

Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

Теорема

$f : \langle a, b \rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \text{sign } x$

Пусть F первообразная f , тогда $F' = f$ принимает значения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу F' должна принимать все значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F первообразная f . Тогда

1. $\forall c \in \mathbb{R} F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ тоже первообразная f , то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных

Обозначение: $\int f = \int f(x)dx$

F - первообразная f , $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$

Проверка

3.

При $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. При $x < 0$: $(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$
11.

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{2} (\ln|1+x|)' - (\ln|1-x|)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

12.

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \text{очев}$$

Определение

A, B - множества функций $\langle a, b \rangle$. $A + B = \{f + g, f \in A, g \in B\}$; $c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}$, $A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f, g - имеют первообразные

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $f + g$ тоже имеют первообразную $\int f + g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3. $\alpha f + \beta g$ тоже имеет первообразную, $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g . Тогда $F + G$ - первообразыне для $f + g$

$$\int(f + g) = F + G + C, \int f = F + C, \int g = G + C$$

Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ - дифф. F - первообразная f . $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0. \text{ (Подставить } \varphi(x) = \alpha x + \beta)$$

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f' имеет первообразную, тогда fg' тоже имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство

H - первообразная для $f'g$. (?) fg - H - первообразая для fg'

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = fg' \blacksquare$$

Площади и определенный интеграл

\mathcal{F} - множество всех ограниченных множеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$
2. $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma(\overline{E}) \leq \sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на E_- и $E_+ \Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
(точки l могут принадлежать как E_- и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2': если $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Но существование такого объекта неочев (сложно)

Теорема

$\sigma(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : \cup_{k=1}^n P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } || \text{ осьм координат} \right\}$ -
квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе
апоЖ

Доказательство

Проверим три свойства

1. Пусть $P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ (?) $\sigma(P)(b-a)(d-c)$
 $\leq \{P\}$ - покрытие $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(c-d)$
 \geq Пусть $\cup_{k=1}^n P_k > P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P|$ Продлим стороны P_k и P , если
мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k , то он разбит на маленькие
прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие
прямоугольники образуют покрытие P , $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников}| \geq$
 $\sum |\text{маленьких прямоугольников, входящих в } P| = |P|$ ■
2. любое покрытие E - это покрытие $\bar{E} \Rightarrow \sigma(\bar{E}) \leq \sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+ . (?) $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
 \leq Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^m P_k^+ > E_+$, такое что $\sum_{k=1}^m |P_k^+| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^n P_i^- > E_-$, такое что
 $\sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_-) = \varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+, P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-$ - образуют покрытие E , значит
 $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^m |P_k^+| + \sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$, устремим
 ε к нулю.
 \geq Пусть есть P_1, \dots, P_n - покрытие E . Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при
помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми)
Тогда P_1^+, \dots, P_n^+ - покрытие E_+ , а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^n |P_k| =$
 $\sum_{k=1}^n |P_k^+| + \sum_{k=1}^n |P_k^-| \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем
что хотели

Замечания

1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |P_k| \right\}$
Если $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$, но $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в \mathbb{R}^3 можно разделить на 5 непересекающихся частей,
применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить
два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная, $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$

Свойства

1. $f_{\pm} \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}, f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной, то f_+ и f_- были непрерывны

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $f \geq 0$, пографик f - это $P_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

Определение

$f \in C[a, b]$. $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

/__/__
 (o.o)
 > ^ <

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b - a)$
4. $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$, $(-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$,
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = - \int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma(P_f)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f$, $f_- = 0$
6. Если $f \geq 0$, $f \in C[a, b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a, b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:
 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]$
 $\int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \sigma([x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Обозначение $P_g([\alpha, \beta]) := \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$

Доказательство

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b])) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Следствие

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b \text{ Тогда } \int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f \text{ (индукция)}$$

Теорема монотонность

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство

$$f_+ = \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}, \text{аналогично } f_- = \max\{0, -f\} \geq \max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) \leq \sigma(P_{g_+}), \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g$$

Следствия

1.

$$f \in C[a, b] \text{ Тогда } (b - a) \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Доказательство

$$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b - a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b - a)$$

2.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Теорема о среднем

$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

Доказательство:

$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение

Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним пределом

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int_a^x f$, $a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним пределом

$\Psi(x) := \int_x^b f$, $a \leq x \leq b$

Замечание:

1. $\Psi(x) = 0$

2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b f$

Теорема Барроу

$f \in C[a, b]$, $\Phi(x) := \int_a^x f$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство

$\Phi_+'(x) = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{1}{y - x} \int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f(c_y)$, $c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y \rightarrow x_+} f(c_y) = f(x)$

Если y_n убывает к x , то $c_{y_n} \rightarrow x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f(c_{y_n}) \rightarrow f(x)$

Для $\Phi_-'(x)$ аналогично

Следствие 1

$f \in C[a, b]$, $\Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$

Доказательство

$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -\Phi'(x) = -f(x)$

Следствие 2

$f \in C(a, b)$, тогда у f есть первообразная

Доказательство

Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x \geq c \\ -\Psi(x) & \text{при } x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C[a, b]$, F - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) := \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a$ $\int_a^b f := -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказательство

F, G - первообразная для f, g

$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$

$(\alpha F + \beta G)^{\wedge} = \alpha F^{\wedge} + \beta G^{\wedge} = \alpha f + \beta g$

$$\stackrel{\text{Н.Л}}{\Rightarrow} \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G \Big|_a^b = \alpha \cdot F \Big|_a^b + \beta G \Big|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Теорема формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b fg^{\wedge} = fg \Big|_a^b - \int_a^b f^{\wedge} g$

Доказательство

H - первообразная для $f^{\wedge} g \Rightarrow fg - H$ - первообразная для fg^{\wedge}

$$(fg - H)^{\wedge} = (fg)^{\wedge} - H^{\wedge} = f^{\wedge} g + fg^{\wedge} - f^{\wedge} g = fg^{\wedge}$$

$$\int fg^{\wedge} = (fg - H) \Big|_a^b = fg \Big|_a^b - H \Big|_a^b = fg \Big|_a^b - \int_a^b f^{\wedge} g$$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b] \varphi \in C^1[c, d], p, q \in [c, d]$

Тогда $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная $f, F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$$(F(\varphi(t)))^{\wedge} = F^{\wedge}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)$$

$$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \Big|_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример

$$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4} \right) dt, \varphi(t) = t^2, \varphi'(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan|_{a^2}^{b^2}$$

Продолжение формулы интегрирования по частям

Пример

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2} - x) dx \mid \varphi(x) := y = \frac{\pi}{2} - x \mid =$$

$$- \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x + \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\cos x)^\wedge dx &= - \left(\underbrace{\sin^{n-1} \cos|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x dx}_{1-\sin^2 x} \right) = (n-1) \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) \\
W_n &= \frac{n-1}{n} W_{n-2} \\
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

Формула Валлиса

$$\lim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
\text{на } [0, \frac{\pi}{2}] \sin^{2n} &\geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} \\
W_{2n} &\geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2} \\
\frac{\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n)!!}{(2n)!!}} &\geq \frac{\pi \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\
\frac{\pi}{2} &\geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\
\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 &\cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
C_{2n}^n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!} \\
(2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n(n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\begin{aligned}
\text{Формула Валлиса } &\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$\begin{aligned}
f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle \\
\text{Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt}_{I:=}
\end{aligned}$$

Доказательство

Индукция по n

База $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

Переход $n \rightarrow n+1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt}_{I:=}$$

$I =$

$$u = f^{(n+1)}, u' = f^{(n+2)}, v = (x - t)^n, v' = -\frac{(x-t)^n}{n+1}$$

$$I = \int_{x_0}^x uv' - uv \Big|_{x_0}^x = \underbrace{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x - t)^{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x}}_{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n+1} (x - t)^{(n+1)} dt$$

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t) (x - t)^{n+1} dt$$

Пример

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

Наблюдение: эта штука точно положительна, значит интегральчик точно положительный
Свойства:

$$1. 0 < H_j \leq \frac{1}{j!}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cos x dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j}}{j!}$$

$$2. \text{ Если } c \in \mathbb{R}, \text{ то } c^j H_j \rightarrow 0, \text{ так как } 0 \leq |c^j H_j| \leq \frac{\left(|c| \frac{\pi^2}{4} \right)^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$3. H_0 = 1, H_1 = 2$$

$$4. H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}, \text{ при } j \geq 2$$

$$\text{Доказательство: } j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

$$u = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j, v' = \cos x, u' = -2xj \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{(j-1)}, v = \sin x$$

$$\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x}_{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_{x=0} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx}$$

$$u = x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}, v' = \sin x, v = -\cos x, u' = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1)x^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2}$$

$$x = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j, = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} + 2(j-1)\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}$$

подставляем в изначальный интеграл:

$$= 2j \left(x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \left(\frac{\pi^2}{4} \right) 2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = j!$$

$$j! H_j = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - 2j \frac{\pi^2}{4} 2(j-1)(j-2)! H_{j-2}$$

$$H_j = 2(2j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

Теорема Ламберта

π и π^2 - иррациональное число

Доказательство

От противного. Предположим, что $\pi^2 = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$

Проверим, что тогда $n^j H_j$ - целое число По индукции по j . База $j = 0, j = 1$ очевидный

Переход $j-2, j-1 \rightarrow j$

$$n^j H_j = \underbrace{(4j-2) \cdot n \cdot n^{j-1} H_j - 1 - \underbrace{n^2 \pi^2}_{=m^2 n} \underbrace{n^{j-2} H_{j-2}}_{\text{целое}}} \text{ - индукционное предположение}$$

Понимаем, что $n^j H_j$ - целое $n^j H_j > 0 \Rightarrow -n^j H_j \geq 1$, с другой стороны, если воспользуемся свойством номер 2 $n^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, противоречие :(

Интегральные суммы

Определение равномерно непрерывной функции

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание

f непрерывна во всех точках из E означает, что $\forall y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Примеры

1. \sin и \cos равномерно непрерывны на \mathbb{R} , $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит

2. $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывная на \mathbb{R}

Возьмем $\varepsilon = 1$: Проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = \left(x + \frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 = \frac{\delta^2}{4} > 1$

$$x^2 = x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4} > x \cdot \delta \text{ для } x = \frac{1}{\delta} \text{ все плохо}$$

$$f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) > 1$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$

Возьмем $\varepsilon = 1$ Проверим, что никакое $0 < \delta < 1$, $x = \frac{\delta}{2}$, $y = \delta$, $f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$

Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева с константой M , если $\forall x, y \in E |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Замечание

1. липшицевость \Rightarrow равномерно непрерывна (просто берем в качестве $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$)

2. Если $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f'| \leq M$ на (a, b) , то f липшицева с константой M и, в частности, равномерно непрерывна

Теорема Кантора

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

Доказательство

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Возьмем $\varepsilon > 0$, предположим, что никакое δ для него не подходит

$\delta = 1$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_1, y_1 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < 1$, но при этом $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_2, y_2 \in [a, b]$, такое что $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит \Rightarrow найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$, такие что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
 $y_n \in [a, b]$ ограничена, последовательность по Т. Б-В выберем подпоследовательность $y_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$

$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} + \lim(x_{n_k} - y_{n_k}) = c + 0 = c$

f непрерывна в c означает, что $\lim f(x_{n_k}) = f(c)$, аналогично $\lim f(y_{n_k}) = f(c)$, тогда перепад разности $\lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но с другой стороны $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$
противоречие, значит предположение не верно и какое-то δ подойдет

Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta), \delta > 0, \omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \wedge |x - y| \leq \delta\}$

Свойства

1. $\omega_f(0) = 0$ и $\omega_f(\delta) \geq 0$

2. ω_f нестрого возрастает

3. $\omega_f(|x - y|) \geq |f(x) - f(y)|$

4. Если f липшицева с константой M , то $\omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot \delta$

5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$

Доказательство:

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, тогда если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, тогда $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\}$

Следовательно, при $0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} 0 \leq \omega_f(t) \leq \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega_f(t) = 0$

$\Leftarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ по $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \varepsilon$

$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$ (если $|x - y| < \delta$) $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна

6. Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывна, то $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ Доказательство: Кантора и свойство 5

Определение Дробление отрезка (разбиение, пунктир)

Такой набор точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Будем обозначать $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Мелкость (ранг) дробления

$|\tau| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ - длина самого большого отрезка из нарезки

Оснащение дробления - набор точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такое что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Определение Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τ - его дробление, ξ - оснащение этого дробления $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема об интегральной сумме

$f \in C[a, b]$, тогда $\Delta := \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b-a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство

$$\int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f_t - f(\xi_k)) dt$$

$$\Delta \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dt = \int_a^b \omega_f(|\tau|) dt = \omega_f(|\tau|)(b-a)$$

$$|t - \xi_k| \leq x_k - x_{k-1} \leq |\tau| \Rightarrow |f(t) - f(\xi_k)| \leq \omega_f(|\tau|)$$

Следствие

$f \in C[a, b]$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и \forall его оснащения $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

Следствие

$f \in C[a, b]$ и τ_n - последовательность дроблений, такая что τ_n стремиться к 0

Тогда $\forall \xi_n$ - оснащение дроблений τ_n $S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$

Пример

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ - непрерывная функция

дробление $[0, 1]$ на равные отрезки $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \overbrace{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^p = \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

$$\text{Выход } S_p(n) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$$