Интегральное исчесление функций одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если $F`(x) = f(x) \forall x \in \langle a, b\rangle$

Теорема

$f : \langle a, b\rangle$ непрерывна на отрезке, то у f есть первообразная

Доказательство

не сейчас

Замечание

не у всех функций есть первообразная. $f(x) = \operatorname{sign} x$
Пусть F первообразная f, тогда $F` = f$ принимает зачения $\{-1, 0, 1\}$. Но по теореме Дарбу $F`$ должна приниматьвсе значения из $[-1, 1]$, противоречие

Теорема

Пусть есть $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F первообразная f. Тогда

1. $\forall c \in \mathbb{R}\ F + c$ тоже первообразная f
2. Если есть другая первообразная $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ тоже первообразная f, то $\Phi - F = \text{const}$

Доказательство

1. $(F(x) + c)` = f(x)$
2. $(\Phi(x) - F(x))` = f - f = 0 \Rightarrow \Phi - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл функции f - множество всех ее первообразных
Обозначение: $\int f = \int f(x) dx$
F - первообразная f, $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ (скобочки писать не будем (впадлу))

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, p \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. котенганс очевидно
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

Проверка

3.

При $x > 0$, $(\ln x)` = \frac{1}{x}$. При $x < 0 : (\ln(|x|))` = (\ln(-x))` = \frac{1}{x}$
11.

$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)` = \frac{1}{2}((\ln|1+x|)`-(\ln|1-x|)`) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$
12.
$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)` = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)` = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$ очев

Определение

A, B - множества функция $\langle a, b\rangle . A+B = \{f+g, f \in A, g \in B\}; c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}, A \cdot B = \{f \cdot g \mid f \in A, g \in B\}$

Теорема. арифметические действия с неопределенным интегралом

$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, f, g$ - имеют первообразные
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда:
1. $f+g$ тоже имеют первообразную $\int f+g = \int f + \int g$
2. αf имеет первообразную $\int \alpha f = \alpha \int f, \alpha \neq 0$
3. $\alpha f + \beta g$ тоже имеет первообразную, $\int(\alpha f+\beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство

Пусть F, G - первообразные f, g. Тогда $F+G$ - первообразыне для $f+g$
$\int(f+g) = F+G+C, \int f = F+C, \int g = G+C$
Остальное очев

Теорема (замена переменной в неопределенном интеграле)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ - дифф. F - первообразная f. $\int f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

Тривиальн

Следствие

$\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C, \alpha \neq 0$. (Подставить $\varphi(x) = \alpha x + \beta$)

Теорема (формула интегрирования по частям)

$f, g \in \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $f`g$ имеет первообразную, тогда $fg`$ тоже имеет первообразную и $\int fg` = fg - \int f`g$

Доказательство

H - первообразная для $f`g$. (? )$fg$ - $H$ - первообразая для $fg`$
$(fg-H)` = f`g + fg`-H` = fg`\blacksquare$

Площади и определенный интеграл

$\mathcal{F}$ - множество всех ограниченных помножеств в плоскости

Определение

Квазиплощадь это отображение $\sigma : \mathcal{F} \to [0; +\infty)$, удовлетворяющее следующим свойствам:
1. $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (b-a)(d-c)$
2. $\overline{E} \subset E \Rightarrow \sigma\left(\overline{E}\right) \leq \sigma(E)$
3. Множество E разделено вертикальной прямой l на E_- и $E_+ \Rightarrow \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$ (точки l могут принадлежать как E_- и E_+)

Замечание

Логично требовать вместо условий 2 и 3 одно свойство условий 2`: если $A \cap B = \emptyset$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Но существование такого объекто неочев (сложно)

Теорема
$\sigma(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^n |P_k| : \cup_{k=1}^n P_k \supset E, P_k - \text{прямоугольник со сторонами} \mid\mid \text{осям координат}\right\}$ - квазиплощадь, не меняется при параллельном переносе
апоЖ

Доказательство
Проверим три свойства
1. Пусть $P = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle (?\,) \sigma(P)(b-a)(d-c)$
   $\leq \{P\}$ - покрытие $P \Rightarrow \sigma(P) \leq |P| = (b-a)(c-d)$
   $\geq$ Пусть $\cup_{k=1}^n P_k > P$ надо доказать, что $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq |P|$ Продлим стороны P_k и P, если мы посмотрим на каждый прямоугольник P_k, то он разбит на маленькие прямоугольники. P тоже разбит на маленькие прямоугольники, все эти маленькие прямоугольники образуют покрытие P, $\sum_{k=1}^n |P_k| \geq \sum|\text{маленьких прямоугольников}| \geq \sum|\text{маленьких прямоугольников, входящих в } \ P| = |P|$ ■
2. любое покрытие E - это покрытие $\overline{E} \Rightarrow \sigma\left(\overline{E}\right) \leq \sigma(E)$
3. Пусть E разделено вертикальной прямой l на E_-, E_+. $(?\,) \sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$
   $\leq$ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\cup_{k=1}^m P_k^+ > E_+$, такое что $\sum_{k=1}^m \left|P_k^+\right| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon$ (по определению inf). Аналогично рассматриваем покрытие $\cup_{i=1}^n P_i^- > E_-$, такое что $\sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_-) = \varepsilon$. $P_1^+, P_2^+, ..., P_m^+, P_1^-, P_2^-, ...P_n^-$ - образуют покрытие E, значит $\sigma(E) \leq \sum_{k=1}^m \left|P_k^+\right| + \sum_{i=1}^n |P_i^-| \leq \sigma(E_+) + \varepsilon + \sigma(E_-) + \varepsilon = \sigma(E_+) + \sigma(E_-) + 2\varepsilon$, устремим ε к нулю.
   $\geq$ Пусть есть $P_1, ...P_n$ - покрытие E. Разделим каждый прямоугольник P_k на P_k^- и P_k^+ при помощи прямой l (некоторые могут быть пустыми)
   Тогда $P_1^+, ...P_n^+$ - покрытие E_+, а с минусами можно догадаться. Рассмотрим $\sum_{k=1}^n |P_k| = \sum_{k=1}^n \left|P_k^+\right| + \sum_{k=1}^n (P_k^-) \geq \sigma(E_+) + \sigma(E_-)$. Взяв inf по покрытиям множества E получаем что хотели

Замечания
1. Квазиплощадь неединственна. Пример: $\sigma_1(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^\infty |P_k|\right\}$
   Если $E = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \Rightarrow \sigma_1(E) = 0$, но $\sigma(E) = 1$
2. Парадокс Банаха-Тарского. Шар в $\mathbb{R}^3$ можно разделить на 5 непересекающихся частей, применить к каждой из частей движение (параллельный перенос и вращение) и получить два шара того же радиуса
3. Следующий семестр "правильное" понятие меры Лебега

Определение
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывная , $f_+ \max\{f, 0\}, f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_- = \max\{-f, 0\}$

Свойства
1. $f_\pm \geq 0$
2. $f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$
3. $f_+ = \frac{f+|f|}{2}, f_- = \frac{|f|-f}{2}$
4. Если f была непрерывной,то f_+ и f_- были непрерывны

Определение
$f : [a, b] \to \mathbb{R}. f \geq 0$, пографик f - это $P_f := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\right\}$

Определение
$f \in C[a, b]. \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \sigma\left(P_{f_+}\right) - \sigma\left(P_{f_-}\right)$

```
 /\_/\
( o.o )
 > ^ <
```

Свойства

1. $\int_a^a f = 0$
2. $\int_a^b 0 = 0$
3. $\int_a^b c = c(b-a)$
4. $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$ Доказательство: $(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_-, (-f)_- = \max\{(-f), 0\} = f_+$, $\int_a^b (-f) = \sigma\left(P_{(-f)_+}\right) - \sigma\left(P_{(-f)_-}\right) = \sigma\left(P_{f_-}\right) - \sigma\left(P_{f_+}\right) = -\int_a^b f$
5. Если $f \geq 0$, то $\int_a^b \sigma\left(P_f\right)$ Доказательство: Если $f \geq 0$, то $f_+ = f, f_- = 0$
6. Если $f \geq 0, f \in C[a,b]$ и $\int_a^b f = 0$, то $f \equiv 0$ Доказательство: Пусть $f \not\equiv 0$. Найдется $x_0 \in [a,b]$, для которой $f(x_0) > 0$. $\varepsilon \coloneqq \frac{f(x_0)}{2}$, найдется $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :$ $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow P_f \supset \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]$
   $\int_a^b f = \sigma\left(P_f\right) \geq \sigma\left(\left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[0, \frac{f(x_0)}{2}\right]\right) > 0$

Свойства определенного интеграла

Теорема аддитивность

$f : [a,b] \to \mathbb{R}, c \in (a,b)$
Тогда $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Обозначение $P_g([\alpha, \beta]) \coloneqq \{(x,y) : x \in [\alpha, \beta], 0 \leq y \leq g(x)\}$

Доказательство

$\int_a^b f = \sigma\left(P_{f_+}([a,b])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([a,b])\right) = \sigma\left(P_{f_+}([a,c])\right) + \sigma\left(P_{f_+}([c,b])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([a,c])\right) - \sigma\left(P_{f_-}([c,b])\right) = \int_a^c f + \int_c^b f$

Следствие

$f : [a,b] \to \mathbb{R}, a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ Тогда $\int_a^b = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f$ (индукция)

Теорема монотонность

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$
Тогда $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Доказательство

$f_+ = \max\{0, f\} \leq \max\{0, g\} = g_+ \Rightarrow P_{f_+} \subset P_{g_+}$, аналогично $f_- = \max\{0, -f\} \geq \max\{0, -g\} = g_- \Rightarrow P_{f_-} \supset P_{g_-}$
$\Rightarrow \sigma\left(P_{f_+}\right) \leq \sigma\left(P_{g_+}\right), \sigma\left(P_{f_-}\right) \geq \sigma\left(P_{g_-}\right) \Rightarrow \int_a^b f = \sigma\left(P_{f_+}\right) - \sigma\left(P_{f_-}\right) \leq \sigma\left(P_{g_+}\right) - \sigma\left(P_{g_-}\right) = \int_a^b g$

Следствия

1.

$f \in C[a,b]$ Тогда $(b-a) \cdot \min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} f(x)$

Доказательство

$A \coloneqq \min f, B \coloneqq \max f \Rightarrow A \leq f(x) \leq B \forall x \Rightarrow A(b-a) = \int_a^b A \leq \int_a^b f \leq \int_a^b B = B(b-a)$

2.
$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Доказательство
$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| = \int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Теорема о среднем
$f \in C[a, b]$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, для которой $\int_a^b f = (b - a)f(c)$

Доказательство:
$\min_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Но непрерывная функция принимает в качестве значений весь отрезок $[\min f, \max f]$, в частности у нее есть значение $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение
Среднее значение функции f на отрезке $[a, b]$ это $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Определение интеграл с переменным верхним перделом
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) := \int_a^x f, a \leq x \leq b$, замечание $\Phi(a) = 0$

Определение интеграл с переменным нижним перделом
$\Psi(x) := \int_x^b f, a \leq x \leq b$
Замечание:
1. $\Psi(x) = 0$
2. $\Phi(x) + \Psi(x) = \int_a^b (f)$

Теорема Барроу
$f \in C[a, b], \Phi(x) := \int_a^x f$
Тогда $\Phi`(x) = f(x)$

Доказательство
$\Phi_+`(x) = \lim_{y \to x_+} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x_+} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y - x} = \lim_{y \to x_+} \frac{1}{y-x} \int_x^y f$ (посмотрим на это выражение и напишем теорему о средних) $= f\left(c_y\right), c_y \in [x, y]$ то есть хотим посчитать предел $\lim_{y \to x_+} f\left(c_y\right) = f(x)$
Если y_n убывает к x, то $c_{y_n} \to x \Rightarrow$ по непрерывности f получается, что $f\left(c_{y_n}\right) \to f(x)$
Для $\Phi\_`(x)$ аналогично

Следствие 1
$f \in C[a, b], \Psi(x) := \int_x^b f \Rightarrow \Psi`(x) = -f(x)$

Доказательство
$A := \int_a^b f \Rightarrow \Psi(x) = A - \Phi(x) \Rightarrow \Psi`(x) = -\Phi`(x) = -f(x)$

Следствие 2
$f \in C\langle a, b\rangle$, тогда у f есть первообразная

Доказательство
Возьмем $c \in (a, b)$ $F(x) := \begin{cases} \Phi(x) \text{ при } & x \geq c \\ -\Psi(x) \text{ при } & x \leq c \end{cases}$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)
$f \in C[a, b], F$ - первообразная f на $[a, b]$, тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\Phi(x) \coloneqq \int_a^x f$ - первообразная, F - первообразная $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$, но $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f = \Phi(b) = F(b) - F(a)$

Обозначение

$F|_a^b \coloneqq F(b) - F(a)$ - подстановка

Соглашение

Если $b < a$ $\int_a^b f \coloneqq -\int_b^a f$

Теорема линейность интеграла

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Тогда $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Доказтельство

F, G - первообразная для f, g
$\alpha F + \beta G$ - первообразная для $\alpha f + \beta g$
$(\alpha F + \beta G)` = \alpha F` + \beta G` = \alpha f + \beta g$
$\overset{\text{Н.Л}}{\Rightarrow} \int_a^{b (\alpha f + \beta g)} = \alpha F + \beta G \mid_a^b = \alpha \cdot F \mid_a^b + \beta G \mid_a^b = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Теорема формула интегрирования по частяи

$f, g \in C^1[a, b]$, тогда $\int_a^b fg` = fg \mid_a^b - \int_a^b f`g$

Доказательство

H - первообразная для $f`g \Rightarrow fg - H$- первообразная для $fg`$
$(fg - H)` = (fg)` - H` = f`g + fg` - f`g = fg`$
$\int fg` = (fg - H) \mid_a^b = fg \mid_a^b - H|_a^b = fg \mid_a^b - \int_a^b f`g$

Теорема замена переменной в определенном интеграле

$g \in C[a, b], \varphi : [c, d] \to [a, b]$ $\varphi \in C^1[a, b], p, q \in [c, d]$
Тогда $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f$

Доказательство

F - первообразная f, $F \circ \varphi$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi`(t)$
$(F(\varphi(t)))` = F`(\varphi(t)) \cdot \varphi`(t) = f\{\varphi(t)\}\varphi`(t)$
$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F \circ \varphi \mid_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$

Пример

$\int_a^b \left(\frac{t}{1+t^4}\right)dt, \varphi(t) = t^2, \varphi`(t) = 2t, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$= \frac{1}{2}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = \frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan|_{a^2}^{b^2}$

Прододжение формулы интегрирования по частям

Пример

$W_n \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n (\frac{\pi}{2} - x) dx \mid \varphi(x) \coloneqq y = \frac{\pi}{2} - x \mid = -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sin^n y dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$
$W_0 = \frac{\pi}{2}$
$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
$wW_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 + \sin^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_2 = \frac{\pi}{4}$ $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(\cos x)` dx = -\left(\underbrace{\sin^{n-1}\cos|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2} x\underbrace{\cos x \cdot \cos x}_{1-\sin^2 x}dx\right) = (n-1)\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} xdx}_{W_{n-2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\right)$

$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$

$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}(W_0 = \frac{\pi}{2}) \Rightarrow W_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot (W_1 = 1) \Rightarrow W_{2n+1} = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$

Формула Валлиса

$\lim \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Доказательство

на $[0, \frac{\pi}{2}]\ \sin^{2n} \geq \sin^{2n+1} \geq \sin^{2n+2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}$

$W_{2n} \geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2}$

$\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \geq \frac{\pi}{2}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$

$\frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2} \to \frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \to \frac{\pi}{2}$

Следствие

$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

Доказательство

$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n! \cdot n!}$

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = 2^n \cdot n!$

$\frac{C_{2n}^n}{4^n} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{2^n(n!) \cdot 2^n n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

Формула Валлиса $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$