a,b), x < y$
Тогда $f'_-(x) \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'_+(y)$

Теорема

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ - дифф. функция.
Тогда f выпукла $\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b)$ график функции f лежит над касательной в x_0

Доказательство. $\Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Хотим доказать, что $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
При $x > x_0$ надо доказать, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant f'(x_0)$ это верно по следствию
При $x < x_0$ надо доказать, что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'(x_0)$, это тоже верно по следствию
$\Leftarrow$ Возьмем $u < v < w$
Знаем, что $f(w) \geqslant f'(v)(w-v)+f(v)$ ($\cdot(v-u) > 0$), аналогично $f(u) \geqslant f'(v)(u-v)+f(v)$ ($\cdot(w-v) > 0$)
$(v - u)f(w) + (w - v)f(u) \geqslant \underbrace{((v - u) + (w - v))}_{=w-v} f(v)$ ■

Замечание

Строгой выпуклости соответствует строгое неравенство $f(x) > f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, при $x \neq x_0$

Билет 72. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных. Примеры.

Теорема : Критерии выпуклости

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непреравна на $\langle a, b\rangle$

1. f дифф на $(a{,}b)$. Тогда f - выпукла $\Leftrightarrow f'$ возрастает
   f - строго выпукла $\Leftrightarrow f'$ строго возрастает

2. f дважды дифф. на $(a{,}b)$. Тогда f - выпукла $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$ во всех точках
   f - строго выпукла $\Leftarrow f'' > 0$ во всех точках

Доказательство. 1. $\Rightarrow$ Если $x < y$, то $f'_-(x) \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'_+(y)$
$\Leftarrow$ Из леммы о трех хордах достаточно взять $u < v < w$ и доказать неравенство $\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leqslant \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$
По теореме Лагранжа $\exists c \in (u{,}v)$, т.ч. $\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'(c)$
$\exists d \in (v{,}w)$, т.ч. $\frac{f(v)-f(w)}{v-w} = f'(d)$
$f'(c) \leqslant f'(g)$ т.к. f' возрастает
2. f - выпукла $\Leftrightarrow f'$ возрастает $\underset{\text{крит. возр}}{\Leftrightarrow} (f')' \geqslant 0$
f - строго выпукла $\Leftrightarrow f'$ строго возрастает $\Leftrightarrow (f')' > 0$ ■

Пример

1. $f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0$
   $f''(x) = a^x(\ln a)^2 > 0 \Rightarrow f$ строго выпуклая

2. $f(x) = -\ln x$, на $(0, +\infty)$
   $f'(x) = -\frac{1}{x}, f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow$ строго выпуклая

3. $f(x) = x^p$, на $(0, +\infty)$, $p \neq 0, p \neq 1$
   $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$, если $p > 1$, то f строго выпукла, если $p < 0$ - строго выпукла, если $0 < p < 1$, тогда строго вогнутая

4. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, на $\mathbb{R}$
   $f'(x) = nx^{n-1}$, если n четно, то f' строго возрастает $\Rightarrow f$ строго выпукла на $\mathbb{R}$

Билет 73. Неравенство Йенсена. Неравенство о средних.

Теорема : Неравенство Йенсена

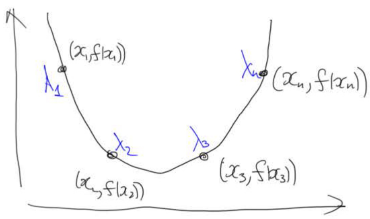
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпуклая, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ и их сумма 1.
Тогда $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$
Если f строго выпукла и не все иксы соответствуют ненулевым λ равны, то знак строгий

Доказательство. Выкинем все нулевые λ и соответствующие им x. Считаем, что $\lambda_k > 0 \quad \forall k$
Индукция по n. База $n = 2$
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$
Надо доказать, что $f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_2)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2)$ это определение выпуклости
Переход $n \to n + 1$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_{n+1} = 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1} > 0$
$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ воспользуемся индукционным предположением

$$f\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots}_{=y}\right) \leqslant \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1} f(x_n)}$$

$(1 - \lambda_{n+1})f(y) \leqslant x_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$
$(1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant x_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$
Пишем определение выпуклости
$\lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1})f(y) \geqslant f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1})$
$(1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ ■

Геометрический смысл $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$
$\lambda_1 \qquad \lambda_n$



$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n))$
центр масс так расст. чирек

Следствие : Неравенство о средних

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$
Тогда $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ и равенство $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Доказательство. Если $x_k = 0$, то левая часть 0, правая часть $\leqslant 0$ и равна 0, только $\forall x = 0$
Можем считать, что все $x_1, \ldots x_n > 0$
Рассмотрим $f(x) = -\ln x$ подставим $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$
$-\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) =$
$-\frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n} = -\ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n})$
$\ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}) \leqslant \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$ и возьмем экспоненту от левой и правой части ■

Билет 74. Неравенство между средними степенными.

Теорема : Неравенство между средними степенными.

$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $p < q$
Тогда $M_p \leqslant M_q$ и равенство $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Доказательство.

- **Шаг 1.** Докажем, что $\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n} \leqslant \left(\frac{y_1^r+y_2^r+\ldots+y_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$; $y_1, \ldots y_n \geqslant 0$ и $r > 1$
  $f(x) = x^r$ строго выпуклая. Йейсен для $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$
  $\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)^r = f(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n) \leqslant \lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2) + \ldots + \lambda_n f(y_n) = \frac{y_1^r+y_2^r+\ldots+y_n^r}{n}$
- **Шаг 2.** $0 < p < q$; $y_k = x_k^p$ и $r = \frac{q}{p} > 1$
  $\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n} \leqslant \left(\frac{(x_1^p)^r+(x_2^p)^r+\ldots+(x_n^p)^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{x_1^q+x_2^q+\ldots+x_n^q}{n}\right)^{\frac{p}{q}}$ и возводим в степень $\frac{1}{p}$
- **Шаг 3.** $p < q < 0, r = \frac{p}{q}, y_k = x_k^q$
  $\frac{x_1^q+x_2^q+\ldots+x_n^q}{n} \leqslant \left(\frac{(x_1^q)^r+(x_2^q)^r+\ldots+(x_n^q)^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{q}{p}}$ и возводим в степень $\frac{1}{q} < 0$
- **Шаг 4.** $p = 0 < q$ подставим в неравенство о средних $x_1^q, x_2^q, \ldots, x_n^q$
  $\sqrt[n]{x_1^q x_2^q \ldots x_n^q} \leqslant \frac{x_1^q+x_2^q+\ldots+x_n^q}{n}$ возводим в степень $\frac{1}{q}$
- **Шаг 5.** $p < q = 0$
  $\sqrt[n]{x_1^p x_2^p \ldots x_n^p} \leqslant \frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}$ возводим в сепень $\frac{1}{p} < 0$
- **Шаг 6.** $p < 0 < q$, $M_p \leqslant M_0 \leqslant M_q$ шаги 4 и 5

∎

Билет 75. Неравенства Гёльдера и Коши–Буняковского.

Теорема : Неравенство Гёльдера

$a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$; $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Тогда $(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$
Равенство $\Leftrightarrow$ наборы $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p$ и $b_1^q, b_2^q, \ldots, b_n^q$ пропорциональны

Доказательство. выкинем индексы, для которых $a_ib_i = 0$
Считаем, что $a_i > 0, b_i > 0\ \forall i$
$B = (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} > 0$
Надо доказать, что $a_1^p + a_2^p + a_3^p + \ldots + a_n^p \geqslant (a_1\frac{b_1}{B} + a_2\frac{b_2}{B} + \cdots + a_n\frac{b_n}{B})^p$
$f(x) = x^p$ - строго выпуклая
$\lambda_1x_1^p + \lambda_2x_2^p + \ldots + \lambda_nx_n^p \geqslant (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n)^p$
Хотим $\begin{cases}\lambda_kx_k^p = a_k^p \\ \lambda_kx_k = a_k\frac{b_k}{B}\end{cases} \Rightarrow x_k^{p-1} = a_k^{p-1}\frac{B}{b_k} \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p - 1 = \frac{p}{q}$
$x_k = a_k\left(\frac{B}{b_k}\right)^{\frac{q}{p}}$
$\lambda_k = \frac{a_k^p}{x_k^p} = \frac{a_k^p}{a_k^p\left(\frac{B}{b_k}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{b_k^q}{B^q} \Rightarrow \lambda = 1$
Случай равенства $\Leftrightarrow x_k$ одинаковы $\Leftrightarrow a_k\left(\frac{B}{b_k}\right)^{\frac{q}{p}} = \texttt{const} \Leftrightarrow b_k^q \cdot \frac{c^p}{B^q} = a_k^p\left(\frac{c^p}{B^q}\texttt{const}\right)$ ∎

Следствие : Неравенство Коши-Буняковского

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$
$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$

Доказательство. $p = q = 2$
$(|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}(|b_1|^2 + \ldots + |b_n|^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_b| \geqslant |a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|$ ∎

Билет 76. Неравенство Минковского.

Теорема : Неравенство Минковского

$a_1, a_2, \dots a_n \geqslant 0$ и $b_1, b_2, \dots b_n \geqslant 0, p \geqslant 1$ Тогда

$$\underbrace{(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}_{=A} + \underbrace{(b_1^p + b_2^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}}_{=B} \geqslant \underbrace{((a_1+b_1)^p + \ldots + (a_n+b_n)^p)^{\frac{1}{p}}}_{=C}$$

Доказательство. Можно считать, что $C > 0, p > 1, q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$C^p = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}a_k + \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} \underset{\text{Гёльдер}}{\leqslant} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{=A} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}((a_k+b_k)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}}_{C^{\frac{p}{q}}}$$

$$C^p \leqslant AC^{\frac{p}{q}} + BC^{\frac{p}{q}}$$

$$C^{p-\frac{p}{q}} \leqslant A + B$$

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

■