Домашняя работа №6
Алгоритмы в биоинформатике

Лопатина Софья

Условие задачи:

Крупье выбирает монету из двух в начале с равной вероятностью (0.5).
Вероятности выпадения орла и решки на правильной монете - одинаковые (0.5).
Вероятность выпадения орла на неправильной монете - 0.9, решки - 0.1.
Крупье начинает подкидывать монету и выпадают только орлы.
После какого выпадения можно с уверенностью 95% говорить, что крупье выбрал неправильную монету?

Решение:

По условию задачи необходимо найти такое число бросков монеты n, что вероятность выбора неправильной монеты будет равна 95%. Воспользуемся теоремой Байеса

$$P(\text{плохая монета}|\text{орел выпал n раз}) = \frac{P(\text{орел выпал n раз}|\text{плохая монета})P(\text{плохая монета})}{P(\text{орел выпал n раз})} \tag{1}$$

Посчитаем вероятность $P(\text{орел выпал n раз}|\text{плохая монета})$ как вероятность совокупности независимых событий:

$$P(\text{орел выпал n раз}|\text{плохая монета}) = (0.9)^n \tag{2}$$

С помощью формулы полной вероятности запишем выроятность выпадения n орлов:

$$\begin{gathered} P(\text{орел выпал n раз}) = P(\text{орел выпал n раз}|\text{плохая монета})P(\text{плохая монета})+ \\ P(\text{орел выпал n раз}|\text{честная монета})P(\text{честная монета}) = 0.5 \cdot (0.9)^n + 0.5 \cdot (0.5)^n \end{gathered} \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1), получим

$$P(\text{плохая монета}|\text{орел выпал n раз}) = \frac{0.5 \cdot (0.9)^n}{0.5 \cdot (0.9)^n + 0.5 \cdot (0.5)^n} \geq 0.95 \tag{4}$$

Решением полученного неравенства будет $n \geq 5.009$, следовательно после шести выпадений орла можно с уверенностью 95% сказать, что была выбрана нечестная монета.

Ответ:

$$\boxed{n = 6} \tag{5}$$