

12주차 3차시 신장트리와 최소비용 신장트리

【학습목표】

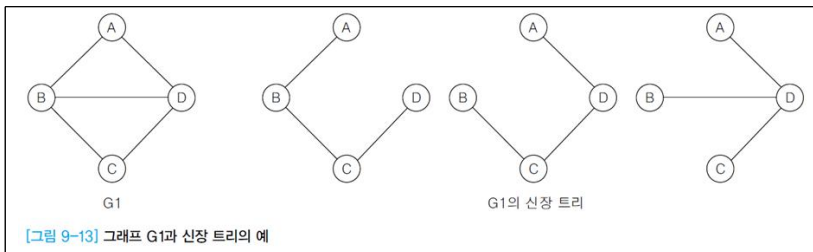
1. 최소비용 신장트리를 설명할 수 있다.
2. Kruskal 알고리즘과 Prime 알고리즘을 구분할 수 있다.

학습내용1 : 신장트리와 최소비용 신장트리의 개요

1. 신장 트리(Spanning tree)

* n 개의 정점으로 이루어진 무방향 그래프 G 에서 n 개의 모든 정점과 $n-1$ 개의 간선으로 만들어진 트리

* 그래프 G_1 과 신장 트리의 예



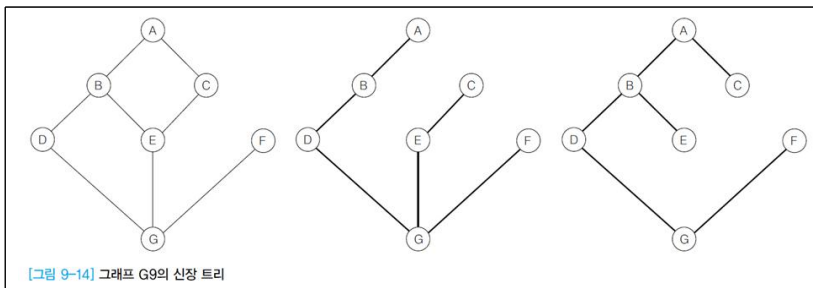
* 깊이 우선 신장 트리 (depth first spanning tree)

- 깊이 우선 탐색을 이용하여 생성된 신장 트리

* 너비 우선 신장 트리(breadth first spanning tree)

- 너비 우선 탐색을 이용하여 생성된 신장 트리

* 그래프 G_1 의 깊이 우선 신장 트리와 너비 우선 신장 트리



- 신장 트리는 결국 최소의 간선을 이용하여 모든 정점을 연결하는 그래프

- 최소의 도로를 사용하여 모든 도시를 연결해야 하는 도로망 건설이나 최소의 네트워크 선을 사용하여 시스템을 연결해야 하는 통신망 설계 등의 여러 분야에 응용됨

2. 최소 비용 신장 트리(minimum cost spanning tree)

- * 무방향 가중치 그래프에서 신장 트리를 구성하는 간선들의 가중치 합이 최소인 신장 트리
 - 가중치 그래프의 간선에 주어진 가중치
 - 비용이나 거리, 시간을 의미하는 값
- * 최소 비용 신장 트리를 만드는 알고리즘
 - Kruskal 알고리즘
 - Prime 알고리즘

학습내용2 : Kruskal 알고리즘

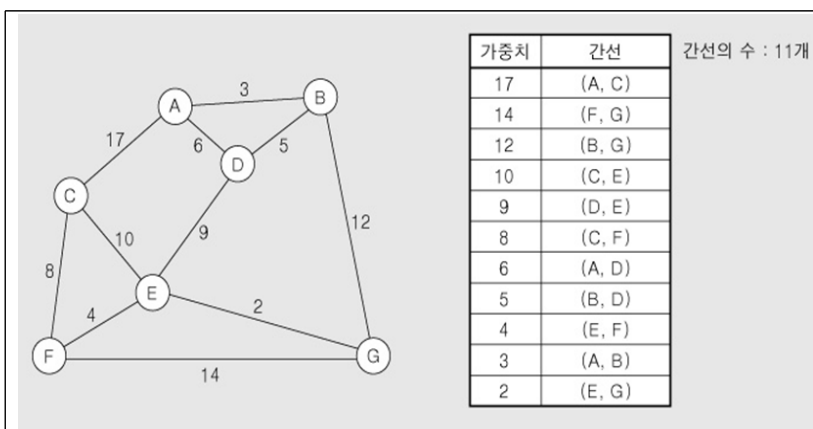
1. Kruskal 알고리즘 I

- * 가중치가 높은 간선을 제거하면서 최소 비용 신장 트리를 만드는 방법
- * Kruskal 알고리즘 I

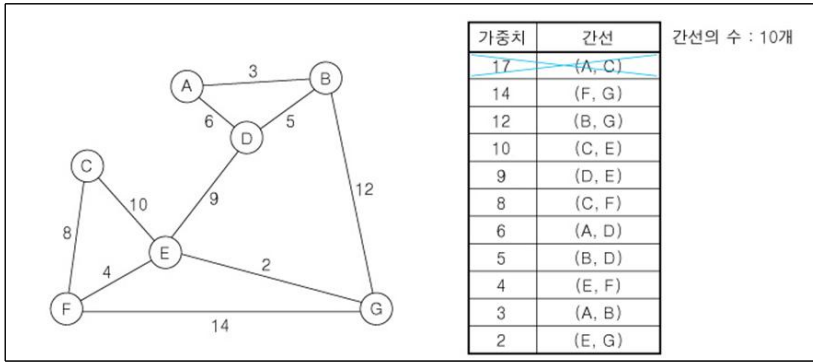
- (1) 그래프 G의 모든 간선을 가중치에 따라 내림차순으로 정리한다.
- (2) 그래프 G에서 가중치가 가장 높은 간선을 제거한다.
 이때 정점을 그래프에서 분리시키는 간선은 제거할 수 없으므로
 이런 경우에는 그 다음으로 가중치가 높은 간선을 제거한다.
- (3) 그래프 G에 n-1개의 간선만 남을 때까지 (2)를 반복한다.
- (4) 그래프에 n-1개의 간선이 남게 되면 최소 비용 신장 트리가 완성된다.

2. Kruskal 알고리즘 I 을 이용하여 G10의 최소 비용 신장 트리 만들기

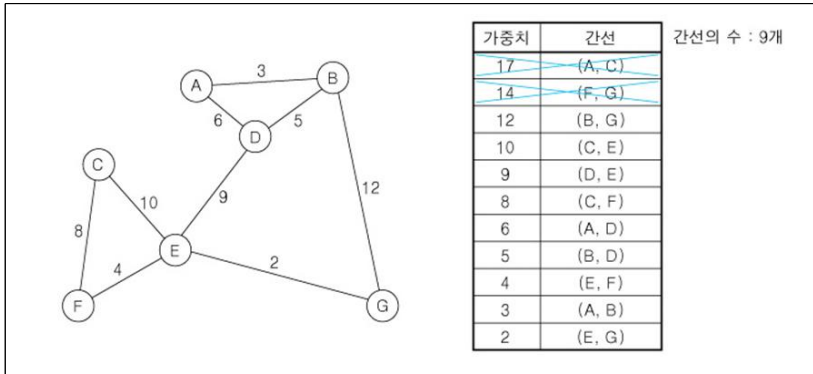
- * 초기 상태 : 그래프 G10의 간선을 가중치에 따라서 내림차순 정렬



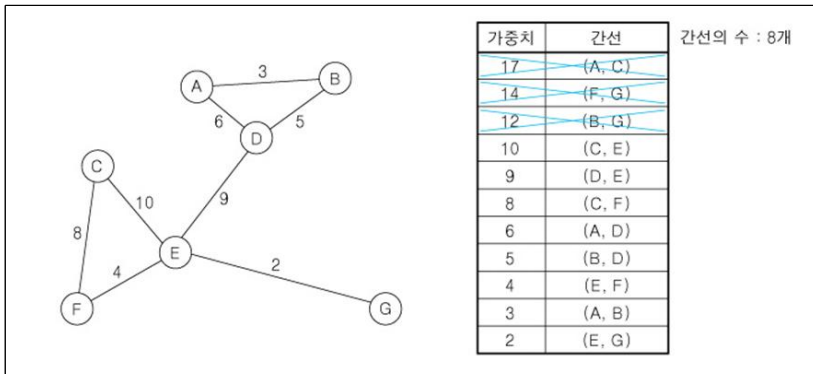
① 가중치가 가장 큰 간선(A,C) 제거(현재 남은 간선의 수 : 10개)



② 남은 간선 중에서 가중치가 가장 큰 간선(F,G) 제거(현재 남은 간선의 수 : 9개)



③ 남은 간선 중에서 가중치가 가장 큰 간선(B,G) 제거(현재 남은 간선의 수 : 8개)

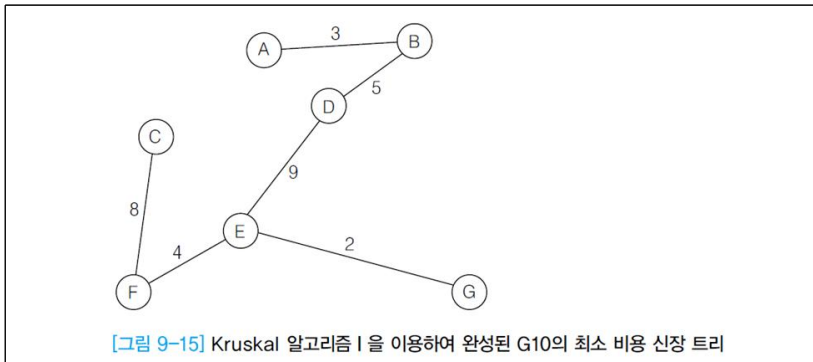
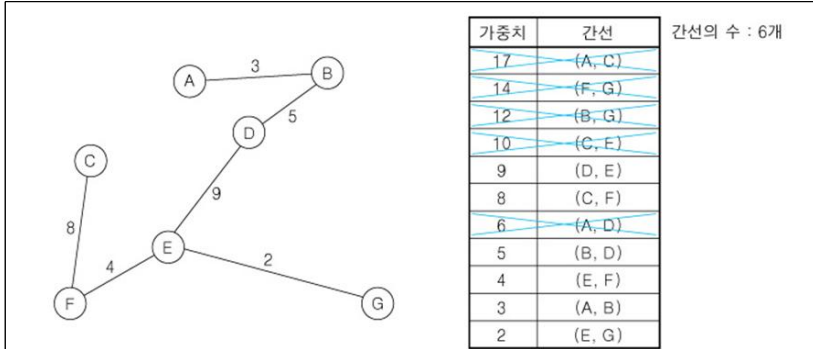
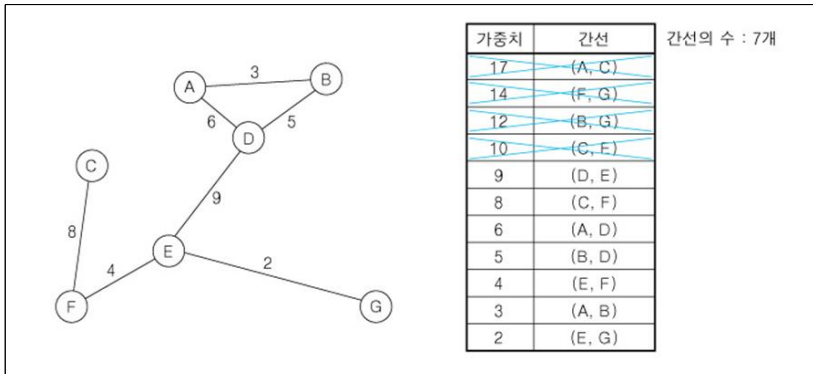


④ 남은 간선 중에서 가중치가 가장 큰 간선 (C,E) 제거(현재 남은 간선의 수 : 7개)

⑤ 남은 간선 중에서 가중치가 가장 큰 간선(D,E)를 제거하면, 그래프가 분리되어 단절 그래프가 되므로, 그 다음으로 가중치가 큰 간선 (C,F)를 제거해야 한다. 그런데 간선 (C,F)를 제거하면 정점 C가 분리되므로 제거할 수 없으므로, 다시 그 다음으로 가중치가 큰 간선 (A,D)를 제거한다(현재 남은 간선의 수 : 6개)

- 현재 남은 간선의 수가 6개 이므로 알고리즘 수행을 종료하고 신장 트리 완성

* G10의 최소 비용 신장 트리



3. Kruskal 알고리즘 II

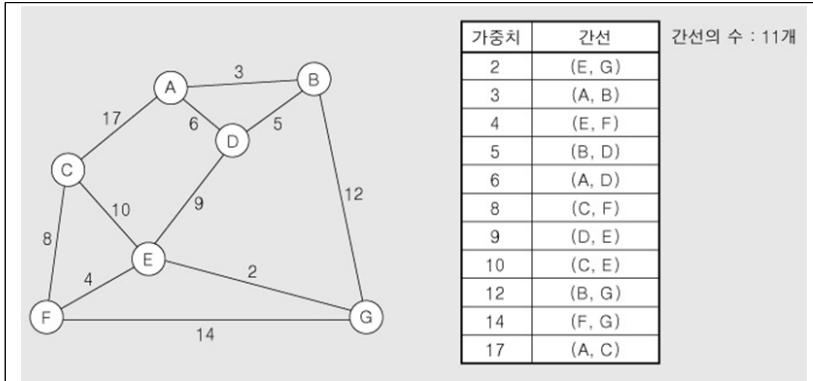
* 가중치가 낮은 간선을 삽입하면서 최소 비용 신장 트리를 만드는 방법

* Kruskal 알고리즘 II

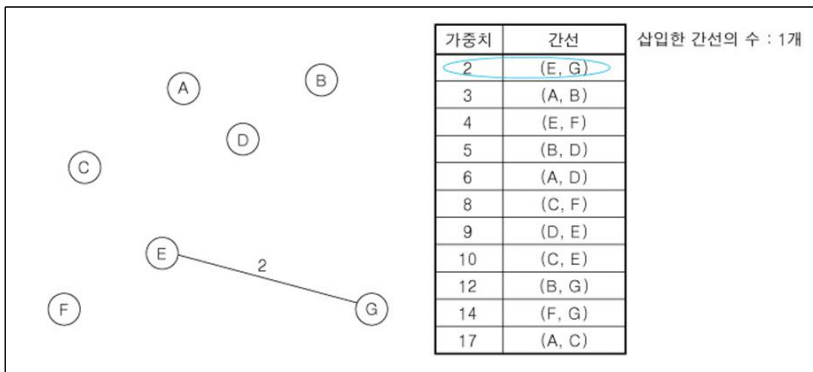
- (1) 그래프 G의 모든 간선을 가중치에 따라 오름차순으로 정리한다.
- (2) 그래프 G에 가중치가 가장 작은 간선을 삽입한다.
이때 사이클을 형성하는 간선은 삽입할 수 없으므로
이런 경우에는 그 다음으로 가중치가 작은 간선을 삽입한다.
- (3) 그래프 G에 n-1개의 간선을 삽입할 때까지 (2)를 반복한다.
- (4) 그래프 G의 간선이 n-1개가 되면 최소 비용 신장 트리가 완성된다.

4. Kruskal 알고리즘 II를 이용하여 G10의 최소 비용 신장 트리 만들기

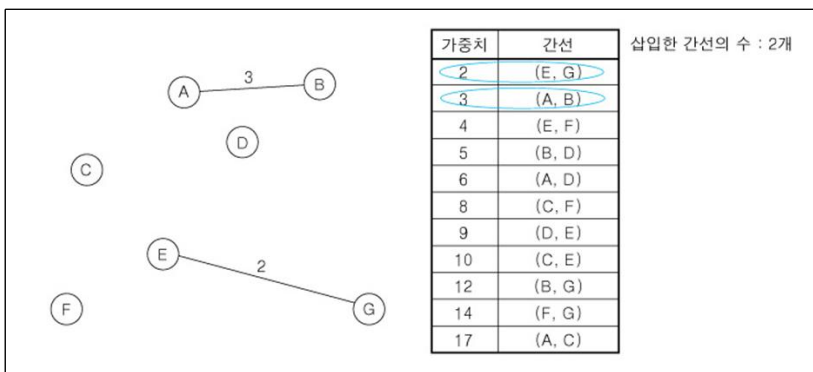
* 초기 상태 : 그래프 G10의 간선을 가중치에 따라서 오름차순 정렬



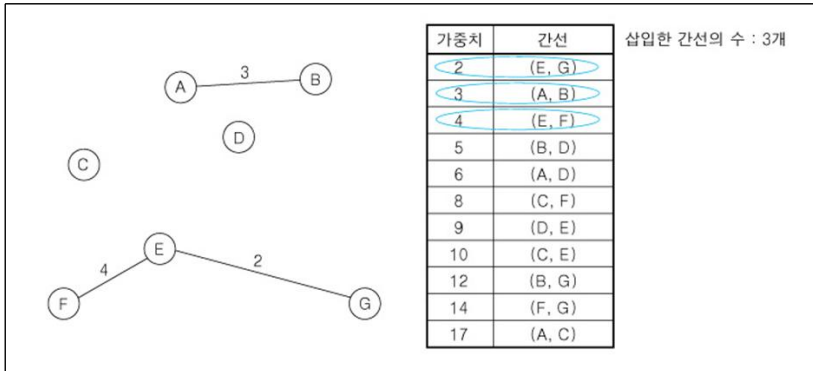
① 나머지 중치가 가장 작은 간선 (E,G) 삽입. (현재 삽입한 간선의 수 : 1개)



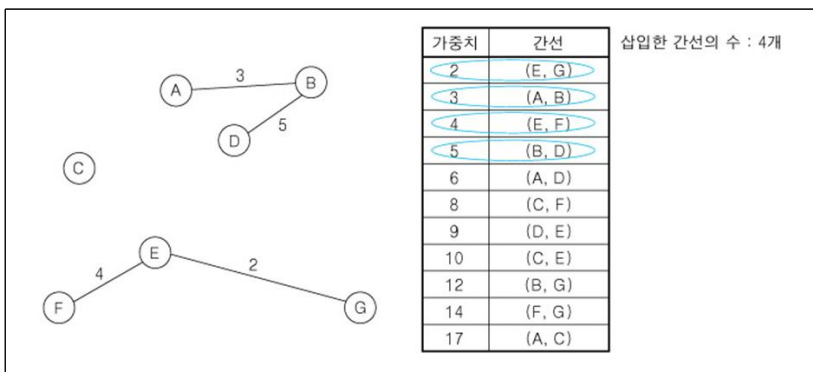
② 나머지 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선(A,B) 삽입(현재 삽입한 간선의 수 : 2개)



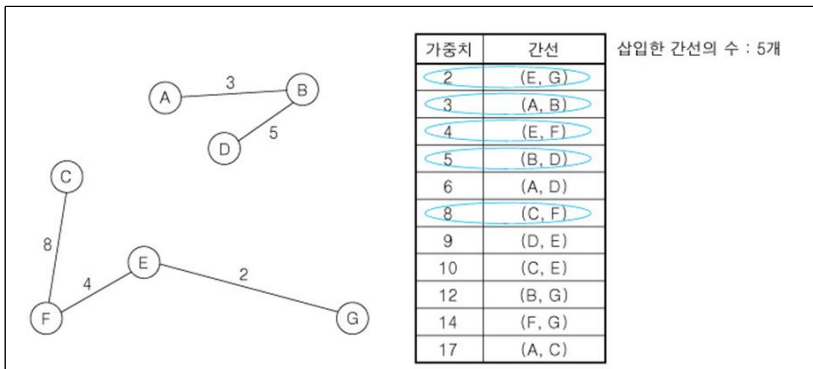
③ 나머지 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선(E,F) 삽입(현재 삽입한 간선의 수 : 3개)



④ 나머지 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (B,D) 삽입(현재 삽입한 간선의 수 : 4개)

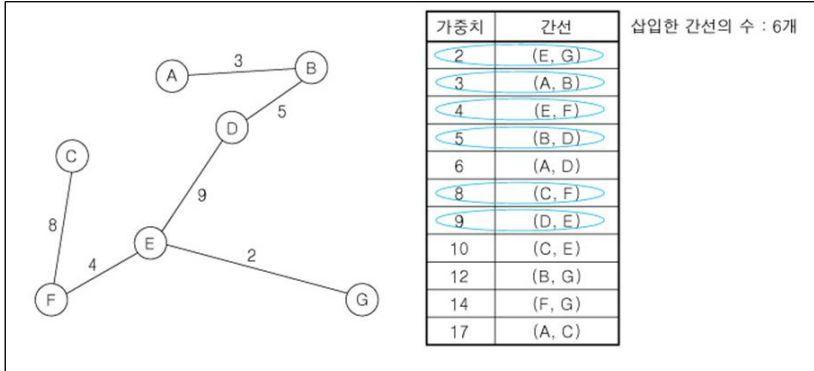


⑤ 나머지 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (A,D)를 삽입하면 A-B-D의 사이클이 생성되므로 삽입할 수 없다. 그 다음으로 가중치가 가장 작은 간선 (C,F) 삽입. (현재 삽입한 간선의 수 : 5개)

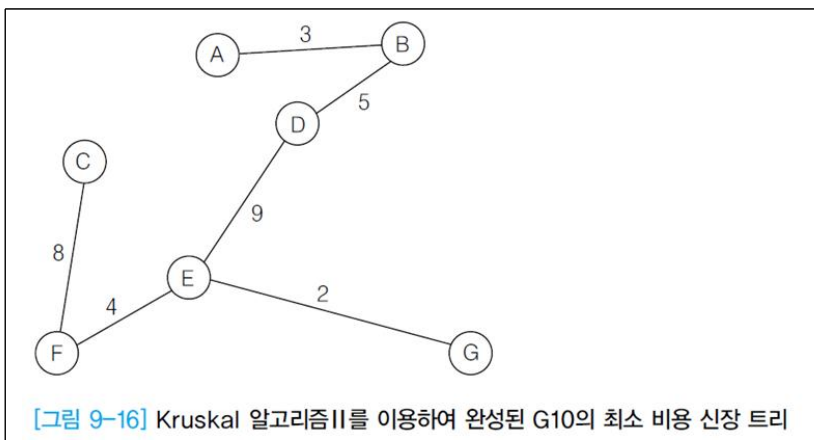


⑥ 나머지 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (D,E) 삽입(현재 삽입한 간선의 수 : 6개)

- 현재 삽입한 간선의 수가 6개 이므로 알고리즘 수행을 종료하고 신장 트리 완성.



* G10의 최소 비용 신장 트리



학습내용3 : Prime 알고리즘

1. Prime 알고리즘의 개요

* 간선을 정렬하지 않고 하나의 정점에서 시작하여 트리를 확장해 나가는 방법

* Prime 알고리즘

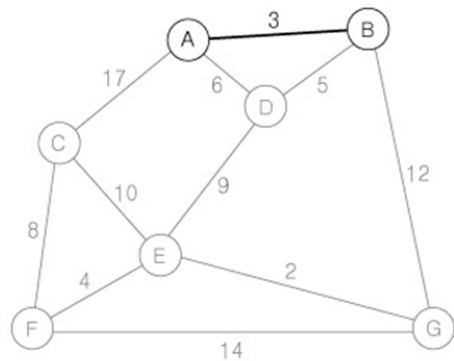
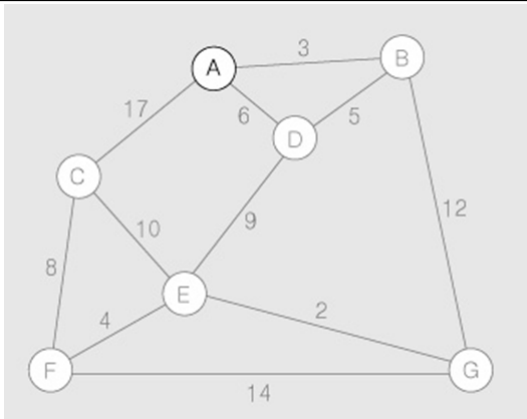
2. Prime 알고리즘을 이용하여 G10의 최소 비용 신장 트리 만들기

* 초기 상태 : 그래프 G10의 정점 중에서 정점 A를 시작 정점으로 선택

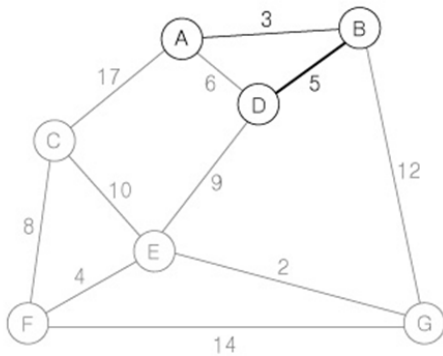
① 정점 A에 부속된 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (A,B)을 삽입하여 트리 확장(현재 삽입한 간선의 수 : 1개)

② 현재 확장된 트리의 정점 A, B에 부속된 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (B,D)를 삽입하여 트리 확장(현재

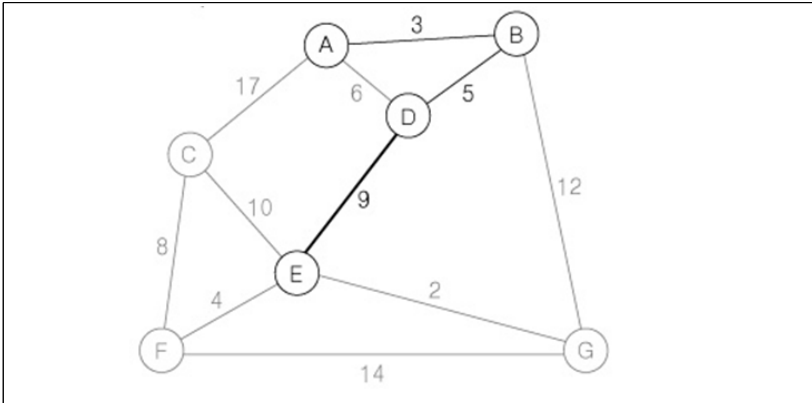
- (1) 그래프 G에서 시작 정점을 선택한다.
- (2) **선택한 정점에 부속된 모든 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선을 연결하여 트리를 확장한다.**
- (3) 이전에 선택한 정점과 새로 확장된 정점에 부속된 모든 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선을 삽입한다.
 이때 사이클을 형성하는 간선은 삽입할 수 없으므로
 그 다음으로 가중치가 작은 간선을 선택한다.
- (4) 그래프 G에 n-1개의 간선을 삽입할 때까지 (3)을 반복한다.
- (5) 그래프 G의 간선이 n-1개가 되면 최소 비용 신장 트리가 완성된다.



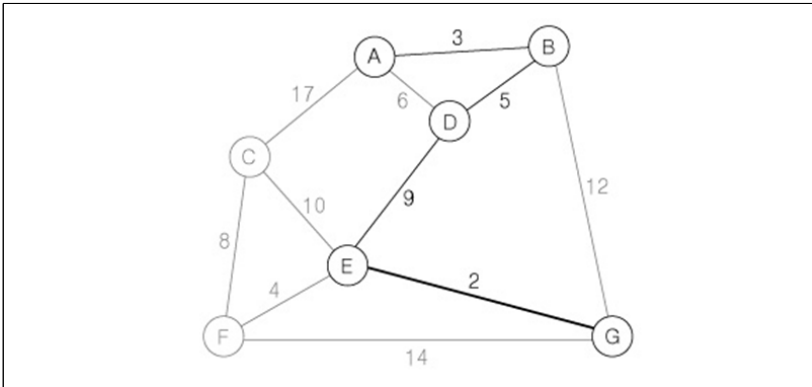
삽입한 간선의 수 : 2개)



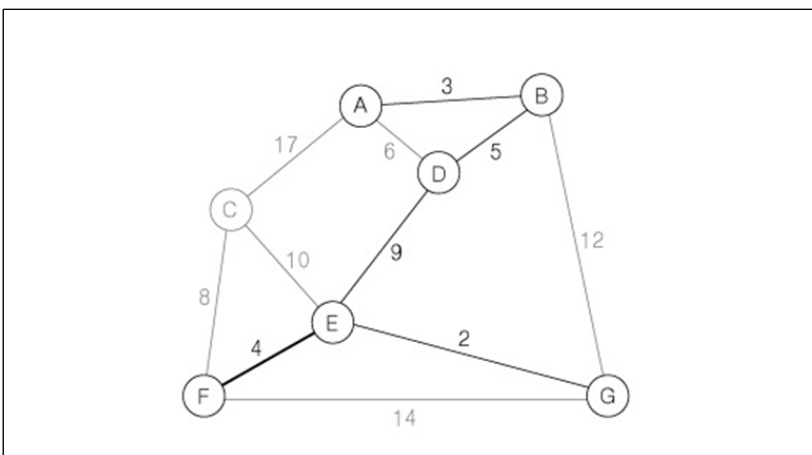
- ③ 현재 확장된 트리의 정점 A, B, D에 소속된 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (A,D)를 삽입하면 A-B-D-A의 사이클이 생성되므로 삽입할 수 없다. 따라서 그 다음으로 가중치가 가장 작은 간선 (D,E) 삽입(현재 삽입한 간선의 수 : 3개, 삽입 불가능한 간선 : (A,D))



- ④ 현재 확장된 트리의 정점 A, B, D, E에 소속된 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (E,G)를 삽입하여 트리 확장(현재 삽입한 간선의 수 : 4개, 삽입 불가능한 간선 : (A,D))

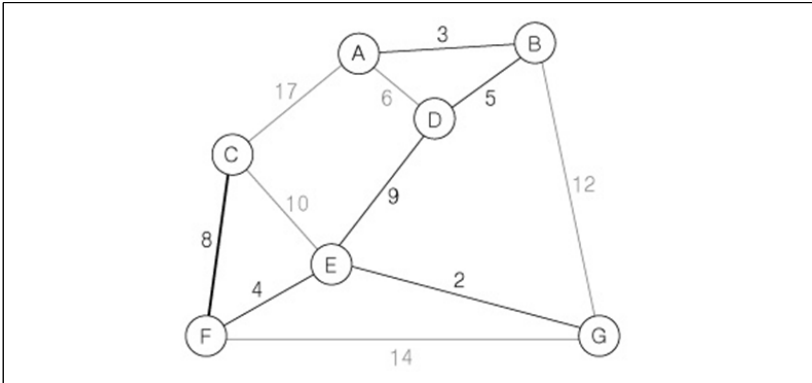


- ⑤ 현재 확장된 트리의 정점 A, B, D, E, G에 소속된 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (E,F)를 삽입하여 트리 확장(현재 삽입한 간선의 수 : 5개, 삽입 불가능한 간선 : (A,D))

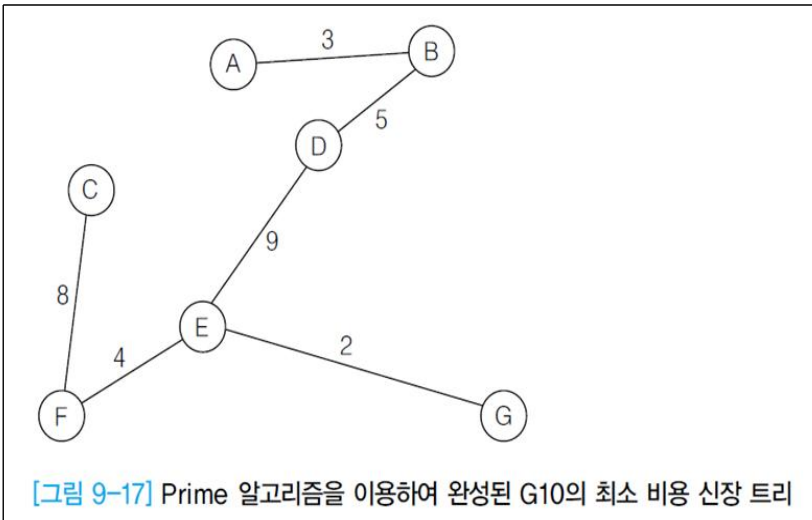


⑥ 현재 확장된 트리의 정점 A, B, D, E, F, G에 부착된 간선 중에서 가중치가 가장 작은 간선 (C,F)를 삽입하여 트리 확장(현재 삽입한 간선의 수 : 6개, 삽입 불가능한 간선 : (A,D))

- 현재 남은 간선의 수가 6개 이므로 알고리즘 수행을 종료하고 신장 트리 완성



* G10의 최소 비용 신장 트리



【학습정리】

1. n 개의 정점으로 이루어진 무방향 그래프 G 에서 n 개의 모든 정점과 $n-1$ 개의 간선으로 만들어져 사이클이 없는 단순 연결 그래프를 신장 트리라고 한다.

- 깊이 우선 탐색을 이용하여 생성된 깊이 우선 신장 트리와 너비 우선 탐색을 이용하여 생성된 너비 우선 신장 트리가 있다.

2. 무방향 가중치 그래프에서 가중치의 합이 최소인 신장 트리를 최소 비용 신장 트리라고 한다.

- 최소 비용 신장 트리를 만드는 방법으로 Kruskal 알고리즘과 Prime 알고리즘을 주로 사용한다.