

## 0.1 Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями

$a \in E, f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , они непрерывны в точке  $a$ , тогда

1.  $f \pm g$
2.  $f \cdot g$
3.  $|f|$
4. Если  $g(a) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$

непрерывны в точке  $a$

Доказательство:

Если  $a$  не предельная точка  $E$ , то все функции, заданные на  $E$  непрерывны в точке  $a$

Если  $a$  предельная точка, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$  и далее по теореме об арифметических действиях с пределами

### 0.1.1 Следствия

1. Многочлены непрерывны на  $\mathbb{R}$
2. Рациональные функции (= отношение двух многочленов) непрерывны во всех точках, где знаменатель не нулится

Доказательство:

1.  $f(x) = c, g(x) = x$  непрерывны и дальше их перемножаем и складываем
2. из 4 пункта теоремы

## 0.2 Теорема о пределе композиции

$f : D \rightarrow E, a$  - предельная точка  $D, b := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$g : E \rightarrow \mathbb{R}$  и непрерывна в точке  $b$ . Тогда предел композиции  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$

Доказательство:

Пишем определение по Гейне. Возьмем какую-то последовательность  $x_n \neq a, x_n \in D$ , т.ч.  $\lim x_n = a$ . Из  $b := \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \lim f(x_n) = b$ , из непрерывности  $g$  в точке  $b$ , записанной по Гейне получим  $\lim g(f(x_n)) = g(b)$

### 0.2.1 Следствие о непрерывности композиции

Нужно, чтобы  $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, f$  непрерывна в точке  $a, g$  непрерывна в точке  $f(a)$ , тогда  $g \circ f$  непрерывна в точке  $a$

Доказательство:  $b = f(a)$

Пример  $f(x) := x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, g(x) := \begin{cases} 0 & \text{при } x=0 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$g(f(x))$  не имеет предела в 0

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, f(x_n) = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n) = 0, g(f(x_n)) = g(0) = 0 \rightarrow 0$$

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0, f(y_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, g(f(y_n)) = g\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = 1 \rightarrow 1$$
 пупу... проблема в том, что  $g(x)$  не непрерывна в нуле. Грустняк

## 0.3 Теорема

Если  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

Тут должна быть картинка

### 0.3.1 Следствия

1.  $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$  и равенство только при  $x = 0$
2.  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$   
 $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

Доказательство:

1.  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$  и равенство только при  $x = 0$

Если  $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ , то все очевидно  $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

2.  $|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot \left| \cos \left( x + \frac{y}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|$ . Для второй формулы аналогично

## 0.4 Теорема

1.  $\sin$  и  $\cos$  непрерывны на  $\mathbb{R}$
2.  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$  непрерывны на своей области определения

Доказательство:

1. Возьмем  $a \in \mathbb{R}$  и покажем, что  $\sin$  непрерывна в точке  $a$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , такое что  $|x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$ . Заметим, что  $\delta = \varepsilon$  подходит  $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$
2.  $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$  область определения - то, где  $\cos \neq 0$ , а тогда при делении сохраняется непрерывность

## 0.5 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

При  $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$  и  $\frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  и при  $-\frac{\pi}{2} < x \neq 0 < \frac{\pi}{2}$   
 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$  и теорема о двух милиционерах ■

## 0.6 Теорема Вейерштрасса

Непрерывна на отрезке функция обязательно принимает на отрезке наибольшее и наименьшее значения. В частности, он ограничена.

Доказательство:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках

Надо доказать, что найдется  $c \in [a, b]$ , такая что  $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$  (аналогично про самое маленькое)

Рассмотрим множество  $A := \{f(x) : x \in [a, b]\}$ , у него есть  $s := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \in \overline{\mathbb{R}}$ , возьмем какую-то последовательность, которая снизу подходит к  $s$  и строго возрастает (если  $s \in \mathbb{R}$ , то например  $s_n := s - \frac{1}{n}$ , а если  $s = +\infty$ , то например  $s_n = n$ ), тогда  $s_n < s$ , значит  $s_n$  не верхняя граница  $A$ , тогда найдется какой-то  $x_n \in [a, b]$ , такой что  $f(x_n) > s_n$

$x_n$  - ограниченная последовательность  $\Rightarrow$  из нее можно выбрать подпоследовательность  $x_{n_k}$ , имеющую предел  $c := \lim x_{n_k}$ ,  $a \leq x_{n_k} \leq b$ , тогда  $c \in [a, b]$ . Тогда  $f$  непрерывна в точке  $c \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(c)$ ,  $s_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s$ , отсюда делаем вывод, что последовательность  $x_{n_k}$  стремится к  $s$ , тогда  $f(c) = s$  (предел единственный). Следственно  $s \in \mathbb{R}$  и  $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \Rightarrow f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$

### 0.6.1 Замечания

1. Важно, что отрезки, интервалы, полуинтервалы и прочая ересь не подходит (например,  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$  это неограниченная функция)
2. Важно, что функция непрерывна во всех точках отрезка, без этого не верно

## 0.7 Теорема Больцано-Коши

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках

1. Если значения в точках  $a$  и  $b$  разных знаков, то найдется такая точка  $c \in (a, b)$ , такая что  $f(c) = 0$
2. Если  $C$  лежит между  $f(a)$  и  $f(b)$ , то найдется такая  $c \in (a, b)$ , такая что  $f(c) = C$

Доказательство:

1. Можно считать, что  $f(a) < 0 < f(b)$ . Ну тут крч делаем бинпоиск и там тривочев (типа стягивающиеся отрезки и т.п. и значение точно нуль, потому что иначе функция не непрерывна) ■
2. Рассматриваем  $g(x) := f(x) - C$  и сводим к предыдущему случаю

### 0.7.1 Замечание.

1. Нужна непрерывная во всех точках

Обозначение  $\langle a, b \rangle$  обозначение  $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$

## 0.8 Теорема

Непрерывный образ отрезка - отрезок

Доказательство:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывный во всех точках. Надо доказать, что  $f([a, b])$  - отрезок. По т. Вейерштрасса найдется  $p, r \in [a, b]$ , такие что  $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \forall x \in [a, b]$

Рассмотрим функцию  $f$  на отрезке  $[p, q]$  (или  $[q, p]$ )

Тогда для любого  $C$  лежащего между  $f(p)$  и  $f(q)$  найдется  $c \in [p, q]$ , где  $f(c) = C \Rightarrow f([a, b]) = [f(p), f(q)]$

## 0.9 Теорема

Непрерывный образ промежутка - промежуток (возможно дурного вида)

Доказательство:  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна во всех точках.

$m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \in \mathbb{R}$  и  $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M]$

Осталось понять, что  $f(\langle a, b \rangle) \supset (m, M)$

Возьмем  $y \in (m, M)$ .  $y < M \Rightarrow y$  не верхняя граница для  $\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow$  найдется  $q \in \langle a, b \rangle$ , для которого  $f(q) > y$ ,

$y > m \Rightarrow y$  не нижняя граница для  $\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow$  найдется  $p \in \langle a, b \rangle$ , для которого  $f(p) < y$ , то есть  $[p, q] \subset \langle a, b \rangle$  и  $f(p) < y < f(q) \Rightarrow$  по теореме Б-Л найдется  $c \in [p, q]$ , такое что  $f(c) = y$

### 0.9.1 Замечание

Промежуток может получиться любого вида

## 0.10 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  инъекция

$g : f(\langle a, b \rangle) \rightarrow \langle a, b \rangle$  - обратная функция, если  $f \circ g$  и  $g \circ f$  тождественная функция, то есть  $f(g(x)) = x, g(f(x)) = x$

## 0.11 Лемма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна

Если  $f(\langle a, b \rangle)$  - промежуток, то  $f$  - непрерывна во всех точках

Доказательство:

Пусть  $f$  возрастает. Возьмем  $c \in \langle a, b \rangle$ , и докажем, что  $f$  - непрерывна в точке  $c$

Если  $x < c$ , то  $f(x) \leq f(c) \Rightarrow$  на  $\langle a, c \rangle$  возрастает и ограничена сверху  $f(c) \Rightarrow$  существует  $A := \lim_{x \rightarrow c-} f(x) \leq f(c)$

Проверим, что  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$  От противного

Пусть  $A < f(c)$ . Возьмем  $y \in (A, f(c))$ . Тогда  $f(x) \neq y \forall x$ :

Если  $x \geq c$ , то  $f(x) \geq f(c) > y$

Если  $x < c$ , то  $f(x) \leq \sup_{x < c} f(x) = A < y$

$\Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$  не промежуток

Аналогично  $f(c) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$

## 0.12 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и строго монотонна  $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ ,  $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$

Тогда

1.  $f$  обратима и  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2.  $f^{-1}$  строго монотонна
3.  $f^{-1}$  непрерывна во всех точках

Доказательство:

1.  $f$  биекция между  $\langle a, b \rangle$  и  $\langle m, M \rangle$  инъекция из строгой монотонности, сюръекция из предыдущей теоремы
2. Пусть  $f$  строго возрастает  
 $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$   
 $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$   
 $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$   
 $\Rightarrow f^{-1}$  строго возрастает
3. 1 + 2 + лемма

## 1 Параграф 3 Элементарные функции

1.  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  непрерывна и строго возрастает, тогда  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  непрерывна и строго возрастает
2.  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ну понять можно, что будет происходить
3.  $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  очевидно
4.  $\operatorname{ctg}$  тривиально

### 1.1 Определение

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

$\exp n = \exp(1 + 1 + \dots + 1) = (\exp 1)^n \rightarrow +\infty$

$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \rightarrow 0$

$\exp$  строго возрастает и непрерывна, тогда существует обратная функция (назовем ее  $\ln$ )

$\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и строго возрастает

Свойства:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$
2.  $\ln ab = \ln a + \ln b$
3.  $\ln(1+x) \leq x$  при  $x > -1$
4.  $\ln(1+x) \geq 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ , если  $-1 < x < e - 1$

Доказательство:

$$y := \ln(1+x), \exp y = 1+x, \exp y \leq \frac{1}{1-y} \Rightarrow q - y \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq y$$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ при } -1 < x < e - 1$$

При  $x > 0$ :

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$$

При  $x < 0$ :

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1$$

### 1.2 Определение

$a^b := \exp(b \cdot \ln a)$ ,  $a > 0$

### 1.2.1 Замечание

1.  $b = n \in \mathbb{N}, a^n = \exp(n \ln a) = \exp\left(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_n\right) = \exp(\ln a) \cdot \dots \cdot \exp(\ln a) = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$
2.  $b = -n: \exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
3.  $b = \frac{1}{n}: \exp\left(\frac{1}{n} \ln a + \frac{1}{n} \ln a + \dots + \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a}$
4. Если  $b = \frac{k}{n}$ , то  $a^{\frac{k}{n}} = \exp\left(k \cdot \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Упражнение: Если  $\lim b_n = b, b_n \in \mathbb{Q}$ , то  $\lim a^{b_n} = a^b$

### 1.2.2 Следствия

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство:

1.  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$  т.к экспонента непрерывна, то предел можно записать внутри =  $\exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp 1 = e$

2. Проверим по Гейне. Возьмем  $x_n \rightarrow \infty$ , тогда  $y_n := \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ , тогда  $\lim (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$

## 1.3 Показательная функция

$a^x := \exp(x \ln a) : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

### 1.3.1 Свойства

1. Непрерывна (композиция непрерывных функций)
2. при  $a > 1$  строго возрастает, при  $a < 1$  строго убывает.
3.  $a^x \geq 1 + x \ln a$  т.к  $(\exp y \geq 1 + y)$

### 1.4 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство:

$$a^x - 1 \geq x \ln a$$

$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \geq 1 - x \ln a$ , тогда  $a^x \leq \frac{1}{1-x \ln a}$ , если  $x \ln a < 1$ . Снизу  $x \ln a \leq a^x - 1 \leq \frac{1}{1-x \ln a} - 1 = \frac{x \ln a}{1-x \ln a}$

$$\ln a \leq \frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{\ln(a)}{1-x \ln a} \text{ при } x > 0$$

если  $x < 0$ , то  $\ln a \geq \frac{a^x - 1}{x} \geq \frac{\ln a}{1-x \ln a}$ , тогда если  $x \rightarrow 0$  получаем, что  $\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

## 1.5 Степенная функция

$x^p := \exp(p \ln x) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

### 1.5.1 Свойства

1. Непрерывная
2. Монотонная. При  $p > 0$  строго возрастает, при  $p < 0$  строго убывает

### 1.6 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

$(1+x)^p = \exp(p \ln(1+x)) \geq 1 + p \ln(1+x)$ , с другой стороны  $\exp \leq \frac{1}{1-p \ln(1+x)}$  при  $p \ln(1+x) < 1$

1 это заведомо выполнены при  $p x < 1$

$$\frac{p \ln(1+x)}{1-p \ln(1+x)} = \frac{1}{1-p \ln(1+x)-1} \geq (1+x)^p - 1 \geq p \ln(1+x)$$

$\frac{p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}}{1-p \ln(1+x)} \geq \frac{(1+x)^p - 1}{x} \geq p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}, \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1, 1 - p \ln(1+x) \rightarrow 1$  предельный переход и два милиционера

## 2 Сравнение функций

### 2.1 Определение

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $E$

1.  $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$  если существует  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что  $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
2.  $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$  если существует  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ , такое что  $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
3.  $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$ , если  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\varphi$  ограничена, такое что  $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$

### 2.2 Определение

$f = O(g)$  на множестве  $E$ , если найдется  $c$ , такое что  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  при  $x \in E$

#### 2.2.1 Замечание

1.  $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g, \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , если  $g(x) \neq 0$ . Если какой-то  $g(x) = 0$ , то  $f(x) = 0$ , а  $\varphi(x)$  выбираем какой хотим,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  с соглашением, что  $\frac{0}{0} = 1$
2.  $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$  означает  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  с соглашением, что  $\frac{0}{0} = 0$

#### 2.2.2 Свойства

1. « $\sim$ » - отношение эквивалентности

Доказательство:

$$f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ в окрестности точки } a \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi \neq 0 \text{ в окрестности точки } a \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)f(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = 1 \Rightarrow g \underset{x \rightarrow a}{\sim} f$$

Транзитивность  $f \sim g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x), g \sim h \Rightarrow g(x) = \psi(x)h(x)$  в окрестности точки  $a$   
 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x)$

2.  $f_1 \sim g_1$  и  $f_2 \sim g_2$  при  $x \rightarrow a$ , то  $f_1 f_2 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1 g_2$
3.  $f_1 \sim g_1$  и  $f_2 \sim g_2$  при  $x \rightarrow a$  и  $f_2! = 0$  в проколотовой окрестности точки  $a$ , то  $\frac{f_1}{f_2} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$

Доказательство:

$$f_1 = \varphi_1 g_1 \text{ и } f_2 = \varphi_2 g_2 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi_2(x) = 1$$

$$f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 g_1 g_2 \lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) \varphi_2(x) = 1, \text{ также сама для деления}$$

4.  $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g + o(f)$

Доказательство:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g \Leftrightarrow f = g + o(g), \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 0$$

Вторая равносильность:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f), g \sim f \Leftrightarrow g = f + o(f), g \sim f \Leftrightarrow f \sim g, f = g - o(f) = g + o(f)$$

5.  $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$  и  $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Доказательство:

$$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \varphi \text{ ограничена в окрестности точки } a, \text{ то } f = O(g)$$

6.  $f \cdot o(g) = o(fg)$  Доказательство очев (я к сессии его забуду)

7.  $o(f) + o(f) = o(f), O(f) + O(f) = O(f)$

Доказательство:

$$g + h, \text{ где } g = o(f) \text{ и } h = o(f)$$

$$g = o(f) \Rightarrow g = \varphi \cdot f, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

$$h = o(f) \Rightarrow h = \psi f, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$$

$$g + h = (\varphi + \psi)f \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$$

8.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f = b + o(1)$  Что такое  $o(1)$  - это какая-то функция, которая стремится к 0, то есть  $f = b + o(1)$  значит, что  $f(x) - b \rightarrow 0$

#### 2.2.3 Примеры:

Все при  $x \rightarrow 0$

1.  $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^p - 1 \sim px, \operatorname{tg} x \sim x \left( \operatorname{tg} x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos x \sim 1 \right), \arctan \sim x \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \right)$ , по Гейне  $x_n \rightarrow 0$
2.  $\sin x = x + o(x), \ln(1+x) = x + o(x), a^x = 1 + x \ln a + o(x) \quad (a^x - 1 = x \ln a + o(x \ln a) = x \ln a + o(x)), (1+x)^p = 1 + px + o(x), \operatorname{tg} x = x + o(x), \arctan x = x + o(x), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \left( 1 - \cos x = x^2 + o(x^2), 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right)$

## 3 Дифференцируемые функции

### 3.1 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то он называется производной функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$

#### 3.1.1 Замечание

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### 3.2 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

$f$  - дифференцируема в точке  $x_0$ , если существуют  $k \in \mathbb{R}$ , такое что  $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$

#### 3.2.1 Замечание

$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h)$  при  $h \rightarrow 0$

### 3.3 Теорема (критерий дифференцируемости)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

следующие условия равносильны:

1.  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$
2. У функции  $f$  существует конечная производная в точке  $x_0$
3. Существует  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что  $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$  и  $\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$

В случае, когда эти условия выполнены  $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ :  $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \Rightarrow f'(x_0) = k$$

$2 \Rightarrow 3$ :  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$ . Но  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi$

непрерывна в точке  $x_0$

$3 \Rightarrow 1$ :  $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$

$$\varphi(x_0)(x - x_0) + \underbrace{(\varphi(x) - \varphi(x_0))}_{\rightarrow 0} (x - x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow k = \varphi(x_0)$$

### 3.4 Определение. Односторонние производные

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

#### 3.4.1 Замечание

$f'(x_0)$  существует  $\Leftrightarrow$  существуют правая и левая производная и они равны

### 3.5 Примеры

1.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$   
 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$
2.  $f(x) = |x|$   
 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$ , аналогичными преобразованиями получаем, что  $f'_-(0) = -1$ , значит дифф. в точке нет

### 3.6 Утверждение

Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ . Обратное не верно

Доказательство:

$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ ,  $o(x - x_0)$  это функция вида  $\varphi(x)(x - x_0)$ ,  $\varphi(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

### 3.7 Теорема об арифметических действиях с дифференцируемыми функциями

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

1.  $f \pm g$  дифф. в точке  $x_0$  и  $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2.  $fg$  дифф. в точке  $x_0$  и  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. Если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  дифф. в точке  $x_0$  и  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доказательство:

$f, g$  - дифф.  $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ ,  $g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$

1. сложим, получим  $f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (\varphi(x) + \psi(x))(x - x_0)$ ,  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2. 
$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \underbrace{\left( f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0) \right)}_{X(x)}(x - x_0)$$

Нужно доказать, что  $X(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и найти  $X(x_0)$

$$(fg)'(x_0) = X(x_0) = f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0) + \varphi(x_0)\psi(x_0)(x_0 - x_0)$$

3. Поймем, что  $\frac{1}{g}$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} =: X(x)$$

Нужно доказать, что  $X$  непрерывна в точке  $x_0$  и посчитать  $X(x_0)$

$$g \text{ дифференцируема в точке } x_0 \Rightarrow g \text{ непрерывна в точке } x_0, X(x_0) = \frac{-\psi(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

### 3.8 Пример. Уравнение касательной

касательная - предельное положение секущей

$$y = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} + f(x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ уравнение касательной к графику функции } f \text{ в точке } x_0$$

### 3.9 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle, g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \langle a, b \rangle, f$  дифференцируем в точке  $x_0$

$g$  дифференцируем в точке  $f(x_0) =: y_0$

Тогда  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$  Доказательство:

$f$  - дифф. в точке  $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ , где  $\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$

$g$  - дифференцируема в точке  $y_0 \Rightarrow g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$ , где  $\psi$  непрерывна в точке  $y_0$

возьмем  $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)}_{X(x)} \cdot (x - x_0) =$$

Нужно доказать, что  $X(x)$  непрерывна в точке  $x_0$

$\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$

$f$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $\psi$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0) \Rightarrow \psi(f(x))$  непрерывна в точке  $x_0$

$$(g \circ f)'(x_0) = X(x) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

### 3.10 Теорема

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  строго монотонна.  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $y_0 := f(x_0)$

Тогда  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $y_0$  и  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство:

$f$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0)$ , где  $\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

Если  $y \neq y_0$ , то  $\neq 0$  Если  $y = y_0$ , то  $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$  по условию

$$\Rightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0)$$

Надо проверить, что  $X$  непрерывна в точке  $y_0$ , такое что  $(\varphi(f^{-1}(y)))$  непрерывна в точке  $y_0$   
 $f^{-1}$  непрерывна в точке  $y_0$  (т.к.  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ )

$\varphi$  непрерывна в точке  $x_0$ , так как  $f$  непрерывна в точке  $x_0$

$$X(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

#### 3.10.1 Следствие

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

1.  $(c)' = 0$
2.  $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$
3.  $(a^x)' = a^x \ln a$
4.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5.  $(\sin x)' = \cos(x)$
6.  $(\cos x)' = -\sin x$
7.  $\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
8.  $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.  $\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказательство:

$$2. (x^p)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^p - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = p \cdot x^{p-1}$$

$$3. (a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$$

$$4. (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$5. (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{h}{2}) \cdot \cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos(x)$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9. f(x) := \sin x, f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f^{-1} \arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$11. (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

## 4 Теоремы о среднем

### 4.1 Теорема Ферма

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  дифф. в точке  $x_0$   $f(x_0) = \min_{t \in (a, b)} f(t)$  или с максимумом

Тогда  $f'(x_0) = 0$

Доказательство:  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , знаменатель положителен, числитель больше или равен нулю и вся дробь неотрицательна, тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Аналогично с производной слева получаем, что предел  $\leq 0$

Значит,  $f'(x_0)$  просто 0

### 4.2 Геометрический смысл: в точке min, max касательная всегда горизонтальна

### 4.3 Теорема Ролля

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и дифференцируема на  $(a, b)$

Если  $f(a) = f(b)$ , то найдется точка  $c \in (a, b)$ , такая что  $f'(c) = 0$

Доказательство: По теореме Вейерштрасса найдутся точки  $p, q \in [a, b]$ , такие что  $f(p) = \min_{t \in [a, b]} f(t)$ ,  $f(q) = \max_{t \in [a, b]} f(t)$

Случай 1  $p, q$  концы отрезка  $\Rightarrow f(p) = f(q) \Rightarrow f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \forall (x \in [a, b])$

Случай 2

Хотя бы одна из этих точек не конец отрезка  $\xRightarrow{\text{по Т. Ферма}}$  производная в этой точке равна 0

#### 4.3.1 Геом. смысл

$f(a) = f(b)$  и  $f$  дифф., то есть точка где касательная горизонтальна

#### 4.3.2 Замечание

Важно, что дифференцируемость есть во всех точках

### 4.4 Теорема Лагранжа (формула конечных приращений)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и дифф на  $(a, b)$ .

Тогда найдется  $c \in (a, b)$ , такая что  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательную функцию  $g(x) := f(x) - kx$

Подберем  $k$  так, что  $f(a) - ka = g(a) = g(b) = f(b) - k \cdot b \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Функция  $g$  удовлетворяет теореме Ролля  $\Rightarrow$  существует такая точка, такая что  $g'(c) = 0$

$g'(c) = f'(c) - k \Rightarrow f'(c) = k$

#### 4.4.1 Геометрический смысл

найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде

### 4.5 Теорема Коши

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны и дифф. внутри,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Тогда существует  $c \in (a, b)$ , такая что  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство:

$g(a) \neq g(b)$  иначе нашлась бы точка, где производная нулится. Рассмотрим функцию  $h(x) := f(x) - kg(x)$ , подберем  $k$  так, что  $h(a) = h(b)$ ,  $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

По т. Ролля о функции  $h$  найдется  $c \in (a, b)$ , такая что  $f'(c) - kg'(c) = h'(c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

#### 4.5.1 Геометрический смысл

$(g(t), f(t))$  - координата частицы в момент времени  $t$ , тогда  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  угловой коэфф. хорды, соединяющей  $a, b$ . Тогда вектор скорости этой частицы совпадает по скорости с этой

#### 4.6 Следствие теоремы Лагранжа

1.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках, дифф внутри. А еще знаем, что  $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$

Тогда  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in \langle a, b \rangle$

Доказательство:

Пусть  $x \leq y$ , тогда  $f$  непрерывна на  $x, y$  и дифф. внутри, а значит можно на этом отрезке использовать теорему Лагранжа, то есть найдется  $c \in (x, y) \subset (a, b)$ , такая что  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), |f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|$

2.

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда  $f$  постоянна

Доказательство:

Это 1. для  $M = 0$

#### 4.7 Определение

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $M$ , если  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in E$

3.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если  $f'(c) > 0 \forall x \in (a, b)$  то  $f$  строго возрастает
4. То же самое, только производная меньше нуля, только тогда убывание

Доказательство

Возьмем  $x < y$  и применим Т. Лагранжа для  $[x, y]$ . Тогда найдется  $c \in (x, y) \subset (a, b)$ , такие что  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

5.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна во всех точках и дифф внутри.

Тогда

а)  $f$  нестрого возрастает  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$

б) аналогично для убывания

Доказательство: а)  $\Leftarrow$  аналогично предыдущему

$\Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$  предельные переход в неравенстве.

#### 4.7.1 Замечание

с 3, 4 такой фокус не прокатит (прогипотинузит)

#### 4.8 Теорема Дарбу

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  дифф. во всех точках.  $C$  лежит между  $f'(a), f'(b)$ , тогда найдется такая точка, в которой  $f'(c) = C$

Доказательство:

Случай 1

$C = 0$ , тогда  $f'(a)$  и  $f'(b)$  разных знаков. Пусть  $f'(a) < 0 < f'(b)$   $f$  дифф. на  $[a, b] \Rightarrow f$  непрерывна на отрезке. Значит можно применить т. Вейерштрасса найдется  $p \in [a, b]$ , такая что  $f(p) = \min_{t \in [a, b]} f(t)$

Если  $p \in (a, b)$ , то по Теореме ферма  $f'(p) = 0$ , а это то, что нужно

Пусть  $p = a$ , тогда  $f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , числитель больше или равен 0, знаменатель больше 0, тогда о предельном переходе предел  $\geq 0$ , противоречие

Пусть  $p = b$ , тогда  $f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$ , противоречие

Знаит точка не может оказаться не на концах отрезка, а для внутреннего мы уже знаем

Случай  $C \in \mathbb{R}$

Рассмотрим  $g(x) = f(x) - Cx$ , тогда  $g'(x) = f'(x) - C$

$\Rightarrow g'(a)$  и  $g'(b)$  разных знаков  $\Rightarrow$  найдется  $c \in (a, b)$ , где  $g'(c) = 0$

#### 4.8.1 Следствие

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифф на и  $f'(x) \neq 0 \forall x$  тогда  $f$  строго монотонна

Доказательство: Докажем, что  $f'$  знакопостоянна

От противного  $f'(p) < 0 < f'(q)$  тогда по т. Дарбу есть точка  $c$  между  $p$  и  $q$ , такая что  $f'(c) = 0$ . Противоречие

### 4.9 Правило Лопиталья

#### 4.9.1 Версия 1

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ,  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифф на  $(a, b)$ .  $g'(x) \neq 0 \forall x$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$

Тогда если есть  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то предел отношения функции равен тому же самому.

Аналогично для предела с +

Доказательство:

Проверим по Гейне, что  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Возьмем  $x_n$  возрасоающую и  $\lim x_n = b$ . Надо доказать, что  $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$ , по условию  $\lim(f(x_n)) = \lim(g(x_n)) = 0$ , еще знаем, что  $g' \neq 0$ , тогда по следствию  $g$  строго монотонна. Тогда для вычисления предела воспользуемся т. Штольца.

Применим т. Штольца. Надо посчитать  $\lim \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$ . Найдется  $c_n \in (x_n, x_{n+1})$ , такая что  $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ .  $x_n < c_n < x_{n+1} \Rightarrow \lim c_n = b$ , тогда из определения по Гейне для  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$

#### 4.9.2 Версия 2

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ ,  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифф на  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = +\infty$

Тогда если  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ , то  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$ . Аналогично для предела с +

Доказательство:

То же самое доказательство, только сослаться для другую теорему Штольца :D

##### 4.9.2.1 Пример

$\lim_{x \rightarrow 0}$