

0.1 Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями

$a \in E, f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, они непрерывны в точке A , тогда

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. $|f|$
4. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$

непрерывны в точке a

Доказательство:

Если a не предельная точка E , то все функции, заданные на E непрерывны в точке a

Если a предельная точка, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ и далее по теоремы об арифметических действиях с пределами

0.1.1 Следствия

1. Многочлены непрерывны на \mathbb{R}
2. Рациональные функции (= отношение двух множеств) непрерывны во всех точках, где знаменатель не нулиться

Доказательство:

1. $f(x) = c, g(x) = x$ непрерывны и дальше их перемножаем и складываем
2. из 4 пункта теоремы

0.2 Теорема о пределе композиции

$f : D \rightarrow E, a$ - предельная точка $D, b := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$g : E \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывна в точке b . Тогда предел композиции $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$

Доказательство:

Пишем определение по Гейне. Возьмем какую-то последовательность $x_n \neq a, x_n \in D$, т.ч. $\lim x_n = a$. Из $b := \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \lim f(x_n) = b$, из непрерывности g в точке b , записанной по Гейне получим $\lim g(f(x_n)) = g(b)$

0.2.1 Следствие о непрерывности композиции

Нужно, чтобы $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, f$ непрерывна в точке a, g непрерывна в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a

Доказательство: $b = f(a)$

Пример $f(x) := x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, g(x) := \begin{cases} 0 & \text{при } x=0 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$

$g(f(x))$ не имеет предела в 0

$x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, f(x_n) = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n) = 0, g(f(x_n)) = g(0) = 0 \rightarrow 0$

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0, f(y_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, g(f(y_n)) = g\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = 1 \rightarrow 1$ пупу... проблема в том, что $g(x)$ не непрерывна в нуле. Грустняк(

0.3 Теорема

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \tan x$

Тут должна быть картинка

0.3.1 Следствия

1. $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ и равенство только при $x = 0$

2. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

Доказательство:

1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$ и равенство только при $x = 0$

Если $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, то все очевидно $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

2. $|\sin x - \sin y| = 2|\sin \frac{x-y}{2}| \cdot |\cos(x + \frac{y}{2})| \leq 2|\sin \frac{x-y}{2}| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$. Для второй формулы аналогично

0.4 Теорема

1. \sin и \cos непрерывны на \mathbb{R}

2. tg и ctg непрерывны на своей области определения

Доказательство:

1. Возьмем $a \in \mathbb{R}$ и покажем, что \sin непрерывна в точке a . $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, такое что $|x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Заметим, что $\delta = \varepsilon$ подходит $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$

2. $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ область определения - то, где $\cos \neq 0$, а тогда при делении сохраняется непрерывность

0.5 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

При $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ и

при $-\frac{\pi}{2} < x \neq 0 < \frac{\pi}{2}$

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ и теорема о двух милиционерах ■

0.6 Теорема Вейерштрасса

Непрерывна на отрезке функция обязательно принимает на отрезке наибольшее и наименьшее значения. В частности, он ограничена.

Доказательство:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках

Надо доказать, что найдется $c \in [a, b]$, такая что $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$ (аналогично про самое маленькое)

Рассмотрим множество $A := \{f(x) : x \in [a, b]\}$, у него есть $s := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \in \overline{\mathbb{R}}$, возьмем какую-то последовательность, которая снизу подходит к s и строго возрастает (если $s \in \mathbb{R}$, то например $s_n := s - \frac{1}{n}$, а если $s = +\infty$, то например $s_n = n$), тогда $s_n < s$, значит s_n не верхняя граница A , тогда найдется какой-то $x_n \in [a, b]$, такой что $f(x_n) > s_n$

x_n - ограниченна последовательность \Rightarrow из нее можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} , имеющую предел $c := \lim x_{n_k}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$, тогда $c \in [a, b]$. Тогда f непрерывна в точке $c \Rightarrow \lim f(x_{n_k}) = f(c)$, $s_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s$, отсюда делаем вывод, что последовательность x_{n_k} стремится к s , тогда $f(c) = s$ (предел единственный). Следственно $s \in \mathbb{R}$ и $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \Rightarrow f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$

0.6.1 Замечания

1. Важно, что отрезки, интервалы, полуинтервалы и прочая ересь не подходит (например, $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ это неограниченная функция)

2. Важно, что функция непрерывна во всех точках отрезка, без этого не верно

0.7 Теорема Больцано-Коши

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках

1. Если значения в точках a и b разных знаков, то найдется такая точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = 0$

2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется такая $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = C$

Доказательство:

- Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$. Ну тут крч делаем бинпоиск и там тривочев (типа стягивающиеся отрезки и т.п и значение точно нуль, потому что иначе функция не непрерывна) ■
- Рассматриваем $g(x) := f(x) - C$ и сводим к предыдущему случаю

0.7.1 Замечание.

- Нужна непрерывная во всех точках

Обозначение $\langle a, b \rangle$ обозначение $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$

0.8 Теорема

Непрерывный образ отрезка - отрезок

Доказательство:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывный во всех точках. Надо доказать, что $f([a, b])$ - отрезок. По т. Вейерштрасса найдется $p, r \in [a, b]$, такие что $f(p) \leq f(x) \leq f(r) \forall x \in [a, b]$

Рассмотрим функцию f на отрезке $[p, q]$ (или $[q, p]$)

Тогда для любого C лежащего между $f(p)$ и $f(q)$ найдется $c \in [p, q]$, где $f(c) = C \Rightarrow f([a, b]) = [f(p), f(q)]$

0.9 Теорема

Непрерывный образ промежутка - промежуток (возможно другого вида)

Доказательство: $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках.

$m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ и $M := \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M]$

Осталось понять, что $f(\langle a, b \rangle) \supset (m, M)$

Возьмем $y \in (m, M)$. $y < M \Rightarrow y$ не верхняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow$ найдется $q \in \langle a, b \rangle$, для которого $f(q) > y$,

$y > m \Rightarrow y$ не нижняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\} \Rightarrow$ найдется $p \in \langle a, b \rangle$, для которого $f(p) < y$, то есть $[p, q] \subset \langle a, b \rangle$ и $f(p) < y < f(q) \Rightarrow$ по теореме Б-Л найдется $c \in [p, q]$, такое что $f(c) = y$

0.9.1 Замечание

Промежуток может получится любого вида

0.10 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ инъекция

$g : f(\langle a, b \rangle) \rightarrow \langle a, b \rangle$ - обратная функция, если $f \circ g$ и $g \circ f$ тождественная функция, то есть $f(g(x)) = x, g(f(x)) = x$

0.11 Лемма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна

Если $f(\langle a, b \rangle)$ - промежуток, то f - непрерывна во всех точках

Доказательство:

Пусть f возрастает. Возьмем $c \in \langle a, b \rangle$, и докажем, что f - непрерывна в точке c

Если $x < c$, то $f(x) \leq f(c) \Rightarrow$ на $\langle a, c \rangle$ возрастает и ограничена сверху $f(c) \Rightarrow$ существует $A := \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c)$

Проверим, что $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ От противного

Пусть $A < f(c)$. Возьмем $y \in (A, f(c))$. Тогда $f(x) \neq y \forall x$:

Если $x \geq c$, то $f(x) \geq f(c) > y$

Если $x < c$, то $f(x) \leq \sup_{x < c} f(x) = A < y$

$\Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$ не промежуток

Аналогично $f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$

0.12 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и строго монотонна $m := \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), M := \sup_{\langle a, b \rangle} f(x)$

Тогда

1. f обратима и $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$
2. f^{-1} строго монотонна
3. f^{-1} непрерывна во всех точках

Доказательство:

1. f биекция между $\langle a, b \rangle$ и $\langle m, M \rangle$ инъекция из строгой монотонности, сюръекция из предыдущей теоремы
2. Пусть f строго возрастает
 $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$
 $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$
 $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
 $\Rightarrow f^{-1}$ строго возрастает
3. 1 + 2 + лемма

1 Параграф 3 Элементарные функции

1. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ непрерывна и строго возрастает, тогда $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ непрерывна и строго возрастает
2. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ну понять можно, что будет происходить
3. $\tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ очевидно
4. \ctg тривиально

1.1 Определение

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

$\exp n = \exp(1 + 1 + \dots + 1) = (\exp 1)^n \rightarrow +\infty$

$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \rightarrow 0$

\exp строго возрастает и непрерывна, тогда существует обратная функция (назовем ее \ln)

$\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает

Свойства:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. $\ln(1 + x) \leq x$ при $x > -1$
4. $\ln(1 + x) \geq 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, если $-1 < x < e - 1$

Доказательство:

$$y := \ln(1 + x), \exp y = 1 + x, \exp y \leq \frac{1}{1-y} \Rightarrow q - y \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq y$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Доказательство:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1 + x) \leq x \text{ при } -1 < x < e - 1$$

При $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$$

При $x < 0$:

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1$$

1.2 Определение

$a^b := \exp(b \cdot \ln a), a > 0$

1.2.1 Замечание

1. $b = n \in \mathbb{N}, a^n = \exp(n \ln a) = \exp\left(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ итн}}\right) = \exp(\ln a) \cdot \dots \cdot \exp(\ln a) = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ итн}}$
2. $b = -n: \exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
3. $b = \frac{1}{n}: \exp\left(\frac{1}{n} \ln a + \frac{1}{n} \ln a + \dots + \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a}$
4. Если $b = \frac{k}{n}$, то $a^{\frac{k}{n}} = \exp\left(k \cdot \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^k = (\sqrt[n]{a})^k$

Упражнение: Если $\lim b_n = b, b_n \in \mathbb{Q}$, то $\lim a^{b_n} = a^b$

1.2.2 Следствия

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

Доказательство:

$$1. (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ т.к экспонента непрерывна, то предел можно запихать внутрь = $\exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp 1 = e$

2. Проверим по Гейне. Возьмем $x_n \rightarrow \infty$, тогда $y_n := \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$, тогда $\lim(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$

1.3 Показательная функция

$a^x := \exp(x \ln a) : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

1.3.1 Свойства

1. Непрерывна (композиция непрерывных функций)
2. при $a > 1$ строго возрастает, при $a < 1$ строго убывает.
3. $a^x \geq 1 + x \ln a$ т.к ($\exp y \geq 1 + y$)

1.4 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Доказательство:

$$a^x - 1 \geq x \ln a$$

$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \geq 1 - x \ln a$, тогда $a^x \leq \frac{1}{1-x \ln a}$, если $x \ln a < 1$. Снизу $x \ln a \leq a^x - 1 \leq \frac{1}{1-x \ln a} - 1 = \frac{x \ln a}{1-x \ln a}$
 $\ln a \leq \frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{\ln(a)}{1-x \ln a}$ при $x > 0$
если $x < 0$, то $\ln a \geq \frac{a^x - 1}{x} \geq \frac{\ln a}{1-x \ln a}$, тогда если $x \rightarrow 0$ получаем, что $\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

1.5 Степенная функция

$x^p := \exp(p \ln x) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

1.5.1 Свойства

1. Непрерывная
2. Монотонная. При $p > 0$ строго возрастает, при $p < 0$ строго убывает

1.6 Теорема

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

$(1+x)^p = \exp(p \ln(1+x)) \geq 1 + p \ln(1+x)$, с другой стороны $\exp \leq \frac{1}{1-p \ln(1+x)}$ при $p \ln(1+x) < 1$ это заведомо выполнено при $px < 1$

$$\frac{p \ln(1+x)}{1-p \ln(1+x)} = \frac{1}{1-p \ln(1+x)-1} \geq (1+x)^p - 1 \geq p \ln(1+x)$$

$\frac{p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}}{1-p \ln(1+x)} \geq \frac{(1+x)^p - 1}{x} \geq p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}, \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1, 1 - p \ln(1+x) \rightarrow 1$ предельный переход и два милиционера

2 Сравнение функций

2.1 Определение

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка E

1. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ если существует $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
2. $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ если существует $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
3. $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$, если $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ и φ ограничена, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$

2.2 Определение

$f = O(g)$ на множестве E , если найдется c , такое что $|f(x)| \leq C|g(x)|$ при $x \in E$

2.2.1 Замечание

1. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g, \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$. Если какой-то $g(x) = 0$, то $f(x) = 0$, а $\varphi(x)$ выбираем какой хотим, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 1$
2. $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ означает $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 0$

2.2.2 Свойства

1. « \sim » - отношение эквивалентности

Доказательство:

$$f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ в окрестности точки } a \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \\ \Rightarrow \varphi \neq 0 \text{ в окрестности точки } a \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)f(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = 1 \Rightarrow g \underset{x \rightarrow a}{\sim} f$$

Транзитивность $f \sim g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x), g \sim h \Rightarrow g(x) = \psi(x)h(x)$ в окрестности точки a
 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x)$

2. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \rightarrow a$, то $f_1 f_2 \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1 g_2$

3. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \rightarrow a$ и $f_2 \neq 0$ в проколотой окрестности точки a , то $\frac{f_1}{f_2} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$

Доказательство:

$$f_1 = \varphi_1 g_1 \text{ и } f_2 = \varphi_2 g_2 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi_2(x) = 1$$

$f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 g_1 g_2 \lim_{x \rightarrow a} \varphi_1(x) \varphi_2(x) = 1$, также сама для деления

4. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g + o(f)$

Доказательство:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g \Leftrightarrow f = g + o(g), \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 0$$

Вторая равносильность:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f), g \sim f \Leftrightarrow g = f + o(f), g \sim f \Leftrightarrow f \sim g, f = g - o(f) = g + o(f)$$

5. $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$ и $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

Доказательство:

$$f \sim g \Rightarrow f = \varphi g \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \varphi \text{ ограничена в окрестности точки } a, \text{ то } f = O(g)$$

6. $f \cdot o(g) = o(fg)$ Доказательство очев (я к сессии его забуду)

7. $o(f) + o(f) = o(f), O(f) + O(f) = O(f)$

Доказательство:

$$g + h, \text{ где } g = o(f) \text{ и } h = o(f)$$

$$g = o(f) \Rightarrow g = \varphi \cdot f, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$$

$$h = o(f) \Rightarrow h = \psi f, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$$

$$g + h = (\varphi + \psi)f \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$$

8. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow f = b + o(1)$ Что такое $o(1)$ - это какая-то функция, которая стремиться к 0, то есть $f = b + o(1)$ значит, что $f(x) - b \rightarrow 0$

2.2.3 Примеры:

Все при $x \rightarrow 0$

- $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^p - 1 \sim px, \operatorname{tg} x \sim x \left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos x \sim 1 \right), \arctan \sim x \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \right)$, по Гейне $x_n \rightarrow 0$
- $\sin x = x + o(x), \ln(1+x) = x + o(x), a^x = 1 + x \ln a + o(x) \quad (a^x - 1 = x \ln a + o(x \ln a) = x \ln a + o(x)), (1+x)^p = 1 + px + o(x), \operatorname{tg} x = x + o(x), \arctan x = x + o(x), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \left(1 - \cos x = x^2 + o(x^2), 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \frac{1-\cos x}{x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right)$

3 Дифференцируемые функции

3.1 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то он называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$

3.1.1 Замечание

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

3.2 Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

f - дифференцируема в точке x_0 , если существуют $k \in \mathbb{R}$, такое что $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$

3.2.1 Замечание

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h) \text{ при } h \rightarrow 0$$

3.3 Теорема (критерий дифференцируемости)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

следующие условия равносильны:

- f дифференцируема в точке x_0
- У функции f существует конечная производная в точке x_0
- Существует $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и φ непрерывна в точке x_0

В случае, когда эти условия выполнены $k = f'(x_0) = \varphi(x_0)$

Доказательство:

$$1 \Rightarrow 2: f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \rightarrow x_0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \Rightarrow f'(x_0) = k$$

$$2 \Rightarrow 3: \varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{при } x = x_0 \end{cases}. \text{ Но } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi$$

непрерывна в точке x_0

$$3 \Rightarrow 1: f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0) \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$$

$$\varphi(x_0)(x - x_0) + \underbrace{(\varphi(x) - \varphi(x_0))}_{\rightarrow 0}(x - x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow k = \varphi(x_0)$$

3.4 Определение. Односторонние производные

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3.4.1 Замечание

$f'(x_0)$ существует \Leftrightarrow существуют правая и левая производная и они равны

3.5 Примеры

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

2. $f(x) = |x|$

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, аналогичными преобразованиями получаем, что в — получается -1 , значит дифф. в точке нет

3.6 Утверждение

Если f дифференцируема в точке x_0 , то f непрерывна в точке x_0 . Обратное не верно

Доказательство:

$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$, $o(x - x_0)$ это функция вида $\varphi(x)(x - x_0)$, $\varphi(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

3.7 Теорема об арифметических действиях с дифференцируемыми функциями

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

1. $f \pm g$ дифф. в точке x_0 и $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2. fg дифф. в точке x_0 и $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифф. в точке x_0 и $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доказательство:

f, g - дифф. $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$

1. сложим, получим $f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (\varphi(x)) + \psi(x)(x - x_0)$, $(f + g)'(x_0)\varphi(x_0) + \psi(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2. $f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \left(\underbrace{f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0)}_{X(x)} \right) (x - x_0)$

Нужно доказать, что $X(x)$ непрерывна в точке x_0 и найти $X(x_0)$

$$(fg)'(x_0) = X(x_0) = f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0) + \varphi(x_0)\psi(x_0)(x_0 - x_0)$$

3. Поймем, что $\frac{1}{g}$ дифференцируема в точке x_0 и $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} =: X(x)$$

Нужно доказать, что X непрерывна в точке x_0 и посчитать $X(x_0)$

$$g$$
 дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow g$ непрерывна в точке x_0 , $X(x_0) = \frac{-\psi(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

3.8 Пример. Уравнение касательной

касательная - предельное положение секущей

$$y = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} + f(x_0)$$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ уравнение касательной к графику функции f в точке x_0

3.9 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle, g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \langle a, b \rangle$, f дифференцируем в точке x_0

g дифференцируем в точке $f(x_0) =: y_0$

Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ Доказательство:

f - дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0

g - дифференцируема в точке $y_0 \Rightarrow g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$, где ψ непрерывна в точке y_0

возьмем $y = f(x)$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)}_{X(x)} \cdot (x - x_0) =$$

Нужно доказать, что $X(x)$ непрерывна в точке x_0

φ непрерывна в точке x_0

f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f$ непрерывна в точке x_0 , ψ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$\psi(f(x))$ непрерывна в точке x_0

$$(g \circ f)'(x_0) = X(x) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

3.10 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f строго монотонна. $x_0 \in \langle a, b \rangle$, f дифференцируем в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, $y_0 := f(x_0)$

Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство:

f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

Если $y \neq y_0$, то $\neq 0$. Если $y = y_0$, то $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ по условию

$$\Rightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0)$$

Надо проверить, что X непрерывна в точке y_0 , такое что $(\varphi(f^{-1}(y)))$ непрерывна в точке y_0

f^{-1} непрерывна в точке y_0 (т.к. f непрерывна в точке x_0)

φ непрерывна в точке x_0 , так как f непрерывна в точке x_0

$$X(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3.10.1 Следствие

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x^p)' = p \cdot x^{p-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5. (\sin x)' = \cos(x)$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x$$

$$7. \operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$8. \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10. \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Доказательство:

$$2. (x^p)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^p - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = p \cdot x^{p-1}$$

$$3. (a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{\frac{h}{\ln(1+\frac{h}{x})}} = a^x \ln a$$

$$4. (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{x+h} \cdot \frac{1}{x+h}}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$5. (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2} \sin(\frac{h}{2}) \cdot \cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) =$$

$$\cos(x)$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{\sin x}{\cos x}' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9. f(x) := \sin x, f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f^{-1} \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$11. (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

4 Теоремы о среднем

4.1 Теорема Ферма

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$, f дифф. в точке x_0 $f(x_0) = \min_{t \in \langle a, b \rangle} f(t)$ или с максимумом

Тогда $f'(x_0) = 0$

Доказательство: $f'(x_0) = f'_{+}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, знаменатель положителен, числитель больше или равен нулю и вся дробь неотрицательна, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Аналогично с производной слева получаем, что предел ≤ 0

Значит, $f'(x_0)$ просто 0

4.2 Геометрический смысл: в точке min, max касательная всегда горизонтальна

4.3 Теорема Ролля

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифференцируема на (a, b)

Если $f(a) = f(b)$, то найдется точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$

Доказательство: По теореме Вейерштрасса найдутся точки $p, q \in [a, b]$, такие что $f(p) = \min_{t \in [a, b]} f(t)$, $f(q) = \max_{t \in [a, b]} f(t)$

Случай 1 p, q концы отрезка $\Rightarrow f(p) = f(q) \Rightarrow f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \forall (x \in [a, b])$

Случай 2

Хотя бы одна из этих точек не конец отрезка $\xrightarrow{\text{по Т. Ферма}}$ производная в этой точке равна 0

4.3.1 Геом. смысл

$f(a) = f(b)$ и f дифф., то есть точка где касательная горизонтальна

4.3.2 Замечание

Важно, что дифференцируемость есть во всех точках

4.4 Теорема Лагранжа (формула конечных приращений)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф на (a, b) .

Тогда найдется $c \in (a, b)$, такая что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) := f(x) - kx$

Подберем k так, что $f(a) - ka = g(a) = g(b) = f(b) - k \cdot b \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Функция g удовлетворяет теореме Ролля \Rightarrow существует такая точка, такая что $g'(c) = 0$

$g'(c) = f'(c) - k \Rightarrow f'(c) = k$

4.4.1 Геометрический смысл

найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде

4.5 Теорема Коши

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и дифф. внутри, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$

Тогда существует $c \in (a, b)$, такая что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Доказательство:

$g(a) \neq g(b)$ иначе нашлась бы точка, где производная нулится Рассмотрим функцию $h(x) := f(x) - kg(x)$, подберем k так, что $h(a) = h(b)$, $f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

По т. Ролля о функции h найдется $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) - kg'(c) = h'(c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

4.5.1 Геометрический смысл

$(g(t), f(t))$ - координата частицы в момент времени t , тогда $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ угловой коэффи. хорды, соединяющей a, b . Тогда вектор скорости этой частицы совпадет по скорости с этой

4.6 Следствие теоремы Лагранжа

1. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках, дифф внутри. А еще знаем, что $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$

Тогда $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in \langle a, b \rangle$

Доказательство:

Пусть $x \leq y$, тогда f непрерывна на x, y и дифф. внутри, а значит можно на этом отрезке использовать теорему Лагранжа, то есть найдется $c \in (x, y) \subset (a, b)$, такая что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x), |f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|$

2.

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, тогда f постоянна

Доказательство:

Это 1. для $M = 0$

4.7 Определение

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой M , если $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in E$

3. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если $f'(c) > 0 \forall x \in (a, b)$ то f строго возрастает
4. То же самое, только производная меньше нуля, только тогда убывание

Доказательство

Возьмем $x < y$ и применим Т. Лагранжа для $[x, y]$. Тогда найдется $c \in (x, y) \subset (a, b)$, такие что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

5. $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри.

Тогда

- f нестрого возрастает $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$
- аналогично для убывания

Доказательство: а) \leq аналогично предыдущему

$\Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} y - x \geq 0$ предельные переход в неравенстве.

4.7.1 Замечание

с 3, 4 такой фокус непрокатит (прогипотинузит)

4.8 Теорема Дарбу

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифф. во всех точках. C лежит между $f'(a), f'(b)$, тогда найдется такая точка, в которой $f'(c) = C$

Доказательство:

Случай 1

$C = 0$, тогда $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков. Пусть $f'(a) < 0 < f'(b)$ f дифф. на $[a, b] \Rightarrow f$ непрерывна на отрезке. Значит можно применить т. Вейерштрасса найдется $p \in [a, b]$, такая что $f(p) = \min_{t \in [a, b]} f(t)$

Если $p \in (a, b)$, то по Теореме Ферма $f'(p) = 0$, а это то, что нужно

Пусть $p = a$, тогда $f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, числитель больше или равен 0, знаменатель больше 0, тогда о предельном переходе предел ≥ 0 , противоречие

Пусть $p = b$, тогда $f'(b) = f'_(b) = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$, противоречие

Знайте точка не может оказаться не на концах отрезка, а для внутреннего мы уже знаем
Случай $C \in \mathbb{R}$

Рассмотрим $g(x) = f(x) - Cx$, тогда $g'(x) = f'(x) - C$
 $\Rightarrow g'(a)$ и $g'(b)$ разных знаков \Rightarrow найдется $c \in (a, b)$, где $g'(c) = 0$

4.8.1 Следствие

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф на и $f'(x) \neq 0 \forall x$ тогда f строго монотонна

Доказательство: Докажем, что f' знакопостоянна

От противного $f'(p) < 0 < f'(q)$ тогда по т. Дарбу есть точка c между p и q , такая что $f'(c) = 0$. Противоречие

4.9 Правило Лопитала

4.9.1 Версия 1

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф на (a, b) . $g'(x) \neq 0 \forall x$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$.
 Тогда если есть $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то предел отношения функции равен тому же самому.

Аналогично для предела с +

Доказательство:

Проверим по Гейне, что $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Возьмем x_n возрастающую и $\lim x_n = b$. Надо доказать, что $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$, по условию $\lim(f(x_n)) = \lim(g(x_n)) = 0$, еще знаем, что $g' \neq 0$, тогда по следствию g строго монотонна. Тогда для вычисления предела воспользуемся т. Штольца.

Применим т. Штольца. Надо посчитать $\lim \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$. Найдется $c_n \in (x_n, x_{n+1})$, такая что $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$. $x_n < c < x_{n+1} \Rightarrow \lim c_n = b$, тогда из определения по Гейне для $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$

4.9.2 Версия 2

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифф на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \forall x$, $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$

Тогда если $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Аналогично для предела с +

Доказательство:

То же самое доказательство, только сослаться для другую теорему Штольца :D

4.9.2.1 Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$