Домашняя работа №5
Алгоритмы в биоинформатике

Лопатина Софья

1 Найти число укоренённых деревьев на n вершинах.

Число укоренённых деревьев с n листьями равно $\frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}$. Доказательство:
Для $n = 2$ имеем единственное дерево:

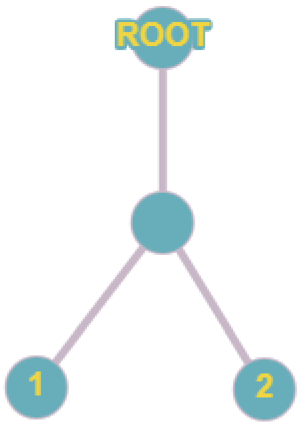
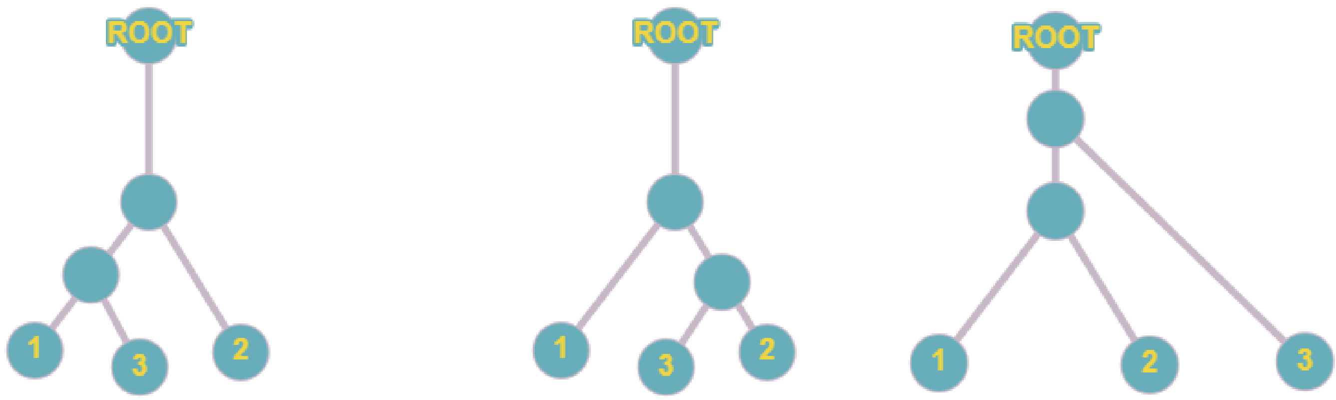


Рис. 1: Укоренённое дерево с двумя листьями

Хотим добавить третий лист. Это можно сделать тремя способами, добавляя новый лист к любому из трех ребер на первом дереве:



По формуле число деревьев с тремя листьями равно

$$\frac{(2 \cdot 3 - 3)!}{2^{3-2}(3-2)!} = \frac{3!}{2} = 3$$

Так как каждое из деревьев с тремя листьями имеет пять ребер, мы имеем пять способов добавить новый четвертый лист. Тогда имеем $15 = \frac{(2 \cdot 4-3)!}{2^{4-2}(4-2)!} = \frac{5!}{2^2 2!} = 15$ деревьев с четырьмя листьями.

Воспользуемся методом математической индукции для доказательства утверждения для произвольного n. Было показано, что формула верная для $n = 2$ и $n = 3$. Пусть $k = n + 1$.

Дерево с n листьями имеет $2n - 1$ ребро, поэтому существует $2n - 1$ способ получить дерево с $n + 1$ листьями из дерева с n листьями. Докажем промежуточное утверждение:

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3) = \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}$$

Представим произведение нечётных чисел как отношение произведения всех чисел и произведения всех чётных чисел:

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3) = \frac{(2n-3)!}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-4)}$$

В знаменателе имеем $n-2$ множителя. Из каждого выносим одну степень двойки, тогда

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3) = \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}$$

Что и требовалось доказать.

Используя предположение индукции и доказанное равенство имеем $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3)$ деревьев с n листьями. Так как дерево с n листьями имеет $2n-1$ ребро, поэтому существует $2n-1$ способ получить дерево с $n+1$ листьями из дерева с n листьями. Тогда есть

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3) \times (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}$$

деревьев с $n+1$ листом. Что и требовалось доказать.
Получено:

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-3) = \boxed{\frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}}$$

– число укоренённых деревьев с n листьями.

2 Найти число неукоренённых деревьев на n вершинах.

Число таких деревьев легко посчитать, если представить неукоренённое дерево с n листьями как дерево с корнем и $n-1$ листом. Это легко сделать, представив корень с виде n-го листа. Знаем, что существует

$$1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2(n-1)-3) = \frac{(2(n-1)-3)!}{2^{(n-1)-2}((n-1)-2)!} =$$

$$= 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-5) = \boxed{\frac{(2n-5)!}{2^{n-3}(n-3)!}}$$

укоренённых деревьев с $n-1$ листом. Это и будет числом неукоренённых деревьев с n листьями.