

Интегральное исчисление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, если $F'(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$

Теорема

$f : \langle a, b \rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \text{sign } x$

Пусть F первообразная f , тогда $F' = f$ принимает значения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу F' должна принимать все значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F первообразная f . Тогда

1. $\forall c \in \mathbb{R} F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ тоже первообразная f , то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)' = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))' = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных

Обозначение: $\int f = \int f(x)dx$

F - первообразная f , $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$

Проверка

3.

При $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. При $x < 0$: $(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}$

11.

$$\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} ((\ln|1+x|)' - (\ln|1-x|)') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

12.

$$\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 1} \right| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \text{очев}$$

Определение

A, B - множества функция $\langle a, b \rangle$. $A + B = \{f + g, f \in A, g \in B\}$; $c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}$, $A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f, g - имеют первообразные

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $f + g$ тоже имеют первообразную $\int f + g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3. $\alpha f + \beta g$ тоже имеет первообразную, $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g . Тогда $F + G$ - первообразные для $f + g$

$$\int (f + g) = F + G + C, \int f = F + C, \int g = G + C$$

Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ - дифф. F - первообразная f . $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0. \text{ (Подставить } \varphi(x) = \alpha x + \beta \text{)}$$

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $f'g$ имеет первообразную, тогда fg' тоже имеет первообразную и $\int fg' = fg - \int f'g$

Доказательство

H - первообразная для $f'g$. (?) $fg - H$ - первообразная для fg'

$$(fg - H)' = f'g + fg' - H' = fg' \blacksquare$$

Площади и определенный интеграл

\mathcal{F} - множество всех ограниченных помножеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b - a)(d - c)$
2. $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma(\overline{E}) \leq \sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на E_- и E_+ $\Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
(точки l могут принадлежать как E_- и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2': если $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Но существование такого объекта неочев (сложно)

Теорема

$\sigma(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |P_k| : \cup_{k=1}^n P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами } \parallel \text{ осям координат} \right\}$ - квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе апоЖ

Доказательство

Проверим три свойства

1. Пусть $P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. (?) $\sigma(P) = (b-a)(d-c)$
 $\leq \{P\}$ - покрытие $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(d-c)$
 \geq Пусть $\cup_{k=1}^n P_k \supset P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P|$. Продлим стороны P_k и P , если мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k , то он разбит на маленькие прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие прямоугольники образуют покрытие P , $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников}| \geq \sum |\text{маленьких прямоугольников, входящих в } P| = |P|$ ■
2. любое покрытие E - это покрытие $\bar{E} \Rightarrow \sigma(\bar{E}) \leq \sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+ . (?) $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
 \leq Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^m P_k^+ \supset E_+$, такое что $\sum_{k=1}^m |P_k^+| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^n P_i^- \supset E_-$, такое что $\sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_-) + \varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, \dots, P_m^+, P_1^-, P_2^-, \dots, P_n^-$ образуют покрытие E , значит $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^m |P_k^+| + \sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$, устремим ε к нулю.
 \geq Пусть есть P_1, \dots, P_n - покрытие E . Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми). Тогда P_1^+, \dots, P_n^+ - покрытие E_+ , а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^n |P_k| = \sum_{k=1}^n |P_k^+| + \sum_{k=1}^n |P_k^-| \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем что хотели

Замечания

1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |P_k| \right\}$
Если $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$, но $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в \mathbb{R}^3 можно разделить на 5 непересекающихся частей, применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная, $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$

Свойства

1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной, то f_+ и f_- были непрерывны

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, пографик f - это $P_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$

Определение

$f \in C[a, b]$. $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$

$$\begin{array}{c} \wedge _ \wedge \\ (\ 0, 0 \) \\ > \ ^ < \end{array}$$

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b - a)$
4. $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-$, $(-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$,
 $\int_a^b (-f) = \sigma(P_{(-f)_+}) - \sigma(P_{(-f)_-}) = \sigma(P_{f_-}) - \sigma(P_{f_+}) = -\int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma(P_f)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f$, $f_- = 0$
6. Если $f \geq 0$, $f \in C[a, b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a, b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :$
 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]$
 $\int_a^b f = \sigma(P_f) \geq \sigma\left([x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \times [0, \frac{f(x_0)}{2}]\right) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\text{Обозначение } P_g([\alpha, \beta]) := \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

Доказательство

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b])) = \sigma(P_{f_+}([a, c])) + \sigma(P_{f_+}([c, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, c])) - \sigma(P_{f_-}([c, b])) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Следствие

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b \text{ Тогда } \int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f \text{ (индукция)}$$

Теорема монотонность

$$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Доказательство

$$\begin{aligned} f_+ = \max\{0, f\} &\leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}, \text{ аналогично } f_- = \max\{0, -f\} \geq \\ \max\{0, -g\} &= g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-} \\ \Rightarrow \sigma(P_{f_+}) &\leq \sigma(P_{g_+}), \sigma(P_{f_-}) \geq \sigma(P_{g_-}) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leq \sigma(P_{g_+}) - \sigma(P_{g_-}) = \int_a^b g \end{aligned}$$

Следствия

1.

$$f \in C[a, b] \text{ Тогда } (b - a) \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Доказательство

$$A := \min f, B := \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b - a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b - a)$$

2.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Теорема о среднем

$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

Доказательство:

$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение

Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним пределом

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int_a^x f$, $a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним пределом

$$\Psi(x) := \int_x^b f, a \leq x \leq b$$

Замечание:

1. $\Psi(x) = 0$
2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b (f)$

Теорема Барроу

$$f \in C[a, b], \Phi(x) := \int_a^x f$$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство

$\Phi'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x_+} \frac{1}{y - x} \int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f(c_y)$, $c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y \rightarrow x_+} f(c_y) = f(x)$

Если y_n убывает к x , то $c_{y_n} \rightarrow x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f(c_{y_n}) \rightarrow f(x)$

Для $\Phi'_-(x)$ аналогично

Следствие 1

$$f \in C[a, b], \Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi'(x) = -f(x)$$

Доказательство

$$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x) = -\Phi'(x) = -f(x)$$

Следствие 2

$f \in C\langle a, b \rangle$, тогда у f есть первообразная

Доказательство

Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) & \text{при } x \geq c \\ -\Psi(x) & \text{при } x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in C[a, b]$, F - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) := \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b := F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a$ $\int_a^b f := -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказательство

F, G - первообразная для f, g

$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$

$\stackrel{\text{Н.Л.}}{\Rightarrow} \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G \Big|_a^b = \alpha \cdot F \Big|_a^b + \beta G \Big|_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Теорема формула интегрирования по частям

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$

Доказательство

H - первообразная для $f' g \Rightarrow f g - H$ - первообразная для $f g'$

$(f g - H)' = (f g)' - H' = f' g + f g' - f' g = f g'$

$\int f g' = (f g - H) \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - H \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b] \varphi \in C^1[a, b], p, q \in [c, d]$

Тогда $\int_p^q f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная $f, F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f\{\varphi(t)\} \varphi'(t)$

$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \Big|_a^b = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Пример

$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4} \right) dt, \varphi(t) = t^2, \varphi'(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 $= \frac{1}{2} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \Big|_{a^2}^{b^2}$

Продолжение формулы интегрирования по частям

Пример

$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx \mid \varphi(x) := y = \frac{\pi}{2} - x \mid =$
 $-\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$W_0 = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$w W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \sin^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4} W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (\cos x)' dx = - \left(\underbrace{\sin^{n-1} \cos x}_{=0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \underbrace{\cos x \cdot \cos x dx}_{1-\sin^2 x} \right) = (n-1) \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right)$$

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} (W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

Формула Валлиса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказательство

$$\text{на } [0, \frac{\pi}{2}] \sin^{2n} \geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}$$

$$\begin{aligned} W_{2n} &\geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2} \\ \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &\geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\ \frac{\pi}{2} &\geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right) &\cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Следствие

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Доказательство

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!}$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!$$

$$\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n(n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\text{Формула Валлиса } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$