

Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

Теорема

$f : \langle a, b \rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \text{sign } x$

Пусть F первообразная f , тогда $F' = f$ принимает значения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу F' должна принимать все значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F первообразная f . Тогда

1. $\forall c \in \mathbb{R} F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ тоже первообразная f , то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных

Обозначение: $\int f = \int f(x)dx$

F - первообразная f , $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$

Проверка

3.

При $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. При $x < 0$: $(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$

11.

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} ((\ln|1+x|)' - (\ln|1-x|)') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

12.

$$\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \text{очев}$$

Определение

A, B - множества функция $\langle a, b \rangle$. $A + B = \{f + g, f \in A, g \in B\}$; $c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}$, $A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f, g - имеют первообразные

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $f + g$ тоже имеют первообразную $\int f + g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3. $\alpha f + \beta g$ тоже имеет первообразную, $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g . Тогда $F + G$ - первообразные для $f + g$

$$\int (f + g) = F + G + C, \int f = F + C, \int g = G + C$$

Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ - дифф. F - первообразная f . $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0. \text{ (Подставить } \varphi(x) = \alpha x + \beta \text{)}$$

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $f'g$ имеет первообразную, тогда fg' тоже имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство

H - первообразная для $f'g$. (?) $fg - H$ - первообразная для fg'

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = fg' \blacksquare$$

Площади и определенный интеграл

\mathcal{F} - множество всех ограниченных помножеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$
2. $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma(\overline{E}) \leq \sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на E_- и E_+ $\Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
(точки l могут принадлежать как E_- и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2': если $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Но существование такого объекта неочев (сложно)

Теорема

$\sigma(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : \cup_{k=1}^n P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } \parallel \text{ осям координат} \right\}$ - квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе апоЖ

Доказательство

Проверим три свойства

1. Пусть $P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ (?) $\sigma(P) = (b-a)(d-c)$
 $\leq \{P\}$ - покрытие $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(d-c)$
 \geq Пусть $\cup_{k=1}^n P_k \supset P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P|$ Продлим стороны P_k и P , если мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k , то он разбит на маленькие прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие прямоугольники образуют покрытие P , $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников}| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников, входящих в } P| = |P|$ ■
2. любое покрытие E - это покрытие $\bar{E} \Rightarrow \sigma(\bar{E}) \leq \sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+ . (?) $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
 \leq Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^m P_k^+ \supset E_+$, такое что $\sum_{k=1}^m |P_k^+| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^n P_i^- \supset E_-$, такое что $\sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_-) + \varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+, P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-$ образуют покрытие E , значит $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^m |P_k^+| + \sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$, устремим ε к нулю.
 \geq Пусть есть P_1, \dots, P_n - покрытие E . Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми)
Тогда P_1^+, \dots, P_n^+ - покрытие E_+ , а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^n |P_k| = \sum_{k=1}^n |P_k^+| + \sum_{k=1}^n |P_k^-| \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем что хотели

Замечания

1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |P_k| \right\}$
Если $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$, но $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в \mathbb{R}^3 можно разделить на 5 непересекающихся частей, применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная, $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$

Свойства

1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной, то f_+ и f_- были непрерывны

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, пографик f - это $P_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

Определение

$f \in C[a, b]$. $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

$$\begin{array}{c} \wedge _ \wedge \\ (\ 0, 0 \) \\ > \ ^ < \end{array}$$

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b - a)$
4. $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$, $(-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$,
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma(P_f)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f$, $f_- = 0$
6. Если $f \geq 0$, $f \in C[a, b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a, b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :$
 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]$
 $\int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \sigma\left([x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]\right) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\text{Обозначение } P_g([\alpha, \beta]) := \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

Доказательство

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b])) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Следствие

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b \text{ Тогда } \int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f \text{ (индукция)}$$

Теорема монотонность

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство

$$\begin{aligned} f_+ &= \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}, \text{аналогично } f_- = \max\{0, -f\} \geq \\ &\max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \\ \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) &\leq \sigma(P_{g_+}), \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g \end{aligned}$$

Следствия

1.

$$f \in C[a, b] \text{ Тогда } (b - a) \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Доказательство

$$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b - a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b - a)$$

2.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Теорема о среднем

$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b - a)f(c)$

Доказательство:

$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение

Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним пределом

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int_a^x f$, $a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним пределом

$$\Psi(x) := \int_x^b f, a \leq x \leq b$$

Замечание:

1. $\Psi(x) = 0$
2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b (f)$

Теорема Барроу

$$f \in C[a, b], \Phi(x) := \int_a^x f$$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство

$\Phi'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{1}{y - x} \int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f(c_y)$, $c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y \rightarrow x_+} f(c_y) = f(x)$

Если y_n убывает к x , то $c_{y_n} \rightarrow x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f(c_{y_n}) \rightarrow f(x)$

Для $\Phi'_-(x)$ аналогично

Следствие 1

$$f \in C[a, b], \Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$$

Доказательство

$$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -\Phi'(x) = -f(x)$$

Следствие 2

$f \in C\langle a, b \rangle$, тогда у f есть первообразная

Доказательство

Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x \geq c \\ -\Psi(x) & \text{при } x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C[a, b]$, F - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) := \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a$ $\int_a^b f := -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказательство

F, G - первообразная для f, g

$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$

$\stackrel{Н.Л.}{\Rightarrow} \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G \Big|_a^b = \alpha \cdot F \Big|_a^b + \beta G \Big|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Теорема формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$

Доказательство

H - первообразная для $f' g \Rightarrow f g - H$ - первообразная для $f g'$

$(f g - H)' = (f g)' - H' = f' g + f g' - f' g = f g'$

$\int f g' = (f g - H) \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - H \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b] \varphi \in C^1[a, b], p, q \in [c, d]$

Тогда $\int_p^q f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная $f, F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f\{\varphi(t)\} \varphi'(t)$

$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \Big|_a^b = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Пример

$$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4} \right) dt, \varphi(t) = t^2, \varphi'(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ = \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \Big|_{a^2}^{b^2}$$

Продолжение формулы интегрирования по частям

Пример

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx \mid \varphi(x) := y = \frac{\pi}{2} - x \mid = \\ = - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$w W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \sin^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4} \quad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\cos x)' dx = - \left(\underbrace{\sin^{n-1} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x dx}_{1 - \sin^2 x} \right) = (n-1) \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right) \\
& W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \\
& W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
& W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}
\end{aligned}$$

Формула Валлиса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
& \text{на } [0, \frac{\pi}{2}] \sin^{2n} \geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2} \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} \\
& W_{2n} \geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2} \\
& \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\
& \frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\
& \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) \cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
C_{2n}^n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!} \\
(2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!
\end{aligned}$$

$$\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n(n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Формула Валлиса } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
& \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle$$

$$\text{Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

Доказательство

Индукция по n

База $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

Переход $n \rightarrow n+1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt}_{I :=}$$

$I =$

$$u = f^{(n+1)}, u' = f^{(n+2)}, v = (x-t)^n, v' = -\frac{(x-t)^n}{n+1}$$

$$I = \int_{x_0}^x uv' = uv \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u'v = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x-t)^{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n+1} (x-t)^{n+1} dt$$

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(x_0) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) (x-t)^{n+1} dt$$

Пример

$$H_j := \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$$

Наблюдение: эта штука точно положительна, значит интегральчик точно положительный
Свойства:

1. $0 < H_j \leq \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2j} \cos x dx = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2j}}{j!}$
2. Если $c \in \mathbb{R}$, то $c^j H_j \rightarrow 0$, так как $0 \leq |c^j H_j| \leq \frac{(|c| \frac{\pi^2}{4})^j}{j!} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$
3. $H_0 = 1, H_1 = 2$
4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \geq 2$

Доказательство: $j! H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \cos x dx$

$$u = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j, v = \cos x, u' = -2x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}, v' = -\sin x$$

$$\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^j \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + 2j \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \sin x dx$$

$$u = x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1}, v = \sin x, v' = \cos x, u' = \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} - 2(j-1)x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2}$$

подставляем в изначальный интеграл:

$$= 2j \left(x \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} (-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-1} \cos x dx - \left(\frac{\pi^2}{4} \right) 2(j-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - x^2 \right)^{j-2} \cos x dx \right) = j!$$

$$j! H_j = 2j(2j-1)(j-1)! H_{j-1} - 2j \frac{\pi^2}{4} 2(j-1)(j-2)! H_{j-2}$$

$$H_j = 2(2j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$$

Теорема Ламберта

π и π^2 - иррациональное число

Доказательство

От противного. Предположим, что $\pi^2 = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$

Проверим, что тогда $n^j H_j$ - целое число По индукции по j . База $j = 0, j = 1$ очевидный

Переход $j-2, j-1 \rightarrow j$

$$n^j H_j = \underbrace{(4j-2) \cdot n \cdot n^{j-1} H_{j-1}}_{\text{целое}} - \underbrace{n^2 \pi^2}_{=m^2/n \text{ целое}} n^{j-2} H_{j-2} \text{ - индукционное предположение}$$

Понимаем, что $n^j H_j$ - целое $n^j H_j > 0 \Rightarrow -n^j H_j \geq 1$, с другой стороны, если воспользуемся свойством номер 2 $n^j H_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, противоречие :

Интегральные суммы

Определение равномерно непрерывной функции

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание

f непрерывна во всех точках из E означает, что $\forall y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in E, \text{ т.ч. } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Примеры

1. \sin и \cos равномерно непрерывны на \mathbb{R} , $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывная на \mathbb{R}
Возьмем $\varepsilon = 1$: Проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит $f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x) = (x + \frac{\delta}{2})^2 -$

$$x^2 = x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4} > x \cdot \delta \text{ для } x = \frac{1}{\delta} \text{ все плохо}$$

$$f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) > 1$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$

Возьмем $\varepsilon = 1$ Проверим, что никакое $0 < \delta < 1$, $x = \frac{\delta}{2}$, $y = \delta$, $f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$

Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева с константой M , если $\forall x, y \in E |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Замечание

1. липшицевость \Rightarrow равномерно непрерывна (просто берем в качестве $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$)
2. Если $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f'| \leq M$ на $\langle a, b \rangle$, то f липшицева с константой M и, в частости, равномерно непрерывна

Теорема Кантора

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

Доказательство

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Возьмем $\varepsilon > 0$, предположим, что никакое δ для него не подходит

$\delta = 1$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_1, y_1 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < 1$, но при этом $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_2, y_2 \in [a, b]$, такое что $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

...

$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит \Rightarrow найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$, такие что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
 $y_n \in [a, b]$ ограничена, последовательность по Т. Б-В выберем подпоследовательность $y_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]$

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} + \lim(x_{n_k} - y_{n_k}) = c + 0 = c$$

f непрерывна в c означает, что $\lim f(x_{n_k}) = f(c)$, аналогично $f(y_{n_k}) = f(c)$, тогда пердел разности $\lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$, но с другой стороны $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$

противоречие, значит предположение не верно и какое-то δ подойдет

Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta)$, $\delta > 0$, $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \wedge |x - y| \leq \delta\}$

Свойства

1. $\omega_f(0) = 0$ и $\omega_f(\delta) \geq 0$
2. ω_f нестрого возрастает
3. $\omega_f(|x - y|) \geq |f(x) - f(y)|$
4. Если f липшицева с константой M , то $\omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta$ $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot \delta$
5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$

Доказательство:

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ тогда если } |x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ тогда } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\}$$

$$\text{Следовательно, при } 0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} \quad 0 \leq \omega_f(t) \leq \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega_f(t) = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0 \text{ по } \varepsilon > 0 \text{ выберем такое } \delta > 0, \text{ что } \omega_f(\delta) < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon \text{ (если } |x - y| < \delta) \Rightarrow f \text{ равномерно непрерывна}$$

6. Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывна, то $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0$ Доказательство: Кантора и свойство 5

Определение Дробление отрезка (разбиение, пунктир)

Такой набор точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Будем обозначать $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Мелкость (ранг) дробления

$|\tau| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ - длина самого большого отрезка из нарезки

Оснащение дробления - набор точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такое что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Определение Сумма Римана (интегральная сумма)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τ - его дробление, ξ - оснащение этого дробления $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема об интегральной сумме

$f \in C[a, b]$, тогда $\Delta := \left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство

$$\int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) dt$$

$$\Delta \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)| dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|) dt = \int_a^b \omega_f(|\tau|) dt = \omega_f(|\tau|)(b - a)$$

$$|t - \xi_k| \leq x_k - x_{k-1} \leq |\tau| \Rightarrow |f(t) - f(\xi_k)| \leq \omega_f(|\tau|)$$

Следствие

$f \in C[a, b]$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и \forall его оснащения $\left| \int_a^b f - S(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$

Следствие

$f \in C[a, b]$ и τ_n - последовательность дроблений, такая что τ_n стремиться к 0

Тогда $\forall \xi_n$ - оснащение дроблений $\tau_n \quad S(f, \tau_n, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f$

Пример

$$S_p(n) := 1^p + 2^p + \dots + n^p, p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ - непрерывная функция

дробление $[0, 1]$ на равные отрезки $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^p = \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$$

$$\text{Вывод } S_p(n) \sim \frac{n^{p+1} \left(\frac{k}{n}\right)^p}{p+1}$$