0.1 Теорема об арифметических действиях с непрерывными функциями

$a \in E, f, g : E \to \mathbb{R}$, они непрерывны в точке A, тогда
1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. $|f|$
4. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$

непрерывны в точке a
Доказательство:
Если a не предельная точка E, то все функции, заданные на E непрерывны в точке a
Если a предельная точка, то $\lim_{x \to a} f(x) = f(x), \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ и далее по теоремы об арифметических действиях с пределами

0.1.1 Следствия

1. Многочлены непрерывны на $\mathbb{R}$
2. Рациональные функции (= отношение двух множеств) непрерывны во всех точках, где знаменатель не нулиться

Доказательство:
1. $f(x) = c, g(x) = x$ непрерывны и дальше их перемножаем и складываем
2. из 4 пункта теоремы

0.2 Теорема о пределе композиции

$f : D \to E, a$ - предельная точка $D, b \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$
$g : E \to \mathbb{R}$ и непрерывна в точке b. Тогда предел композиции $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$
Доказательство:
Пишем определение по Гейне. Возьмем какую-то последовательность $x_n \neq a, x_n \in D$, т.ч. $\lim x_n = a$. Из $b \coloneqq \lim_{x \to a} f(x) : \lim f(x_n) = b$, из непрерывности g в точке b, записанной по Гейне получим $\lim g(f(x_n)) = g(b)$

0.2.1 Следствие о непрерывности композиции

Нужно, чтобы $f : D \to E, g : E \to \mathbb{R}$, $a \in D, f$ непрерывна в точке a, g непрерывна в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ непрерывна в точке a
Доказательство: $b = f(a)$
Пример $f(x) \coloneqq x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, g(x) \coloneqq \begin{cases} 0 \text{ при } x=0 \\ 1 \text{ иначе} \end{cases}$
$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$
$g(f(x))$ не имеет предела в 0
$x_n = \frac{1}{\pi n} \to 0, f(x_n) = \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n) = 0,\ g(f(x_n)) = g(0) = 0 \to 0$
$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0, f(y_n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, g(f(y_n)) = g\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = 1 \to 1$ пупупу... проблема в том, что $g(x)$ не непрерывна в нуле. Грустняк(

0.3 Теорема

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$
Тут должна быть картинка

0.3.1 Следствия

1. $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ и равенство только при $x = 0$
2. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
   $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

Доказательство:

1. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$ и равенствно только при $x = 0$
   Если $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, то все очевидно $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$
2. $|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \cdot \left|\cos(x + \frac{y}{2})\right| \leq 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$. Для второй формулы аналогично

0.4 Теорема

1. sin и cos непрерывны на $\mathbb{R}$
2. tg и ctg непрерывны на своей области определения

Доказательство:

1. Возьмем $a \in \mathbb{R}$ и покажем, что sin непрерывна в точке a. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, такое что $|x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Заметоим, что $\delta = \varepsilon$ подходит $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$
2. $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ область определения - то, где $\cos \neq 0$, а тогда при делении сохраняется непрерывность

0.5 Теорема

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
Доказательство:
При $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ и при $-\frac{\pi}{2} < x \neq 0 < \frac{\pi}{2}$
$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ и теорема о двух милиционерах $\blacksquare$

0.6 Теорема Вейерштрасса

Непрерывна на отрезке функция обязательно принимает на отрезке наибольшее и наименьшее значения. В частности, он ограничена.
Доказательство:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках
Надо доказать, что найдется $c \in [a, b]$, такая что $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$ (аналогично про самое маленькое)
Рассмотрим множество A:=$\{f(x) : x \in [a, b]\}$, у него есть $s := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \in \overline{\mathbb{R}}$, возьмем какую-то последовательность, которая снизу подходит к s и строго возрастает (если $s \in \mathbb{R}$, то например $s_n := s - \frac{1}{n}$, а если $s = +\infty$, то например $s_n = n$), тогда $s_n < s$, значит s_n не верхняя граница A, тогда найдется какой-то $x_n \in [a, b]$, такой что $f(x_n) > s_n$
x_n - ограниченна последовательность $\Rightarrow$ из нее можно выбрать подпоследовательность x_{n_k}, имеющую предел $c := \lim x_{n_k}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$,тогда $c \in [a, b]$. Тогда f непрерывна в точке $c \Rightarrow \lim f\left(x_{n_k}\right) = f(c)$, $s_{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq s$, отсюда делаем вывод, что последовательность x_{n_k} стремится к s, тогда $f(c) = s$ (передел единственный). Следственно $s \in \mathbb{R}$ и $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \Rightarrow f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$

0.6.1 Замечания

1. Важно, что отрезки, интервалы, полуинтервалы и прочая ересь не подходит (например, $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$ это неограниченная функция)
2. Важно, что функция непрерывна во всех точках отрезка, без этого не верно

0.7 Теорема Больцано-Коши

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках

1. Если значения в точках a и b разных знаков, то найдется такая точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = 0$
2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется такая $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = C$

Доказательство:

1. Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$. Ну тут крч делаем бинпоиск и там тривочев (типа стягивающиеся отрезки и т.п и значение точно нуль, потому что иначе функция не непрерывна) ■
2. Рассматриваем $g(x) := f(x) - C$ и сводим к предыдущему случаю

0.7.1 Замечание.

1. Нужна непрерывная во всех точках

Обозначение $\langle a, b\rangle$ обозначение $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$

0.8 Теорема

Непрерывный образ отрезка - отрезок
Доказательство:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывный во всех точках. Надо доказать, что $f([a, b])$ - отрезок. По т. Вейерштрасса найдется $p, r \in [a, b]$, такие что $f(p) \le f(x) \le f(q) \forall x \in [a, b]$
Рассмотрим функцию f на отрезека $[p, q]$ (или [q, p])
Тогда для любого C лежащего между $f(p)$ и $f(q)$ найдется $c \in [p, q]$, где $f(c) = C \Rightarrow f([a, b]) = [f(p), f(q)]$

0.9 Теорема

Непрерывный образ промежутка - промежуток (возможно дургого вида)
Доказательство: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, непрерывна во всех точках.
$m := \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ и $M := \sup_{\langle a,b\rangle} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow m \le f(x) \le M \Rightarrow f(\langle a, b\rangle) \subset [m, M]$
Осталось понять, что $f(\langle a, b\rangle) \supset (m, M)$
Возьмем $y \in (m, M). y < M \Rightarrow y$ не верхняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\} \Rightarrow$ найдется $q \in \langle a, b\rangle$, для которого $f(q) > y$,
$y > m \Rightarrow y$ не нижняя граница для $\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\} \Rightarrow$ найдется $p \in \langle a, b\rangle$, для которого $f(p) < y$, то есть $[p, q] \subset \langle a, b\rangle$ и $f(p) < y < f(q) \Rightarrow$ по теореме Б-Л найдется $c \in [p, q]$, такое что $f(c) = y$

0.9.1 Замечание

Промежуток может получится любого вида

0.10 Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ инъекция
$g : f(\langle a, b\rangle) \to \langle a, b\rangle$ - обратная функция, если $f \circ g$ и $g \circ f$ тождественная функция, то есть $f(g(x)) = x, g(f(x)) = x$

0.11 Лемма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ монотонна
Если $f(\langle a, b\rangle)$ - промежуток, то f - непрерывна во всех точках
Доказательство:
Пусть f возрастает. Возьмем $c \in \langle a, b\rangle$, и докажем, что f - непрерывна в точке c
Если $x < c$, то $f(x) \le f(c) \Rightarrow$ на $\langle a, c)$ возрастает и ограничена сверху $f(c) \Rightarrow$ существует $A := \lim_{x\to c-} f(x) \le f(x)$
Проверим, что $\lim_{x\to c-} f(x) = f(c)$ От противного
Пусть $A < f(c)$. Возьмем $y \in (A, f(c))$. Тогда $f(x) \ne y \forall x$:
Если $x \ge c$, то $f(x) \ge f(c) > y$
Если $x < c$, то $f(x) \le \sup_{x<c} f(x) = A < y$
$\Rightarrow f(\langle a, b\rangle)$ не промежуток
Аналогично $f(c) = \lim_{x\to c+} f(x)$

0.12 Теорема

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и строго монотонна $m := \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), M := \sup_{\langle a,b\rangle} f(x)$
Тогда

1. f обратима и $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$
2. f^{-1} строго монотонна
3. f^{-1} непрерывна во всех точках

Доказательство:

1. f биекция между $\langle a, b\rangle$ и $\langle m, M\rangle$ инъекция из строгой монотонности, сюръекция из предыдущей теоремы
2. Пусть f строго возрастает
   $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$
   $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$
   $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
   $\Rightarrow f^{-1}$ строго возрастает
3. 1 + 2 + лемма

1 Параграф 3 Элементарные функции

1. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ непрерывна и строго возрастает, тогда $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ непрерывна и строго возрастает
2. $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ну понять можно, что будет происходить
3. $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ очевидно
4. ctg тривиально

1.1 Определение

$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
$\exp n = \exp(1 + 1 + ... + 1) = (\exp 1)^n \to +\infty$
$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \to 0$
exp строго возрастает и непрерывна, тогда существует обратная функция (назовем ее ln)
$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает
Свойства:

1. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
   $\lim_{x\to0+} \ln x = -\infty$
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. $\ln(1 + x) \le x$ при $x > -1$
4. $\ln(1 + x) \ge 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, если $-1 < x < e - 1$
   Доказательство:
   $y := \ln(1 + x), \exp y = 1 + x, \exp y \le \frac{1}{1-y} \Rightarrow q - y \le \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \le y$
5. $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
   Докательство:
   $\frac{x}{1+x} \le \ln(l + x) \le x$ при $-1 < x < e - 1$
   При $x > 0$:
   $\frac{1}{1+x} \le \frac{\ln(1+x)}{x} \le 1$
   При $x < 0$:
   $\frac{1}{1+x} \ge \frac{\ln(1+x)}{x} \ge 1$

1.2 Определение

$a^b := \exp(b \cdot \ln a), a > 0$

1.2.1 Замечание

1. $b = n \in \mathbb{N}, a^n = \exp(n \ln a) = \exp\left(\underbrace{\ln a + \ln a + ... + \ln a}_{n \text{ шт}}\right) = \exp(\ln a) \cdot ... \cdot \exp(\ln a) = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ шт}}$
2. $b = -n$: $\exp(-n \ln a) = \frac{1}{\exp(n \ln a)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
3. $b = \frac{1}{n}$: $\exp\left(\frac{1}{n} \ln a + \frac{1}{n} \ln a + ... + \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a}$
4. Если $b = \frac{k}{n}$, то $a^{\frac{k}{n}} = \exp\left(k \cdot \frac{1}{n} \ln a\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Упражнение: Если $\lim b_n = b, b_n \in \mathbb{Q}$, то $\lim a^{b_n} = a^b$

1.2.2 Следствия

1. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство:
1. $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1 + x)\right)$

$\lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ т.к экспонента непрерыван, то предел можно запихать внутрь $=$
$\exp\left(\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp 1 = e$
2. Проверим по Гейне. Возьмем $x_n \to \infty$, тогда $y_n := \frac{1}{x_n} \to 0$, тогда $\lim(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$

1.3 Показательная функция

$a^x := \exp(x \ln a) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

1.3.1 Свойства

1. Непрерывна (композиция непрерывных функций)
2. при $a > 1$ строго возрастает, при $a < 1$ строго убывает.
3. $a^x \geq 1 + x \ln a$ т.к ($\exp y \geq 1 + y$)

1.4 Теорема

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
Доказательство:
$a^x - 1 \geq x \ln a$
$\frac{1}{a^x} = a^{-x} \geq 1 - x \ln a$, тогда $a^x \leq \frac{1}{1 - x \ln a}$, если $x \ln a < 1$. Снизу $x \ln a \leq a^x - 1 \leq \frac{1}{1 - x \ln a} - 1 = \frac{x \ln a}{1 - x \ln a}$
$\ln a \leq \frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{\ln(a)}{1 - x \ln a}$ при $x > 0$
если $x < 0$, то $\ln a \geq \frac{a^x - 1}{x} \geq \frac{\ln a}{1 - x \ln a}$, тогда если $x \to 0$ получаем, что $\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

1.5 Степенная функция

$x^p := \exp(p \ln x) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

1.5.1 Свойства

1. Непрерывная
2. Монотонная. При $p > 0$ строго возрастает, при $p < 0$ строго убывает

1.6 Теорема

$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$
$(1 + x)^p = \exp(p \ln(1 + x)) \geq 1 + p \ln(1 + x)$, с другой стороны $\exp \leq \frac{1}{1 - p \ln(1+x)}$ при $p \ln(1 + x) < 1$ это заведомо выполнены при $px < 1$
$\frac{p \ln(1+x)}{1 - p \ln(1+x)} = \frac{1}{1 - p \ln(1+x) - 1} \geq (1 + x)^p - 1 \geq p \ln(1 + x)$

$\frac{p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}}{1 - p \ln(1+x)} \geq \frac{(1+x)^p - 1}{x} \geq p \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}, \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, 1 - p \ln(1 + x) \to 1$ предельный переход и два милиционера

2 Сравнение функций

2.1 Определение

$f, g : E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g$ если сущетсвует $\varphi : E \to \mathbb{R}$, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
2. $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ если существует $\varphi : E \to \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$
3. $f \underset{x\to a}{=} O(g)$, если $\varphi : E \to \mathbb{R}$ и φ ограничена, такое что $f(x) = \varphi(x)g(x) \forall x \in \dot{U}_a$

2.2 Определение

$f = O(g)$ на множестве E, если найдется c, такое что $|f(x)| \leq C|g(x)|$ при $x \in E$

2.2.1 Замечание

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g, \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$. Если какой-то $g(x) = 0$, то $f(x) = 0$, а $\varphi(x)$ выбираем какой хотим, $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 1$
2. $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ означает $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ с соглашением, что $\frac{0}{0} = 0$

2.2.2 Свойства

1. «$\sim$» - отношение эквивалентности
   Доказательство:
   $f \underset{x\to a}{\sim} g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x)$ в окрестности точки a и $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$
   $\Rightarrow \varphi \neq 0$ в окрестности точки $a \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)f(x)}$ и $\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 1 \Rightarrow g \underset{x\to a}{\sim} f$
   Транзитивность $f \sim g \Rightarrow f(x) = \varphi(x)g(x), g \sim h \Rightarrow g(x) = \psi(x)h(x)$ в окрестности точки a $\begin{cases} \lim_{x\to a} \varphi(x)=1 \\ \lim_{x\to a} \psi(x)=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x)$
2. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to a$, то $f_1 f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_1 g_2$
3. $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to a$ и $f_2 ! - 0$ в проколотой окрестности точки a, то $\frac{f_1}{f_2} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$
   Доказательство:
   $f_1 = \varphi_1 g_1$ и $f_2 = \varphi_2 g_2$ и $\lim_{x\to a} \varphi_1(x) = \lim_{x\to a} \varphi_2(x) = 1$
   $f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 g_1 g_2 \lim_{x\to a} \varphi_1(x)\varphi_2(x) = 1$, также сама для деления
4. $f \underset{x\to a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g + o(f)$
   Доказательство:
   $f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g$, где $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g \Leftrightarrow f = g + o(g)$, где $\lim_{x\to a}(\varphi(x) - 1) = 0$
   Вторая равносильность:
   $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f)$, $g \sim f \Leftrightarrow g = f + o(f), g \sim f \Leftrightarrow f \sim g, f = g - o(f) = g + o(f)$
5. $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$ и $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
   Доказательство:
   $f \sim g \Rightarrow f = \varphi g$ и $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \varphi$ ограничена в окрестности точки a, то $f = O(g)$
6. $f \cdot o(g) = o(fg)$ Доказательство очев (я к сессии его забуду)
7. $o(f) + o(f) = o(f), O(f) + O(f) = O(f)$
   Доказательство:
   $g + h$, где $g = o(f)$ и $h = o(f)$
   $g = o(f) \Rightarrow g = \varphi \cdot f$, где $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$
   $h = o(f) \Rightarrow h = \psi f$, где $\lim_{x\to a} \psi(x) = 0$
   $g + h = (\varphi + \psi)f$ и $\lim_{x\to a}(\varphi(x) + \psi(x)) = 0$
8. $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f = b + o(1)$ Что такое $o(1)$ - это какая-то функция, которая стремиться к 0, то есть $f = b + o(1)$ значит, что $f(x) - b \to 0$

2.2.3 Примеры:

Все при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^p - 1 \sim px, \operatorname{tg} x \sim x\Big(\operatorname{tg} x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos x \sim 1\Big), \arctan \sim x\Big(\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1\Big)$, по Гейне $x_n \to 0$
2. $\sin x = x + o(x), \ln(1+x) = x + o(x), a^x = 1 + x\ln a + o(x) \quad (a^x - 1 = x \ln a + o(x \ln a) = x \ln a + o(x)), (1+x)^p = 1 + px + o(x), \operatorname{tg} x = x + o(x), \arctan x = x + o(x), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \left(1 - \cos x = x^2 + o(x^2), 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \frac{1-\cos x}{x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right)$

3 Дифференцируемые функции

3.1 Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$
Если существует $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется производной функции f в точке x_o и обозначается $f`(x_0)$

3.1.1 Замечание

$f`(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_n)}{h}$

3.2 Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$
f - дифференцируема в точке x_0, если существуеют $k \in \mathbb{R}$, такое что $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$

3.2.1 Замечание

$f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + o(h)$ при $h \to 0$

3.3 Теорема (критерий дифференцируемости)

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle$
следующие условия равносильны:
1. f дифференцируема в точке x_0
2. У функции f существует конечная производная в точке x_0
3. Существует $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, такая что $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и φ непрерывна в точке x_0

В случае, когда эти условия выполнены $k = f`(x_0) = \varphi(x_0)$
Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$: $f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{k(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0} = k + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = k \Rightarrow f`(x_0) = k$
$2 \Rightarrow 3$: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ при } x \neq x_0 \\ f`(x_0) \text{ при } x = x_0 \end{cases}$. Но $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) - \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f`(x_0) = \varphi(x_0) \Rightarrow \varphi$ непрерывна в точке x_0
$3 \Rightarrow 1$: $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$
$\varphi(x_0)(x - x_0) + \left(\underbrace{\varphi(x) - \varphi(x_0)}_{\to 0}\right)(x - x_0) = \varphi(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow k = \varphi(x_0)$

3.4 Определение. Односторонние производные

$f`_+(x_0) := \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f`_-(x_0) := \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3.4.1 Замечание

$f`(x_0)$ существуюет $\Leftrightarrow$ существуеют правая и левая производная и они равны

3.5 Примеры

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
   $f`(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$
2. $f(x) = |x|$
   $f`_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$, аналогичными преобразованиями получаем, что в $-$ получается -1, значит дифф. в точке нет

3.6 Утверждение

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0. Обратное не верно
Доказательство:
$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0), o(x - x_0)$ это функуия вида $\varphi(x)(x - x_0), \varphi(x) \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

3.7 Теорема об арифметических действиях с дифференцируемыми функциями

$f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$
1. $f \pm g$ дифф. в точке x_0 и $(f \pm g)`(x_0) = f`(x_0) \pm g`(x_0)$
2. fg дифф. в точке x_0 и $(fg)`(x_0) = f`(x_0)g(x_0) + f(x_0)g`(x_0)$
3. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифф. в точке x_0 и $\left(\frac{f}{g}\right)`(x_0) = \frac{f`(x_0)g(x_0) - f(x_0)g`(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доказательство:
f, g - дифф. $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0)$
1. сложим, получим $f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (\varphi(x)) + \psi(x))(x - x_0), (f + g)`(x_0)\varphi(x_0) + \psi(x_0) = f`(x_0) + g`(x_0)$
2. $$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \left(\underbrace{f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x - x_0)}_{X(x)} \right)(x - x_0)$$

Нужно доказать, что $X(x)$ непрерывна в точке x_0 и найти $X(x_0)$
$(fg)`(x_0) = X(x_0) = f(x_0)\psi(x_0) + g(x_0)\varphi(x_0) + \varphi(x_0)\psi(x_0)(x_0 - x_0)$
3. Поймем, что $\frac{1}{g}$ дифференцируема в точее x_0 и $\left(\frac{1}{g}\right)`(x_0) = -\frac{g`(x_0)}{g(x_0)^2}$

$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\psi(x)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} =: X(x)$
Нужно доказать, что X непрерывна в точке x_0 и посчитать $X(x_0)$
g дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow g$ непрерывна в точке $x_0, X(x_0) = \frac{-\psi(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{-g`(x_0)}{g(x_0)^2}$

3.8 Пример. Уравнение касательной

касательная - предельное положение секущей
$y = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0} + f(x_0)$
$y = f`(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ уравнение касательной к графику функции f в точке x_0

3.9 Теорема

$f : \langle a, b \rangle \to \langle c, d \rangle, g : \langle c, d \rangle \to \mathbb{R}$
$x_0 \in \langle a, b \rangle, f$ дифференцируем в точе x_0
g дифференцируем в точке $f(x_0) =: y_0$
Тогда $g \bigcirc f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \bigcirc f)`(x_0) = g`(f(x_0)) \cdot f`(x_0)$ Доказательство:
f - дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0
g - дифференцируема в точке $y_0 \Rightarrow g(y) - g(y_0) = \psi(y)(y - y_0)$, где ψ непрерывна в точке y_0
возьмем $y = f(x)$
$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)}_{X(x)} \cdot (x - x_0) =$
Нужно доказать, что $X(x)$ непрерывна в точке x_0

φ непрерывна в точке x_0
f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f$ непрерывна в тчоке x_0, ψ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \Rightarrow \psi(f(x))$ непрерывна в точке x_0
$(g \bigcirc f)`(x_0) = X(x) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi(x_0) = g`(f(x_0)) \cdot f`(x_0)$

3.10 Теорема

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f строго монотонна. $x_0 \in \langle a, b\rangle, f$ дифференцируем в тчоке x_0 и $f`(x_0) \neq 0, y_0 := f(x_0)$
Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и $\left(f^{-1}\right)`(y_0) = \frac{1}{f`(x_0)}$
Доказательство:
f дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0)$, где φ непрерывна в точке x_0
$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$
$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$
Если $y \neq y_0$, то $\neq 0$Если $y = y_0$, то $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f`(x_0) \neq 0$ по условию
$\Rightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0 = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0)$
Надо проверить, что X непрерывна в точке y_0, такое что $\left(\varphi(f^{-1}(y))\right)$ непрерывна в точке y_0
f^{-1} непрерывна в точке y_0 (т.к f непрерывна в точке x_0)
φ непрерывна в точке x_0, так как f непрерывна в точке x_0
$X(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f`(x_0)}$

3.10.1 Следствие

$\left(f^{-1}\right)`(y) = \frac{1}{f`(f^{-1}(y))}$

1. $(c)` = 0$
2. $(x^p)` = p \cdot x^{p-1}$
3. $(a^x)` = a^x \ln a$
4. $(\ln x)` = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)` = \cos(x)$
6. $(\cos x)` = -\sin x$
7. $\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)` = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)` = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\text{arcctg x})` = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказательство:
2. $(x^p)` = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} = x^p \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^p - 1}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = p \cdot x^{p-1}$
3. $(a^x)` = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$
4. $(\ln x)` = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)` = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos(x)$
7. $(\operatorname{tg} x)` = \frac{\sin x}{\cos x}` = \frac{(\sin x)` \cos x - (\cos x)` \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $f(x) := \sin x, f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$f^{-1} \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\right]$
$\left(f^{-1}\right)`(y) = \frac{1}{f`(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
11. $\left(f^{-1}\right)`(y) = \frac{1}{f`(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$

4 Теоремы о среднем

4.1 Теорема Ферма

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a, b), f$ дифф. в точке x_0 $f(x_0) = \min_{t\in\langle a,b\rangle} f(t)$ или с максимумом
Тогда $f`(x_0) = 0$
Доказательство: $f`(x_0) = f_+`(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, знаменатель положителен, числитель больше или равен нулю и вся дробь неотрицательна, тогда $\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$
Аналогично с производной слева получаем, что предел ≤ 0
Значит, $f`(x_0)$ просто 0

4.2 Геометрический смысл: в точке $\min, \max$ касательная всегда горизонтальна

4.3 Теорема Ролля

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифференцируема на (a, b)
Если $f(a) = f(b)$, то найдется точка $c \in (a, b)$, такая что $f`(c) = 0$
Доказательство: По теоерема Вейерштрасса найдутся точки $p, q \in [a, b]$, такие что $f(p) = \min_{t\in[a,b]} f(t), f(q) = \max_{t\in[a,b]} f(t)$
Случай 1 p, q концыы отрезка $\Rightarrow f(p) = f(q) \Rightarrow f(x) = c \Rightarrow f`(x) = 0\forall(x \in [a, b])$
Случай 2
Хотя бы одна из этих точек не конец отрезка $\underset{\text{по Т. Ферма}}{\Rightarrow}$ производная в этой точке равна 0

4.3.1 Геом. смысл

$f(a) = f(b)$ и f дифф., то есть точка где касательная горизонтальна

4.3.2 Замечение

Важно, что дифференцируемость есть во всех точках

4.4 Теорема Лагранжа (формула конечных приращений)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф на (a, b).
Тогда найдется $c \in (a, b)$, такая что $f(b) - f(a) = f`(c)(b - a)$
Доказательство:
Рассмотрим вспомагательную функцию $g(x) \coloneqq f(x) - kx$
Подберем k так, что $f(a) - ka = g(a) = g(b) = f(b) - k \cdot b \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Функция g удовлетворяет теореме Ролля $\Rightarrow$ существует такая точка, такая что $g`(c) = 0$
$g`(c) = f`(c) - k \Rightarrow f`(c) = k$

4.4.1 Геометрический смысл

найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде

4.5 Теорема Коши

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывны и дифф. внутри, $g`(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$
Тогда существует $c \in (a, b)$, такая что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f`(c)}{g`(c)}$
Доказательство:
$g(a) \neq g(b)$ иначе нашлась бы точка, где производная нулится Рассмотрим функцию $h(x) \coloneqq f(x) - kg(x)$, подберем k так, что $h(a) = h(b), f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \Rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
По т. Ролля о функции h найдется $c \in (a, b)$, такая что $f`(c) - kg`(c) = h`(c) = 0 \Rightarrow k = \frac{f`(c)}{g`(c)}$

4.5.1 Геометрический смысл

$(g(t), f(t))$ - координата частицы в момент времени t, тогда $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ угловой коэфф. хорды, соединящией a, b. Тогда вектор скорости этой частицы совпадет по скорости с этой

4.6 Следствие теоремы Лагранжа

1. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках, дифф внутри. А еще знаем, что $|f`(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$

Тогда $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\forall x, y \in \langle a, b, \rangle$
Доказательство:
Пусть $x \leq y$, тогда f непрерывна на x, y и дифф. внутри, а значит можно на этом отрезке использовать теорему Лагранжа, то есть найдется $c \in (x, y) \subset (a, b)$, такая что $f(y) - f(x) = f`(c)(y - x), |f(y) - f(x)| = |f`(c)||y - x| \leq M|y - x|$
2.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если $f`(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$, тогда f постоянна
Доказательство:
Это 1. для $M = 0$

4.7 Определение

$f : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой M, если $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\ \forall x, y \in E$

3. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри. Если $f`(c) > 0\ \forall x \in (a, b)$ то f строго возрастает
4. То же самое, только производная меньше нуля, только тогда убывание

Доказательство
Возьмем $x < y$ и применим Т. Лагранжа для $[x, y]$. Тогда найдется $c \in (x, y) \subset (a, b)$, такие что $f(y) - f(x) = f`(c)(y - x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

5. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках и дифф внутри.
   Тогда
   а) f нестрого возрастает $\Leftrightarrow f`(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$
   б) аналогично для убывания

Доказательство: а) <= аналогично предыдущему
$\Rightarrow f`(x) = f_+`(x) = \lim_{y\to x+} y - x \geq 0$ предельные переход в неравенстве.

4.7.1 Замечанеие

с $3, 4$ такой фокус непрокатит (прогипотинузит)

4.8 Теорема Дарбу

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифф. во всех точках. C лежит между $f`(a), f`(b)$, тогда найтеся такая точка, в которй $f`(c) = C$
Доказательство:
Случай 1
$C = 0$, тогда $f`(a)$ и $f`(b)$ разных знаков. Пусть $f`(a) < 0 < f`(b)$ f дифф. на $[a, b] \Rightarrow f$ непрерывна на отрезке. Значит можно применить т. Вейерштрасса найдется $p \in [a, b]$, такая что $f(p) = \min_{t\in[a,b]} f(t)$
Если $p \in (a, b)$, то по Теореме ферма $f`(p) = 0$, а это то, что нужно
Пусть $p = a$, тогда $f`(a) = f_+`(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, числитель больше или равен 0, знаменатель больше 0, тогда о предельном переходе предел ≥ 0, противоречие
Пусть $p = b$, тогда $f`(b) = f_-`(b) = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq 0$, противоречие

Знаит точка не может оказаться не на концах отрезка, а для внутреннего мы уже знаем
Случай $C \in \mathbb{R}$
Рассмотрим $g(x) = f(x) - Cx$, тогда $g`(x) = f`(x) - C$
$\Rightarrow g`(a)$ и $g`(b)$ разных знаков $\Rightarrow$ найдется $c \in (a, b)$, где $g`(c) = 0$

4.8.1 Следствие

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифф на и $f`(x) \neq 0\ \forall x$ тогда f строго монотонна
Доказательство: Докажем, что $f`$ знакопостоянна
От противного $f`(p) < 0 < f`(q)$ тогда по т. Дарбу есть точка c между p и q, такая что $f`(c) = 0$. Противоречие

4.9 Правило Лопиталя

4.9.1 Версия 1

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифф на (a, b). $g`(x) \neq 0 \forall x$, $\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} g(x) = 0$
Тогда если есть $\lim_{x\to b-} \frac{f`(x)}{g`(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то предел отношения функции равен тому же самому. Аналогично для предела с $+$
Доказательство:
Проверим по Гейне, что $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
Возьмем x_n возрасоающую и $\lim x_n = b$. Надо доказать, что $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$, по условию $\lim(f(x_n)) = \lim(g(x_n)) = 0$, еще знаем, что $g` \neq 0$, тогда по следствию g строго монотонна. Тогда для вычисления предела воспользуемся т. Штольца.
Применим т. Штольца. Надо посчитать $\lim \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)}$. Найдется $c_n \in (x_n, x_{n+1})$, такая что $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \frac{f`(c_n)}{g`(c_n)}$. $x_n < c < x_{n+1} \Rightarrow \lim c_n = b$, тогда из определения по Гейне для $\lim_{x\to b-} \frac{f`(x)}{g`(x)} = l \Rightarrow \lim \frac{f`(c_n)}{g`(c_n)} = l$

4.9.2 Версия 2

$-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифф на (a, b), $g`(x) \neq 0 \forall x$, $\lim_{x\to b-} g(x) = +\infty$
Тогда если $\lim_{x\to b-} \frac{f`(x)}{g`(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Аналогично для предела с $+$
Доказательство:
То же самое доказательство, только сослаться для другую теорему Штольца :D

4.9.2.1 Пример

$\lim_{x\to 0}$

4.9.3 Примеры Лопиталя

1. $p > 0$, тогда $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$
   $\lim \frac{(\ln x)`}{(x^p)`} = \lim \frac{1}{px^p} = 0$
2. $a > 1$, $p \in \mathbb{R}$ тогда $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$
   Если $p \leq 0$ то очев
   Если нет $\lim \frac{(x^p)`}{(a^x)`} = \frac{p}{\ln(a)} \lim \frac{x^{p-1}}{a^x}$, при $p \leq 1$ жизнь прекрасна и удивительна. Ну и так $n > p$ раз применяем правило Лопиталя, то все будет збс и стремеление к 0
3. $\lim_{x\to 0^+} x^x = \exp\big(\lim_{x\to 0+} x \ln x\big) = \exp(0) = 1$
   $\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim -x = 0$

5 Производные высших порядков

5.1 Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, Пусть f дифф в окрестности в окрестности точки x_0, если при этом $f`$ буедт дифференцируема в точке x_0, то говорят, что f дважды дифференцируема в точке x_0. Второй производной в точке x_0 это $f``(x_0) = (f`)`(x_0)$

5.2 Определение

f n раз дифференцируема в точке x_0, если f $n-1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 и f^{n-1} дифф. в точке x_0
$f^n := (f^{n-1})`$

5.3 Определение

$f \in C^n(\langle a, b\rangle)$ означает, что $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, n раз дифференцируема во всех точках и $f, f`, ..., f^n$ непрерывны на $\langle a, b\rangle$

5.4 Определение

$f \in C(\langle a, b\rangle)$ означает, что $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и непрерывна во всех точках

5.5 Замечение

$C(\langle a, b\rangle) \supset C^1(\langle a, b\rangle) \supset C^2(\langle a, b\rangle) \supset ...$

5.6 Пример

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^{n+\frac{1}{3}} = x^n \sqrt[3]{x}$
$f \in C^n(\mathbb{R})$, но $f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$
$f`(x) = \left(n + \frac{1}{3}\right)x^{n-1+\frac{1}{3}}$
$f``(x) = \left(n + \frac{1}{3}\right)\left(n - \frac{2}{3}\right)x^{n-\frac{5}{3}}$
$f^n(x) = \left(n + \frac{1}{3}\right)\left(n - \frac{2}{3}\right)...\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ - непрерывна во всех точках
Но f^n не имеет производной в 0
$\lim_{x\to 0} \frac{f^n(x)-f^n(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{c\sqrt[3]{x}-0}{x} = +\infty$, $f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$

5.7 Обозначение

$C^\infty(\langle a, b\rangle) := \bigcap_{n=1}^\infty C^n(\langle a, b\rangle)$, т.е. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и имеет производную любого порядка

5.8 Теорема (Арифметические действия с n-ми производным)

$f, g\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b\rangle, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f и g n раз дифференцируема в точке x_0. тогда

1. $\alpha f + \beta g = (\alpha f + \beta g)^n(x_0) = \alpha f^n(x_0) + \beta g^n(x_0)$
2. $fg, (fg)^n(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^k(x_0) \cdot g^{n-k}(x_0)$
3. f n раз дифференцируема в точке $\alpha x_0 + \beta$. Тогда $g(x) := f(\alpha x + \beta)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $g^n(x_0) = \alpha^n f^n(\alpha x_0 + \beta)$

Доказательство первого:
По индукции
База очев
Переход $n \to n + 1$
По определению $(\alpha f + \beta g)^{n+1} = ((\alpha f + \beta g)^n)` = (\alpha f^n + \beta g^n)` = \alpha(f^n)`+\beta(g^n)` = \alpha f^{n+1} + \beta g^{n+1}$
Доказательство третьего:
Индукция по n. Переход $n \to n + 1$
$g^{n+1}(x_0) = (g^n)`(x_0) = (\alpha^n f^n(\alpha x + \beta))` \mid_{x=x_0} = \alpha^n f^{n+1}(\alpha x + \beta) \cdot (\alpha x + \beta)` \mid_{x=x_0} =$
$\alpha^{n+1} f^{n+1}(\alpha x_0 + \beta)$
Доказательство второго:
Снова индукция...
$(fg)` = fg`+f`g$
Переход $n \to n + 1$
$(fg)^{n+1} = ((fg)^n)` =$
$\left(\sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k}\right)` = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f^k g^{n-k}\right)` = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f^{k+1} g^{n-k} + f^k g^{n-k+1}\right) = \sum_{j=0}^n C_n^j f^{j+1} g^{n-j} =$
$\sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^k g^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^k g^{n+1-k}$

5.8.1 Примеры

1. $(x^p)^{(n)} = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$
2. $(\ln x)^{(n)} = ((\ln x)`)^{(n-1)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)(-2)...(-1-(n-1)+1)x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
3. $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$

5.9 Определение

f n раз дифференцируема в x_0
Многочлен Тейлора для функции f в x_0 степени n
$T_{n,x_0}f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

5.10 Лемма 1

$f(x) := (x-x_0)^k$, тогда $f^{(m)}(x_0) = \begin{cases} 0 \text{ если } & k \neq m \\ m! \text{ если } & k = m \end{cases}$
Доказательство:
Если $k \geq m$, то $f^{(m)}(x) = k(k-1)...(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}$
При $k > m$ $f^{(m)}(x_0) = 0$, так как есть $(x-x_0)$ в положительной степени
При $k = m$ $f^{(m)}(x) = m!$
При $k < m$ $f^{(m)}(x) = \left(f^{(k)}\right)^{(m-k)} = (k!)^{(m-k)} = 0$

5.11 Лемма 2

P - многочлен степени $\leq n$, $x_0 \in \mathbb{R}$
Тогда P можно представить в виде $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, где $c_0, c_1, ...c_n$ - некоорые коэфф.
Доказательство:
Обозначим $t := x - x_0$, тогда $x = t + x_0$
$P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(t+x_0)^k$, раксркоем скобки, все разложится по каким-то степенями t с какими-то коэфф., а это то, что нам нужно

5.12 Теорема (Формула Тейлора для многочленов)

Пусть P - многочлен степени $\leq n$, Тогда
$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
По лемме 2 напишем разложение, оно сущестует

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$$

и найдем c_k
$P^{(m)}(k) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^{n} c_k\left((x-x_0)^k\right)^{(m)}$ подставим $P^{(m)}(x_0)$ по Лемме 1 там почти всегда нули, за исключением одной производной, которая в точности m-тая, получим $P^{(m)}(x_0) = m!c_m$

5.12.1 Следствие

Если степень многочлена $P \leq n$, то он совпадает со своим многолченом Тейлора степени n

5.13 Определение

$R_{n,x_0}f(x) := f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ - остаток в формуле Тейлора
Формула Тейлора $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$

5.14 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, f n раз дифференцируема в точке x_0. Тогда
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$

5.14.1 Лемма

g n раз дифференцируема в точке x_0 и $g(x_0) = g`(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0$

Тогда $g(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$

Доказательство:

Надо доказать, что $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ считаем по Лопиталю

$\lim_{x\to x_0} \frac{g`(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim \frac{g``(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = ... = \lim_{x\to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$

Надо найти $\lim_{x\to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{x-x_0}$

Напишем определение дифф $g^{(n-1)}$ в точке x_0 $g^{(n-1)}(x) = \underbrace{g^{(n-1)}(x_0)}_{=0} + \underbrace{g^{(n)}(x_0)}_{=0}(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow g^{(n-1)}(x) = o(x - x_0)$

Доказательство формулы:

$g(x) \coloneqq f(x) - T_{n,x_0}f(x)$ проверим, что g удовлетвоярет условиям Леммы

$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - \left(T_{n,x_0}f\right)^{(m)}x_0$, $0 \le m \le n$ из предыдущей теоремы мы знаем, что $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{\left(T_{n,x_0}f\right)^{(k)}f(x_0)}{k!}$

5.15 Следствие

Пусть f n раз дифференцируема в точке x_0 и p - такой многочлен степени $\le n$, что $f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$ при $x \to x_0$. Тогда $P = T_{n,x_0}f$

Доказательство:

$f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right), \qquad f(x) = T_{n,x_0}f(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \qquad \Rightarrow Q(x) \coloneqq T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$, Q -многочлен степени $\le n$, тогда можем записать разложение $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k$

Пусть m - наименьший индекс, для которого $c_m \ne 0$, тогда $Q(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k(x - x_0)^k = o\left((x - x_0)^m\right)$, тогда

$\lim_{x\to x_0} \frac{Q(x)}{(x-x_0)^m} = \lim_{x\to x_0}\left(c_m + c_{m+1}(x - x_0) + ... + c_n(x - x_0)^{n-m}\right) \Rightarrow c_m = 0$, противоречие

5.16 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

f $n + 1$ раз дифференцируема $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$

Тогда найдется c между x_0 и x, такая что $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Доказательство:

Возьмем такое $M \in \mathbb{R}$, что $f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M \cdot (x - x_0)^{n+1}$

Надо доказать, что $M = \frac{(f^{n+1})(c)}{(n+1)!}$ для некоторого c

$g(t) \coloneqq f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t - x_0)^{n+1}$ - эта функция $n + 1$ раз дифференцируема

$g(x) = 0$, (по выбору M)

$0 \le k \le n$: $g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \left(T_{n,x_0}f\right)^{(k)}(x_0) - 0 = 0$

$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - M(n + 1)!$

$g(x) = g(x_0) = 0$ Тогда по теореме Ролля найдется x_1 между x, x_0, такая что $g`(x_1) = 0$

$g`(x_0) = g`(x_1) = 0 \Rightarrow$ по т. Ролля найдется x_2,такая что $g``(x_2) = 0$

и т.д.

$g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_n) = 0 \Rightarrow$ по Роллю найдется c между x, x_n, такая что $g^{(n+1)}(c) = 0, g^{n+1}(c) = f^{(n+1)}(c) - (n + 1)! \cdot M$

5.16.1 Следствие

Пусть f $n + 1$ раз дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$. Тогда $\left|R_{n,x_0}f(x)\right| \le \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Доказательство:

$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ для некоторого c, рисуем модуль

$\left|R_{n,x_0}f(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \le \frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

5.16.2 Следствие

f бесконечно дифф на $\langle a, b\rangle$ и $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$ и $\forall n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} T_{n,x_0} f(x) = f(x)$
Доказательство:
$\left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| = \left|R_{n,x_0} f(x)\right| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ но мы знаем, что $\frac{a^n}{n!} \to 0$