

2017 数学分析 C

Will 匿名群友
NanJing University NanJing University

某平凡的数学讨论群

版本: 0.10

日期: 2022 年 11 月 6 日

注 意

这套题贡献了”泥瓦匠都能做的事”, 见文档尾部.

一、计算题 (每题 15 分, 共 30 分)

(1) 设 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 由 $x + f(u, y) = 0$ 和 $v + g(u, y) = 0$ 确定. 其中 f, g 是可微函数. 求偏导数 x_u, x_v, y_u, y_v .

(2) 设 D 是由 $y = \pi - x, x = \pi, y = \pi$ 围成的区域. 求 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$.

二、(10 分) 设 $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 问 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ 是否相等? 三、

(10 分) 设函数 $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在边界上恒等于 0 并在 $B_1(0)$ 内部可微. 证明 f 在球的内部至少存在一个驻点.

四、(10 分) 若 m 元函数 f 在原点附近连续可微且 $f(0) = 0$. 证明存在 m 个函数 $g_i, i = 1, 2, \dots, m$ 使得 $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 并且满足 $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

五、(10 分) 设 $f(x, y), g(x, y)$ 在矩形 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上黎曼可积. $\forall (x, y) \in I, f(x, y) \leq g(x, y)$, 且 $\int_I f = \int_I g$. 证明: 存在零测集 $I_0 \subset I$, 使得对 $\forall (x, y) \in I \setminus I_0$, 有 $f(x, y) = g(x, y)$.

六、(10 分) 设 $F(x, y, z) = xy + yz + zx, G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 其中 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. 求 F 在曲面 $G^{-1}(1)$ 上的极小值.

七、(10 分) 证明如下方程

$$\Phi(x, y) = 1 + \iint_{[0, x] \times [0, y]} \Phi, \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

有唯一的 (Riemann 可积) 的解, 并求之.

八、(10 分) 设 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 C^1 映射, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|F(x)\| = +\infty$, 且 F 的 Jacobian 矩阵处处非奇异. 证明: $\forall \eta \in \mathbb{R}^d, F^{-1}(\eta)$ 为非空有界集.

九、(10 分) 设 $D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq \frac{1}{2}\}$, $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^1 映射, $\|\nabla f(0)\| = 1, \|\nabla f(u) - \nabla f(v)\| \leq \|u - v\|, \forall u, v \in D$. 证明: 存在唯一 $\xi \in D$, 使得 $F(\xi) = \max_D F$.



图 1: 泥瓦匠都能做的事