

3주차 2차시 수열과 진법변환, 유클리드 호제법

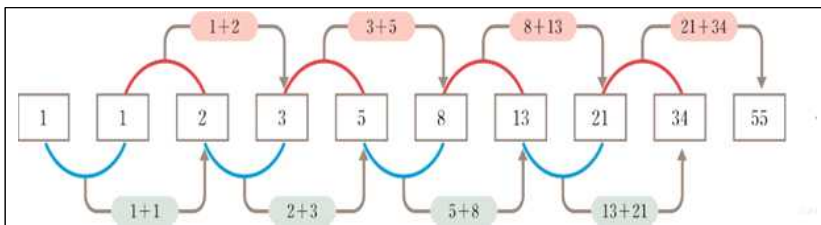
【학습목표】

1. 수열 알고리즘을 이해할 수 있다.
2. 진법 변환 알고리즘을 이해할 수 있다.
3. 유클리드 호제법을 이해할 수 있다.

학습내용1 : 피보나치 수열

피보나치 수열이란 처음 두 항을 1 과 1 로 한 후, 그 다음 항부터는 바로 앞의 두 개의 항을 더해 만드는 수열을 말한다. 그러므로 피보나치 수열의 처음 몇 개의 항은 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... 이다. 이 수열에 속한 숫자들을 피보나치 수라고 한다.

이탈리아 수학자 피보나치(Fibonacci)가 발견한 피보나치 수열은 토끼 번식 이야기에서 출발한다. 어떤 남자가 벽으로 둘러싸인 장소에 한 쌍의 토끼들을 둔다. 만약 각 쌍이 두 번째 달부터 매달 토끼를 한 쌍씩 낳는다고 가정한다면 그 해에 얼마나 많은 쌍의 토끼가 생산되겠는가?

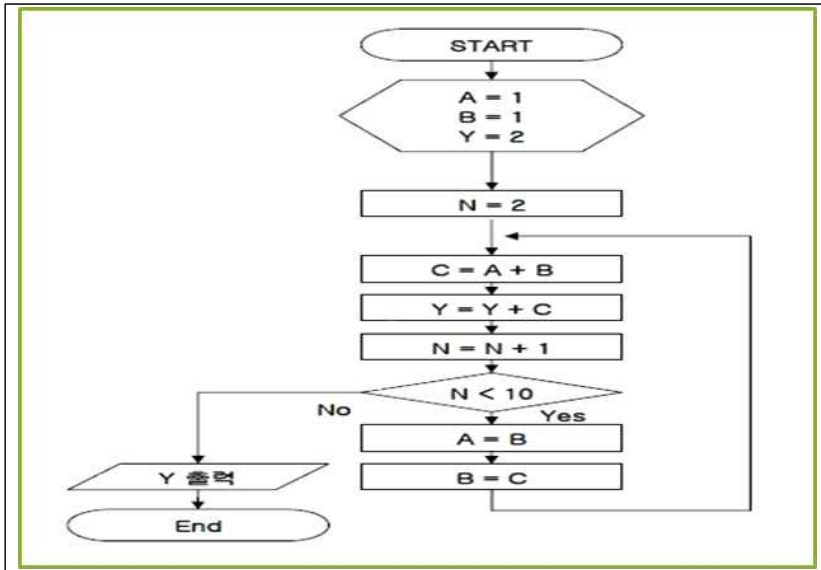


개월	처음	1개월후	2개월후	3개월후	4개월후	5개월후	...
토끼							...
토끼 쌍의 수	1쌍	1쌍	2쌍	3쌍	5쌍	8쌍	...

* 문제 : $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \dots$ 의 순서로 나열되는 피보나치수열의 10번째 항까지의 합계를 구하는 순서도를 작성하시오.

* 처리조건

- A : 두 개의 항 합산 시 첫 번째 항 변수, B : 두 개의 항 합산 시 두 번째 항 변수
- C : 두 개의 항 합산 시 기억 변수, Y : 합을 저장하는 변수, N : 계산하려는 항의 수 변수



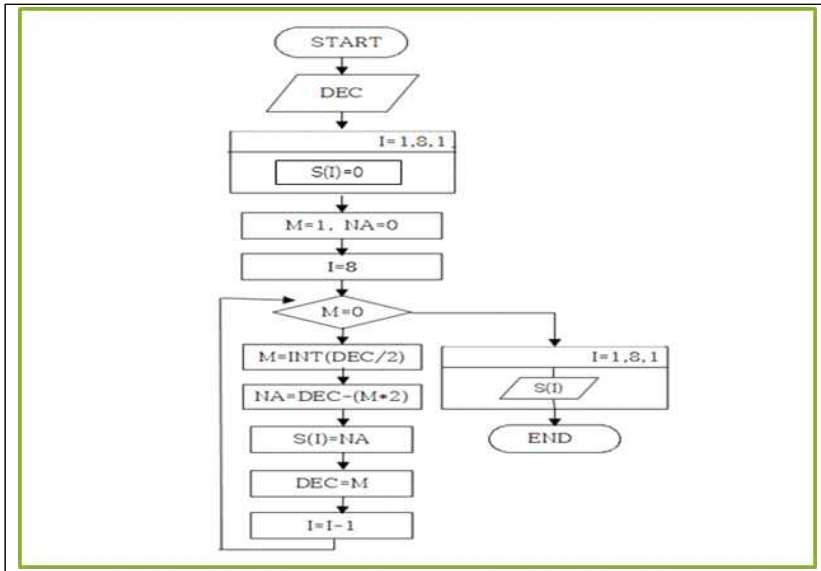
학습내용2 : 진법 변환

* 진법 변환

- 10진수를 2진수로 변환하기 위해서는 10진수를 입력 받아서 2로 나누어 나머지를 구한 후 배열에 저장한 다음 역으로 인쇄한다.

* 1부터 127까지의 십진 정수 중 하나를 하나 입력 받아 2진수로 변환하여 주어진 배열에 변환된 값을 저장하고, 이를 출력하기 위한 알고리즘 이다.

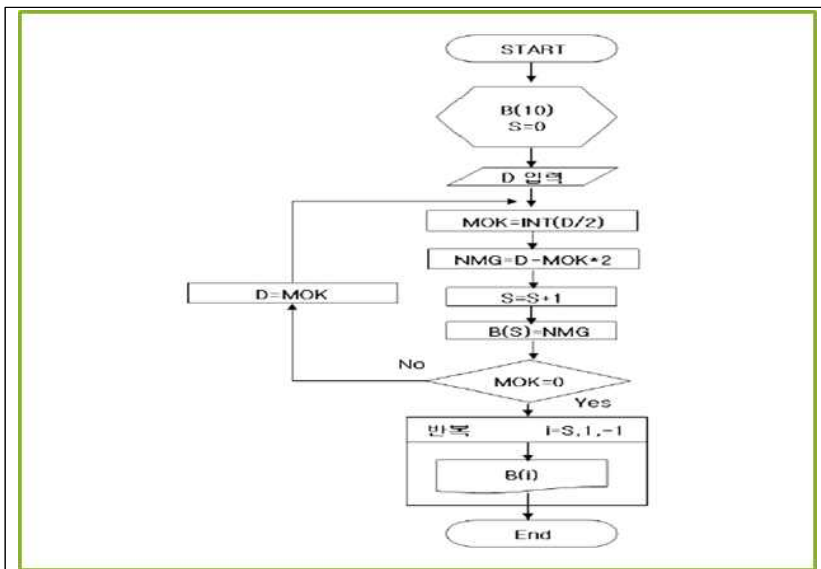
- DEC : 10진수 입력변수
- S(8) : 변환된 2진수값 저장 배열
- M : 변환 작업시 몫이 저장되는 변수
- R : 변환 작업시 나머지 저장되는 변수
- i : 배열첨자



* 문제 : 10진수를 입력 받아 2진수로 변환하는 순서도를 작성하시오.

* 처리조건

- B(10) : 2진수가 저장될 배열
- S : 배열의 위치
- i : 인덱스 변수
- D : 입력 받은 10진수가 저장될 변수
- MOK : 몫
- NMG : 나머지

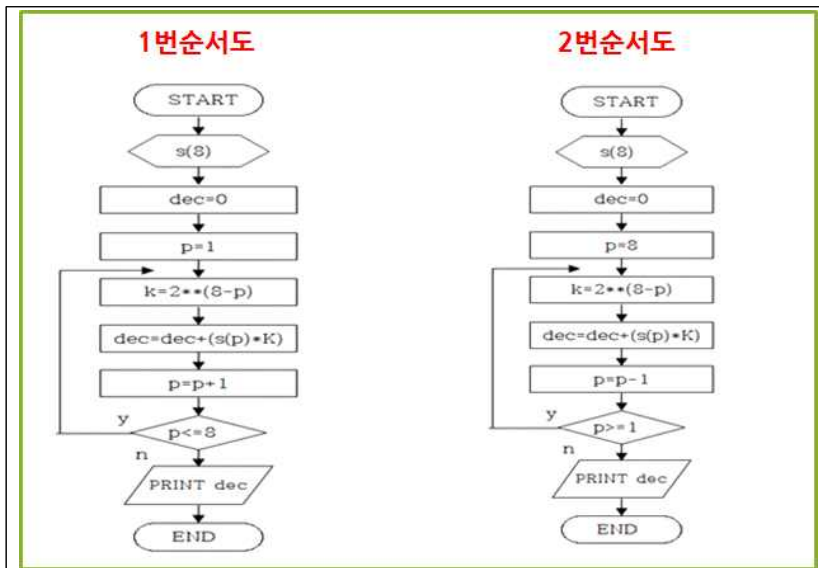


* 8비트로 표현된 2진수 값을 10진수로 변환하는 순서도를 작성하시오

s(1)	s(2)	s(3)	s(4)	s(5)	s(6)	s(7)	s(8)
1	0	0	1	0	1	0	1

* 예를 들어 입력 받은 2진수 가 10010101이라면 각자리의 의미는 다음과 같다.

자리 값	1	2	3	4	5	6	7	8
2진수 값 s(p)	1	0	0	1	0	1	0	1
2진수 각 자리 지수 승	7	6	5	4	3	2	1	0
10진수 각 자리 값(1번순서도)	128	0	0	16	0	4	0	1
10진수 각 자리 값(2번순서도)	1	0	0	8	0	32	0	128
10진수 계산 값	(1번순서도) : 128+0+0+16+0+4+0+1 (2번순서도) : 1+0+0+8+0+32+0+128							



학습내용3 : 최대공약수와 최소공배수

1. 유클리드 호제법

- 유클리드의 저서 《기하학원본》에 기재되어 있다. 간단히 호제법 또는 연제법(連除法)이라고도 한다.

1) 두 자연수 또는 다항식 a, b 의 최대공약수를 구하기

자연수일 때는 $a > b$, 다항식일 때는 a 의 차수가 b 의 차수 이상이라 하고, 다음과 같이 나눗셈을 실행한다.

$$a = bq_1 + b_1 \cdots (q_1 \text{은 몫, } b_1 \text{은 나머지})$$

$$b = b_1q_2 + b_2 \cdots (q_2 \text{는 몫, } b_2 \text{는 나머지})$$

$$b_1 = b_2q_3 + b_3 \cdots (q_3 \text{은 몫, } b_3 \text{은 나머지})$$

.....

$$b_{n-2} = b_{n-1}q_n + b_n' \cdots (q_n \text{은 몫, } b_n \text{은 나머지})$$

$$b_{n-1} = b_nq_{n+1} \cdots (q_{n+1} \text{은 몫, 나머지는 } 0)$$

이때, b_n 은 처음의 두 자연수 a, b 의 최대공약수가 된다고 하는 것을 유클리드의 호제법이라 한다.

이를테면, 78696과 19332의 최대공약수를 구하면,

$$78696 = 19332 \times 4 + 1368$$

$$19332 = 1368 \times 14 + 180$$

$$1368 = 180 \times 7 + 108$$

$$180 = 108 \times 1 + 72$$

$$108 = 72 \times 1 + 36$$

$$72 = 36 \times 2$$

에 따라서, 36이 구하는 최대공약수이다. 실제로 계산할 때는 아래와 같이 두 수를 나열하여 가로선을 긋고, 큰 쪽의 수를 작은 쪽의 수로 나누어 나머지 1368을 낸다. 다음 1368로 19332를 나누어 나머지 180을 낸다. 또, 180으로 1368을 나누어 나머지 108을 낸다. 이와 같이 나눗셈을 거듭 시행해가면 결국 나누어 떨어지며, 그 때의 몫수가 최대공약수이다

2) 나눗셈으로 구한 유클리드(Euclid)의 최대공약수 알고리즘 이다.

	Euclid(a,b)
	입력: 정수 a, b; 단 $(a \geq b \geq 0)$
	출력: 최대공약수(a, b)
1	if (b=0) return a
2	return Euclid(b, a mod b)

1번 줄에서 $b=0$ 이면 큰 수인 a 를 최대공약수로 리턴 한다.

2번 줄에서 $b \neq 0$ 이 아니면, 작은 수 b 와 $a \bmod b$, 즉 a 를 b 로 나눈 나머지를 결과가 만족될 때 까지 재귀호출 한다.

3) 최대공약수(24,14)에 대해 유클리드(Euclid)의 최대공약수 알고리즘이 수행되는 과정을 살펴보자.

Euclid(24,14)

1번 줄에서 $b=14$ 이므로 if (b=0)의 조건이 거짓이 된다.

2번 줄에서 $\text{Euclid}(14, 24 \bmod 14) = \text{Euclid}(14, 10)$ 이 된다.

1번 줄에서 $b=10$ 이므로 if (b=0)의 조건이 거짓이 된다.

2번 줄에서 $\text{Euclid}(10, 14 \bmod 10) = \text{Euclid}(10, 4)$ 이 된다.

1번 줄에서 $b=4$ 이므로 if (b=0)의 조건이 거짓이 된다.

2번 줄에서 $\text{Euclid}(4, 10 \bmod 4) = \text{Euclid}(4, 2)$ 이 된다.

1번 줄에서 $b=2$ 이므로 if (b=0)의 조건이 거짓이 된다.

2번 줄에서 $\text{Euclid}(2, 4 \bmod 2) = \text{Euclid}(2, 0)$ 이 된다.

1번 줄에서 $b=0$ 이므로 if (b=0)의 조건이 참이 되어 $a=2$ 가 최대공약수가 된다.

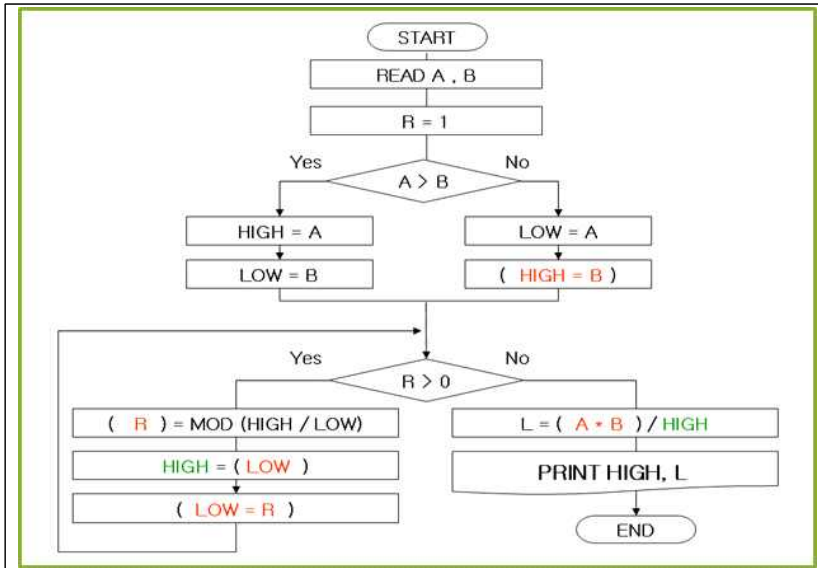
* 문제: 두 수 A, B에 대한 최대공약수와 최소공배수를 유클리드호제법으로 처리하라.

* 처리조건

- 입력 받는 두수 A, B는 0이 아닌 서로 다른 양의 정수로 가정한다.

- MOD()는 괄호 안의 연산 수행하며 나머지를 구하는 함수이다. 예를 들어 MOD(5/3)의 값은 2이며, MOD(20/5)의 값은 0이다.

- 기호 "/" 는 나누기 연산, "*" 는 곱하기 연산을 나타낸다.



【학습정리】

1. 피보나치 수열

- 처음 두 항을 1 과 1 로 한 후, 그 다음 항부터는 바로 앞의 두 개의 항을 더해 만드는 수열을 말한다.

2. 진법 변환

- 10진수를 2진수로 변환하기 위해서는 10진수를 입력 받아서 2로 나누어 나머지를 구한 후 배열에 저장한 다음 역으로 인쇄한다.