Интегральное исчесление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если $F`(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b\rangle$

Теорема

$f : \langle a, b\rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \text{sign } x$
Пусть F первообразная f, тогда $F` = f$ принимает зачения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу $F`$ должна приниматьвсе значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F первообразная f. Тогда
1. $\forall c \in \mathbb{R}\ F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ тоже первообразная f, то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)` = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))` = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных
Обозначение: $\int f = \int f(x) dx$
F - первообразная f, $\int f(x) dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

Проверка

3.

При $x > 0$, $(\ln x)` = \frac{1}{x}$. При $x < 0 : (\ln(|x|))` = (\ln(-x))` = \frac{1}{x}$
11.

$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)` = \frac{1}{2}((\ln|1+x|)`-(\ln|1-x|)`) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$
12.
$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)` = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)` = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$ очев

Определение

A, B - множества функция $\langle a, b\rangle . A + B = \{f+g, f\in A, g\in B\}; c\cdot A = \{c\cdot f \mid f\in A\}, A\cdot B = \{f\cdot g \mid f\in A, g\in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, f, g$ - имеют первообразные
$\alpha, \beta\in\mathbb{R}$. Тогда:
1. $f+g$ тоже имеют первообразную $\int f+g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha\int f, \alpha\neq 0$
3. $\alpha f+\beta g$ тоже имеет первообразную, $\int(\alpha f+\beta g) = \alpha\int f+\beta\int g$ при $|\alpha|+|\beta|\neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g. Тогда $F+G$ - первообразыне для $f+g$
$\int(f+g) = F+G+C, \int f = F+C, \int g = G+C$
Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ - дифф. F - первообразная f. $\int f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C, \alpha\neq 0$. (Подставить $\varphi(x) = \alpha x+\beta$)

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g\in\langle a, b\rangle\to\mathbb{R}$ и $f`g$ имеет первообразную, тогда $fg`$ тоже имеет первообразную и $\int fg` = fg - \int f`g$

Доказательство

H - первообразная для $f`g$. (? )$fg$ - $H$ - первообразая для $fg`$
$(fg-H)` = f`g + fg`-H` = fg`$■

Площади и определенный интеграл

$\mathcal{F}$ - множество всех ограниченных помножеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F}\to[0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:
1. $\sigma(\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$
2. $\overline{E}\subset E\Rightarrow\sigma\left(\overline{E}\right)\leq\sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на $E_{\_}$ и $E_+ \Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_{\_}) + \sigma(E_+)$ (точки l могут принадлежать как $E_{\_}$ и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2`: если $A\cap B = \emptyset$, то $\sigma(A\cup B) = \sigma(A)+\sigma(B)$. Но существование такого объекто неочев (сложно)

Теорема
$\sigma(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{n}|P_k| : \cup_{k=1}^{n} P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } || \text{ осям координат}\Big\}$ - квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе
апоЖ

Доказательство
Проверим три свойства
1. Пусть $P = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle (?)\sigma(P)(b-a)(d-c)$
   $\leq \{P\}$ - покрытие $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(c-d)$
   $\geq$ Пусть $\cup_{k=1}^{n} P_k > P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^{n}|P_k| \geq |P|$ Продлим стороны P_k и P, если мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k, то он разбит на маленькие прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие прямоугольники образуют покрытие P, $\sum_{k=1}^{n}|P_k| \geq \sum|\text{маленьких прямоугольников}| \geq \sum|\text{маленьких прямоугольников, входящих в } \ P| = |P|$ ■
2. любое покрытие E - это покрытие $\overline{E} \Rightarrow \sigma\big(\overline{E}\big) \leq \sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+. $(?)\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
   $\leq$ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^{m} P_k^+ > E_+$, такое что $\sum_{k=1}^{m}\left|P_k^+\right| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^{n} P_i^- > E_-$, такое что $\sum_{i=1}^{n}|P_i^-| \leq \sigma(E_-) = \varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, ..., P_m^+, P_1^-, P_2^-, ...P_n^-$ - образуют покрытие E, значит $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^{m}\left|P_k^+\right| + \sum_{i=1}^{n}|P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$, устремим ε к нулю.
   $\geq$ Пусть есть $P_1, ...P_n$ - покрытие E. Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми)
   Тогда $P_1^+, ...P_n^+$ - покрытие E_+, а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^{n}|P_k| = \sum_{k=1}^{n}\left|P_k^+\right| + \sum_{k=1}^{n}(P_k^-) \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем что хотели

Замечания
1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|P_k|\Big\}$
   Если $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$, но $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в $\mathbb{R}^3$ можно разделить на 5 непересекающихся частей, применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить два шара того же радиуса
3. Следующий семестр “правильное” понятие меры Лебега

Определение
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывная , $f_+ \max\{f, 0\}, f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_- = \max\{-f, 0\}$

Свойства
1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}, f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной,то f_+ и f_- были непрерывны

Определение
$f : [a, b] \to \mathbb{R}. f \geq 0$, пографик f - это $P_f := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\big\}$

Определение
$f \in C[a, b]. \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \sigma\Big(P_{f_+}\Big) - \sigma\Big(P_{f_-}\Big)$

```
 /\_/\
( o.o )
 > ^ <
```

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b - a)$
4. $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-, (-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$, $\int_a^b (-f) = \sigma\left(P_{(-f)_+}\right) - \sigma\left(P_{(-f)_-}\right) = \sigma\left(P_{f_-}\right) - \sigma\left(P_{f_+}\right) = -\int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma\left(P_f\right)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f, f_- = 0$
6. Если $f \geq 0, f \in C[a, b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a, b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :$ $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]$
   $\int_a^b f = \sigma\left(P_f\right) \geq \sigma\left(\left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]\right) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, c \in (a, b)$
Тогда $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Обозначение $P_g([\alpha, \beta]) := \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$

Доказательство

$\int_a^b f = \sigma\left(P_{f_+}([a, b])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([a, b])\right) = \sigma\left(P_{f_+}([a, c])\right) + \sigma\left(P_{f_+}([c, b])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([a, c])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([c, b])\right) = \int_a^c f + \int_c^b f$

Следствие

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ Тогда $\int_a^b = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f$ (индукция)

Теорема монотонность

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$
Тогда $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство

$f_+ = \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, аналогично $f_- = \max\{0, -f\} \geq \max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-}$
$\Rightarrow \sigma\left(P_{f_+}\right) \leq \sigma\left(P_{g_+}\right), \sigma\left(P_{f_-}\right) \geq \sigma\left(P_{g_-}\right) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma\left(P_{f_+}\right) - \sigma\left(P_{f_-}\right) \leq \sigma\left(P_{g_+}\right) - \sigma\left(P_{g_-}\right) = \int_a^b g$

Следствия

1.

$f \in C[a, b]$ Тогда $(b - a) \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$

Доказательство

$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b - a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b - a)$

2.
$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Доказательство
$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Теорема о среднем
$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

Доказательство:
$\min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение
Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним перделом
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) \coloneqq \int_a^x f, a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним перделом
$\Psi(x) \coloneqq \int_x^b f, a \leq x \leq b$
Замечание:
1. $\Psi(x) = 0$
2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b (f)$

Теорема Барроу
$f \in C[a, b], \Phi(x) \coloneqq \int_a^x f$
Тогда $\Phi`(x) = f(x)$

Доказательство
$\Phi_+`(x) = \lim_{y \to x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \to x_+} \frac{1}{y-x} \int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f\left(c_y\right), c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y \to x_+} f\left(c_y\right) = f(x)$
Если y_n убывает к x, то $c_{y_n} \to x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f\left(c_{y_n}\right) \to f(x)$
Для Φ_`(x) аналогично

Следствие 1
$f \in C[a, b], \Psi(x) \coloneqq \int_x^b f \Rightarrow \Psi`(x) = -f(x)$

Доказательство
$A \coloneqq \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi`(x) = -\Phi`(x) = -f(x)$

Следствие 2
$f \in C\langle a, b\rangle$, тогда у f есть первообразная

Доказательство
Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) \coloneqq \begin{cases} \Phi(x) \text{ при } & x \geq c \\ -\Psi(x) \text{ при } & x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)
$f \in C[a, b], F$ - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) \coloneqq \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b \coloneqq F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a \int_a^b f \coloneqq -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказтельство

F, G - первообразная для f, g
$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$
$(\alpha F + \beta G)` = \alpha F` + \beta G` = \alpha f + \beta g$
$\overset{\text{Н.Л}}{\Rightarrow} \int_a^{b(\alpha f + \beta g)} = \alpha F + \beta G \mid_a^b = \alpha \cdot F \mid_a^b + \beta G \mid_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Теорема формула интегрирования по частяи

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b fg` = fg \mid_a^b - \int_a^b f`g$

Доказательство

H - первообразная для $f`g \Rightarrow fg - H$- первообразная для $fg`$
$(fg - H)` = (fg)` - H` = f`g + fg` - f`g = fg`$
$\int fg` = (fg - H) \mid_a^b = fg \mid_a^b - H|_a^b = fg \mid_a^b - \int_a^b f`g$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \to [a, b]$ $\varphi \in C^1[a, b], p, q \in [c, d]$
Тогда $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная f, $F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi`(t)$
$(F(\varphi(t)))` = F`(\varphi(t)) \cdot \varphi`(t) = f\{\varphi(t)\}\varphi`(t)$
$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \mid_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$

Пример

$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4}\right) dt, \varphi(t) = t^2, \varphi`(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$= \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan|_{a^2}^{b^2}$

Прододжение формулы интегрирования по частям

Пример

$W_n \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n (\frac{\pi}{2} - x) dx \mid \varphi(x) \coloneqq y = \frac{\pi}{2} - x \mid = -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$
$W_0 = \frac{\pi}{2}$
$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
$wW_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \sin^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4}$ $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\cos x)` dx = -\left(\underbrace{\sin^{n-1} \cos|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x}_{1-\sin^2 x} dx\right) = (n-1)\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right)$

$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$

$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot ... \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

Формула Валлиса

$\lim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство

на $[0, \frac{\pi}{2}] \sin^{2n} \geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}$

$W_{2n} \geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2}$

$\frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$

$\frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \to \frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \to \frac{\pi}{2}$

Следствие

$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!}$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = 2^n \cdot n!$

$\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n (n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

Формула Валлиса $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, f \in C^{n+1} \langle a, b \rangle, x_0, x \in \langle a, b \rangle$

Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

Доказательство

Индкукция по n

База $n = 0$

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^x f`(t) dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$

Переход $n \to n+1$

$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{I:=}$

$I =$

$u = f^{(n+1)}, u` = f^{(n+2)}, v = (x-t)^n, v` = -\frac{(x-t)^n}{n+1}$

$I = \int_{x_0}^x uv` = uv |_{x_0}^x - \int_{x_0}^x u`v = \underbrace{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x-t)^{n+1} |_{t=x_0}^{t=x}}_{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} \cdot (x-x_0)^{n+1}} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n+1} (x-t)^{(n+1)} dt$

$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt$

Пример

$H_j := \frac{1}{j!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x dx$

Наблюдение: эта штука точно положительна, значит интегральчик точно положительный

Свойтсва:

1. $0 < H_j \le \frac{1}{j!}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} \cos x dx = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}}{j!}$
2. Если $c \in \mathbb{R}$, то $c^j H_j \to 0$, так как $0 \le \left|c^j H_j\right| \le \frac{\left(|c|\frac{\pi^2}{4}\right)^j}{j!} \underset{j\to\infty}{\to} 0$
3. $H_0 = 1, H_1 = 2$
4. $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$, при $j \ge 2$

   Доказательство: $j!H_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \cos x dx$

   $u = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j, v` = \cos x, u` = -2xj\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{(j-1)}, v = \sin x$

   $\underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^j \sin x \,\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2j\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \sin x dx$

   $u = x\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}, v` = \sin x, v = -\cos x, u` = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} - 2(j-1)x^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} =, x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right), = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} - 2(j-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} + 2(j-1)\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}$

   подставляем в изначальный интеграл:

   $= 2j\left(x\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1}(-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + (2j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-1} \cos x dx - \left(\frac{\pi^2}{4}\right)2(j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right)^{j-2} \cos x dx\right) = j!$

   $j!H_j = 2j(2j-1)(j-1)!H_{j-1} - 2j\frac{\pi^2}{4}2(j-1)(j-2)!H_{j-2}$

   $H_j = 2(2j-1)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$

Теорема Ламберта

π и π^2 - иррациональное число

Доказательство

От противного. Предположим, что $\pi^2 = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$

Проверим, что тогда $n^j H_j$ - целое число По индукции по j. База $j = 0, j = 1$ очевидный

Переход $j-2, j-1 \to j$

$n^j H_j = \underbrace{(4j-2)\cdot n}_{\text{целое}} \cdot n^{j-1}H_j - 1 - \underbrace{n^2\pi^2}_{=m^2 n \text{ целое}} n^{j-2}H_{j-2}$ - индукционное предположение

Понимаем, что $n^j H_j$ - целоеб $n^j H_j > 0 \Rightarrow$ - $n^j H_j \ge 1$, с другой стороны, если воспользуемся свойством номер 2 $n^j H_j \underset{j\to\infty}{\to} 0$, противоречие :(

Интегральные суммы

Определение равномерно непрерывной функции

$f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если $\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E,$ т.ч $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Замечание

f непрерывна во всех точках из E означает, что $\forall y \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \in E,$ т.ч $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Примеры

1. $\sin$ и $\cos$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \le |x - y| \Rightarrow \delta = \varepsilon$ подходит
2. $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$

   Возьмем $\varepsilon = 1$: Проверим, что никакое $\delta > 0$ не подходит $f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) = \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 -$

$x^2 = x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4} > x \cdot \delta$ для $x = \frac{1}{\delta}$ все плохо
$f\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) > 1$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$
   Возьмем $\varepsilon = 1$ Проверим, что никакое $0 < \delta < 1, x = \frac{\delta}{2}, y = \delta, f(x) - f(y) = \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} > 1$

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$ липшицева с константой M, если $\forall x, y \in E \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Замечание

1. липшицевость $\Rightarrow$ равномерно непрерывна (просто берем в качестве $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$)
2. Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f`| \leq M$ на $\langle a, b\rangle$, то f липшицева с константой M и, в частонсти, равномерно непрерывна

Теорема Кантора

Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

Доказательство

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Возьмем $\varepsilon > 0$, предположим, что никакое δ для него не подходит
$\delta = 1$ не подходит, значит найдутся такие точки $x_1, y_1 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < 1$, но при этом $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$
$\delta = \frac{1}{2}$ не подходит, значит найдутс такие точки $x_2, y_2 \in [a, b]$, такое что $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$ и $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$
…
$\delta = \frac{1}{n}$ не подходит $\Rightarrow$ найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$, такие что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
$y_n \in [a, b]$ ограничена, последовательность по Т. Б-В выберем подпоследовательность $y_{n_k} \to c \in [a, b]$
$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim x_{n_k} = \lim y_{n_k} + \lim\left(x_{n_k} - y_{n_k}\right) = c + 0 = c$
f непрерывна в c означает, что $\lim f\left(x_{n_k}\right) = f(c)$, аналогично $f\left(y_{n_k}\right) = f(c)$, тогда пердел разности $\lim\left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right) = 0$, но с другой стороны $\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon$
противоречие, значит предположение не верно и какое-то δ подойдет

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta), \delta > 0, \omega_f(\delta) \coloneqq \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E \land |x - y| \leq \delta\}$

Свойства

1. $\omega_f(0) = 0$ и $\omega_f(\delta) \geq 0$
2. ω_f нестрого возрастает
3. $\omega_f(|x - y|) \geq |f(x) - f(y)|$
4. Если f липшицева с константой M, то $\omega_f(\delta) \leq M \cdot \delta \ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M \cdot \delta$
5. $f : E \to \mathbb{R}$, тогда f равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$
   Доказательство:
   $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \land |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, тогда если $|x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, тогда $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \frac{\delta}{2}\right\}$
   Следовательно, при $0 \leq t \leq \frac{\delta}{2} \quad 0 \leq \omega_f(t) \leq \omega_f\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \to 0+} w_f(t) = 0$
   $\Leftarrow \lim_{\delta \to 0+} \omega_{f(\delta)} = 0$ по $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $\omega_f(\delta) < \varepsilon$
   $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$ (если $|x - y| < \delta$) $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна
6. Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и непрерывна, то $\lim_{\delta \to 0+} w_f(\delta) = 0$ Доказательство: Кантора и свойство 5

Определение Дробление отрезка (разбиение, пунктир)

Такой набор точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$
Будем обозначать $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$
Мелкость (ранг) дробления
$|\tau| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$ - длина самого большого отрезка из нарезки
Оснащение дробления - набор точки $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ такое что $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Определение Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ τ - его дробление, ξ - оснащение этого дробления $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Теорема об интегральной сумме

$f \in C[a, b]$, тогда $\Delta := \left|\int_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$

Доказательство

$\int_a^b f - S(f, \tau, \xi) = \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f_t - f(\xi_k))dt$
$\Delta \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f(\xi_k)|dt \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_f(|\tau|)dt = \int_a^b \omega_f(|\tau|)dt = \omega_f(|\tau|)(b - a)$
$|t - \xi_k| \leq x_k - x_{k-1} \leq |\tau| \Rightarrow |f(t) - f(\xi_k)| \leq \omega_f(|\tau|)$

Следствие

$f \in C[a, b]$ Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall$ дробления τ мелкости $< \delta$ и $\forall$ его оснащения $\left|\int_a^b f - S(f, \tau, \xi)\right| < \varepsilon$

Следствие

$f \in C[a, b]$ и τ_n - последовательность дроблений, такая что τ_n стремиться к 0
Тогда $\forall \xi_n$ - оснащение дроблений τ_n $S(f, \tau_n, \xi_n) \to \int_a^b f$

Пример

$S_p(n) := 1^p + 2^p + ... + n^p, p > 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$
Рассмотрим функцию $f(x) = x^p$ на $[0, 1]$ - непрерывная функция
дробление $[0, 1]$ на равные отрезки $x_k = \frac{k}{n} = \xi_k$

$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\left(\frac{k}{n}\right)^p} \overbrace{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^n k^p = \frac{S_p(n)}{n^{p+1}}$

Вывод $S_p(n) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$

Определение

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, и $I \in \mathbb{R}$ ее интеграл, если $\forall \varepsilon > 0 :$ $\exists \delta > 0 : \forall \tau$ - дробления $[a, b]$ и мелкости $< \delta$ и $\forall$ его оснащения $\xi : |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$

Замечание

Если $f \in C[a, b]$, то она интегрируема по Риману

Лемма

$f \in C^2[\alpha, \beta]$, тогда $\int_\alpha^\beta f - (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2} = -\int_\alpha^\beta f(x)``(\beta - x)(x - \alpha)dx$

Доказательство

$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$ $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)(x - \gamma)`dx = f(x)(x - \gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_\alpha^\beta f`(x)(x - \gamma)dx$

$f(x)(x-\gamma)|_{x=\alpha}^{x=\beta}\ f(\beta)(\beta-\gamma)-f(\alpha)(\alpha-\gamma)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot(\beta-\alpha)$
$\Delta \mid y=f`, v=\frac{1}{2}(\beta-x)(x-\alpha), v=\frac{1}{2}(-\alpha\beta+(\alpha+\beta)x-x^2), v` = -x+\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma-x \mid =$
$-\int_\alpha^\beta f`(x)(x-\gamma)dx=\underbrace{\frac{1}{2}f`(x)(\beta-x)(x-\alpha)\ |_{x=\alpha}^{x=\beta}}_{=0}-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f``(x)(\beta-x)(x-\alpha)dx$

Теорема оценка погрешности в форме трапеций

$f\in C^2[a,b]$ t - дробление отрезка $[a,b]$. Тогда $\underbrace{\left|\int_a^b f-\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right|}_{\Delta:=}\leq\frac{1}{8}\cdot$

$|\tau|^2\cdot\int_a^b|f``|$

Доказательство

$\Delta=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f-\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f``(x)(x_k-x)(x-x_{k-1})dx$
$|\Delta|\leq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n|f``(x)|(x_k-x)(x-x_{k-1})dx\leq\frac{|\tau|^2}{8}\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f``|=\frac{|\tau|^2}{8}\int_a^b|f``|$
$(x_k-x)(x-x_{k-1})\leq\left(\frac{(x_k-x)+(x-x_{k-1})}{2}\right)^2=\left(\frac{(x_k-x_{k-1})}{2}\right)^2\leq\frac{|\tau|}{4}$

Замечание

1. Если дробление на равные отрезки, тогда $x_k=a+\frac{k}{n}(b-a)\left(x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}\right)$ и сумма площадей трапеций $=\sum_{k=1}^n\frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}=\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^n f(x_k)\right)$ и в этом случае теорема дает $|\Delta|\leq\frac{(b-a)^2}{8n^2}\int_a^b|f``|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. Как выглядит сумма Римана с равноотстоящими узлами и оснащением в правых концах $S(f,\tau,\xi)=\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k-x_{k-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$
   если $|f`|\leq M,\omega_f(\delta)\leq M\delta$
   $\left|S(f,\tau,\xi)-\int_a^b f\right|\leq(b-a)\omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right)\leq\frac{M(b-a)^2}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right)$

Теорема (формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f\in C^2(m,n),m,n\in\mathbb{Z},\sum_{k=m}^n f(k)=\frac{f(m)+f(n)}{2}+\int_m^n f+\frac{1}{2}\int_m^n f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt$

Доказательство

1.

$\int_{k-1}^k f=\frac{f(k)+f(k-1)}{2}-\frac{1}{2}\int_{k-1}^k f``(t)(k-t)(1-(k-1))dt=\frac{f(k)+f(k-1)}{2}-\frac{1}{2}\int_{k-1}^k f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt$
$\underbrace{\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k f}_{\int_m^n f}=\underbrace{\sum_{k=m+1}^n\frac{f(k)+f(k-1)}{2}}_{=\sum_{k=m}^n f(k)-\frac{f(m)+f(n)}{2}}-\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^n\int_{k-1}^k f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt}_{=\int_m^n f``(t)\{t\}(1-\{t\})dt}$

Примеры

$S_p(n):=1^p+2^p+...+n^p,p>-1$
$f(x)=x^p,m=1,f``(x)=p(p-1)x^{p-2}$
$S_p(n)=\frac{1^p+n^p}{2}+\underbrace{\int_1^n x^p dx}_{=\frac{x^{p+1}}{p+1}\ |_1^n=\frac{n^{p+1}-1}{p+1}}+\frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})dx$

$\left|S_p(n)-\frac{n^{p+1}}{p+1}-\frac{n^p}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{p+1}\right|\leq\frac{|p||p-1|}{2}\int_1^n x^{p-2}\overbrace{\{x\}(1-\{x\})}^{\leq\frac{1}{4}}dx\leq\frac{|p||p-1|}{8}\int_1^n x^{p-1}dx=\frac{|p||n^{p-1}-1|}{8}$
$p+1\int_1^n x^{p-2}dx=\frac{x^{p-1}}{p-1}\ |_{x=1}^{x=n}=\frac{n^{p-1}-1}{p-1}$
Случай $p\in(-1,1)$
$S_p(n)=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+O(1)$

Случай $p > 1$
$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(n^{p-1})$
2.

Гармонические числа

$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$
$f(x) = \frac{1}{x}, m = 1, f`` = \frac{2}{x^3}$
$H_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \underbrace{\int_1^n \frac{dx}{x}}_{\ln x |_1^n = \ln n} + \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{a_n :=} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a_n = \ln n + \left(\frac{1}{2} + a\right) + o(1)$
$a_{n+1} = a_n + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3} dx}_{>0} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
Проверим ограниченность $a_n \leq \int_1^n \frac{\frac{1}{4}}{x^3} dx = -\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) |_{x=1}^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leq \frac{1}{8}$. значит ашки ограничены и существует пердел
$a = \lim a_n \leq \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = a + o(1)$
$\frac{1}{2} + a = \gamma$ - постоянная эйлера

Упражнение

Доказать, что $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (указание $\int_1^n = \int_1^{+\infty} - \int_n^{+\infty}$)
3. Формула Стирлинга

$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$
$f(x) = \ln x, m = 1, f``(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\ln n! = \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx - \underbrace{\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2} dx}_{b_n :=}$
$\int_1^n \ln x dx = n \ln n - n + 1$
$b_{n+1} > b_n$ и $0 < b_n < \int_1^n \frac{\frac{1}{4}}{x^2} dx = -\frac{1}{4x} |_1^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$, тогда существует предел $\lim b_n =: b$ и $b_n = b + o(1)$
$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + (1 - b) + o(1)$ при $n \to \infty$
$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b} \underbrace{e^{o(1)}}_{1+o(1)} = n^n e^n \sqrt{n} C(1 + o(1)) \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$
Найдем C
$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{(C n^n e^{-n} \sqrt{n})^2} = \frac{C \cdot 2^{2n} \sqrt{2n}}{C^2 \sqrt{n} \sqrt{n}}$
$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{C \sqrt{n}} \Rightarrow C \equiv \frac{2^{2n} \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = \sqrt{2\pi} \Rightarrow C = \sqrt{2\pi}$
Формула Стирлинга $n! \equiv n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Упражнение

Доказать, что $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Несобственные интегралы

Определение

$-\infty < a < b \leq +\infty, f \in C[a, b)$
Если существует $\lim_{B \to b-} \int_a^B f$, то он называется несобственный интегралом $\int_a^{\to b} f$
$\int_a^{\to b} f := \lim_{B \to b-} \int_a^B f$

Определение

аналогично для предела справа

Определение

Несобственный интеграл $\int_{\to a}^{b}$ или $\int_{a}^{\to b}$ называется сходящися, если соответствующий предел существуеют и конечен, в противном случае расходящийся

Замечание

Если $f \in C[a,b]$, то $\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$
$\left|\int_a^b f - \int_a^B f\right| = \left|\int_B^b f\right| \leq \int_B^b |f| \leq \int_B^b M = (b-B) \cdot M \underset{B\to b-}{\to} 0$

Примеры 1

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{(p-1)y^{p-1}} = 0$ при $p > 1$ и $-\infty$ при $p < 1$
Если $p \neq 1$, то $\int_1^y \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{p-1} \mid_{x=1}^{x=y} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)y^{p-1}}$
То есть интеграл сходится при $p > 1$ и равен $\frac{1}{p-1}$ и расходится при $p < 1$
Если $p = 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty} \ln y = +\infty$
2.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y\to 0+} \int_y^1 \frac{dx}{x^p} \underset{p\neq 1}{=} \frac{1}{1-p} - \lim_{y\to 0+} \frac{1}{(1-p)y^{p-1}}$ этот предел $= 0$ при $p < 1$ и $-\infty$ при $p > 1$
$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty} \int_y^1 \frac{dx}{x} = \lim_{y\to 0+} \ln x \mid_y^1 = -\lim_{y\to 0+} \ln y = +\infty$
при $p < 1$ интеграл сходится и равен $\frac{1}{1-p}$
при $p \geq 1$ интеграл расходится и равен $+\infty$

Критерий Коши

$f \in C[a,b)$ и следующие условия равносильны:
1. $\int_a^{\to b}$ сходится
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists c \in (a,b) : \forall A, B \in (c,b) \left|\int_A^B f\right| < \varepsilon$

Симметрично для нижнего

Доказательство

$F(y) := \int_a^y f$
$\int_a^{\to b} f$ - сходится $\Leftrightarrow \lim_{y\to b-} F(y)$ существует и конечен $\Leftrightarrow$(критерий Коши для F)
$b = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists E : \forall A, B > E \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon, F(B) - F(A) = \int_A^B f$
$b < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A, B \in (b-\delta, b) \Rightarrow |F(B) - F(A)| < \varepsilon$
В первом случае c это E, во втором $b - \delta$ это c

Замечание

$\int_a^b$ сходится $\Leftrightarrow$ существует $\lim_{B\to b-} F(B) - F(a)$, где F - первообразная f и $\int_a^{\to b} f = \lim_{B\to b-} F(B) - F(a)$
$\int_a^{\to b} f = \lim_{B\to b-} \int_a^B f = \lim_{B\to b-}(F(B) - F(a))$

Свойства несобственных интегралов

1. Аддитивность $f \in C[a,b), c \in (a,b)$ Тогда $\int_a^{\to b} f$ - сходится $\Leftrightarrow \int_c^{\to b} f$ сходится и в этом случае есть формула $\int_a^{\to b} f = \int_a^c f + \int_c^{\to b} f$
   Доказательство F - первообразная f. Тогда $\int_a^{\to b} f$ сходится $\Leftrightarrow$ существует конечный $\lim_{B\to b-} F(B) \Leftrightarrow \int_c^{\to b} f$ - сходится.
   $\int_a^{\to b} = \lim_{B\to b-} F(B) - F(a) = \lim_{B\to b-} F(B) - F(c) + (F(c) - F(a))$
2. Если $\int_a^{\to b} f$ сходится, то $\lim_{y\to b-} \int_y^{\to b} f = 0$
   Доказательство $\int_a^{\to b} f = \int_1^y + \int_y^{\to b} f$
3. Линейность $f, g \in C[a,b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\int_a^{\to b}(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g$
   Доказательство F, G - первообразные f, g

$\int_a^{\to b} f = \lim_{y\to b-} F(y) - F(a)$ и $\int_a^{\to b} g = \lim_{y \to b-} G(y) - G(a)$
$\alpha \int_a^{\to b} f + \beta \int_a^{\to b} g = \lim_{y\to b-}(\alpha F(y) + \beta G(y)) - (\alpha F(a) + \beta G(a)) = \int_a^{\to b} (\alpha f + \beta g)$

Замечание

Если $\int_a^{\to b} f$ сходится, а $\int_a^{\to b} g$ расходится, то $\int_a^{\to b} (f+g)$ расходится, от противного $g = (f + g) - f$

Монотонность

$f, g \in C[a, b)$ и $f \leq g$ на $[a, b)$
Тогда $\int_a^{\to b} f \leq \int_a^{\to b} g$ если эти несобственные интегралы определены

Доказательство

$\int_a^y \leq f_a^y g$ при $a < y < b$
$\int_a^b f \leq \int_a^b g$ и предельный переход в неравенстве

Формула интеграрования по частям

$f, g \in C^1[a, b)$
Тогда $\int_a^{\to b} fg` = fg \mid_a^b - \int_a^{\to b} f`g$
(если существуют 2 из трех пределов, то существует третий и верно равенство)

Доказательство

$\int_a^y fg` = fg \mid_a^y - \int_a^y f`g$ при $a < y < b$

Теорема (формула замены переменной в несобственном интеграле)

$\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b), \varphi \in C^1[\alpha, \beta), f \in C[a, b), c := \lim_{\gamma\to\beta-} \varphi(\gamma)$
Тогда $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi`(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$ (если один из двух интегралов существует, то существует второй и они равны)

Доказательство

$F(y) := \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x)dx, \Phi(\gamma) := \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$
$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

Простой случай (1 существует)

то есть существует $\lim_{y\to c-} F(y)$
Возьмем γ_n возрастает к $\beta, \Phi(y_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \lim_{y\to c-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$
$\varphi(\gamma_n) \to c$ из определения по Гейне (х)
$\Phi(\gamma_n) = F(\varphi(\gamma_n)) \to \lim_{y\to c-} F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x)dx$
то есть поняли, что $\lim_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$ существует и равен $\int_{\varphi(x)}^c f(x)dx$

Сложный случай (2 существует)

то есть $\lim_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$
Если $c < b$, то тогда существует и 1. т.к. f непрерывна на $[\varphi(\alpha), c]$
Можно считать, что $c = b$
Возьмем какую-нибудь последовательность b_n возрастающую и стремащуюся b
Хотим доказать, что $\lim F(b_n)$ существует
между b_n и b есть значения φ в некоторых точках $\varphi(\beta_n)$
$\varphi(\alpha) < b_n \varphi(\beta_n) \Rightarrow \varphi$ принимает значение b_n в некоторых точках, лежащей между α и β_n
назовем это точку γ_n
$b_n = \varphi(\gamma_n), F(b_n) = F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n)$
Осталось проверить, что $\gamma_n \to \beta$ От противного. Пусть нет стремления (это апатия) возьмем

подпоследовательность $\gamma_{n_k} \to \beta_* < \beta \Rightarrow \varphi\left(\gamma_{n_k}\right) \to \varphi(\beta_*)$, так как φ непрерывна в β_*, но $\varphi\left(\gamma_{n_k}\right) = b_{n_k} \to b$, но $\varphi(\beta_*) < b$ противоречие
$F(b_n) = \Phi(\gamma_n) \to 2$

Замечание

$a < b < +\infty, f \in C[a, b)$
$\int_a^b f(x) dx$
$\varphi(t) = b - \frac{1}{t}, \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = b$
$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\right) = 0$
$\int_a^b f(x) = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$

Рассмотрим случай, когда $f \geq 0$.
Тогда $F(y) \coloneqq \int_a^y f(x) dx$ - возрастающая функция
Если $y < z$, то $F(z) = \int_a^z f = \int_a^y + \int_y^z f = F(y) + \underbrace{\int_y^z f}_{\geq 0} \geq F(y)$
то есть мы поняли, что если $f \in C[a, b)$ и $f \geq 0$, то $\int_a^b f$ всегда существет (но возможно $+\infty$)

Теорема

$f \in C[a, b)$ и $f \geq 0, F(y) \coloneqq \int_a^y f$
Тогда $\int_a^b f$ - сходится $\Leftrightarrow F$ ограничена (сверху)

Доказательство

$\Rightarrow \int_a^b f$ - сходится $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{y\to b-} \int_a^y f = \lim_{y\to b-} F(y)$
но $\lim_{y\to b-} F(y) = \sup_{y\in[a,b)} F(y) \Rightarrow F$ ограничена сверху
$\Leftarrow F$ ограничена и возрастает $\Rightarrow \exists$ конечный $\lim_{y\to b-} F(y)$, но это и есть $\int_a^b f$

Следствие (признак сравнения)

$0 \leq f \leq g, f, h \in C[a, b)$
Тогда
1. если $\int_a^b g$ сходится, то $\int_a^b f$ тоже сходится,
2. если $\int_a^b f$ расходится, то $\int_a^b g$ тоже расходится

Доказательство

1) Пусть $F(y) \coloneqq \int_a^y f, G(y) \coloneqq \int_a^y g \Rightarrow F \leq G$ во всех точках
$\int_a^b g$ - сходится $\Leftrightarrow G$ - ограничена сверху $\Rightarrow F$ - ограничена сверху $\Leftrightarrow \int_a^b f$ - сходится
2) от противного $\int_a^b g$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ сходится от противного

Замечание 1

Достаточно выполнения неравенства $0 \leq f \leq g$ лишь в некоторой окрестности точки b

Замечание 2

неравенство $f \leq g$ можно заменить на $f = O(g)$, то есть $f \leq C \cdot g$

Замечание 3

Если $f \geq 0$ и $f = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $\int_a^{+\infty} f$ - сходится

Следствие

$f, g \in C[a, b), f, g \geq 0$ Если $f \underset{x\to b-}{\sim} g$, то $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ ведут себя одинаково (то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся)

Доказательство

$f \equiv g \Rightarrow f = \varphi \cdot g, \lim_{x \to b-} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \varphi(x) < 2$ в некоторой окрестности точки $b \Rightarrow$ в этой окрестности $f \leq 2g$ и $g \leq 2f$ и признак сравнения

Замечание

$f \geq 0$ и $\int_1^{+\infty} f$ - сходится $\not\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Определение

$f \in C[a, b)$ интеграл $\int_a^b j$ абсолютно сходится, если $\int_a^b |f|$ сходится

Теорема

$f \in C[a, b)$. Если $\int_a^b f$ абсолютно сходится, то он сходится

Доказательство

$f_+ = \max\{f, 0\}, f_- \max\{-f, 0\}, f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$
В частности $0 \leq f_\pm \leq |f|$
из признака сравнение $\int_a^b f_\pm$ - сходится $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b (f_+ - f_-)$ сходится

Признак Дирихле

$f, g \in C[a, +\infty)$
Тогда если:

1. $\int_a^b f =: F(y)$ - ограниченная функция
2. g - монотонная функция
3. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Если эти три условия выполнены, то тогда интеграл $\int_a^{+\infty} fg$ - сходящийся

Доказательство

Доказательство для случая $g \in C^1[1; +\infty)$
$\int_a^y fg = \int_a^y F`g = Fg \mid_a^y - \int_a^y Fg`$
Надо доказать, что $\int_a^y fg$ имеет конечный предел при $y \to +\infty$
$Fg \mid_a^y = F(y)g(y) - \underbrace{F(a)g(a)}_{=0} \underset{y \to +\infty}{\to} 0$ F - ограниченная g - бесконечно малая $\Rightarrow Fg$ бесконечно малая
Осталось понять, что существует конечный $\lim_{y \to +\infty} \int_a^y Fg`$, то есть xnj $\int_a^{+\infty} Fg`$ сходится
проверм, абсолютную сходимость $\int_a^{+\infty} |Fg`|$, F - ограниченная функция $\Rightarrow |F| \leq M$
$\int_a^y |Fg`| \leq M \int_a^y |g`|$, g монотонная $\Rightarrow g`$ знакопостоянна, тогда получается, что $M \int_a^y |g`| = M\left|\int_a^y g`\right| = M|g(y) - g(a)| \underset{y \to +\infty}{\to} M|g(a)|$
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} M|g`|$ - сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} |Fg`|$ - сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} Fg`$ - сходится

Признак Абеля

$f, g \in C[a, +\infty)$
Тогда если

1. $\int_a^{+\infty} f$ сходится,
2. g монотонная,
3. g ограничена

то $\int_a^{+\infty} fg$ - сходится

Доказательство

g монотона и ограничена, значит есть конечный предел $\lim_{y\to+\infty} g(y) =: l \in \mathbb{R}$

$\overline{g(y)} \coloneqq g(y) - l$ - монотонна и $\underset{y\to+\infty}{\to} 0$

$F(y) \coloneqq \int_a^y f$ имеет конечный предел при $y \to +\infty$

$\Rightarrow$ при $y > y_*$ $F(y)$ близко к этому $\lim$ и, в частности, ограничена на $[a, y_*]$ F ограничена, так как это непрервыная функция, значит F - ограничена

то есть функии f и $\overline{g}$ подходят под условия принципа Дирихле $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\overline{g}$ - сходится

$\int_a^{+\infty} fg = \int_a^{+\infty} f(\overline{g} + l) = l\int_a^{+\infty} f + \int_a^{+\infty} f\overline{g}$ - первое сходится по условия, второе доказали, что сходится

Замечание

пусть f непрерывна с периодом T

Тогда $\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$

Доказательство

$\int_b^{b+T} f(t)dt = \int_b^{b+T,=s} f\left(\underbrace{t+T}_{=s}\right)dt = \int_{b+T}^{b+2T} f(s)ds$

$\int_a^{a+T} f = \int_a^b f + \int_b^{a+t} f = \int_{a+T}^{b+T} f + \int_b^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$

$\int_a^b f = \int_a^b f(t+T)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(s)ds$

Замечание

f непрерывна и периодична $\Rightarrow$ f ограничена

T - периодична $\Rightarrow$ все свои значения f принимает на отрезке $[0, T]$, а там она ограничена по т. Вейерштрасса

Следствие пр. Дирихле

$f \in C[a, +\infty)$, периодична с периодом T, $g \in C[a, +\infty)$ монотонна и $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогда

1. если $\int_a^{+\infty} |g|$ сходится,то $\int_a^{+\infty} |fg|$ сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} g$ - расходится, то $\int_a^{+\infty} fg$ - сходится $\Leftrightarrow \int_a^{a+T} f = 0$

Доказательство

1) f непрерывна и периодична $\Rightarrow$ ограничена $\Rightarrow |f| \le M \Rightarrow |fg| \le M|g|$ и пр. сравнения

2) $\Leftarrow \int_a^{a+T} f = 0 \Rightarrow F(y) \coloneqq \int_a^y f$ - периодична

$F(y+T) = \int_a^{y+T} f = \int_a^y f + \underbrace{\int_y^{y+T} f}_{=0} = \int_a^y f = F(y) \Rightarrow F$ -периодична и непрерывна $\Rightarrow F$ ограничена

все условия принципа Дирихле выполнены $\Rightarrow \int_a^{+\infty} fg$ сходятся

$\Rightarrow$

От противного пусть $K \coloneqq \int_a^{a+T} f \ne 0$

$\overline{f}(x) \coloneqq f(x) - \frac{K}{T}$ - периодична

$\int_a^{a+T} \overline{f} = 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \overline{f}g$ - сходится

$\int_a^{+\infty} fg = \underbrace{\int_a^{+\infty} \overline{f}g}_{\text{сходится}} + \frac{K}{T} \underbrace{\int_a^{+\infty} g}_{\text{расходится}}$

Пример

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

1. $p > 1$ $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится $\Rightarrow (*)$ сходится

2. $0 < p \leq 1$ $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, $\frac{1}{x^p}$ монотонно убывает и стремится к 0, тогда второе следствие говорит, что интеграл сходящийся
   $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4 \frac{1}{x^p}$ монотонно убывает и стремится к 0 и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - расходится
3. $p \leq 0$ нет сходимости
   $\int_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$ - противоречит критерию Коши