Автор: FlintWithBlackCrown aka Кирилл Болохов

Определение

Верхний предел последовательности $\overline{\lim}\, x_n (\limsup x_n)$
$\overline{\lim}\, x_n := \lim \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \lim \sup_{k \geq n} x_k$, пусть $\sup_{x \geq n} = z_n$
Соглашене $\lim(+\infty) = +\infty$

Определение

Нижний предел $\underline{\lim}\, x_n (\liminf x_n)$
$\underline{\lim}\, x_n := \lim \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \lim \inf_{k \geq n} x_k$, пусть $\inf_{k \geq n} x_k = y_n$
Замечание $y_n \leq z_n, z_n \geq z_{n+1}$ и $y_n \leq y_{n+1}$

Теорема

1. $\underline{\lim}\, x_n$ и $\overline{\lim}\, x_n$ существуюут в $\overline{\mathbb{R}}$
2. $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

Доказательство

1. $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq ...$ если y_n ограничен сверху, то $\lim y_n$ существует и конечен, если y_n неограничен сверху, то $\lim y_n = +\infty$, если $y_n = -\infty \forall n$, то $\lim y_n = -\infty$
2. $y_n \leq z_n, y_n \to \underline{\lim}, z_n \to \overline{\lim} \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

Теорема

1. $\overline{\lim}\, x_n$ - наибольший из частичных пределов последовательности x_n
2. $\underline{\lim}\, x_n$ - наименьший из частичных пределов последовательности x_n
3. $\lim x_n$ существует в $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ и в этом случае они все равны

Доказательство

1. $a := \overline{\lim}\, x_n$, покажем, что a это частичный предел
   случай $a \in \mathbb{R}$, $z_1 \geq z_2 \geq ...$ и $z_n \to a, \Rightarrow z_n \geq a$
   найдется такой номер, такой что $a - 1 < a \leq z_{m_1} < a + 1$, $z_{m_1} = \sup\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ...\}$.
   Заметим, что $a - 1$ не верхняя граница для $\{x_m, x_{m+1}, ...\}$, тогда найдется $n_1 \geq m$, такой что $x_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$. Найдется $m > n_1$, такое что $a + \frac{1}{2} > z_m \geq a > a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{1}{2}$ не верхняя граница для $\{x_m, x_{m+1}, ...\}$, значит найдется $n_2 \geq m$, такой что $x_{n_2} > a - \frac{1}{2} \Rightarrow$ $x_{n_2} \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$
   Найдется $m > n_2$, такой что $a + \frac{1}{2} > z_m \geq a \geq a - \frac{1}{3}$, тогда найдется $n_3 \geq m$, такой что $x_{n_3} > a - \frac{1}{3} \Rightarrow x_{n_3} \in \left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right)$ и т.д.
   В итоге $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ и $x_{n_k} \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$, то есть $a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$, тогда по теореме о двух милиционерах $\Rightarrow \lim x_{n_k} = a$
   случай $a = +\infty$, тогда $x_n = +\infty \forall n$, $z_1 = \sup\{x_1, x_2, ...\} = +\infty \Rightarrow$ найдется n_1, такой что $x_{n_1} > 1$
   $x_{n_1 + 1} = \sup\left\{x_{n_1 + 1}, x_{n_1 + 2}, ...\right\} \Rightarrow$ найдтеся $n_2 > n_1$, такой что $x_{n_2} > 2$ и т.д
   $a = -\infty$
   $\lim z_n = -\infty$ и $x_n \leq z_n \to -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$
   Покажем, что если b - частичный предел, то $b \leq a$
   b - частичный предел, значит найдется такая x_{n_k}, такая что $\lim x_{n_k} = b$
   $x_{n_k} \leq z_{n_k} \Rightarrow b \leq a$
2.
3. $\Rightarrow$, если $a = \lim x_n$, то любая подпоследовательность x_{n_k} имеет предел a, коли так, то единственный возможный частичный предел это a
   Следовательно единственный возможный частичный предел это a, то есть a -

наибольший из всех частичных пределов $\Rightarrow a = \overline{\lim}$ и a - наименьший из всех частичных пределов $\Rightarrow a = \lim$, следовательно $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$
<= $y_n \leq x_n \leq z_n$

Замечание

$\overline{\lim}\, x_n = \lim \sup_{k \geq n}\{x_k\} = \inf_n \sup_{k \geq n}\{x_k\}$,
$\underline{x_n} = \lim \inf_{k \geq n}\{x_k\} = \sup_n \inf_{k \geq n}\{x_k\}$

Теорема 1

$a = \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N \Rightarrow x_n < a + \varepsilon \end{cases}$

Теорема 2

$b = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N\ \forall n \geq N \Rightarrow x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N \Rightarrow x_n > b - \varepsilon \end{cases}$
Доказательство
$\Rightarrow z_N \leq b + \varepsilon\ z_N \geq z_{N+1} \geq z_{N+2} \geq ... \Leftrightarrow \forall n \geq N\ \ z_n \leq b + \varepsilon$
$\Rightarrow z_N = \sup\{x_N, x_{N+1}, ...\} > b - \varepsilon \Leftrightarrow \forall N\ \ z_N > b - \varepsilon$
из этих двух пунктов $\lim z_n = b$
$z_N \leq b + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \Rightarrow x_n \leq b + \varepsilon$
1 пункт так же

Теорема

Если $a_n \leq b_n\ \ \forall n$, то $\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$ и $\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n$
Доказательство $\underline{\lim}\, a_n = \lim \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}, \underline{\lim}\, b_n = \lim\{\inf b_n, b_{n+1}, ...\}$, из этих двух пунктов получаем, что $\inf\{a_n, a_{n+1}\} \leq \inf(b_n, b_{n+1})$
Замечание. Арифметики с $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ нет.

Параграф 5 Числовые ряды

Определение

$$\sum_{k+1}^{\infty} a_k \text{ - ряд}$$

Частичная сумма ряда $S_n := \sum_{x=1}^{n} a_k$
Если у последовательности S_n существует предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то он называется суммой ряда
Ряд называется сходящимся, если $\lim S_n$ существуеют и конечен
В противном случае ряд называется расходящимся (т.е. если $\lim S_n$ не существует или $\lim S_n = \pm\infty$)

Пример

1. Геометрическая прогрессия

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + ...$$

частичная сумма $S_n = 1 + q + q^2 + ... = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1}\ , q \neq 1 \\ n \end{cases}$

Если $q = 1$, то $S_n = n$, $\lim X_n = +\infty$ и ряд расходится
Если $q \neq 1$, то $S_n = \frac{q^n - 1}{q-1}$ и $\lim \frac{q^n-1}{q-1} = \begin{cases} +\infty \text{ при } q>1 \\ 1(1-q) \text{ при } -1<q<1 \\ \text{нет} \end{cases}$
то есть ряд сходится $\Leftrightarrow |q| < 1$ и в этом случае его сумма $\frac{1}{1-q}$

Пример 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

$-1 + 1 - 1 + 1 + \ldots,$
$s_{2n} = 0, s_{2n+1} = -1 \Rightarrow$ нет предела

Пример 3
Гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
можем наскребсти сколь угодно большую сумму, и тогда ряд расходится

Пример 4
$\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$
$S_n := \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, ряд сходится, его умма $= 1$

Теорема (необходимые условия сходимости)

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то $\lim x_n = 0$
Доказательство:
$x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k = s_n - s_{n-1}$, если ряд сходится, то $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim s_n - \lim s = s - s = 0$

Свойства сход. рядов

1. Единственность суммы (т.е. у ряда не может быть две разных суммы)
2. Расстановка скобок у ряда, имеющего сумму, не меняет его сумму

Доказательство:
Расстановка = выбор подпоследовательности у пследовательности частичных сумм
Замечание у расходящегося ряда бывает можно расставить скобки так, что он станет сходящимся, например $(1-1) + (1-1) + \ldots = 0$

3. Добавление или отбрасывание конечного количества членов у сходящегося ряда не влияет на сходимость, но может менять сумму

Доказательство:
очев

4. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$,то $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
5. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Доказательство:
$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$, ряда сходится $\Rightarrow \lim A_n =: A \in \mathbb{R} \wedge \lim B_n =: B \in \mathbb{R} \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = A_n + B_n \to A + B$

Глава 3 функции одной переменной

Параграф 1

Напоминание. окрестность точки $a \in \mathbb{R}, U_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0, U_{+\infty} = (E, +\infty)$, $U_{-\infty} = (-\infty, E)$

Определенеие о

$$U_a$$

крестность точки U_a с точеской сверху это $\{a\}$

Определение

$A \in \mathbb{R}$ a - предельная точка множества A, если U_a проколотая $\cap A \neq \emptyset$ $\forall U_a$

Теорема

$a \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ следующие условие расносильны

1. a - предельаня точка множества A
2. В любой окрестности U_a содержится бесконечное количество точек из A
3. Найдется такая последовательность точек $x_n \in A, x_n \neq a$, такие что $\lim x_n = a$, более того эту пследовательность всегда можно выбрать стого монотонной

Доказательство:

$$\cap A = (U_a \cap A)$$

$2 \Rightarrow 1$. Если в $U_a \cap A$ бесконечное количество тоек, то в U_a с точечкой сверху $\{a\}$, бесконечное количество точек $\Rightarrow \neq \emptyset$.
$3 \Rightarrow 2$ Возьмем $x_n \in A$, такое что $\lim x_n = a$
Рассмотрим U_a начиная с некоторого номера $\begin{cases} x_n \in U_a \\ x_n \in A \end{cases} \Rightarrow x_n \in U_a \cap A \Rightarrow$ в $U_a \cap A$ бесконечное количество точек
$1 \Rightarrow 3$ множество $(a-1, a+1) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$, возьмем оттуда точку и назовем x_1, эта точко точно не a.
$\varepsilon_2 = \frac{|x_1 - a|}{2} > 0$
Множество $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$, возьмем оттуда точку, назовем x_2 и т.д $|x_2 - a| < \varepsilon_1 = \frac{|x_1 - a|}{2}$
$|x_3 - a| < \varepsilon_3 = \frac{|x_3 - a|}{2} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_n = \frac{|x_{n+1} + a|}{2} \Rightarrow |x_n - a| < \frac{|x_1 - a|}{2^{n-1}}$
$\Rightarrow \lim |x_n - a| = 0$, то есть $a = \lim x_n$ и все точки получились различны
Как ее сделать строго монотонной? с какой-то стороны от точки a бесконечное количество членов последовательности, выкинем остальные, оставим только точки с одной стороны от a. Получилась монотонная последовательность

Определение

$S : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка множества A
$b \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$, если

1. (по Коши) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in E$ и $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
2. (определение на языке окрестностей) $\forall U_b$ $\exists U_a$, таоке что $f(E \cap U_a$ с точечкой сверху$) \subset U_a$
3. (опредление по Гейне) $\forall$ последовательность $x_n \in E$, такая что $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

Замечание
1 = 2
$U_b = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$ $\forall U_b$ означает $\forall \varepsilon > 0$ $U_b \coloneqq (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$

$U_a = (a - \delta, a + \delta)$ при некотором $\delta > 0$ $\exists U_a$ означает $\exists \delta > 0$ $U_a = (a - \delta, a + \delta)$
$f(U_a$ с точечкой сверху $\cap E) \in U_b$ означает, что $\forall x \in U_a$ с точечкой сверху $\cap E \Rightarrow f(x) \in U_b$, то есть $|f(x) - b| < \varepsilon$