

Домашняя работа №6

Алгоритмы в биоинформатике

Лопатина Софья

Вывести формулу коэффициентов при возведении в n-ую степень матрицы

$$PAM^1 = \begin{pmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{pmatrix}$$

$$PAM^n = \hat{U} \hat{M}^n \hat{U}^{-1}$$

Для возведения исходной матрицы в n-ую степень диагонализуем её. Матрица U состоит из собственных векторов матрицы PAM. Начнем с нахождения собственных чисел исходной матрицы.

$$\det(PAM - \lambda \hat{I}) = \begin{vmatrix} 1-3a-\lambda & a & a & a \\ a & 1-3a-\lambda & a & a \\ a & a & 1-3a-\lambda & a \\ a & a & a & 1-3a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \lambda^3(12a - 4) + \lambda^2(48a^2 - 36a + 6) + \lambda(64a^3 - 96a^2 + 36a - 4) - 64a^3 + 48a^2 - 12a + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1 - 4a$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям:

$$(PAM - \lambda_1 \hat{I})v_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично находим оставшиеся собственные векторы, составляем из них матрицу U.

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда диагонализированная матрица:

$$\hat{M} = \hat{U}^{-1} PAM \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-4a \end{pmatrix}$$

В конечном итоге получим n-ую степень исходной матрицы:

$$PAM^n = \hat{U} \hat{M}^n \hat{U}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4a)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-4a)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-4a)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PAM^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3(1-4a)^n + 1 & 1 - (1-4a)^n & 1 - (1-4a)^n & 1 - (1-4a)^n \\ 1 - (1-4a)^n & 3(1-4a)^n + 1 & 1 - (1-4a)^n & 1 - (1-4a)^n \\ 1 - (1-4a)^n & 1 - (1-4a)^n & 3(1-4a)^n + 1 & 1 - (1-4a)^n \\ 1 - (1-4a)^n & 1 - (1-4a)^n & 1 - (1-4a)^n & 3(1-4a)^n + 1 \end{pmatrix}$$