Автор: FlintWithBlackCrown aka Кирилл Болохов

Опр. по Коши $A = \lim_{x \to a} f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \neq a \in E \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
Определение по Гейне $A = \lim_{x \to a} f(x)$, если для любой последовательности $x_n \neq a \in E$, такое что $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = A$

Замечания

1. Значение функции в точке a не участвует вопределении
2. Значение функции в точках, далеких от a не участвуют в определении
3. в определении по Гейне для существования предела достаточно чтобы для любой последовательности $x_n \neq a \in E \wedge \lim x_n = a \Rightarrow f(x_n) \in \mathbb{R}$

Доказательство:
Возьмем две последовательности $x_n \neq a, y_n \neq a \in E$ и $\lim x_n = \lim y_n = a$, надо доказать, что $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$
Рассмотрим новую последовательность x_1, y_1, x_2, y_2 обозначим за z_n, знаем, что стремится к a, $\lim z_n = a \Rightarrow \lim f(z_n)$ существует, обозначим его B, тогда $\lim f(x_n) = \lim f(z_{2n-1}) = B = \lim f(z_{2n}) = \lim f(y_n)$ (предел подпоследовательности равен пределу последовательности)

Теорема

Определения Коши и Гейне равносильны.
Доказательство:

1. Коши $\Rightarrow$ Гейне. Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E$и$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем последовательность $x_n \in E$, такое что $\lim x_n = a$. Надо $\lim f(x_n) = A$.
   Возьмем $\varepsilon > 0$. Для него из определения Коши найдется $\delta > 0$, такое что .... Тогда найдется N, такой что $\forall n \geq N : |x_n - a| < \delta$. Тогда для таких $x_n : |f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim f(x_n) = A$
2. Гейне $\Rightarrow$ Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что никакое δ для него не подойдет. Возьмем в качестве $\delta = \frac{1}{n}$. Оно не подходит, т.е. найдется $x_n \neq a \in E$ и $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. $\Rightarrow \lim x_n = a \Rightarrow$ по Гейне $\Rightarrow \lim f(x_n) = A \Rightarrow$ найдется N, такое что $\forall n \geq N : |f(x_n) - A| < \varepsilon$. Противоречие

Свойства перделов

1. Предел единственный. $f : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка. Тогда если $\lim f(x) = A$ и $\lim f(x) = B$, то $A = B$
   Доказательство: Возьмем последовательность $x_n \neq a \in E$, такой что $\lim x_n = a$ (пользуемся тем, что у нас предельная точка). То по определению для
   $\lim f(x) = A \Rightarrow \lim f(x_n) = A$

   $\lim(f_x) = B \Rightarrow \lim f(x_n) = B$

   Следовательно $A = B$
2. Если $f : E \to R$, а - предельная точка E и $\lim f(x)$ существуют, то есть окрестность U_a, такая что f ограничена на множестве $U_a \cap E$.
   Доказательство
   По Коши найдется $\delta > 0$, такое что $\forall x \neq a \in E$ и $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + |f(x) - A|$
   Тогда для $U_a = (a - \delta, a + \delta)$ $|f(x)| \leq \max\{|f(a)|, |A| + 1\}$
   Замечание $f(x) = \frac{1}{x}, E = (0, 2), \lim_{x \to 1} f(x) = 1$, но f не является ограниченной функцией

3. Стабилизация знака. $f : E \to \mathbb{R}$, a - предел точки E и $\lim_{x\to a} f(x) = A$, тогда найдется U_a, такое что знак функции на U_a с точечкой сверху $\cap E$ совпадает со знаком A.
Доказательство:
Возьмем $\varepsilon := A$. Из определения по Коши найдется $\delta > 0$, такое что $x \neq a \in E$ и $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - A| < \varepsilon = A$

Теорема

Арифметические действия с пределами $f, g : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E. $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$, тогда
1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$
3. $\lim_{x\to a}|f(x)| = |A|$
4. Если $B \neq 0$, то $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство:
Будем проверять опр. по Гейне. Возьмем последовательность $x_n \neq a \in E$, такое что $\lim x_n = a$. Тогда $\lim f(x_n) = A$ и $\lim g(x_n) = B \Rightarrow$ по теореме пределов последовательности $\lim(f(x_n) + g(x_n)) = A + B$. т.е. проверили определение по Гейне. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$

Теорема

Предельный переход в неравенстве $f, g : E \to \mathbb{R}, a$ - предельная точка E. $A := \lim_{x\to a} f(x), B := \lim_{x\to a} g(x)$. Если $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in E$, то $A \leq B$
Доказательство:
Возьмем $x \neq a \in E$, такое что $\lim x_n = a$. Тогда из определения по Гейне $\lim f(x_n) = A$ и $\lim g(x_n) = B$. Кроме того $f(x_n) \leq g(x_n) \forall n$, тогда предельный переход в неравенстве последовательности дает $A \leq B$

Теорема о двух милиционерах для функций.

$f, g, h : E \to \mathbb{R}, a$ - предельная точка E. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in E$. Если $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) =: A$, то $\lim_{x\to a} g(x) = A$
Доказательство:
Блин, ну задолбало опять определение по Гейне переписывать, схема уже понятна, так что очев

Критерий Коши

$f : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E. Следующей условие равносильности
1. $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ \forall x \neq a, y \neq a \in E$ и $|x - a| < \delta, |y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Доказательство:
Пусть $\lim_{x\to a} f(x =: A)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$, такое что $\forall x \neq a \in E$ и $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\delta}{2}$. Аналогично получаем такое неравенство для y. $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Это была стрелочка из 1 в 2
Будем проверять определение по Гейне, а имеено что если $x \neq a \in E$ и $\lim x_n = a$, то $\lim(f(x_n))$ существует. Возьмем последовательность $x_n \neq a \in E$, такое что $\lim x_n = a$. Берем $\varepsilon > 0$, и по нему $\delta > 0$, тогда найдется N, такой что $\forall n \geq N\ |x_n - a| < \delta, \forall m \geq N : |x_m - a| < \delta$, тогда $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n)$ - фундаментальная последовательность $\Rightarrow f(x_n)$ имеет конечный предел

Бесконечные пределы

$f : E \to R$ a - предельныая точка E. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
Определение с окрестностями $\forall U_{+\infty} \exists U_a$, такое что $f(U_a$ с точечкой сверху $\cap E) \subset U_{+\infty}$
Определение по Коши $\forall C : \exists \delta > 0 : \forall x \neq a \in E$ и $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > C$
Предел в тчоке $+\infty$ $f : E \to \mathbb{R}, +\infty$ предел точки E
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Определение с окрестностями $\forall U_A \exists U_{+\infty}$, такое что
$f(U_{+\infty}$ с точечкой сверху $\cap E) \subset U_a$.
Определение по Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists C : \forall x \in E$, такое что $x > C \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
Упражнение. Расшифровать по Коши $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Односторонние пределы

$f : E \to \mathbb{R}, E_1 := E \cap (-\infty, a)$, a - предельная точка E_1. Предел в точке a слева
$\lim_{x\to a-o} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) =: A$. Если $A = \lim_{x\to a} f \mid_{E_1}$
Предел точки a справа. $\lim_{x\to a+0} = \lim_{x\to a+} f(x)$
$f : E \to \mathbb{R}, E_2 := E \cap (a, +\infty)$, a - предельная точка E_2. Если $A = \lim_{x\to a} f \mid_{E_2}$, то A - предел в точке a - справа

Замечания

1. Если существуеют $\lim_{x\to a} f(x)$, то $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$
2. Если $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$, то существуют $\lim_{x\to a} f(x)$
3. Расшифровка $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ по Коши.
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \exists x \neq a \in E_2$ и $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E$, такое что $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Определение

Монотонная функция $f : E \to \mathbb{R}$
1. f строго возрастает, если $\forall x, y \in E$,такие что $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
2. f нестрого возрастающая, если очев
3. строго убывающая если очев
4. ну и для нестрого убывающей тоже как будто очев уже
5. f строго монотонная если f строго убывающая или строго возрастающая
6. f монотонная если очев

Теорема

$f : E \to \mathbb{R}, E_1 : -E \cap (-\infty, a)$, a - предельная точка E_1. Тогда
1. Если f возрастающая на E_1 и ограничена сверху, то существует конечный $\lim_{x\to a-} f(x)$
2. Тож самое только убывает и снизу

Упражнение $\lim_{x\to a+} f(x)$
Доказательство:
1. Множество $\{f(x) : x \in E_1\}$ ограничена сверху $\Rightarrow$ у него есть конечный sup, обозначим его A. Проверим, что $\lim_{x\to a-} f(x) = A$. Возьмем $\varepsilon > 0$. A - наименьшая из верхних границ $\Rightarrow$ $A - \varepsilon$ не верхняя граница $\Rightarrow b \in E_1$, такой что $f(b) > A - \varepsilon$. Покажем, что $\delta := a - b > 0$ подходит. Возьмем $\underbrace{a - \delta}_{=b} < x < a, x \in E \Rightarrow A - \varepsilon < f(b) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Непрерывные функции

оаыфыва.................

Определение
$f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. f непрерывна в точке a, если a не является предельной точкой E или a - предельная точка E и $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Определение по Коши
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > o : \forall x \in E$ и $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Определение с окрестностями
$\forall U_{f(a)}\ \exists U_a \Rightarrow f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

Определение по Гейне
Для любой последовательности $x_n \in E$ и $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$
Примеры
1. $f(x) = \text{const}$
2. $f(x) = x$

Теорема
$\exp x$ непрерывна во во всех точках
Доказательство:
надо доказать, что $\lim_{x \to a} \exp x = \exp a$. $x := a + t, \exp x = \exp a \cdot \exp t$/ Рассмотрим $|t| < 1$, $\frac{1}{1-t} \geq \exp t \geq 1 + t$. $\exp x - \exp a = \exp a \cdot \exp t - \exp a = \exp a \left(\underbrace{\exp t - 1}_{\leq \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}} \right)$
$t \cdot \exp a \leq \exp x - \exp a \leq \frac{t}{1-t} \exp a \Rightarrow \lim_{x \to a} \exp x = \exp a$

Анекдот:
Играют две армянские нейронные сети в нарды в гостиной. Одна другой говорит:
- Очень холодно. Пойду погреюсь
Идет и садится к камину.
Вторая:
- А это что у вас? K-means?
Вы спросите, а как нейронные сети ходят? По очереди, они же в нарды играют