

0.1 Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями

$a \in E, f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, они непрерывны в точке a , тогда

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. $|f|$
4. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$

непрерывны в точке a

Доказательство:

Если a не предельная точка E , то все функции, заданные на E непрерывны в точке a

Если a предельная точка, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ и далее по теореме об арифметических действиях с пределами

0.1.1 Следствия

1. Многочлены непрерывны на \mathbb{R}
2. Рациональные функции (= отношение двух многочленов) непрерывны во всех точках, где знаменатель не нулится

Доказательство:

1. $f(x) = c, g(x) = x$ непрерывны и дальше их перемножаем и складываем
2. из 4 пункта теоремы

0.2 Теорема о пределе композиции

$f : D \rightarrow E, a$ - предельная точка $D, b := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$g : E \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывна в точке b . Тогда предел композиции $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$

Доказательство:

Пишем определение по Гейне. Возьмем какую-то последовательность $x_n \neq a, x_n \in D$, т.ч. $\lim x_n = a$. Из $b := \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \lim f(x_n) = b$, из непрерывности g в точке b , записанной по Гейне получим $\lim g(f(x_n)) = g(b)$

0.2.1 Следствие о непрерывности композиции

Нужно, чтобы $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, f$ непрерывна в точке a, g непрерывна в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a

Доказательство: $b = f(a)$

Пример $f(x) := x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, g(x) := \begin{cases} 0 & \text{при } x=0 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$g(f(x))$ не имеет предела в 0

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, f(x_n) = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n) = 0, g(f(x_n)) = g(0) = 0 \rightarrow 0$$

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0, f(y_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, g(f(y_n)) = g\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = 1 \rightarrow 1$$

пупу... проблема в том, что $g(x)$ не непрерывна в нуле. Грустняк

0.3 Теорема

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

Тут должна быть картинка

0.3.1 Следствия

1. $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ и равенство только при $x = 0$
2. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
 $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

Доказательство:

1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$ и равенство только при $x = 0$

Если $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, то все очевидно $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

2. $|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot \left| \cos \left(x + \frac{y}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|$. Для второй формулы аналогично

0.4 Теорема

1. \sin и \cos непрерывны на \mathbb{R}
2. tg и ctg непрерывны на своей области определения

Доказательство:

1. Возьмем $a \in \mathbb{R}$ и покажем, что \sin непрерывна в точке a . $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, такое что $|x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Заметим, что $\delta = \varepsilon$ подходит $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$
2. $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ область определения - то, где $\cos \neq 0$, а тогда при делении сохраняется непрерывность

0.5 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

При $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ и при $-\frac{\pi}{2} < x \neq 0 < \frac{\pi}{2}$
 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ и теорема о двух милиционерах ■

0.6 Теорема Вейерштрасса

Непрерывна на отрезке функция обязательно принимает на отрезке наибольшее и наименьшее значения. В частности, она ограничена.

Доказательство:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках

Надо доказать, что найдется $c \in [a, b]$, такая что $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$ (аналогично про самое маленькое)

Рассмотрим множество $A := \{f(x) : x \in [a, b]\}$, у него есть $s := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \in \overline{\mathbb{R}}$, возьмем какую-то последовательность, которая снизу подходит к s и строго возрастает (если $s \in \mathbb{R}$, то например $s_n := s - \frac{1}{n}$, а если $s = +\infty$, то например $s_n = n$), тогда $s_n < s$, значит s_n не верхняя граница A , тогда найдется какой-то $x_n \in [a, b]$, такой что $f(x_n) > s_n$

x_n - ограниченная последовательность \Rightarrow из нее можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} , имеющую предел $c := \lim x_{n_k}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$, тогда $c \in [a, b]$. Тогда f непрерывна в точке $c \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(c)$, $s_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s$, отсюда делаем вывод, что последовательность x_{n_k} стремится к s , тогда $f(c) = s$ (предел единственный). Следовательно $s \in \mathbb{R}$ и $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \Rightarrow f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$

0.6.1 Замечания

1. Важно, что отрезки, интервалы, полуинтервалы и прочая ересь не подходит (например, $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ это неограниченная функция)
2. Важно, что функция непрерывна во всех точках отрезка, без этого не верно

0.7 Теорема Больцано-Коши

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках

1. Если значения в точках a и b разных знаков, то найдется такая точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = 0$
2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется такая $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = C$

Доказательство:

1. Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$. Ну тут крч делаем бинпоиск и там тривочев (типа стягивающиеся отрезки и т.п. и значение точно нуль, потому что иначе функция не непрерывна) ■
2. Рассматриваем $g(x) := f(x) - C$ и сводим к предыдущему случаю

0.7.1 Замечание.

1. Нужна непрерывная во всех точках

Обозначение $\langle a, b \rangle$ обозначение $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$

0.8 Теорема

Непрерывный образ отрезка - отрезок

Доказательство:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывный во всех точках. Надо доказать, что $f([a, b])$ - отрезок. По т. Вейерштрасса найдется $p, r \in [a, b]$, такие что $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \forall x \in [a, b]$

Рассмотрим функцию f на отрезке $[p, q]$ (или $[q, p]$)

Тогда для любого C лежащего между $f(p)$ и $f(q)$ найдется $c \in [p, q]$, где $f(c) = C \Rightarrow f([a, b]) = [f(p), f(q)]$

0.9 Теорема

Непрерывный образ промежутка - промежуток (возможно другого вида)

Доказательство: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках.

$m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \in \mathbb{R}$ и $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M]$

Осталось понять, что $f(\langle a, b \rangle) \supset (m, M)$

Возьмем $y \in (m, M)$. $y < M \Rightarrow y$ не верхняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow$ найдется $q \in \langle a, b \rangle$, для которого $f(q) > y$,

$y > m \Rightarrow y$ не нижняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow$ найдется $p \in \langle a, b \rangle$, для которого $f(p) < y$, то есть $[p, q] \subset \langle a, b \rangle$ и $f(p) < y < f(q) \Rightarrow$ по теореме Б-Л найдется $c \in [p, q]$, такое что $f(c) = y$

0.9.1 Замечание

Промежуток может получиться любого вида

0.10 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ инъекция

$g : f(\langle a, b \rangle) \rightarrow \langle a, b \rangle$ - обратная функция, если $f \circ g$ и $g \circ f$ тождественная функция, то есть $f(g(x)) = x, g(f(x)) = x$

0.11 Лемма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна

Если $f(\langle a, b \rangle)$ - промежуток, то f - непрерывна во всех точках

Доказательство:

Пусть f возрастает. Возьмем $c \in \langle a, b \rangle$, и докажем, что f - непрерывна в точке c

Если $x < c$, то $f(x) \leq f(c) \Rightarrow$ на $\langle a, c \rangle$ возрастает и ограничена сверху $f(c) \Rightarrow$ существует $A := \lim_{x \rightarrow c-} f(x) \leq f(c)$

Проверим, что $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$ От противного

Пусть $A < f(c)$. Возьмем $y \in (A, f(c))$. Тогда $f(x) \neq y \forall x$:

Если $x \geq c$, то $f(x) \geq f(c) > y$

Если $x < c$, то $f(x) \leq \sup_{x < c} f(x) = A < y$

$\Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$ не промежуток

Аналогично $f(c) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$

0.12 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и строго монотонна $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$, $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$

Тогда

1. f обратима и $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2. f^{-1} строго монотонна
3. f^{-1} непрерывна во всех точках

Доказательство:

1. f биекция между $\langle a, b \rangle$ и $\langle m, M \rangle$ инъекция из строгой монотонности, сюръекция из предыдущей теоремы
2. Пусть f строго возрастает
 $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$
 $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$
 $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
 $\Rightarrow f^{-1}$ строго возрастает
3. 1 + 2 + лемма

1 Параграф 3 Элементарные функции

1. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ непрерывна и строго возрастает, тогда $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ непрерывна и строго возрастает
2. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ну понять можно, что будет происходить
3. $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ очевидно
4. ctg тривиально

1.1 Определение

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

$\exp n = \exp(1 + 1 + \dots + 1) = (\exp 1)^n \rightarrow +\infty$

$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \rightarrow 0$

\exp строго возрастает и непрерывна, тогда существует обратная функция (назовем ее \ln)

$\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает

Свойства:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. $\ln(1+x) \leq x$ при $x > -1$
4. $\ln(1+x) \geq 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, если $-1 < x < e - 1$

Доказательство:

$$y := \ln(1+x), \exp y = 1+x, \exp y \leq \frac{1}{1-y} \Rightarrow q - y \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq y$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ при } -1 < x < e - 1$$

При $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$$

При $x < 0$:

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1$$

1.2 Определение

$a^b := \exp(b \cdot \ln a)$, $a > 0$

1.2.1 Замечание

1. $b = n \in \mathbb{N}, a^n = \exp(n \ln a) = \exp\left(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_n\right) = \exp(\ln a) \cdot \dots \cdot \exp(\ln a) = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$
2. $b = -n$: $\exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
3. $b = \frac{1}{n}$: $\exp\left(\frac{1}{n} \ln a + \frac{1}{n} \ln a + \dots + \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a}$
4. Если $b = \frac{k}{n}$, то $a^{\frac{k}{n}} = \exp\left(k \cdot \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Упражнение: Если $\lim b_n = b, b_n \in \mathbb{Q}$, то $\lim a^{b_n} = a^b$

1.2.2 Следствия

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство:

1. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ т.к экспонента непрерывна, то предел можно записать внутри = $\exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp 1 = e$

2. Проверим по Гейне. Возьмем $x_n \rightarrow \infty$, тогда $y_n := \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$, тогда $\lim (1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$

1.3 Показательная функция

$a^x := \exp(x \ln a) : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

1.3.1 Свойства

1. Непрерывна (композиция непрерывных функций)
2. при $a > 1$ строго возрастает, при $a < 1$ строго убывает.
3. $a^x \geq 1 + x \ln a$ т.к $(\exp y \geq 1 + y)$

1.4 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство:

$$a^x - 1 \geq x \ln a$$

$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \geq 1 - x \ln a$, тогда $a^x \leq \frac{1}{1-x \ln a}$, если $x \ln a < 1$. Снизу $x \ln a \leq a^x - 1 \leq \frac{1}{1-x \ln a} - 1 = \frac{x \ln a}{1-x \ln a}$

$$\ln a \leq \frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{\ln(a)}{1-x \ln a} \text{ при } x > 0$$

если $x < 0$, то $\ln a \geq \frac{a^x - 1}{x} \geq \frac{\ln a}{1-x \ln a}$, тогда если $x \rightarrow 0$ получаем, что $\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

1.5 Степенная функция

$x^p := \exp(p \ln x) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

1.5.1 Свойства

1. Непрерывная
2. Монотонная. При $p > 0$ строго возрастает, при $p < 0$ строго убывает

1.6 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

$(1+x)^p = \exp(p \ln(1+x)) \geq 1 + p \ln(1+x)$, с другой стороны $\exp \leq \frac{1}{1-p \ln(1+x)}$ при $p \ln(1+x) < 1$

это заведомо выполнены при $p x < 1$

$$\frac{p \ln(1+x)}{1-p \ln(1+x)} = \frac{1}{1-p \ln(1+x)-1} \geq (1+x)^p - 1 \geq p \ln(1+x)$$

$\frac{p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}}{1-p \ln(1+x)} \geq \frac{(1+x)^p - 1}{x} \geq p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1, 1 - p \ln(1+x) \rightarrow 1$ предельный переход и два милиционера

2 Сравнение функций

2.1 Определение

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка E

1. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ если существует $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
2. $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ если существует $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
3. $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$, если $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ и φ ограничена, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$

2.2 Определение

$f = O(g)$ на множестве E , если найдется c , такое что $|f(x)| \leq C|g(x)|$ при $x \in E$

2.2.1 Замечание

1. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g, \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$. Если какой-то $g(x) = 0$, то $f(x) = 0$, а $\varphi(x)$ выбираем какой хотим, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 1$
2. $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ означает $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 0$

2.2.2 Свойства

1. « \sim » - отношение эквивалентности

Доказательство:

$$f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ в окрестности точки } a \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi \neq 0 \text{ в окрестности точки } a \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)f(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = 1 \Rightarrow g \underset{x \rightarrow a}{\sim} f$$

Транзитивность $f \sim g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x), g \sim h \Rightarrow g(x) = \psi(x)h(x)$ в окрестности точки a

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x)$$

2. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \rightarrow a$, то $f_1 f_2 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1 g_2$

3. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \rightarrow a$ и $f_2 \neq 0$ в проколотой окрестности точки a , то $\frac{f_1}{f_2} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$

Доказательство:

$$f_1 = \varphi_1 g_1 \text{ и } f_2 = \varphi_2 g_2 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi_2(x) = 1$$

$$f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 g_1 g_2 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) \varphi_2(x) = 1, \text{ также сама для деления}$$

4. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g + o(f)$

Доказательство:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g \Leftrightarrow f = g + o(g), \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 0$$

Вторая равносильность:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f), g \sim f \Leftrightarrow g = f + o(f), g \sim f \Leftrightarrow f \sim g, f = g - o(f) = g + o(f)$$

5. $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$ и $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Доказательство:

$$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \varphi \text{ ограничена в окрестности точки } a, \text{ то } f = O(g)$$

6. $f \cdot o(g) = o(fg)$ Доказательство очев (я к сессии его забуду)

7. $o(f) + o(f) = o(f), O(f) + O(f) = O(f)$

Доказательство:

$$g + h, \text{ где } g = o(f) \text{ и } h = o(f)$$

$$g = o(f) \Rightarrow g = \varphi \cdot f, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

$$h = o(f) \Rightarrow h = \psi f, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$$

$$g + h = (\varphi + \psi)f \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$$

8. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f = b + o(1)$ Что такое $o(1)$ - это какая-то функция, которая стремится к 0, то есть $f = b + o(1)$ значит, что $f(x) - b \rightarrow 0$

2.2.3 Примеры:

Все при $x \rightarrow 0$

1. $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^p - 1 \sim px, \operatorname{tg} x \sim x \left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos x \sim 1 \right), \arctan \sim x \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \right)$, по Гейне $x_n \rightarrow 0$
2. $\sin x = x + o(x), \ln(1+x) = x + o(x), a^x = 1 + x \ln a + o(x) \quad (a^x - 1 = x \ln a + o(x \ln a) = x \ln a + o(x)), (1+x)^p = 1 + px + o(x), \operatorname{tg} x = x + o(x), \arctan x = x + o(x), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \left(1 - \cos x = x^2 + o(x^2), 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right)$

3 Дифференцируемые функции

3.1 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то он называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$

3.1.1 Замечание

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3.2 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

f - дифференцируема в точке x_0 , если существуют $k \in \mathbb{R}$, такое что $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$

3.2.1 Замечание

$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h)$ при $h \rightarrow 0$

3.3 Теорема (критерий дифференцируемости)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

следующие условия равносильны:

1. f дифференцируема в точке x_0
2. У функции f существует конечная производная в точке x_0
3. Существует $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и φ непрерывна в точке x_0

В случае, когда эти условия выполнены $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$: $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \Rightarrow f'(x_0) = k$$

$2 \Rightarrow 3$: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$. Но $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi$

непрерывна в точке x_0

$3 \Rightarrow 1$: $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$

$$\varphi(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\left(\varphi(x) - \varphi(x_0) \right)}_{\rightarrow 0} (x - x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow k = \varphi(x_0)$$

3.4 Определение. Односторонние производные

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3.4.1 Замечание

$f'(x_0)$ существует \Leftrightarrow существуют правая и левая производная и они равны

3.5 Примеры

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$
2. $f(x) = |x|$
 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$, аналогичными преобразованиями получаем, что $f'_-(0) = -1$, значит дифф. в точке нет

3.6 Утверждение

Если f дифференцируема в точке x_0 , то f непрерывна в точке x_0 . Обратное не верно

Доказательство:

$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ это функция вида $\varphi(x)(x - x_0)$, $\varphi(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

3.7 Теорема об арифметических действиях с дифференцируемыми функциями

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

1. $f \pm g$ дифф. в точке x_0 и $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. fg дифф. в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифф. в точке x_0 и $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доказательство:

f, g - дифф. $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, $g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$

1. сложим, получим $f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (\varphi(x) + \psi(x))(x - x_0)$, $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2.

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \underbrace{\left(f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0) \right)}_{X(x)}(x - x_0)$$

Нужно доказать, что $X(x)$ непрерывна в точке x_0 и найти $X(x_0)$

$$(fg)'(x_0) = X(x_0) = f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0) + \varphi(x_0)\psi(x_0)(x_0 - x_0)$$

3. Поймем, что $\frac{1}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} =: X(x)$$

Нужно доказать, что X непрерывна в точке x_0 и посчитать $X(x_0)$

$$g \text{ дифференцируема в точке } x_0 \Rightarrow g \text{ непрерывна в точке } x_0, X(x_0) = \frac{-\psi(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

3.8 Пример. Уравнение касательной

касательная - предельное положение секущей

$$y = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} + f(x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ уравнение касательной к графику функции } f \text{ в точке } x_0$$

3.9 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle, g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \langle a, b \rangle, f$ дифференцируем в точке x_0

g дифференцируем в точке $f(x_0) =: y_0$

Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ Доказательство:

f - дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0

g - дифференцируема в точке $y_0 \Rightarrow g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$, где ψ непрерывна в точке y_0

возьмем $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)}_{X(x)} \cdot (x - x_0) =$$

Нужно доказать, что $X(x)$ непрерывна в точке x_0

φ непрерывна в точке x_0

f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f$ непрерывна в точке x_0 , ψ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$\psi(f(x))$ непрерывна в точке x_0

$$(g \circ f)'(x_0) = X(x) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

3.10 Теорема

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f строго монотонна. $x_0 \in \langle a, b \rangle$, f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, $y_0 := f(x_0)$

Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство:

f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

Если $y \neq y_0$, то $\neq 0$ Если $y = y_0$, то $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ по условию

$$\Rightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0)$$

Надо проверить, что X непрерывна в точке y_0 , такое что $(\varphi(f^{-1}(y)))$ непрерывна в точке y_0
 f^{-1} непрерывна в точке y_0 (т.к. f непрерывна в точке x_0)

φ непрерывна в точке x_0 , так как f непрерывна в точке x_0

$$X(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3.10.1 Следствие

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

1. $(c)' = 0$
2. $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказательство:

$$2. (x^p)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^p - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = p \cdot x^{p-1}$$

$$3. (a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{\frac{h}{x}} - 1}{\frac{h}{x}} = a^x \ln a$$

$$4. (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$5. (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{h}{2}) \cdot \cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos(x)$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9. f(x) := \sin x, f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f^{-1} \arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$11. (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

4 Теоремы о среднем

4.1 Теорема Ферма

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$, f дифф. в точке x_0 $f(x_0) = \min_{t \in (a, b)} f(t)$ или с максимумом

Тогда $f'(x_0) = 0$

Доказательство: $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, знаменатель положителен, числитель больше или равен нулю и вся дробь неотрицательна, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Аналогично с производной слева получаем, что предел ≤ 0

Значит, $f'(x_0)$ просто 0

4.2 Геометрический смысл: в точке min, max касательная всегда горизонтальна

4.3 Теорема Ролля

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифференцируема на (a, b)

Если $f(a) = f(b)$, то найдется точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$

Доказательство: По теореме Вейерштрасса найдутся точки $p, q \in [a, b]$, такие что $f(p) = \min_{t \in [a, b]} f(t)$, $f(q) = \max_{t \in [a, b]} f(t)$

Случай 1 p, q концы отрезка $\Rightarrow f(p) = f(q) \Rightarrow f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$

Случай 2

Хотя бы одна из этих точек не конец отрезка $\xRightarrow{\text{по Т. Ферма}}$ производная в этой точке равна 0

4.3.1 Геом. смысл

$f(a) = f(b)$ и f дифф., то есть точка где касательная горизонтальна

4.3.2 Замечание

Важно, что дифференцируемость есть во всех точках

4.4 Теорема Лагранжа (формула конечных приращений)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф на (a, b) .

Тогда найдется $c \in (a, b)$, такая что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) := f(x) - kx$

Подберем k так, что $f(a) - ka = g(a) = g(b) = f(b) - k \cdot b \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Функция g удовлетворяет теореме Ролля \Rightarrow существует такая точка, такая что $g'(c) = 0$

$g'(c) = f'(c) - k \Rightarrow f'(c) = k$

4.4.1 Геометрический смысл

найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде

4.5 Теорема Коши

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и дифф. внутри, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Тогда существует $c \in (a, b)$, такая что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство:

$g(a) \neq g(b)$ иначе нашлась бы точка, где производная нулится. Рассмотрим функцию $h(x) := f(x) - kg(x)$, подберем k так, что $h(a) = h(b)$, $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

По т. Ролля о функции h найдется $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) - kg'(c) = h'(c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

4.5.1 Геометрический смысл

$(g(t), f(t))$ - координата частицы в момент времени t , тогда $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ угловой коэфф. хорды, соединяющей a, b . Тогда вектор скорости этой частицы совпадает по скорости с этой

4.6 Следствие теоремы Лагранжа

1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках, дифф внутри. А еще знаем, что $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$

Тогда $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in \langle a, b, \rangle$

Доказательство:

Пусть $x \leq y$, тогда f непрерывна на x, y и дифф. внутри, а значит можно на этом отрезке использовать теорему Лагранжа, то есть найдется $c \in (x, y) \subset (a, b)$, такая что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), |f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|$

2.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, тогда f постоянна

Доказательство:

Это 1. для $M = 0$

4.7 Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой M , если $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in E$

3. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если $f'(c) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ то f строго возрастает
4. То же самое, только производная меньше нуля, только тогда убывание

Доказательство

Возьмем $x < y$ и применим Т. Лагранжа для $[x, y]$. Тогда найдется $c \in (x, y) \subset (a, b)$, такие что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

5. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри.

Тогда

- а) f нестрого возрастает $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$
- б) аналогично для убывания

Доказательство: а) \Leftarrow аналогично предыдущему

$\Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$ предельные переход в неравенстве.

4.7.1 Замечание

с 3, 4 такой фокус не прокатит (прогипотинузит)

4.8 Теорема Дарбу

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. во всех точках. C лежит между $f'(a), f'(b)$, тогда найдется такая точка, в которой $f'(c) = C$

Доказательство:

Случай 1

$C = 0$, тогда $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков. Пусть $f'(a) < 0 < f'(b)$ f дифф. на $[a, b] \Rightarrow f$ непрерывна на отрезке. Значит можно применить т. Вейерштрасса найдется $p \in [a, b]$, такая что $f(p) = \min_{t \in [a, b]} f(t)$

Если $p \in (a, b)$, то по Теореме ферма $f'(p) = 0$, а это то, что нужно

Пусть $p = a$, тогда $f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, числитель больше или равен 0, знаменатель больше 0, тогда о предельном переходе предел ≥ 0 , противоречие

Пусть $p = b$, тогда $f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$, противоречие

Знаит точка не может оказаться не на концах отрезка, а для внутреннего мы уже знаем

Случай $C \in \mathbb{R}$

Рассмотрим $g(x) = f(x) - Cx$, тогда $g'(x) = f'(x) - C$

$\Rightarrow g'(a)$ и $g'(b)$ разных знаков \Rightarrow найдется $c \in (a, b)$, где $g'(c) = 0$

4.8.1 Следствие

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифф на и $f'(x) \neq 0 \quad \forall x$ тогда f строго монотонна

Доказательство: Докажем, что f' знакопостоянна

От противного $f'(p) < 0 < f'(q)$ тогда по т. Дарбу есть точка c между p и q , такая что $f'(c) = 0$. Противоречие

4.9 Правило Лопиталья

4.9.1 Версия 1

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф на (a, b) . $g'(x) \neq 0 \forall x$, $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$

Тогда если есть $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, то предел отношения функции равен тому же самому.

Аналогично для предела с +

Доказательство:

Проверим по Гейне, что $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Возьмем x_n возрастающую и $\lim x_n = b$. Надо доказать, что $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$, по условию $\lim(f(x_n)) = \lim(g(x_n)) = 0$, еще знаем, что $g' \neq 0$, тогда по следствию g строго монотонна. Тогда для вычисления предела воспользуемся т. Штольца.

Применим т. Штольца. Надо посчитать $\lim \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$. Найдется $c_n \in (x_n, x_{n+1})$, такая что $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$. $x_n < c < x_{n+1} \Rightarrow \lim c_n = b$, тогда из определения по Гейне для $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$

4.9.2 Версия 2

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \forall x$, $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = +\infty$

Тогда если $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Аналогично для предела с +

Доказательство:

То же самое доказательство, только сослаться для другую теорему Штольца :D

4.9.2.1 Пример

$\lim_{x \rightarrow 0}$

4.9.3 Примеры Лопиталья

1. $p > 0$, тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{p x^p} = 0$$

2. $a > 1$, $p \in \mathbb{R}$ тогда $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$

Если $p \leq 0$ то очев

Если нет $\lim \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \frac{p}{\ln(a)} \lim \frac{x^{p-1}}{a^x}$, при $p \leq 1$ жизнь прекрасна и удивительна. Ну и так $n > p$ раз применяем правило Лопиталья, то все будет збс и стремление к 0

3. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \exp(\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x) = \exp(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

5 Производные высших порядков

5.1 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$, Пусть f дифф в окрестности в окрестности точки x_0 , если при этом f' буедт дифференцируема в точке x_0 , то говорят, что f дважды дифференцируема в точке x_0 . Второй производной в точке x_0 это $f''(x_0) = (f')'(x_0)$

5.2 Определение

f n раз дифференцируема в точке x_0 , если f $n-1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 и f^{n-1} дифф. в точке x_0
 $f^n := (f^{n-1})'$

5.3 Определение

$f \in C^n(\langle a, b \rangle)$ означает, что $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, n раз дифференцируема во всех точках и f, f', \dots, f^n непрерывны на $\langle a, b \rangle$

5.4 Определение

$f \in C(\langle a, b \rangle)$ означает, что $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывна во всех точках

5.5 Замечание

$C(\langle a, b \rangle) \supset C^1(\langle a, b \rangle) \supset C^2(\langle a, b \rangle) \supset \dots$

5.6 Пример

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^{n+\frac{1}{3}} = x^n \sqrt[3]{x}$

$f \in C^n(\mathbb{R})$, но $f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$

$f'(x) = (n + \frac{1}{3})x^{n-1+\frac{1}{3}}$

$f''(x) = (n + \frac{1}{3})(n - \frac{2}{3})x^{n-\frac{5}{3}}$

$f^n(x) = (n + \frac{1}{3})(n - \frac{2}{3}) \dots \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt[3]{x}$ - непрерывна во всех точках

Но f^n не имеет производной в 0

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - f^n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c \sqrt[3]{x} - 0}{x} = +\infty, f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$

5.7 Обозначение

$C^\infty(\langle a, b \rangle) := \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(\langle a, b \rangle)$, т.е. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и имеет производную любого порядка

5.8 Теорема (Арифметические действия с n -ми производным)

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f$ и g n раз дифференцируема в точке x_0 . тогда

1. $\alpha f + \beta g = (\alpha f + \beta g)^n(x_0) = \alpha f^n(x_0) + \beta g^n(x_0)$

2. $fg, (fg)^n(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^k(x_0) \cdot g^{n-k}(x_0)$

3. f n раз дифференцируема в точке $\alpha x_0 + \beta$. Тогда $g(x) := f(\alpha x + \beta)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $g^n(x_0) = \alpha^n f^n(\alpha x_0 + \beta)$

Доказательство первого:

По индукции

База очев

Переход $n \rightarrow n+1$

По определению $(\alpha f + \beta g)^{n+1} = ((\alpha f + \beta g)^n)' = (\alpha f^n + \beta g^n)' = \alpha(f^n)' + \beta(g^n)' = \alpha f^{n+1} + \beta g^{n+1}$

Доказательство третьего:

Индукция по n . Переход $n \rightarrow n+1$

$g^{n+1}(x_0) = (g^n)'(x_0) = (\alpha^n f^n(\alpha x + \beta))' \big|_{x=x_0} = \alpha^n f^{n+1}(\alpha x + \beta) \cdot (\alpha x + \beta)' \big|_{x=x_0} = \alpha^{n+1} f^{n+1}(\alpha x_0 + \beta)$

Доказательство второго:

Снова индукция...

$(fg)' = fg' + f'g$

Переход $n \rightarrow n+1$

$(fg)^{n+1} = ((fg)^n)' =$

$(\sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k})' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^k g^{n-k})' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{k+1} g^{n-k} + f^k g^{n-k+1}) = \sum_{j=0}^n C_n^j f^{j+1} g^{n-j} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^k g^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^k g^{n+1-k}$

5.8.1 Примеры

1. $(x^p)^{(n)} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$
2. $(\ln x)^{(n)} = ((\ln x)')^{(n-1)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)\dots(-1-(n-1)+1)x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
3. $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$

5.9 Определение

f n раз дифференцируема в x_0

Многочлен Тейлора для функции f в x_0 степени n

$$T_{n,x_0}f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

5.10 Лемма 1

$$f(x) := (x - x_0)^k, \text{ тогда } f^{(m)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{если } k \neq m \\ m! & \text{если } k = m \end{cases}$$

Доказательство:

Если $k \geq m$, то $f^{(m)}(x) = k(k-1)\dots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}$

При $k > m$ $f^{(m)}(x_0) = 0$, так как есть $(x-x_0)$ в положительной степени

При $k = m$ $f^{(m)}(x) = m!$

При $k < m$ $f^{(m)}(x) = (f^{(k)})^{(m-k)} = (k!)^{(m-k)} = 0$

5.11 Лемма 2

P - многочлен степени $\leq n$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Тогда P можно представить в виде $\sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$, где c_0, c_1, \dots, c_n - некоторые коэфф.

Доказательство:

Обозначим $t := x - x_0$, тогда $x = t + x_0$

$P(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (t + x_0)^k$, раскроем скобки, все разложится по каким-то степеням t с какими-то коэфф., а это то, что нам нужно

5.12 Теорема (Формула Тейлора для многочленов)

Пусть P - многочлен степени $\leq n$, Тогда

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

По лемме 2 напомним разложение, оно существует

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$$

и найдем c_k

$P^{(m)}(x) = \left(\sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k \right)^{(m)} = \sum_{k=0}^n c_k \left((x - x_0)^k \right)^{(m)}$ подставим $P^{(m)}(x_0)$ по Лемме 1 там почти всегда нули, за исключением одной производной, которая в точности m -тая, получим $P^{(m)}(x_0) = m! c_m$

5.12.1 Следствие

Если степень многочлена $P \leq n$, то он совпадает со своим многочленом Тейлора степени n

5.13 Определение

$R_{n,x_0}f(x) := f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ - остаток в формуле Тейлора

Формула Тейлора $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$

5.14 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$, f n раз дифференцируема в точке x_0 . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0$$

5.14.1 Лемма

g n раз дифференцируема в точке x_0 и $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$

Тогда $g(x) = o((x - x_0)^n)$

Доказательство:

Надо доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ считаем по Лопиталю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

Надо найти $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{x - x_0}$

Напишем определение дифф $g^{(n-1)}$ в точке x_0 $g^{(n-1)}(x) = \underbrace{g^{(n-1)}(x_0)}_{=0} + \underbrace{g^{(n)}(x_0)}_{=0}(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$x_0) \Rightarrow g^{(n-1)}(x) = o(x - x_0)$$

Доказательство формулы:

$g(x) := f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ проверим, что g удовлетворяет условиям Леммы

$$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(m)}(x_0), \quad 0 \leq m \leq n \text{ из предыдущей теоремы мы знаем, что } \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(T_{n,x_0}f)^{(k)}(x_0)}{k!}$$

5.15 Следствие

Пусть f n раз дифференцируема в точке x_0 и p - такой многочлен степени $\leq n$, что $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда $P = T_{n,x_0}f$

Доказательство:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n), \quad f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) \Rightarrow Q(x) := T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n), \quad Q \text{ - многочлен степени } \leq n, \text{ тогда можем записать разложение } Q(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x - x_0)^k$$

Пусть m - наименьший индекс, для которого $c_m \neq 0$, тогда $Q(x) = \sum_{k=m}^n c_k(x - x_0)^k = o((x - x_0)^m)$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{(x - x_0)^m} = \lim_{x \rightarrow x_0} (c_m + c_{m+1}(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^{n-m}) \Rightarrow c_m = 0, \text{ противоречие}$$

5.16 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

f $n + 1$ раз дифференцируема $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Тогда найдется c между x_0 и x , такая что $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Доказательство:

Возьмем такое $M \in \mathbb{R}$, что $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M \cdot (x - x_0)^{n+1}$

Надо доказать, что $M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ для некоторого c

$g(t) := f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t - x_0)^{n+1}$ - эта функция $n + 1$ раз дифференцируема

$g(x) = 0$, (по выбору M)

$$0 \leq k \leq n: g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(k)}(x_0) - 0 = 0$$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - M(n+1)!$$

$g(x) = g(x_0) = 0$ Тогда по теореме Ролля найдется x_1 между x, x_0 , такая что $g'(x_1) = 0$

$g'(x_0) = g'(x_1) = 0 \Rightarrow$ по т. Ролля найдется x_2 , такая что $g''(x_2) = 0$

и т.д.

$g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_n) = 0 \Rightarrow$ по Роллю найдется c между x, x_n , такая что $g^{(n+1)}(c) = 0, g^{n+1}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n+1)! \cdot M$

5.16.1 Следствие

Пусть f $n + 1$ раз дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$. Тогда $|R_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Доказательство:

$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ для некоторого c , рисуем модуль

$$|R_{n,x_0}f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

5.16.2 Следствие

f бесконечно дифф на $\langle a, b \rangle$ и $|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$ и $\forall n$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n, x_0} f(x) = f(x)$

Доказательство:

$$|f(x) - T_{n, x_0} f(x)| = |R_{n, x_0} f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ но мы знаем, что } \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$$

6 Формулы Тейлора для элементарных функций

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$(\exp x)^{(k)} = \exp x$, значение в нуле 1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$ значение в 0 это $\cos \frac{\pi k}{2}$, то есть = 0 при k нечетном и $= (-1)^j$ при $k = 2j$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$(\sin)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$ значения в нуле - это $\sin \frac{\pi k}{2}$, то есть = 0 при k четном и $= (-1)^j$ при $k = 2j + 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \cdot (-1)^{k-1} \text{ значение в нуле} = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

6.1 Определение. Убывающая факториальная степень

$$p^{\underline{k}} := p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)$$

$$k^{\underline{k}} = k!, k^{\underline{k+1}} = 0$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^n \frac{p^{\underline{k}}}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$((1+x)^p)^{(k)} = p^{\underline{k}} (1+x)^{p-k}$$

6.2 Определение

Пусть f бесконечно дифференцируема в точке x_0

Ряд Тейлора для функции f называется

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

6.3 Теорема

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Было следствие. f бесконечно дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $|f^{(k)}(x)| \leq M \quad \forall n \forall x \in \langle a, b \rangle$

то $T_{n, x_0} f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$T_{n, x_0} f(x)$ - частичная сумма ряда

$$\text{В услю следствия } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

Доказательство теоремы:

$$x_0 = 0 \quad f(x) = \cos x, |f^{(k)}(x)| = |\cos(x + \frac{\pi k}{2})| \leq 1$$

$f(x) = \exp x$ рассмотрим на отрезке $[a, b]$ и проверим, что условие следствия выполнено на этом отрезке

$$|f^{(k)}(x)| = |\exp x| = \exp x \leq \exp b =: M$$

6.4 Определение. Аппроксимация Паде

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n} + o(x^{n+m}) \text{ при } x \rightarrow 0$$

Пусть f будет $m+n$ раз дифференцируема в точке 0

Тогда $f(x) = c + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n+m} x^{n+m} + o(x^{n+m})$ при $x \rightarrow 0$

Приравняем и умножим на знаменатель $(c_0 + c_1x + \dots + c_{m+n}x^{m+n})(1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) + o(x^{n+m}) = (a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) + o(x^{m+n})$

Пример:

для $\cos x$ найдем аппроксимацию с параметрами $[2, 2]$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos x = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2} + o(x^4)$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)(1 + b_1x + b_2x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^4)$$

$$1 + b_1x + b_2x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{b_1x^3}{2} - \frac{b_2x^4}{2} + \frac{x^4}{24} = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$b_1 = 0, a_1 = 0, 1 = a_0, b_2 - \frac{1}{2} = a_2, -\frac{b_2}{2} + \frac{1}{24} = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{12}, a_2 = -\frac{5}{12}$$

$$\cos x = \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2} + o(x^4)$$

6.5 Теорема e - иррационально

6.6 Доказательство:

от противного, пусть $e = \frac{m}{n}$

по Лагранжу $\frac{m}{n} = e = \exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\exp c}{(n+1)!}$

$$\underbrace{m \cdot (n-1)!}_{\text{целое}} = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!} + \frac{\exp c}{n+1}$$

$$\frac{\exp c}{n+1} - \text{целое число}, \frac{\exp c}{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{\exp c}{n+1} \geq 1,$$

$$\frac{\exp c}{n+1} < \frac{e}{n+1}$$

$e \geq n+1$ невозможно

7 Экстремумы функций

7.1 Определение

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$$

a - точка нестрогого локального минимума, если существует такая окрестность U_a точки a , что $f(x) \geq f(a) \forall x \in U_a \cap E$

Аналогично строгого если $f(x) > f(a) \quad \forall x \in U_a \cap E$

Аналогично нестрогого и строгого локального максимума

7.1.1 Замечание

Дальше рассматриваем только случаи, когда E - промежуток

7.2 Теорема

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

7.3 Определение

a - точка экстремума, если a - точка нестрогого локального \min или нестрогого локального \max , а - точка строгого экстремума, если a - точка строгого локального \min или строгого локального \max
 $x_0 \in (a, b)$ - точка экстремума

Тогда если f дифференцируема в точке x_0 , то $f'(x_0) = 0$

7.3.1 Доказательство

Пусть x_0 - точка нестрогого локального \max . Тогда найдется $\delta > 0$, т.ч. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0) - \text{наибольшее значение функции на } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \xRightarrow{\text{Т. Ферма}} f'(x_0) = 0$$

7.3.2 Замечание

1. \max и \min могут быть в точке не дифф.

2. Важно, что интервал, точнее что x_0 не конец отрезка

3. Условие $f'(x_0) = 0$ недостаточно для того, чтобы точка была точкой экстремума $f(x) = x^3$

7.4 Теорема (достаточное условие экстремума в терминах 1-ой производной)

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ найдется $\delta > 0$, такое что f дифф на $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ и непрерывна в x_0 . Тогда

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 \in (x_0, x_0 + \delta)$ в точках локального \max
2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 \in (x_0, x_0 + \delta)$ в точках локального \min

7.4.1 Замечание

f' не мешает знаку в точке x_0 , то x_0 - не точка экстремума

7.4.2

1. $(x_0 - \delta, x_0)$ f непрерывна и дифференцируема внутри $f' > 0 \Rightarrow f$ строго возрастает на $(x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$
 $[x_0, x_0 + \delta)$ f непрерывна и дифференцируема внутри и $f' < 0 \Rightarrow$ строго убывает на $[x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $\Rightarrow x_0$ - точка строгого локального \max

7.4.3 комментарий к замечанию

Если знаки $+$ и $+$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

\Rightarrow не экстремум

7.5 Теорема (достаточность условия экстремума в терминах n -ой производной)

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ f n раз дифференцируема в точке x_0

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)} \neq 0$

Тогда

1. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 точка строгого локального \min
2. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 точка строгого локального \max
3. Если n нечетно, то x_0 не точка экстремума

Частный случай $n = 2$ $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ f дважды диф. в x_0 , $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$.

Тогда

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 точка строгого локального \min
2. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 точка строгого локального \max

7.5.1 Доказательство

Напишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) > 0$$

1. n - четно $f^{(n)} > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ при x близких к x_0
2. skip
3. n - нечетно, $(x - x_0)^n$ меняет знак в точке x_0 , а выражение в скобках при x близких к x_0 фиксированного знака \Rightarrow нет экстремума

8 Выпуклые функции

8.1 Определение

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая, если $\forall x, y \in \langle a, b \rangle, \forall \lambda \in (0, 1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Строго выпуклая, если очев (только x, y разные)

Вогнутая, если знаки поменять и строго вогнутая очев

выпуклая ака выпуклая вниз, вогнутая ака выпуклая вверх

8.1.1 Пример

$f(x) = x^2$ строго выпуклая

$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \Rightarrow 2\lambda(1 - \lambda)xy < (\lambda - \lambda^2)x^2 + ((1 - \lambda) - (1 - \lambda)^2)y^2 \Rightarrow 2xy < x^2 + y^2 \Rightarrow 0 < (x - y)^2$ это верно при $x \neq y$

8.1.2 Замечание

8.1.2.1 1)

$u < w, v := \lambda u + (1 - \lambda)w$

Условие $v \in (u, w)$ равносильно условию $\lambda \in (0, 1)$

$\Leftrightarrow \lambda \in (0, 1) \quad v = \lambda u + (1 - \lambda)w < \lambda w + (1 - \lambda)w = w$

$\Rightarrow v = \lambda u + (1 - \lambda)w \Rightarrow \lambda(u - w) = v - w \Rightarrow \lambda = \frac{w-v}{w-u} \in (0, 1)$

8.1.2.2 2)

f выпукла на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \forall y < v < w$ из $\langle a, b \rangle$

$f(v) \leq \frac{w-v}{w-u}f(u) + \frac{v-u}{w-u}f(w) (\Leftrightarrow (w-u)f(v) \leq (w-v)f(u) + (v-u)f(w))$

$y = \frac{f(w)-f(u)}{w-u}(x-u) + f(u)$

$\frac{f(w)-f(u)}{w-u}(v-u) + f(u) = \frac{v-u}{w-u}f(w) + \frac{w-v}{w-u}f(u)$

Смысл: берем две точки на графике, и весь график лежит ниже, проходящей через эти две точки

8.1.3 Свойства выпуклых функций

1. $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклые, то $f + g$ - выпуклые
2. $\alpha > 0$ и f - выпуклая $\Rightarrow \alpha f$ выпуклая